Bicentrikus négyszögek

Nemecskó István

Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium

ELTE Matematikatanár délután

Húrnégyszögek

Amit a húrnégyszögekről tanítunk:

- Definíció: a körbe írt négyszögeket húrnégyszögeknek nevezzük. Olyan négyszögek, melyek oldalai ugyanannak a körnek a húrjai.
- Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege 180°.

  Amit a húrnégyszögekről taníthatunk spec.maton, tehetséggondozó szakkörön:
- Ptolemaios tétele: A húrnégyszög átlóinak szorzata a szemközti oldalpárok szorzatának összegével egyenlő.
- Brahmagupta tétele: a húrnégyszög területe $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

Brahmagupta tétele

Bizonyítás: Az egyik átlóra felírva a két koszinusz tételt:
$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \quad f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \alpha)$
Tudjuk, hogy $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, a két egyenletet rendezve:

$$2(ad + bc)\cos\alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$$

$$T = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{(ad + bc)\sin\alpha}{2}$$
$$2(ad + bc)\cdot\sin\alpha = 4T$$

A két egyenletet négyzetre emelve és összeadva:

$$4(ad + bc)^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16T^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

Átalakítva (két négyzetszám különbségét többször használva):

$$16T^2 = (b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

Bevezetve $\frac{a+b+c+d}{2} = s$ jelölést kapjuk:

$$T = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Érintőnégyszögek

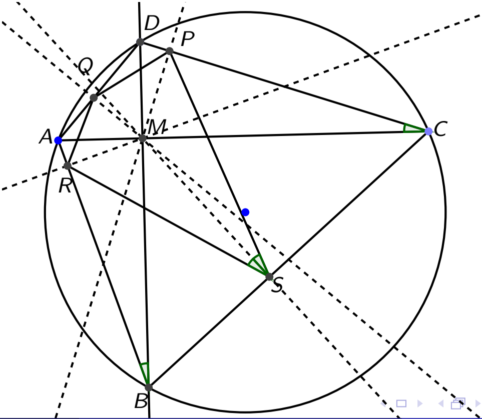
Amit az érintőnégyszögekről tanítunk:

- Definíció: Érintőnégyszögnek azokat a négyszögeket nevezzük, amelyeknek oldalai egy körnek érintői. Minden érintőnégyszög konvex.
- Tétel: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a két-két szemközti oldal hosszúságának összege egyenlő.
- Területe: $T = r \cdot s$, ahol r a beírható kör sugara, s pedig a félkerület.

Állítás:

Ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az átlók metszéspontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai olyan húrnégyszöget határoznak meg, amely egyben érintőnégyszög is.

Az ilyen négyszögeket nevezzük **bicentrikus** (azaz két középpontú) négyszögnek.

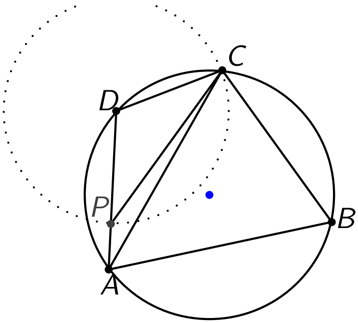


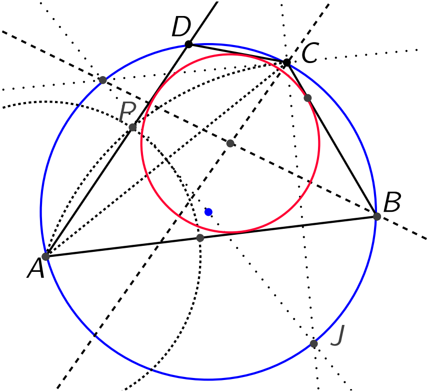
Feladat:

Adott egy k kör három pontja A, B és C. Szerkesszük meg a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

Feladat:

Adott egy k kör három pontja A, B és C. Szerkesszük meg a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.





Állítás:

Bizonyítsuk be, hogy a bicentrikus négyszög területére igaz, hogy $T = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, ahol a, b, c, d a négyszög oldalinak hossza.

Bizonyítás: Használjuk ki, hogy a négyszög húrnégyszög, így

$$T = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

Mivel érintőnégyszög is, ezért $a = x + v, b = x + y, c = y + z, d = z + y$.
Ezekből:

$$s - d = \frac{a+b+c-d}{2} = \frac{x+v+x+y+y+z-z-v}{2} = x + y = b$$

Hasonlóan a többi tagra is kapjuk, hogy $T = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$

Euler-tétel

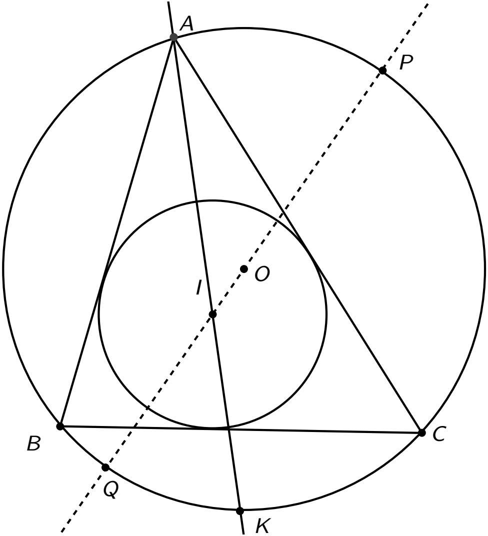
Tétel

Ha egy háromszög köré írható körének sugara R, a beírható körének sugara r, d pedig a két kör középpontjának távolsága, akkor

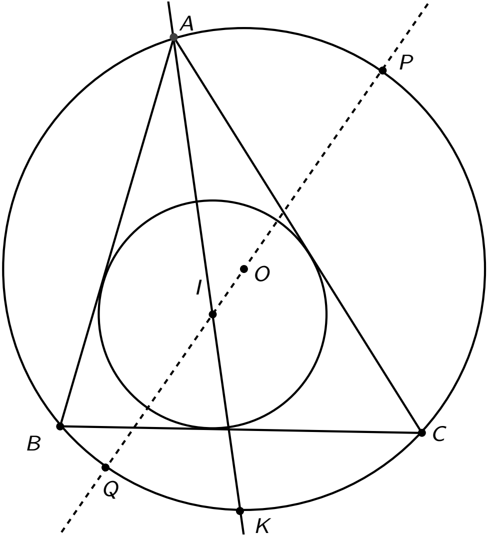
$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$$

teljesül.

A tételt $(R+d)\cdot(R-d)=2Rr$ alakban bizonyítjuk.

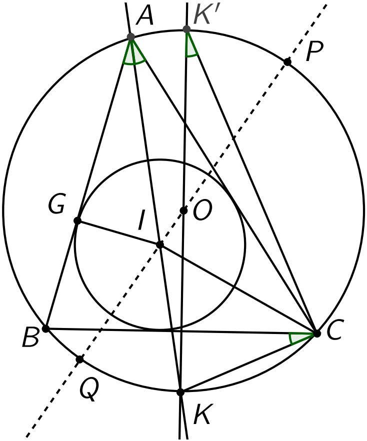


A tételt $(R+d)\cdot(R-d)=2Rr$ alakban bizonyítjuk.

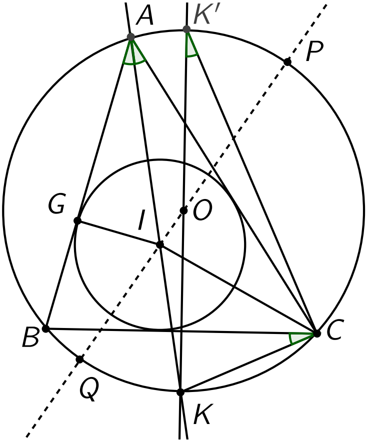


Írjuk fel az I pontnak a körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

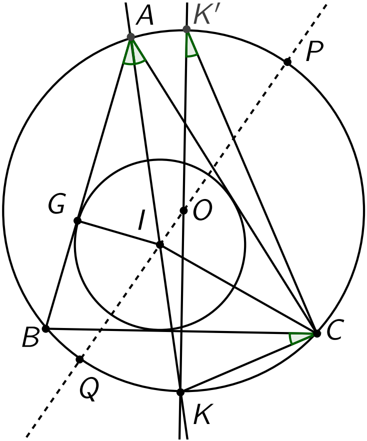
$$AI\cdot IK=IP\cdot IQ=(R+d)\cdot(R-d)$$



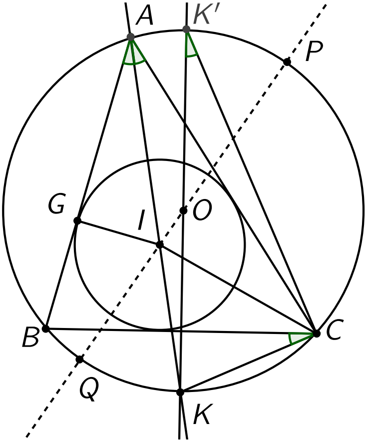
$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle =$
$BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,



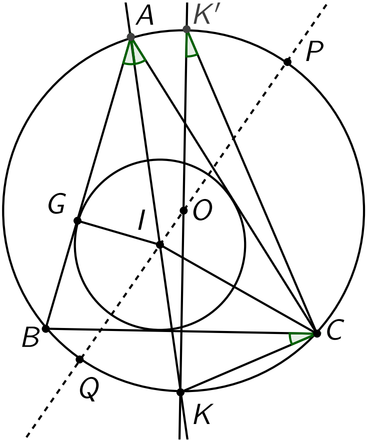
$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle = BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,
$CIK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mert AIK háromszög külső szöge



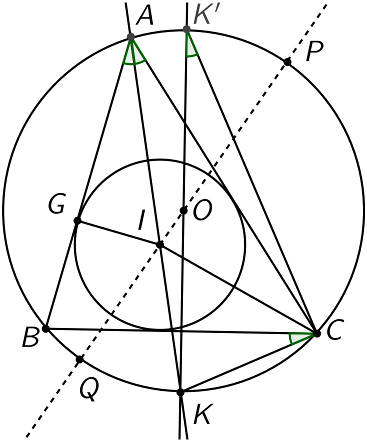
$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle =$
$BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,
$CIK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mert AIK háromszög külső szöge valamint $ICK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.



$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle =$
$BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,
$CIK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mert AIK
háromszög külső szöge
valamint $ICK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.
Tehát $IK = KC$.



$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle =$
$BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,
$CIK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mert AIK háromszög külső szöge
valamint $ICK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.
Tehát $IK = KC$.
A $KK'C$ háromszög derékszögű és egyik hegyesszöge $\frac{\alpha}{2}$, tehát hasonló IAG háromszöghöz.



$BAK\angle = KAC\angle = KK'C\angle =$
$BCK\angle = \frac{\alpha}{2}$,
$CIK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mert AIK háromszög külső szöge valamint $ICK\angle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.
Tehát $IK = KC$.
A $KK'C$ háromszög derékszögű és egyik hegyesszöge $\frac{\alpha}{2}$, tehát hasonló IAG háromszöghöz.

$$\frac{AI}{IG} = \frac{KK'}{KC}$$

$$\frac{AI}{IG} = \frac{KK'}{KC}$$

Felszorozva

$$AI \cdot KC = KK' \cdot IG$$

$$\frac{AI}{IG} = \frac{KK'}{KC}$$

Felszorozva

$$AI \cdot KC = KK' \cdot IG$$

Összevetve az eddigiekkel:

$$(R+d) \cdot (R-d) = AI \cdot IK = AI \cdot KC = KK' \cdot IG = 2R \cdot r$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

$$\frac{AI}{IG} = \frac{KK'}{KC}$$

Felszorozva

$$AI \cdot KC = KK' \cdot IG$$

Összevetve az eddigiekkel:

$$(R+d)\cdot(R-d) = AI \cdot IK = AI \cdot KC = KK' \cdot IG = 2R \cdot r$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Következmény: Ha képletünket $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ alakba írjuk, akkor látható, hogy $R^2 \geq 2Rr$, tehát a *sugár-egyenlőtlenséghez* jutunk:

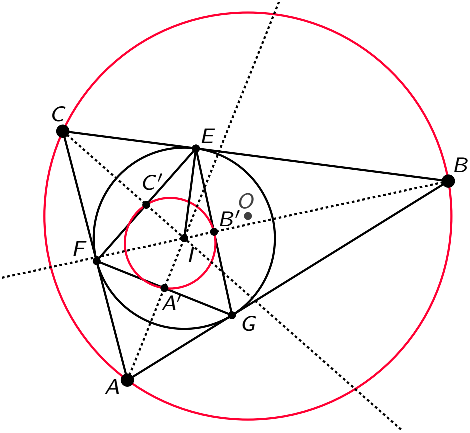
$$R \geq 2r.$$

2. bizonyítás:

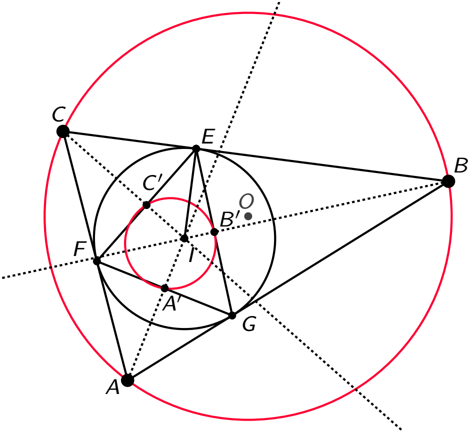
Inverzió segítségével. Felhasználjuk, hogy az R sugarú kör inverzének sugara(ha az inverzió alapkörének sugara r és a kör középpontja a pólustól $d \neq R$ távolságra van)

$$R' = r^2 \frac{R}{|d^2 - R^2|}$$

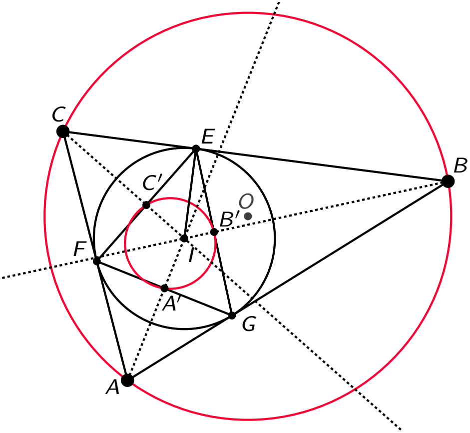
.



CEI háromszög derékszögű

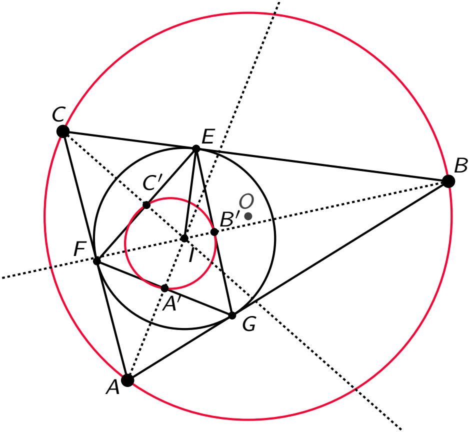


CEI háromszög derékszögű
$CI \perp EF$ és C' felezi az EF oldalt.



CEI háromszög derékszögű
$CI \perp EF$ és C' felezi az EF oldalt.
Alkalmazzuk a befogó tételt a *CEI* derékszögű háromszögre:

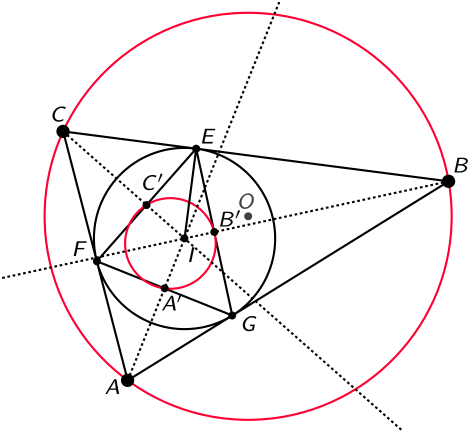
$$r^2 = EI^2 = IC' \cdot IC$$



CEI háromszög derékszögű
$CI \perp EF$ és C' felezi az EF oldalt.
Alkalmazzuk a befogó tételt a CEI derékszögű háromszögre:

$$r^2 = EI^2 = IC' \cdot IC$$

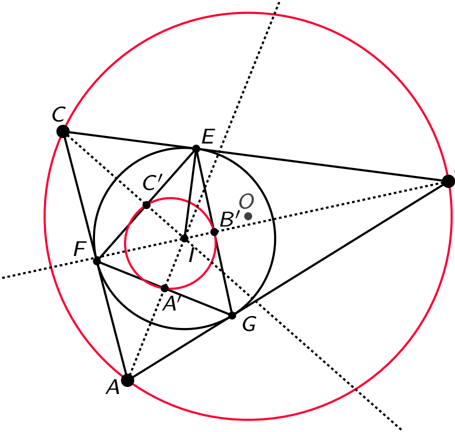
Tehát a C pont inverze a beírható körre C'. Hasonlóan A és A', valamint B és B' is egymás inverzei.



CEI háromszög derékszögű
$CI \perp EF$ és C' felezi az EF oldalt.
Alkalmazzuk a befogó tételt a CEI derékszögű háromszögre:

$$r^2 = EI^2 = IC' \cdot IC$$

Tehát a C pont inverze a beírható körre C'. Hasonlóan A és A', valamint B és B' is egymás inverzei. Három pont, ha nincsnek egy egyenesen meghatároznak egy kört. Mivel A', B', C' felező pontok, így a rájuk illeszkedő kör az EFG háromszög Feuerbach-köre, melynek sugara $\frac{r}{2}$



CEI háromszög derékszögű
$CI \perp EF$ és C' felezi az EF oldalt.
Alkalmazzuk a befogó tételt a *CEI* derékszögű háromszögre:

$$r^2 = EI^2 = IC' \cdot IC$$

Tehát a C pont inverze a beírható körre C'. Hasonlóan A és A', valamint B és B' is egymás inverzei. Három pont, ha nincsnek egy egyenesen meghatároznak egy kört. Mivel A', B', C' felező pontok, így a rájuk illeszkedő kör az *EFG* háromszög Feuerbach-köre, melynek sugara $\frac{r}{2}$ Tehát a köré írható kör inverze a kapott Feuerbach-kör.

Felhasználva az előző eredményt ($OI = d < R$, hiszen a beírtkör a köré írt körbe esik.

$$\frac{r}{2} = R' = r^2 \frac{R}{R^2 - d^2}$$

Felhasználva az előző eredményt ($OI = d < R$, hiszen a beírtkör a köré írt körbe esik.

$$\frac{r}{2} = R' = r^2 \frac{R}{R^2 - d^2}$$

Átalakítva

$$R^2 - d^2 = 2rR$$

3. bizonyítás:
Vektorok felhasználásával:
Reiman István: A geometria és határterületei (Gondolat, Budapest 1986) 67-68. oldal

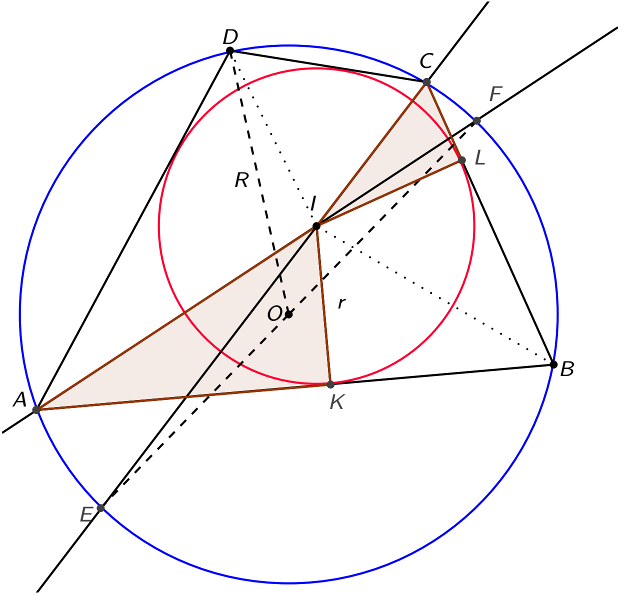
Fuss-tétel

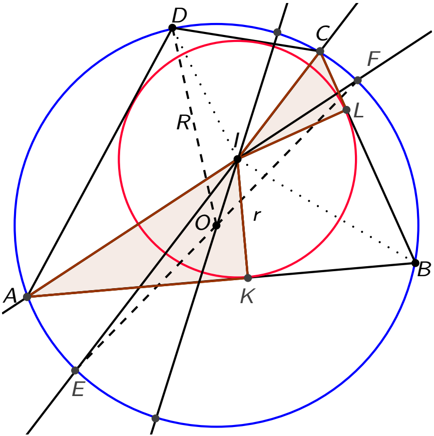
Tétel

Ha egy *bicentrikus* négyszög köré írható körének sugara R, a beírható körének sugara r, d pedig a két kör középpontjának távolsága, akkor

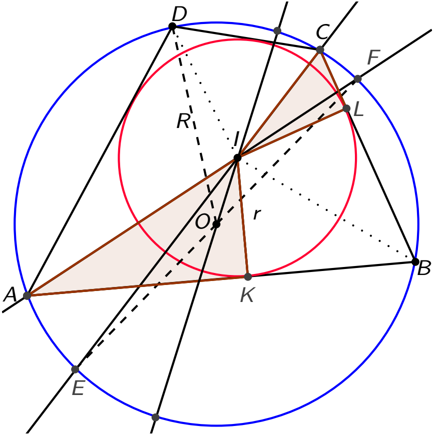
$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

teljesül.


D
C
F
L
R
I
r
O
A
K
B
E



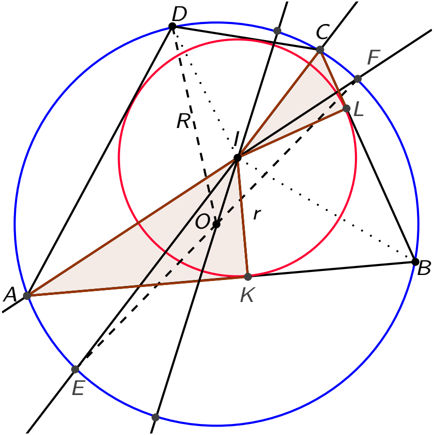
Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög ezért $IAK\angle + ICL\angle = 90°$



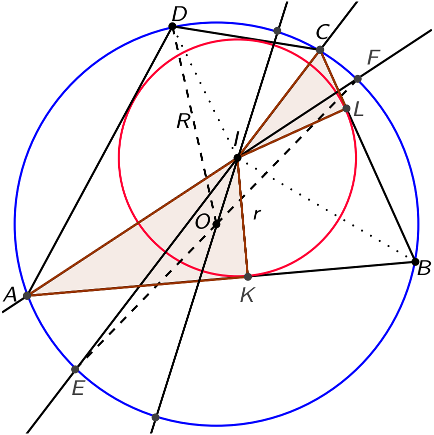
Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög ezért

$IAK\angle + ICL\angle = 90°$

$AIK\angle + CIL\angle = 90°$



Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög ezért
$IAK\angle + ICL\angle = 90^\circ$
$AIK\angle + CIL\angle = 90^\circ$
$IK = IL = r$



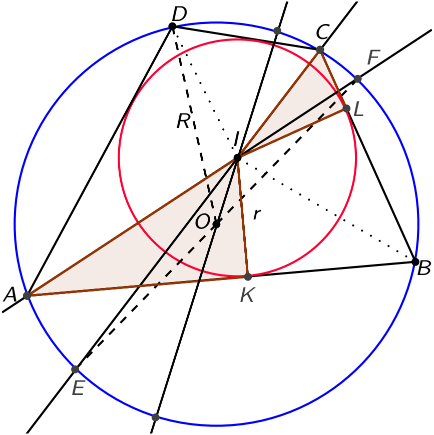
Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög ezért

$IAK\angle + ICL\angle = 90^\circ$

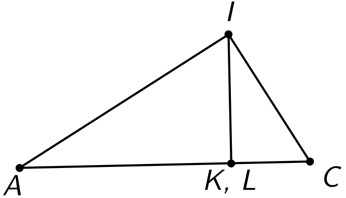
$AIK\angle + CIL\angle = 90^\circ$

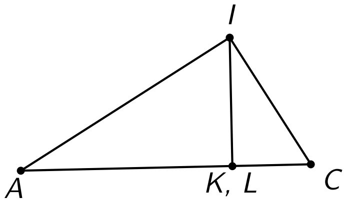
$IK = IL = r$

ezért az AIK és az ILC derékszögű háromszögek egy derékszögű háromszöggé forgathatók össze.

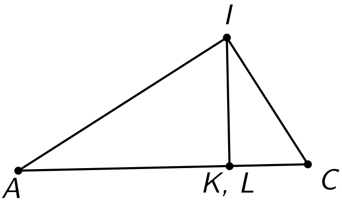


Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög ezért
$IAK\angle + ICL\angle = 90°$
$AIK\angle + CIL\angle = 90°$
$IK = IL = r$
ezért az AIK és az ILC derékszögű háromszögek egy derékszögű háromszöggé forgathatók össze.

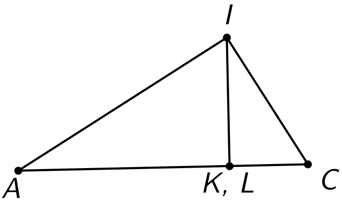




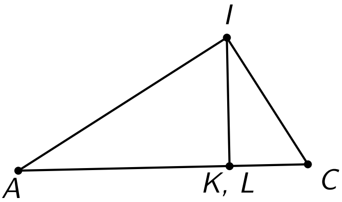
Az AIC derékszögű háromszög területe kétféleképpen:



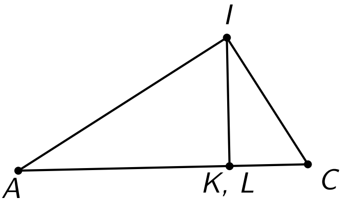
Az AIC derékszögű háromszög területe kétféleképpen:
$r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$.



Az AIC derékszögű háromszög területe kétféleképpen:
$r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$.
Négyzetre emelve
$r^2 \cdot (AK + CL)^2 = AI^2 \cdot CI^2$.

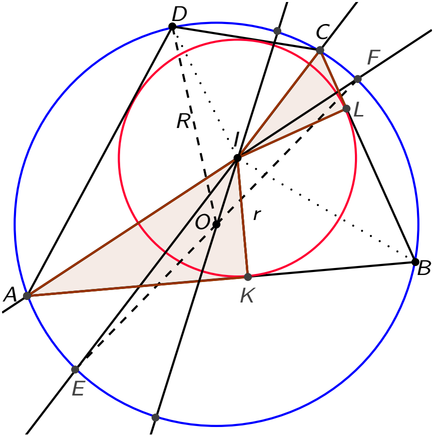


Az AIC derékszögű háromszög területe kétféleképpen:
$r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$.
Négyzetre emelve
$r^2 \cdot (AK + CL)^2 = AI^2 \cdot CI^2$.
Írjuk fel a háromszög oldalaira a Pitagorasz tételt
$(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2$.

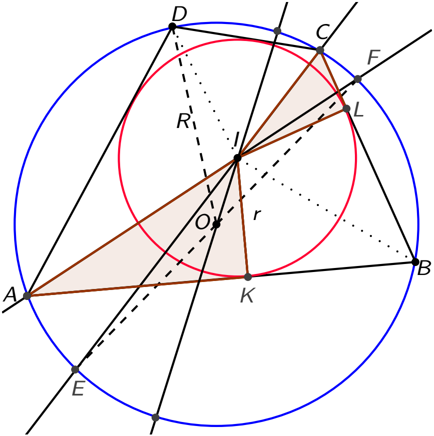


Az AIC derékszögű háromszög területe kétféleképpen:
$r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI$.
Négyzetre emelve
$r^2 \cdot (AK + CL)^2 = AI^2 \cdot CI^2$.
Írjuk fel a háromszög oldalaira a Pitagorasz tételt
$(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2$.
Ez utóbbi két egyenlőséget összevetve:

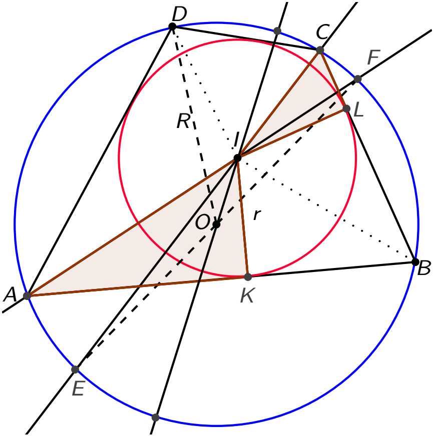
$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{CI^2} + \frac{1}{AI^2}$$



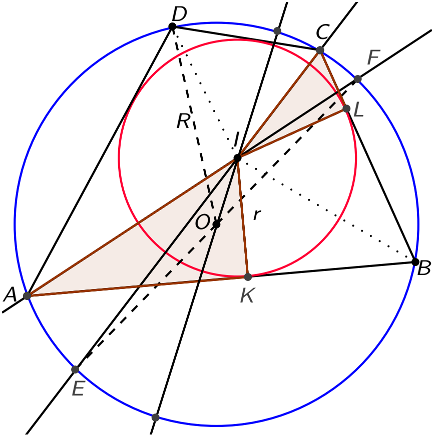
Tudjuk, hogy
$ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és
$FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$.
Ez azt jelenti, hogy
$EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$,
azaz E, O, F egy egyenesbe esik.



Tudjuk, hogy
$ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és
$FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$.
Ez azt jelenti, hogy
$EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$,
azaz E, O, F egy egyenesbe esik.
Az EIF háromszögben IO súlyvonal,

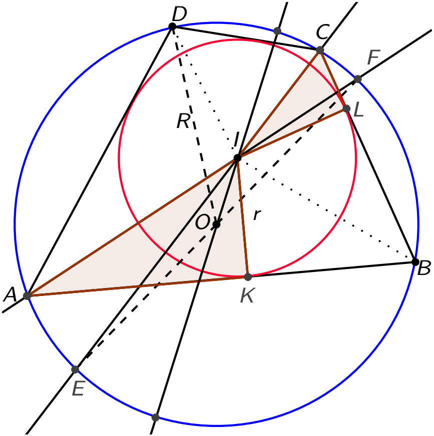


Tudjuk, hogy
$ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és
$FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$.
Ez azt jelenti, hogy
$EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$,
azaz E, O, F egy egyenesbe esik.
Az EIF háromszögben IO súlyvonal, tehát O-ra tükrözve egy paralelogrammát kapunk, melynek oldalai és átlói közötti összefüggés miatt:
$(2IO)^2 + (EF)^2 = 2EI^2 + 2FI^2$



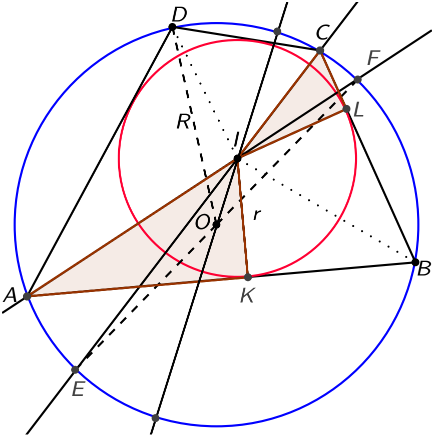
Tudjuk, hogy
$ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és
$FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$.
Ez azt jelenti, hogy
$EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180°$,
azaz E, O, F egy egyenesbe esik.
Az EIF háromszögben IO súlyvonal, tehát O-ra tükrözve egy paralelogrammát kapunk, melynek oldalai és átlói közötti összefüggés miatt:

$$(2IO)^2 + (EF)^2 = 2EI^2 + 2FI^2$$
$$4d^2 + 4R^2 = 2EI^2 + 2FI^2$$



Tudjuk, hogy
$ECD\angle = \gamma \Rightarrow EOD\angle = 2\gamma$ és
$FAD\angle = \alpha \Rightarrow FOD\angle = 2\alpha$.
Ez azt jelenti, hogy
$EOD\angle + FOD\angle = 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$,
azaz E, O, F egy egyenesbe esik.
Az EIF háromszögben IO súlyvonal, tehát O-ra tükrözve egy paralelogrammát kapunk, melynek oldalai és átlói közötti összefüggés miatt:

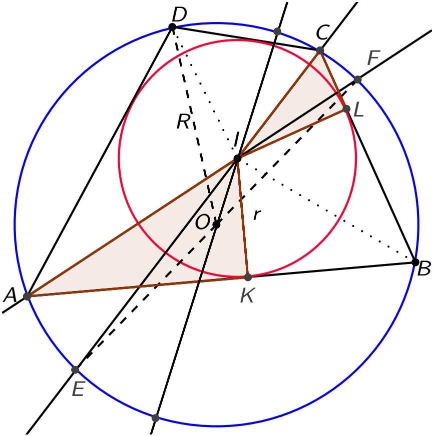
$$(2IO)^2 + (EF)^2 = 2EI^2 + 2FI^2$$
$$4d^2 + 4R^2 = 2EI^2 + 2FI^2$$
$$2(d^2 + R^2) = EI^2 + FI^2$$



Írjuk fel az I pont körre vonatkozó hatványát:

$AI \cdot IF = CI \cdot IE =$

$(R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2$



Írjuk fel az I pont körre vonatkozó hatványát:
$AI \cdot IF = CI \cdot IE =$
$(R+d)\cdot(R-d) = R^2 - d^2$
Kifejezve:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{IF^2}{(R^2-d^2)^2},$$

$$\frac{1}{CI^2} = \frac{EI^2}{(R^2-d^2)^2}$$

Összeadva és átalakítva:

$$\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{CI^2}=\frac{IF^2}{(R^2-d^2)^2}+\frac{EI^2}{(R^2-d^2)^2}=\frac{IF^2+EI^2}{(R^2-d^2)^2}=\frac{2(d^2+R^2)}{(R^2-d^2)^2}=$$

$$=\frac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R-d)^2\cdot(R+d)^2}=\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Fuss *bicentrikus* hatszögekre is elvégezte a számítást:

$$3(R^2 - d^2)^4 = 16d^2r^4R^2 + 4r^2(R^2 - d^2)^2(R^2 + d^2)$$

illetve nyolcszögekre:

$$[r^2(2R^2+2d^2)-(R^2-d^2)^2]^4 = 16(R^2-d^2)^4r^4((R+d)^2-r^2)((R-d)^2-r^2).$$

Állítás 1.:
Ha az $ABCD$ négyszög *bicentrikus* négyszög, akkor a köré írható kör középpontja, a beírható kör középpontja és az átlók metszéspontja egy egyenesbe esik. (KöMaL 1991. F.2793.)

Állítás 2.:
Legyen az AD egyenes és a BC egyenes metszéspontja E és $e_{AB} \cap e_{CD} = F$. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög beírható körének, köré írható körének középpontja és az átlók metszéspontja által alkotott egyenes merőlegesen metszi az EF egyenest.

Állítás 3.:
Bizonyítsuk be, hogy ha $ABCD$ érintőnégyszög, akkor a beírható kör középpontja és átlók felezőpontjai egy egyenesbe esnek!

Köszönöm a figyelmet!

A teljes anyag olvasható a

http://matektabor.berzsenyi.hu/2016

oldalon.

Forrás:

- http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml
- Dr. Gerőcs László: Azok a csodálatos húrnégyszögek
- Reimann István-Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003
- Geometriai feladatok gyűjteménye I.