

NUMERIKUS MÓDSZEREK VIZSGÁLATA MEGMARADÁSI TÖRVÉNYEKEN

Szakdolgozat

Bagyinszki Ádám

Matematika alapszak

Alkalmazott matematikus specializáció

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	2
Bevezetés	3
1. Alapfogalmak	4
1.1. Parciális differenciálegyenletek	4
1.2. Megmaradási törvények	6
1.3. Numerikus módszerek	7
1.3.1. Konvergencia	9
2. Vizsgált numerikus módszerek	11
2.1. Véges különbséges módszerek	11
2.1.1. Az upwind-séma	11
2.1.2. A Lax–Wendroff-módszer	14
2.2. A Magnus-módszer	16
2.3. Konzervatív módszerek	18
2.3.1. Godunov módszere	20
3. Numerikus kísérletek	23
3.1. Advekción egyenlet egy térdimenzióban	23
3.2. Burgers-egyenlet egy térdimenzióban	30
Összefoglalás	40
Irodalomjegyzék	40

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csomós Petrának az idejéért, türelméért és az észrevételeiért, melyek hatalmas segítséget nyújtottak a szakdolgozatom elkészüléséhez. Szeretném továbbá megköszönni a családomnak és a barátnőmnek, hogy mindvégig támogattak az elmúlt három évben.

Bevezetés

A megmaradási törvények olyan speciális parciális differenciálegyenletek, melyekkel számos fizikai folyamatot lehet modellezni, többek között a folyadékok és gázok áramlását. Sajnos minél jobban modellezi a valóságot egy egyenlet, annál kevésbé tudjuk meghatározni a pontos megoldását. Emiatt szükségünk van numerikus módszerekre, amelyek közelítő megoldásokat tudnak adni a vizsgált feladatra.

Ebben a szakdolgozatban különböző alapokon nyugvó numerikus módszereket mutatunk be, majd azokat konkrét egyenletekre alkalmazzuk. Az egyenleteket úgy választottuk ki, hogy ismerjük a pontos megoldásaikat, ennek köszönhetően könnyen össze tudjuk hasonlítani a különböző módszerek által nyújtott megoldásokat.

Az első fejezetben röviden ismertetjük azokat a fogalmakat és jelöléseket, amelyeket a dolgozat további részében használni fogunk. A második fejezetben három különböző kiindulásból levezetett numerikus módszereket mutatunk be: a véges különbséges módszerek a parciális deriváltak numerikus közelítésein alapszanak, a Magnus-módszer egy közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó sorfejtést ültet át a parciális differenciálegyenletekre, a konzervatív módszerek pedig a megmaradási törvények konzervatív tulajdonságát használják ki a pontosabb közelítés érdekében.

A harmadik fejezetben két egyenletre alkalmazzuk a tárgyalt numerikus módszereket. Megfigyeljük a módszerek viselkedését különböző paraméterek mellett, majd összehasonlítjuk az eltéréseiket a pontos megoldástól. Különösen érdekes a nemlineáris egyenlet és nemfolytonos kezdeti feltétel esete, mivel a konzervatív módszereket ennek az esetnek a helyes kezelésére fejlesztették ki.

1. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben bevezetjük az alapvető fogalmakat, amik szükségesek a megmaradási törvények és az ismertett numerikus módszerek megértéséhez, valamint definiálunk különböző jelöléseket, amiket használni fogunk a dolgozat későbbi fejezeteiben.

1.1. Parciális differenciálegyenletek

Először bevezetjük a parciális differenciálegyenletek tárgyalásához szükséges alapfogalmakat az [1] jegyzet negyedik fejezetét követve.

1.1. Definíció. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ vektort *multiindexnek* nevezzük. Az

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$$

számot az α multiindex *rendjének* nevezzük. Tetszőleges $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ multiindex, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány és $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ esetén bevezetjük a

$$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} u.$$

jelölést.

1.2. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ multiindex. Ekkor az

$$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \partial_2 u(x), \dots, \partial_d u(x), \partial_1^2 u(x), \partial_{12} u(x), \dots, \partial_d^m u(x)) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

egyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük. Itt $u \in C^m(\Omega)$ megoldásfüggvényt keressük, m számot pedig a differenciálegyenlet rendjének nevezzük.

Azokkal a differenciálegyenletekkel, amelyekben az u -tól függő tagok csak lineárisan vannak jelen, egyszerűbb dolgozni. Az m -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f, \quad (1.2)$$

ahol α végigfut a legfeljebb m -edrendű multiindexeken, és $a_\alpha, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények. Ha $f = 0$, a vizsgált parciális differenciálegyenletet *homogénnek* nevezzük.

1.3. Definíció. Tekintsünk egy $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó elsőrendű homogén (1.1) parciális differenciálegyenletet. Ekkor ez az egyenlet felírható az

$$\langle f, \nabla u \rangle = 0$$

alakban. A

$$\xi'(s) = f(\xi(s))$$

egyenletet az u -ra vonatkozó differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének*, az egyenlet ξ megoldásait pedig a *karakterisztikus görbéinek* nevezzük.

Egy $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a karakterisztikus egyenlet *első integráljának* nevezünk, ha állandó a karakterisztikus görbék mentén.

1.4. Állítás ([1]). *Ha egy $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény első integrálja egy elsőrendű homogén parciális differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének, akkor egyben megoldása is a differenciálegyenletnek. Könnyen látható, hogy az első integrál tetszőleges folytonosan differenciálható függvénye is első integrál, ezért a $(\Phi \circ V)$ függvény is megoldása a differenciálegyenletnek tetszőleges $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény esetén.*

Ebben a dolgozatban időfüggő parciális differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy kijelölünk egy kitüntetett időváltozót, amit t -vel fogunk jelölni. Emiatt a továbbiakban $u(t, x)$, $u: \mathbb{R}_0^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvények fognak szerepelni.

Ha a differenciálegyenlet egy valós probléma modellezéséből származik, akkor logikus azt keresni, hogy mi a differenciálegyenlet megoldása egy megadott kezdeti feltétel mellett.

1.5. Definíció. Az (1.1) egyenlethez rögzített $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ és adott $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mellett az

$$u(t_0, x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega \tag{1.3}$$

megkötés ún. *kezdeti feltételt* ad. Együtt az

$$\begin{cases} F(x, u(t, x), \partial_1 u(t, x), \partial_2 u(t, x), \partial_n u(t, x), \dots, \partial_n^m u(t, x)) = 0, & t \in \mathbb{R}_0^+, \quad x \in \Omega, \\ u(t_0, x) = \Phi(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

feladatot *Cauchy-feladatnak* nevezzük.

Érdeemes lesz különös figyelmet szentelni a nem folytonos Φ függvényt tartalmazó (1.3) kezdeti feltétellel ellátott feladatoknak. Az ilyen feladatok esetén az egyszerűbb numerikus módszerek gyakran instabilak lesznek. A legegyszerűbb példa egy nem folytonos kezdeti feltételre az ún. Riemann-probléma [5].

1.6. Definíció. Az (1.4) Cauchy-feladatot tetszőleges $x_\ell, x_r \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{cases} u(x, 0) = x_\ell, & \text{ha } x < 0, \\ u(x, 0) = x_r, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

kezdeti feltétel mellett Riemann-problémának nevezzük.

Ezt általánosíthatjuk úgy, hogy nem követeljük meg azt, hogy a szakadás 0-ban legyen. Így tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{cases} u(x, 0) = x_\ell, & \text{ha } x < x_0, \\ u(x, 0) = x_r, & \text{ha } x > x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

kezdeti értékkel ellátott feladatot is nevezhetjük Riemann-problémának.

1.2. Megmaradási törvények

A megmaradási törvények kiemelkedő szerepet játszanak a fizikai folyamatok modellezésében, hiszen a fizikában gyakran szerepelnek állandó mennyiségek (például energia, tömeg). Ebben a részben megmutatjuk, hogy ezek a rendszerek modellezhetőek bizonyos alakú parciális differenciálegyenletekkel. Az alábbi levezetés részben az [5]. tankönyv 2. fejezetén alapul, de logikailag attól helyenként eltér.

A megmaradási törvények matematikai alakja levezethető a megmaradási tulajdonságból. Az egyszerűség kedvéért először egy térdimenzióban mutatjuk be ezt a levezetést. Jelölje $x \in [a, b]$ a térbeli változót és $t \in \mathbb{R}_0^+$ az időbeli változót, továbbá legyen $u: \mathbb{R}_0^+ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $u(t, x)$ a t időpontban és x pontban egy tetszőleges megmaradó mennyiséget jelöl. Mivel u megmaradó mennyiség, az integrálja az egész $[a, b]$ intervallumon állandó, emiatt pedig egy $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ intervallumon az integrálja az időben csak az intervallum két végpontján történő ki- és beáramlás miatt változhat. Ezt az áramlást *fluxusnak* nevezzük, és egy $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel reprezentáljuk, ahol az F függvény u -tól az éppen vizsgált fizikai törvény szerint függ.

Ezt a fenti összefüggést egy egyenletként leírva megkapjuk a megmaradási törvények *integrálalakját*:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)) \quad \forall t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (1.7)$$

Ha feltesszük, hogy u és F differenciálható függvények, akkor az

$$F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)) = \int_{x_2}^{x_1} \partial_x F(u(t, x)) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \partial_x F(u(t, x)) dx$$

és

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(t, x) dx$$

összefüggéseket felhasználva az

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(t, x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \partial_x F(u(t, x)) dx = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel ez minden x_1, x_2 -re igaz, elhagyhatjuk az integrálokat, ezzel megkapjuk a megmaradási törvények *differenciálegyenlet alakját*:

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x F(u(t, x)) = 0. \quad (1.8)$$

Látható, hogy ez egy parciális differenciálegyenlet. A többdimenziós megmaradási törvények alakja is levezethető hasonló módon, többdimenziós integrálokkal.

1.7. Definíció. A megmaradási törvények általános alakja $u: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mellett

$$\partial_t u(t, x) + \nabla_x F(u(t, x)) = 0. \quad (1.9)$$

Itt ∇_x az x változó szerinti gradienst értjük.

A dolgozat további részében

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \nabla_x F(u(t, x)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t_0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.10)$$

alakú, megmaradási törvényekre vonatkozó Cauchy-feladatokkal fogunk foglalkozni, de néha az ekvivalens

$$\begin{cases} \partial_t u + f(u) \nabla_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(t_0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.11)$$

alakot is használjuk, ahol $f(u) = F'(u)$, hiszen F -ről feltettük, hogy differenciálható.

A lineáris esetben $F(u) = Au$ valamilyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra, ezért $\nabla_x(F(u)) = \nabla_x(Au) = A \nabla_x u$, vagyis a differenciálegyenlet a

$$\partial_t u + A \nabla_x u = 0 \quad (1.12)$$

alakba írható át. Az dolgozatban később, a numerikus módszerek bemutatásánál többször külön tárgyalni fogjuk ezt az egyszerűbb, lineáris esetet.

1.3. Numerikus módszerek

A legtöbb parciális differenciálegyenletnek nem ismerjük a pontos megoldását, de általában a való életben a pontos megoldás helyett megfelel annak egy jó közelítése is. Bár erre a feladatra számtalan numerikus módszert találtak fel az elmúlt évszázadban, a legtöbb módszer megértéséhez ugyanazokat az alapvető fogalmakat kell ismerni, amiket ebben a részben mutatunk be. A fogalmak ismertetése főként az [5] tankönyv 10. fejezetét követi, kisebb eltérésekkel. Továbbá ugyanezek a fogalmak megtalálhatóak a magyar nyelvű [1] jegyzet tizedik és tizenegyedik fejezetiben is.

A bemutatott numerikus módszerek esetén egy diszkrétizált rácshálón oldjuk meg az (1.4) Cauchy-feladatot. Először az egyszerűség kedvéért ezt egy térdimenzióban mutatjuk be, de könnyen kiterjeszthető több dimenziós esetre is. Tegyük fel, hogy egy adott differenciálegyenlet megoldását a $T \in \mathbb{R}_0^+$ időpontban szeretnénk közelíteni, az $[a, b] \subset \Omega$ intervallumon. Bevezetünk egy rácshálót a $[0, T] \times [a, b]$ tartományon $\tau > 0$ időbeli és $h > 0$ térbeli lépésközzel.

Az időbeli rácspontok a $t_n = n\tau$ értékek, a térbeli rácspontok pedig az $x_j = a + jh$ értékek lesznek. Az egyszerűség kedvéért a τ és h lépésközöket úgy választjuk meg, hogy $N = \frac{T}{\tau}$ és $J = \frac{b-a}{h}$ egész számok legyenek, ekkor n értéke 0-tól N -ig, j értéke pedig 0-tól J -ig fut a természetes számok halmazán. Ezenkívül használni fogjuk az

$$\begin{aligned} x_{j \pm 1/2} &= x_j \pm \frac{h}{2} \\ t_{n+1/2} &= t_n + \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

jelöléseket is.

A numerikus módszer $u(t_n, x_j)$ -re kapott közelítő megoldását u_j^n -nel jelöljük, az u_j^n értékeknek a vektorát pedig u^n -nel. A dolgozatban csak *egylépéses módszereket* fogunk vizsgálni. Az egylépéses módszerek minden időlépésben csak az előző lépésbeli adatokat használják fel a közelítő megoldás kiszámításához. A megmaradási törvények esetén az egylépéses módszerek általános alakja

$$u_j^{n+1} = \Psi(u^{n+1}, u^n, \tau, h, F)$$

ahol F a fluxusfüggvény az (1.9) megmaradási törvényből. Ha u_j^{n+1} függ önmagától Ψ függvényen keresztül, a Ψ függvény által megadott numerikus módszert implicit módszernek nevezzük. Ha u_j^{n+1} nem függ önmagától, a Ψ által megadott numerikus módszert explicitnek nevezzük. Az implicit módszerek több számítást igényelnek, hiszen azokban az u_j^{n+1} közelítő megoldást valamilyen további numerikus módszerrel kell kiszámítani. Emiatt a dolgozatban csak explicit módszerekkel fogunk foglalkozni, ahol

$$u_j^{n+1} = \Psi(u^n, j, \tau, h, F).$$

A t -beli elsőrendű derivált közelítésére minden módszerben a jobb oldali differenciát fogjuk használni:

$$\partial_t u(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}. \quad (1.13)$$

Az x -beli elsőrendű derivált közelítésére három képletet is használni fogunk. Az első kettő a jobb, illetve bal oldali differencia:

$$\partial_x u(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \text{ vagy } \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}. \quad (1.14)$$

Ezekon kívül alkalmazni fogjuk a centrális differenciát is:

$$\partial_x u(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}. \quad (1.15)$$

Az x -beli másodrendű derivált közelítésére az alábbi képletet fogjuk használni:

$$\partial_{xx} u(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (1.16)$$

Egy későbbi numerikus módszerben előnyös lesz, ha nem egy adott rácspontbeli értéket közelítünk, hanem a rácspont körüli h méretű intervallumon felvett értékek átlagát. Ehhez definiáljuk a cellaátlag fogalmát.

1.8. Definíció (Cellaátlag).

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t_n, x) dx. \quad (1.17)$$

Az \bar{u}_j^n értéket *cellaátlagnak* nevezzük. A cellaátlag azt fejezi ki, hogy a t_n időpillanatban az x_j rácspont középpontú h méretű cellában mennyi az u függvény átlaga.

Azt is el kell döntenünk, hogy a vizsgált intervallum peremén hogyan viselkedjenek a numerikus módszerek. A peremfeltételeket a vizsgált differenciálegyenleteket bemutató fejezetben tárgyaljuk bővebben.

1.3.1. Konvergencia

Ebben a részben definiálunk néhány fogalmat, amikkel mérhetjük, hogy mennyire pontosak a numerikus módszerek. Az első fontos fogalom a numerikus módszer globális hibája, ami azt méri, összesen mennyit hibázott a numerikus módszer egy adott időpillanatig.

1.9. Definíció. Egy numerikus módszer *globális hibája* a (t_n, x_j) pontban $E_j^n = u(t_n, x_j) - u_j^n$. Az E_j^n értékek vektorát rögzített n érték mellett E^n -nel jelöljük.

A globális hiba segítségével pedig definiálhatjuk, hogy egy numerikus módszert mikor tartunk konvergensenek. A konvergencia azt fejezi ki, hogy a vizsgált módszer közelítő megoldása kellően közel kerül-e a pontos megoldáshoz kicsi lépésköznél. Sőt, magasabb rendű konvergenciáról is beszélhetünk bizonyos módszerek esetén.

1.10. Definíció. Egy numerikus módszer időben *konvergens* a t_n időpillanatban valamilyen $\|\cdot\|$ normában, ha $\|E^n\| \rightarrow 0$, ahogy $\tau \rightarrow 0$. Továbbá egy numerikus módszer *p-edrendben konvergens* t_n időpillanatban, ha létezik olyan $C_E > 0$ konstans, hogy $\|E^n\| \leq C_E \cdot \tau^p$.

Ahhoz, hogy ez a fogalom hasznos legyen, ki kell választanunk a normát, amiben vizsgálni fogjuk a konvergenciát. A megmaradási törvények esetén a legkézenfekvőbb norma az 1-es norma, ahol

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

A közelítő megoldásokat viszont az egész intervallum helyett csak egy diszkrétizált rácshálón ismerjük, ezért a közelítő megoldásokra ennek a normának a diszkrét megfelelőjét alkalmazzuk, ahol

$$\|u^n\| = h \sum_{j=1}^J |u_j^n|. \quad (1.18)$$

A konvergencia megmutatásához hasznos fogalom lesz a lokális hiba is. A lokális hiba azt számolja, hogy ha egy pontos megoldásból kiindulva tesz egy lépést a numerikus módszer, mennyi hibát vét.

1.11. Definíció. Egy egylépéses numerikus módszer *lokális hibája* a (t_{n+1}, x_j) pontban

$$L_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - \Psi(u_n, j, \tau, h, F). \quad (1.19)$$

A globális hibához hasonlóan az L_j^{n+1} értékek vektorát egy adott $n + 1$ érték mellett L^{n+1} fogja jelölni.

A lokális hibával definiálhatjuk a konzisztenciát, ami lokális értelemben jelenti a konvergenciát. A konzisztencia azt jelenti, hogy a feladat diszkrétizációja kellően kicsi hibát okoz kis lépésköz esetén. A konvergenciához hasonlóan itt is beszélhetünk magasabb rendű konzisztenciáról.

1.12. Definíció. Egy numerikus módszer *konzisztens* a t_{n+1} időpillanatban valamilyen $\|\cdot\|$ normában, ha $\|L^{n+1}\| \rightarrow 0$, ahogy $\tau \rightarrow 0$. Továbbá egy numerikus módszer *p-edrendben konzisztens* a t_{n+1} időpillanatban, ha létezik olyan $C_L > 0$ konstans, hogy $\|L^{n+1}\| \leq C_L \cdot \tau^{p+1}$.

Az utolsó fogalom, amit definiálnunk kell, a stabilitás fogalma lesz. Egy numerikus módszert akkor nevezünk stabilnak, ha egy lépés alatt nem növekszik a közelítő megoldás normája.

1.13. Definíció. Egy numerikus módszer *stabil* valamilyen $\|\cdot\|$ norma szerint, ha

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.20)$$

Egy szükséges, de nem elégséges feltételt ad a stabilitásra Courant, Friedrichs és Lewy a [3] cikkben. Belátták, hogy egy numerikus módszer csak akkor lehet stabil, ha a numerikus módszerben legalább olyan gyorsan tud terjedni az információ, mint a differenciálegyenletben a vizsgált mennyiség. Ha ez nem teljesül, akkor a numerikus módszer nem rendelkezik elég információval, hogy jó közelítést adjon a megoldásra. Ezt a feltételt CFL-feltételnek nevezzük, a konkrét numerikus módszereknél pedig bővebben meg fogjuk vizsgálni.

Végül kimondjuk a Lax-féle ekvivalenciátételt, ami egy fontos eredmény a numerikus módszerek konvergenciájának vizsgálatában.

1.14. Tétel (Lax-féle ekvivalenciátétel [5]). *Egy lineáris feladatra alkalmazott konzisztens véges különbséges módszer akkor és csak akkor konvergens, ha stabil.*

A legtöbb numerikus módszer esetében könnyebb belátni a konzisztenciát és a stabilitást, mint a konvergenciát, ezért ezt a tételt fogjuk használni, amikor lineáris feladatra alkalmazott konkrét numerikus módszerek konvergenciáját bizonyítjuk.

2. fejezet

Vizsgált numerikus módszerek

Ebben a fejezetben bemutatjuk a dolgozatban alkalmazott numerikus módszereket. Ismertetjük, hogy milyen matematikai gondolat áll a módszerek mögött, majd megvizsgáljuk a tulajdonságaikat, különös tekintettel a konvergenciára. Ebben a fejezetben minden módszert az egy térdimenziós esetben ismertetünk, mivel a numerikus kísérleteket is az egy dimenziós egyenletekkel végeztük el.

2.1. Véges különbséges módszerek

A véges különbséges módszerek (más néven véges differencia módszerek) alapja a deriváltak (1.13), (1.14), (1.15) és (1.16) numerikus közelítésein alapszik. Ha ezeket a közelítéseket alkalmazzuk az (1.9) differenciálegyenletre, átrendezés után egy explicit képletet kapunk, amellyel a kezdeti feltételből kiindulva, időrétegenként haladva minden rácspontra tudunk adni egy közelítést. Az itt leírt módszerek megtalálhatóak az [5] tankönyv 10. fejezetében. Ha az olvasó jobban el szeretne mélyedni a véges differencia módszerek elméletében, ajánlom a [4] jegyzet 11. fejezetét, ami bővebben tárgyalja azokat.

2.1.1. Az upwind-séma

Amennyiben a modellezni kívánt fizikai törvényben az információ csak egy irányban terjed, indokolt lehet a térbeli derivált közelítésére csak az egyik irányból pontokat használni. Itt az információ egy irányba terjedése alatt azt értjük, hogy a sebességet leíró $f(u(t, x))$ függvényérték azonos előjelű minden (t, x) párra. Ilyen egyenletre példa az advekción egyenlet, amit a következő fejezetben vizsgálunk meg alaposabban. A legegyszerűbb ilyen módszer az elsőrendű upwind-séma, ami a terjedés iránya szerint kétféle alakban létezik.

Idézzük fel az (1.11) Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u + f(u) \nabla_x u = 0, \\ u(t_0, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Az idő szerinti derivált közelítésére mindig az (1.13) baloldali közelítést fogjuk használni, a térbeli derivált közelítését viszont az $f(u)$ függvény előjele fogja meghatározni.

Ha $f(u) > 0$, akkor az információ pozitív irányba terjed a térben, ekkor a bal oldali közelítést használjuk $\partial_x u$ -ra:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + f(u(t_n, x_j)) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0,$$

ezt átrendezve pedig

$$u_j^{n+1} = u_j^n - f(u(t_n, x_j)) \frac{\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Természetesen mivel az u függvényt nem ismerjük, itt $f(u(t_n, x_j))$ értékére egy közelítést kell alkalmaznunk. Szerencsére $u(t_n, x_j)$ -re már az előző időlépésben kiszámoltunk egy u_j^n közelítő értéket, így ezt könnyen alkalmazhatjuk a módszerben, ami így az alábbi alakot veszi fel:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - f(u_j^n) \frac{\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.1)$$

Ha $f(u) < 0$, akkor az információ negatív irányba terjed a térben, ekkor a jobb oldali közelítést használjuk $\partial_x u$ -ra:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - f(u_j^n) \frac{\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (2.2)$$

Az upwind-séma mindkét alakjából látszik, hogy a numerikus módszerben egy τ hosszú időlépés alatt egy szomszédos rácspontból, azaz h méretű intervallumból érkezik információ. Ez azt jelenti, hogy a stabilitáshoz szükséges CFL-feltétel

$$\max_{j,n} |f(u_j^n)| \frac{\tau}{h} \leq 1 \quad (2.3)$$

lesz.

2.1. Tétel. *A (2.1) és a (2.2) upwind-séma másodrendben konzisztens minden $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega)$ függvény esetén.*

Bizonyítás. A tételt a bal oldali sémára látjuk be, a jobb oldali sémára a bizonyítás menete azonos. A (2.1) bal oldali séma esetén az (1.19) lokális hiba

$$L_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - \left[u(t_n, x_j) - f(u(t_n, x_j)) \frac{\tau}{h} (u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j-1})) \right].$$

Itt az $u(t_{n+1}, x_j)$ -t és $-(u(t_n, x_{j-1}))$ értékeket Taylor-sorba fejtjük $u(t_n, x_j)$ körül, hogy az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} L_j^{n+1} &= u(t_n, x_j) + \tau \partial_t u(t_n, x_j) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^3) - u(t_n, x_j) + \\ &+ f(u(t_n, x_j)) \frac{\tau}{h} \left[u(t_n, x_j) - \left(u(t_n, x_j) - h \partial_x u(t_n, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_{xx} u(t_n, x_j) - \mathcal{O}(h^3) \right) \right]. \end{aligned}$$

Két pár $u(t_n, x_j)$ kiejti egymást, a zárójeleket kibontva pedig az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} L_j^{n+1} &= \tau \partial_t u(t_n, x_j) + \tau f(u(t_n, x_j)) \partial_x u(t_n, x_j) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) - \frac{\tau h}{2} \partial_{xx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^3) + \mathcal{O}(\tau h^2). \end{aligned}$$

Látható, hogy $\tau \rightarrow 0$ esetén a hiba nullához tart, tehát az upwind-séma valóban konzisztens. Azt is észrevehetjük, hogy mivel az u függvény itt pontos megoldása a differenciálegyenletnek,

$$\partial_t u(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x(u(t, x)) = 0$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}_0^+$, $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$L_j^{n+1} = \mathcal{O}(\tau h) + \mathcal{O}(\tau^2),$$

amiből következik a konzisztencia is, amennyiben τ és h azonos nagyságrendűek. \square

2.2. Tétel. *A lineáris,*

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

esetben az upwind-séma stabil $\left| a \frac{\tau}{h} \right| \leq 1$ esetén.

Bizonyítás. Az $a > 0$ esetben látjuk be a tételt, ahol a (2.1) bal oldali upwind-sémát használjuk. Az $a < 0$ eset hasonlóan levezethető.

A stabilitáshoz az (1.20) egyenlőtlenségnek kell teljesülnie minden $n \in \mathbb{R}$ esetén. Az egy térdimenziós lineáris esetben $f(u(t, x)) \equiv a$, ezért a (2.1) bal oldali upwind-sémában $f(u(t_n, x_j))$ helyére írhatjuk az a konstans. Ekkor a sémát átrendezve látható, hogy az

$$u_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n$$

alakba írható, ezzel pedig kiszámoljuk u^{n+1} vektor normáját:

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| &= h \sum_j |u_j^{n+1}| = \\ &= h \sum_j \left| \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n \right| \leq \\ &\leq h \sum_j \left| 1 - a \frac{\tau}{h} \right| |u_j^n| + h \sum_j \left| a \frac{\tau}{h} \right| |u_{j-1}^n|. \end{aligned}$$

A harmadik sorban a háromszög-egyenlőtlenséget használtuk. Ezután $a \frac{\tau}{h}$ -t és $1 - a \frac{\tau}{h}$ -t kivehetjük az abszolút értékből, hiszen mivel $a > 0$, a tételben szereplő feltétel szerint $a \frac{\tau}{h} \leq 1$. Ekkor

$$\|u^{n+1}\| \leq h \sum_j \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) |u_j^n| + h \sum_j a \frac{\tau}{h} |u_{j-1}^n|,$$

itt pedig a jobb oldalon

$$h \sum_j |u_j^n| = h \sum_{j-1} |u_j^n| = \|u^n\|$$

miatt

$$\|u^{n+1}\| \leq \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) \|u^n\| + a \frac{\tau}{h} \|u^n\| = \|u^n\|.$$

Tehát a biztosított feltételek mellett az upwind-séma valóban stabil. \square

A 2.1. és a 2.2. Tételekből az 1.14. Lax-tétel miatt következik a tételekben szereplő feltételek mellett az upwind-séma konvergenciája is.

2.3. Következmény. *A lineáris esetben az upwind-séma konvergens, ha az $\left|a\frac{\tau}{h}\right| \leq 1$ egyenlőtlenség teljesül.*

A nemlineáris konvergenciával foglalkozik az [5] könyv 15. fejezete, ami erősebb eszközökkel vizsgálja a konvergenciát. Ebben a fejezetből vesszük az alábbi tételt az upwind-séma általános konvergenciájára.

2.4. Tétel. *Az upwind-séma konvergens, ha a $\max_{j,n} |F'(u_j^n)| \frac{\tau}{h} \leq 1$ CFL-feltétel teljesül.*

2.1.2. A Lax–Wendroff-módszer

A Lax–Wendroff-módszert az upwind-sémától eltérően az $u(t + \tau, x)$ függvény Taylor-sorba fejtéséből vezetjük le. Az (1.12) lineáris esetben a módszer levezetéséhez először felírjuk $u(t + \tau, x)$ Taylor-sorát $u(t, x)$ körül:

$$u(t + \tau, x) = u(t, x) + \tau \partial_t u(t, x) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t, x) + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (2.4)$$

Mint ahogy az upwind-sémánál, itt is feltesszük, hogy $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega)$. Ekkor a differenciálegyenletből két azonosság adódik az x változó szerinti deriváltakra:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -A \partial_x u \\ \partial_{tt} u &= \partial_t(-A \partial_x u) = -A \partial_t \partial_x u = -A \partial_x \partial_t u = A^2 \partial_{xx} u, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mivel $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega)$, a második azonosság a Young-tétel miatt teljesül.

Ezeket felhasználva, és a harmadrendű tagokat elhagyva az

$$u(t + \tau, x) \approx u(t, x) - A\tau \partial_x u(t, x) + A^2 \frac{\tau^2}{2} \partial_{xx} u(t, x)$$

másodrendű közelítés adódik. Ha ezt a közelítést a rácshálón diszkretizáljuk az az (1.15) és az (1.16) közelítéseket alkalmazva az x szerinti deriváltakra, megkapjuk a Lax–Wendroff-módszert lineáris parciális differenciálegyenletekre:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A \frac{\tau}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + A^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.6)$$

2.5. Tétel. *A (2.6) Lax–Wendroff-módszer lineáris esetben $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega)$ megoldás esetén másodrendben konzisztens.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló módon történik, mint a 2.1. Tétel bizonyítása az upwind-sémánál. Felírjuk a lokális hiba képletét:

$$\begin{aligned} L_j^n &= u(t_{n+1}, x_j) - \left[u(t_n, x_j) - A \frac{\tau}{2h} (u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})) + \right. \\ &\quad \left. + A^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})) \right], \end{aligned}$$

majd Taylor-sorba fejtjük az $u(t_n, x_j)$ -től eltérő tagokat:

$$u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) = \tau \partial_t u(t_n, x_j) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) + \frac{\tau^3}{6} \partial_{ttt} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^4),$$

$$u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1}) = 2h \partial_x u(t_n, x_j) + 2 \frac{h^3}{6} \partial_{xxx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}) = 2 \frac{h^2}{2} \partial_{xx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(h^4).$$

Ezeket a lokális hiba képletébe helyettesítve:

$$\begin{aligned} L_j^n &= \tau \partial_t u(t_n, x_j) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) + \frac{\tau^3}{6} \partial_{ttt} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^4) + \\ &+ A \frac{\tau}{2h} \left(2h \partial_x u(t_n, x_j) + 2 \frac{h^3}{6} \partial_{xxx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(h^4) \right) - \\ &- A^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (h^2 \partial_{xx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(h^4)). \end{aligned}$$

Majd felbontjuk a zárójleket:

$$\begin{aligned} L_j^n &= \tau \partial_t u(t_n, x_j) + A \tau \partial_x u(t_n, x_j) + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) - A^2 \frac{\tau^2}{2} \partial_{xx} u(t_n, x_j) + \\ &+ \frac{\tau^3}{6} \partial_{ttt} u(t_n, x_j) + A \frac{\tau h^2}{6} \partial_{xxx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^4) + \mathcal{O}(\tau h^3) + \mathcal{O}(\tau^2 h^2), \end{aligned}$$

innen pedig a (2.5) azonosságok és az u függvény pontos megoldás mivolta miatt

$$\begin{aligned} \tau \partial_t u(t_n, x_j) + A \tau \partial_x u(t_n, x_j) &= 0 \text{ és} \\ \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u(t_n, x_j) - A^2 \frac{\tau^2}{2} \partial_{xx} u(t_n, x_j) &= 0 \end{aligned}$$

tagok kiesnek, és megkapjuk, hogy a lokális hiba

$$L_j^n = \frac{\tau^3}{6} \partial_{ttt} u(t_n, x_j) + A \frac{\tau h^2}{6} \partial_{xxx} u(t_n, x_j) + \mathcal{O}(\tau^4) + \mathcal{O}(\tau h^3) + \mathcal{O}(\tau^2 h^2).$$

Jól látható, hogy ha a τ időbeli lépésköz és a h térbeli lépésköz azonos nagyságrendűek, akkor a Lax–Wendroff-módszer másodrendben konzisztens. □

A nemlineáris esetben egy két lépésből álló közelítést fogunk alkalmazni, amelyet Robert D. Richtmyer nevét viseli [7]. A módszer első lépésében a $t_{n+1/2}$ fél időlépésben, az $x_{j\pm 1/2}$ fél rácspontokban kapunk közelítő megoldásokat, a második lépésben pedig ezeket felhasználva adunk meg egy közelítő megoldást a t_{n+1} időrétegre.

A módszer két lépése:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\tau}{2h} (F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n)), \\ u_{j-1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_j^n) - \frac{\tau}{2h} (F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n)), \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\tau}{h} \left(F(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - F(u_{j-1/2}^{n+1/2}) \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az $F(u) = Au$ lineáris esetben visszakapjuk a korábban levezetett (2.6) lineáris Lax–Wendroff-módszert.

2.6. Tétel. A (2.7) Richtmyer-féle Lax–Wendroff-módszer másodrendben konzisztens minden $u \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Omega)$ függvény esetén.

Bizonyítás. Felírjuk a második lépésben a lokális hibát a pontos megoldásból kiindulva:

$$L_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) + \frac{\tau}{h} \left(F(u(t_{n+1/2}, x_{j+1/2})) - F(u(t_{n+1/2}, x_{j-1/2})) \right).$$

A korábbi bizonyításokhoz hasonlóan $u(t_{n+1/2}, x_j)$ körüli Taylor-sorba fejtjük az összeg tagjait:

$$\begin{aligned} L_j^{n+1} &= u(t_{n+1/2}, x_j) + \frac{\tau}{2} \partial_t u(t_{n+1/2}, x_j) + \frac{\tau^2}{8} \partial_{tt} u(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\tau^3) - \\ &- \left(u(t_{n+1/2}, x_j) - \frac{\tau}{2} \partial_t u(t_{n+1/2}, x_j) + \frac{\tau^2}{8} \partial_{tt} u(t_{n+1/2}, x_j) - \mathcal{O}(\tau^3) \right) + \\ &+ \frac{\tau}{h} \left[F(u(t_{n+1/2}, x_j)) + \frac{h}{2} \partial_x F(u(t_{n+1/2}, x_j)) + \frac{h^2}{8} \partial_{xx} F(u(t_{n+1/2}, x_j)) + \mathcal{O}(h^3) - \right. \\ &\left. - \left(F(u(t_{n+1/2}, x_j)) - \frac{h}{2} \partial_x F(u(t_{n+1/2}, x_j)) + \frac{h^2}{8} \partial_{xx} F(u(t_{n+1/2}, x_j)) - \mathcal{O}(h^3) \right) \right]. \end{aligned}$$

Az ellentétes előjelű tagok kiesése után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$L_j^{n+1} = \tau \partial_t u(t_{n+1/2}, x_j) + \tau \partial_x F(u(t_{n+1/2}, x_j)) + \mathcal{O}(\tau^3 + h^3).$$

A differenciálegyenletből ismert összefüggés miatt

$$\tau \partial_t u(t_{n+1/2}, x_j) + \tau \partial_x F(u(t_{n+1/2}, x_j)) = 0,$$

tehát $L_j^{n+1} = \mathcal{O}(\tau^3 + h^3)$. Vagyis az 1.12. Definíció szerint a Richtmyer-féle Lax–Wendroff-módszer valóban másodrendben konzisztens azonos nagyságrendű h és τ lépésközök mellett. \square

A Lax–Wendroff-módszer stabilitása is belátható a lineáris és nemlineáris esetben egyaránt. A konzisztenciából és stabilitásból pedig következik az alábbi, az [5] könyvben szereplő tétel.

2.7. Tétel ([5]). A Richtmyer-féle Lax–Wendroff-módszer $u \in C^2(\Omega)$ megoldás esetén másodrendben konvergens.

2.2. A Magnus-módszer

Wilhelm Magnus 1954-ben megmutatta, hogy egy elsőrendű közönséges nemautonóm lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása kifejezhető exponenciális alakban [6]. Mi ebben a fejezetben a [2] forrás alapján megvizsgáljuk, hogy ezt az elméletet hogyan lehet parciális differenciálegyenletekre átvinni, és azt egy numerikus módszer kifejlesztésekor alkalmazni.

Tekintsük adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, valamint $X_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor mellett az

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

n -dimenziós nemautonóm lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszert, ahol az $X: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ megoldásfüggvényt keressük. Az $n = 1$ esetben ismert, hogy a rendszer megoldása

$$X(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\xi) d\xi \right) X_0. \quad (2.9)$$

Az $n > 1$ esetben viszont a fenti függvény nem mindig lesz megoldása a rendszernek. Magnus viszont belátta azt, hogy a megoldás ilyenkor is egy

$$X(t) = \exp(\Gamma(t, t_0)) X_0$$

alakú függvény lesz, ahol a $\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ függvényt egy végtelen függvénysor összegeként definiáljuk:

$$\Gamma(t, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(t, t_0).$$

Mivel egy numerikus módszerhez használjuk ezt a függvényt, közelíteni fogjuk, méghozzá a Γ -t definiáló összeg első tagjával, a Γ_1 függvénnyel. A Magnus-felbontás definíciója szerint

$$\Gamma_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(\xi) d\xi,$$

ami pontosan megegyezik az $n = 1$ esetben ismert megoldással. Tehát egy általános n -dimenziós közönséges nemautonóm lineáris differenciálegyenlet-rendszer közelítésére a (2.9) képletet használhatjuk, ami az $n = 1$ esetben a pontos megoldást adja meg.

Ahhoz, hogy ezt az közelítést alkalmazni tudjuk megmaradási törvényekre, vizsgáljuk meg a megmaradási törvények által megadott (1.10) Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u = -\partial_x F(u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.10)$$

A differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő $-\partial_x F(u) = -f(u)\partial_x u$ kifejezésre tekintünk $-f(u)\partial_x u = Q(u)u$ alakban, ahol $Q(u) = -f(u)\partial_x$ egy u függvénytől függő operátor.

Ha ekkor megfeleltetjük az u^{n+1} vektort az $X(t_{n+1})$ vektorral, a $-f(u)\partial_x = Q(u)$ operátor diszkretizáltját az $A(t_n)$ mátrixszal, illetve a kezdeti feltételben t_0 értéket t_n -nel, továbbá X_0 vektort u^n -nel, akkor a (2.10) parciális differenciálegyenletre is megpróbálhatjuk alkalmazni a Magnus-felbontásból kapott közelítést. Itt a $Q(u)$ operátor és az X_0 vektor diszkretizálásánál az előző időpillanatban kapott értékeket használjuk azért, mert így egy explicit módszert fogunk kapni. Továbbá a $Q(u)$ operátornál a térbeli deriváltat az (1.15) centrális differenciával fogjuk közelíteni. Az így kapott diszkretizáltat $Q(u^n)$ -nel fogjuk jelölni, és az alábbi alakú:

$$Q(u^n) = \frac{-1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & f(u_1^n) & 0 & \cdots & 0 \\ -f(u_0^n) & 0 & f(u_2^n) & \ddots & \vdots \\ 0 & -f(u_1^n) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & f(u_j^n) \\ 0 & \cdots & 0 & -f(u_{j-2}^n) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Ezt a mátrixot természetesen definiálhatnánk tetszőleges t időpillanatban, de a módszerben csak a t_n rácspontokban lesz rá szükségünk.

Ekkor a módszer egy lépése a (2.9) képlet szerint az alábbi alakot veszi fel:

$$u^{n+1} = \exp\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} Q(\xi) d\xi\right) u^n.$$

A jobb oldalon szereplő integrált a bal oldali trapézsabállyal fogjuk közelíteni:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} Q(\xi) d\xi \approx \tau Q(u^n),$$

ebből pedig megkapjuk a kívánt egylépéses numerikus módszert:

$$u^{n+1} = e^{\tau Q(u^n)} u^n. \quad (2.12)$$

Látható, hogy a közelítés miatt valóban csak időlépésenként lesz szükségünk a $Q(u^n)$ mátrixra.

Ha a bal oldali helyett a középponti közelítést szeretnénk használni az integrálra, akkor vehetünk egy kétlépéses módszert, ahol az első lépésben a (2.7) Richtmyer-féle Lax–Wendroff-módszerhez hasonlóan fél időlépésben közelítjük a megoldást, majd a második lépésben azzal a közelítéssel számolunk tovább. Ez a kétlépéses módszer az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= e^{\tau/2 \cdot Q(u^n)} u^n, \\ u^{n+1} &= e^{\tau Q(u^{n+1/2})} u^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ezekre a módszerekre a dolgozat további részeiben egylépéses, illetve kétlépéses Magnus-módszerként fogunk hivatkozni.

Könnyen látható, hogy az (1.12) lineáris esetben, ahol $F(u) = Au$, az $f(u^n)$ vektor, és emiatt a $Q(u^n)$ mátrix sem függ valójában u^n -től, azaz $Q(u^n) = Q$ egy időben konstans mátrix lesz. Emiatt a lineáris esetben a kétlépéses Magnus-módszer megegyezik az egylépésessel, hiszen

$$e^{\tau Q(u^{n+1/2})} u^{n+1/2} = e^{\tau Q} u^{n+1/2} = e^{\tau Q(u^n)} u^{n+1/2}.$$

Érdeemes megjegyezni, hogy egy mátrix exponenciálisának a közelítése egy bonyolult és sok számítást igénylő feladat. Emiatt a Magnus-módszer implementációjában az `expmv` függvényt használjuk MATLAB-ban, amely hatékonyan tudja közelíteni tetszőleges A mátrixra, b vektorra és t számra az $e^{tA}b$ vektort.

2.3. Konzervatív módszerek

Ahogy azt látni fogjuk a következő fejezetben, a véges differencia módszerek nem mindig adnak megfelelő megoldásokat, ha a pontos megoldás nem folytonos. Olyan numerikus módszert szeretnénk, ami figyelembe veszi a megmaradási törvényeknek azt a tulajdonságát, hogy az (1.17) cellaátlag csak a cella peremén található fluxus miatt

változhat. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező módszereket fogjuk *konzervatív módszernek* vagy *véges térfogat módszernek* nevezni. Ezekben a numerikus módszerekben nem a rácspontbeli értékeket fogjuk tárolni, hanem az (1.17) cellaátlagokat. A konzervatív módszerek bevezetése és a Godunov-módszer leírása az [5] tankönyv 12. fejezete alapján készült.

A megmaradási törvények (1.9) differenciálalakját t szerint integrálva t_n és t_{n+1} között az

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t u(t, x) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_x F(u(t, x)) dt = 0$$

egyenletet kapjuk. Ha itt alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételből adódó

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t u(t, x) dt = u(t_{n+1}, x) - u(t_n, x)$$

azonosságot, majd átrendezzük az egyenletet, az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$u(t_{n+1}, x) = u(t_n, x) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_x F(u(t, x)) dt. \quad (2.14)$$

Most vizsgáljuk meg a cellaátlag (1.17)-ben definiált képletét az $n + 1$ -edik időpillanatban:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} u(t_{n+1}, x) dx.$$

Látható, hogy az integrál belsejében a (2.14) egyenlet bal oldala szerepel. Ezt lecserélve az egyenlet jobb oldalára az

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} u(t_n, x) dx - \frac{1}{h} \cdot \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_x F(u(t, x)) dt dx$$

összefüggést kapjuk. A jobb oldalon az első tag definíció szerint \bar{u}_j^n -nel egyenlő. A második tagban szereplő dupla integrálban az integrálás sorrendjét a Fubini-tétel (MIÉRT) szerint felcserélve az

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{h} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \partial_x F(u(t, x)) dx dt,$$

a belső integrált átalakítva pedig az

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{h} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(u(t, x_{j+h/2})) - F(u(t, x_{j-h/2}))] dt \quad (2.15)$$

képletet kapjuk.

Itt bevezetjük az

$$\bar{F}_{j+1/2}^n = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(u(t, x_{j+h/2})) dt \quad (2.16)$$

jelölést a fluxusfüggvény átlagára egy időlépésben az $x_{j+h/2}$ pontban. Ezt a jelölést a (2.15) képletben felhasználva megkapjuk a konzervatív módszerek általános alakját:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} (\bar{F}_{j+1/2}^n - \bar{F}_{j-1/2}^n). \quad (2.17)$$

Ezt értelmezhetjük egy véges különbséges módszerként is, hiszen a

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\tau} + \frac{\bar{F}_{j+1/2}^n - \bar{F}_{j-1/2}^n}{h} = 0$$

egyenlet egy véges differenciákkal való közelítése a

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$$

megmaradási törvénynek. Emiatt a véges különbséges módszerekre bevezetett 1.14. Lax-tétel konzervatív módszerekre is alkalmazható.

Az okoz problémát az ilyen alakú módszereknél, hogy \bar{u}_j^{n+1} kiszámításához a (2.16) képlet szerint ismernünk kellene $F(u(t, x_{j+h/2}))$ értékét t_n és t_{n+1} között. Emiatt $\bar{F}_{j+1/2}^n$ -et valahogy közelítenünk kell, hogy a fenti (2.17) módszert alkalmazni tudjuk. Ha egy

$$\bar{F}_{j+1/2}^n \approx \mathcal{F}(\bar{u}_{j+1}^n, \bar{u}_j^n)$$

alakú közelítést alkalmazunk, a konzervatív módszerek az alábbi alakot veszik fel:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} (\mathcal{F}(\bar{u}_{j+1}^n, \bar{u}_j^n) - \mathcal{F}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j-1}^n)). \quad (2.18)$$

A közelítő $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *numerikus fluxusfüggvénynek* nevezzük.

2.3.1. Godunov módszere

Godunov módszerében az (1.17) cellaátlagok segítségével minden időrétegben definiálunk egy szakaszonként konstans $\tilde{u}^n: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$\tilde{u}^n(t_n, x) = \bar{u}_j^n \quad \forall x: x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}. \quad (2.19)$$

Azaz $\tilde{u}^n(t_n, x)$ értéke az x_j középpontú cellában konstans, és a cellaátlaggal egyezik meg. Ha leszűkítjük az értelmezési tartományt $[t_n, t_{n+1}] \times [x_j, x_{j+1}]$ -re, akkor az (1.8) megmaradási törvényt ellátva a (2.19) kezdeti feltétellel kapunk egy (1.6) alakban felírt Riemann-problémát:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x F(u(t, x)) = 0 & t \in [t_n, t_{n+1}], \\ u(t_n, x) = \begin{cases} \bar{u}_j^n, & \text{ha } x < x_{j+1/2}, \\ \bar{u}_{j+1}^n, & \text{ha } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (2.20)$$

Tehát ez minden időlépésben minden cellában egy Riemann-problémát jelent. Ezeket a Riemann-problémákat megoldva összeállíthatunk egy megoldást a (2.19) Cauchy-feladatra t_{n+1} időpillanatban, amit $\tilde{u}^n(t_{n+1}, x)$ fog jelölni. Az \bar{u}_j^{n+1} új cellaátlagot ennek a megoldásnak az átlagolásával kapjuk:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx. \quad (2.21)$$

Ezzel a cellaátlaggal pedig definiáljuk az $\tilde{u}^{n+1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, és így iteráljuk a módszert.

Fontos arra figyelniük, hogy a különböző cellákból származó megoldások ne hassanak egymásra. Ez a követelmény egy felső határt ad meg a hullámok terjedési sebességére:

$$\max_{j,n} |F'(\bar{u}_j^n)| \leq \frac{h}{\tau}. \quad (2.22)$$

Észrevehetjük, hogy ez lényegében megegyezik a (2.3) CFL-feltétellel, amit az upwind-sémára írtunk fel.

Az is megmutatható, hogy a Godunov-módszer konzervatív alakban is felírható. Ha feltesszük, hogy $\tilde{u}^n(t_{n+1}, x)$ valóban pontos megoldása a (2.20) Riemann-problémának, akkor felírjuk az (1.7) integrálalakját egy megmaradási törvénynek:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)).$$

Most $x_1 = x_{j-1/2}$, $x_2 = x_{j+1/2}$ és $u = \tilde{u}$ választásokkal t szerint integráljuk t_n -től t_{n+1} -ig az egyenletet:

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j-1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j+1/2})) dt. \end{aligned}$$

A bal oldalon a külső integrált felbontva

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_n, x) dx = \\ & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j-1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j+1/2})) dt, \end{aligned}$$

ebből pedig a

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_n, x) dx + \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j-1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j+1/2})) dt \end{aligned}$$

képletet kapjuk az új cellaátlagra. A képletet h -val elosztva és az

$$\mathcal{F}(\bar{u}_{j+1}^n, \bar{u}_j^n) = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{u}^n(t, x_{j+1/2})) dt$$

numerikus fluxusfüggvényt definiálva, valamint felhasználva, hogy az $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ intervallumon $\tilde{u}^n(t_n, x) \equiv \bar{u}_j^n$ definíció szerint, felírhatjuk Godunov módszerét a (2.18) konzervatív alakban:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} (\mathcal{F}(\bar{u}_{j+1}^n, \bar{u}_j^n) - \mathcal{F}(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j-1}^n)).$$

Az ebben a dolgozatban vizsgált differenciálegyenletek esetén a (2.20) Riemann-problémáknak ismerni fogjuk az explicit megoldását, ezért explicit képletet kapunk a Godunov-módszerre. Bonyolultabb egyenletek esetén azonban többnyire a Riemann-problémák megoldására is egy közelítést kell alkalmazni.

3. fejezet

Numerikus kísérletek

Ebben a részben a dolgozatban vizsgált konkrét parciális differenciálegyenleteket mutatjuk be, tekintettel a tulajdonságaikra, valamint alkalmazzuk rájuk az előző fejezetben leírt numerikus módszereket. Az advekciós és a Burgers-egyenletek a legegyszerűbb példák a lineáris, illetve nemlineáris megmaradási törvényekre, ezért először rajtuk vizsgáljuk a numerikus módszerek viselkedését.

3.1. Advekciós egyenlet egy térdimenzióban

Az advekció a fizikában egy áramló közeg általi szállítást ír le. A legegyszerűbb esetet – ami egy térdimenzióban egy konstans a sebességgel, diffúzió nélküli áramlást jelent – a

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

differenciálegyenlet modellezi. Az egyenletben a terjedés irányát az $a \in \mathbb{R}$ sebesség előjele határozza meg: $a > 0$ esetén jobbra, $a < 0$ esetén balra áramlik a közeg. Ez egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet, amelyet explicit módon is meg tudunk oldani.

3.1. Tétel. *A (3.1) Cauchy-feladatnak $u(t, x) = \Phi(x - at)$ pontos megoldása egy adott $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény esetén.*

Bizonyítás. A differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$\partial_t \Phi(x - at) + a \partial_x \Phi(x - at) = -a \Phi'(x - at) + a \Phi'(x - at) = 0.$$

A kezdeti feltételbe helyettesítve:

$$u(x, 0) = \Phi(x - a \cdot 0) = \Phi(x).$$

□

Mivel az advekciós egyenlet lineáris, és ismerjük a pontos megoldását, egy tökéletes próbafeladat a numerikus módszerek működésének vizsgálatára. Ha egy módszer nem jól közelíti az advekciós egyenlet pontos megoldását, akkor biztosak lehetünk abban, hogy bonyolultabb egyenletekre sem fog jól működni.

Upwind-séma az egy térdimenziós advekiós egyenletre Mivel $f(u(t, x)) \equiv a$, a sémában a konstans a sebességet fogjuk $f(u_j^n)$ helyére írni. Az információterjedés iránya határozza meg, hogy a (2.1) vagy a (2.2) sémát használjuk, vagyis a használt módszer az a sebesség előjelétől függ. Negatív $a < 0$ sebesség esetén balra terjed az információ, ezért az indokolt módszer a jobb oldali:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n).$$

Pozitív $a > 0$ sebesség esetén pedig az indokolt módszer a bal oldali:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (3.2)$$

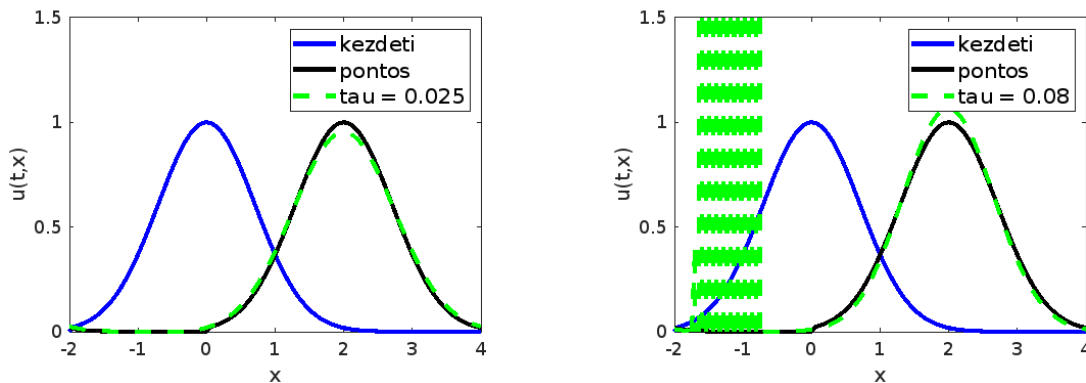
Ezt a két képletet szokás egy egyenletbe is átírni az alábbi módon az $a_- = \min(a, 0)$ és $a_+ = \max(a, 0)$ jelölésekkel:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (a_- (u_{j+1}^n - u_j^n) + a_+ (u_j^n - u_{j-1}^n)).$$

Először egy folytonos kezdeti feltétellel és $a = 1$ sebességgel vizsgáljuk meg az upwind-sémát. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0 & t > 0, x \in (-2, 4), \\ u(0, x) = e^{-x^2} & x \in (-2, 4), \\ u(t, -2) = u(t, 4) & t > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

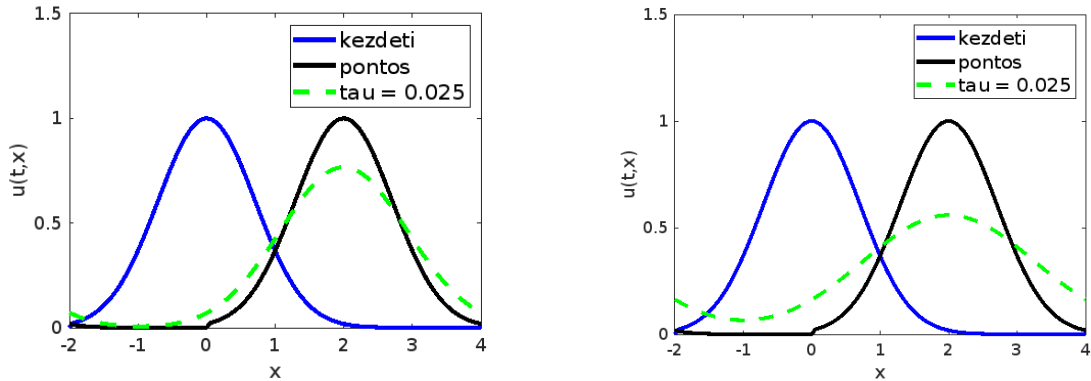
Cauchy-feladatot. A kezdeti feltétel egy Gauss-görbét határoz meg, aminek a maximumértéke 1, a maximumhelye pedig 0. Peremfeltételnek pedig egy periodikus peremfeltételt használunk, ami egyenlővé teszi az intervallum bal peremén bejövő értéket az intervallum jobb peremén kimenő értékkel. Mivel $a = 1 > 0$, ezért a (3.2) bal oldali upwind-sémát fogjuk használni.



1. ábra. Az upwind-séma által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása $h = 0,05$ lépésköz és két különböző τ érték esetén, $t = 2$ időpillanatban

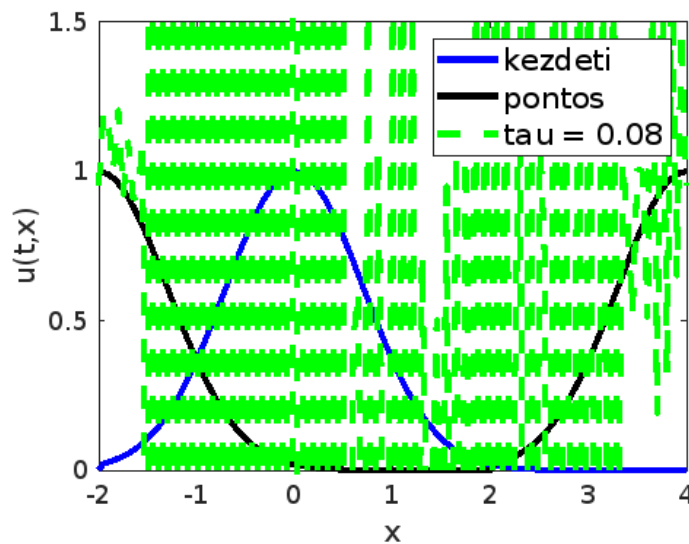
A $\tau = 0,025$ választással $a \frac{\tau}{h} = \frac{1}{2} \leq 1$, ami megfelel a 2.4. Tétel által biztosított stabilitási feltételnek. Az 1. ábra bal oldalán láthatjuk, hogy ekkor az upwind-séma a

várakozásnak megfelelően viselkedik, a numerikus megoldás kellően közel van a pontos megoldáshoz. Észrevehetjük, hogy a numerikus módszer által adott Gauss-görbe maximuma kisebb, mint a pontos megoldásé. A 2. ábrán pedig jól látszik, hogy ha több ideig hagyjuk futni a numerikus módszert, akkor egyre tovább csökken a numerikus megoldás maximuma, a numerikus megoldás pedig egyre kevésbé hasonlít a pontos megoldásra. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező numerikus módszereket disszipatívnak nevezzük, és a gyakorlatban ritkán használjuk ezeket nagy t esetén.



2. ábra. Az upwind-séma által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása $h = 0,05$ és $\tau = 0,025$ lépésközök esetén, $t = 14$ illetve $t = 44$ időpillanatokban

Az 1. ábra jobb oldalán viszont azt láthatjuk, ahogy $a\frac{\tau}{h} = \frac{8}{5} > 1$ esetén instabil lesz a megoldás. Ez jól látszik abból, hogy a 2 körüli lokális maximum nagyobb, mint 1, illetve a 0-tól balra megjelenő nagyméretű oszcillációkból.



3. ábra. Az upwind-séma által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása $h = 0,05$ lépésköz és két különböző τ érték esetén, $t = 4$ időpillanatban

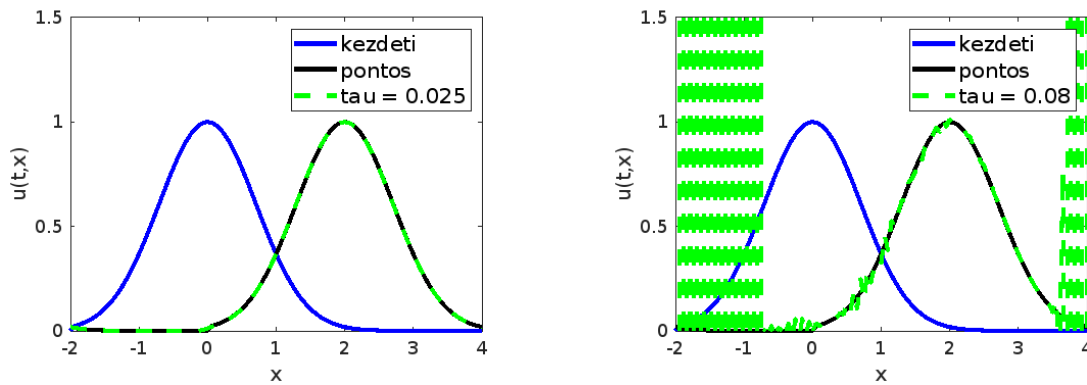
Érdekes azt is megfigyelni, hogy az eltelt t idő növelésével az intervallum egyre

nagyobb részét éri el az instabilitás okozta oszcilláció. A 3. ábrán látható $t = 4$ időpillanatban a vizsgált intervallum teljes egészén elszállt már a numerikus közelítés. Ez nem meglepő, hiszen az idő múlásával a numerikus megoldásban kapott hibák továbbterjednek az a sebesség által meghatározott irányba.

Lax–Wendroff-módszer az egy térdimenziós advekciós egyenletre A (2.6) lineáris Lax–Wendroff képletet az advekciós egyenletre alkalmazva az

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\tau}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + a^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.4)$$

módszert kapjuk, az a sebesség előjelétől függetlenül. Ugyanazt a (3.3) Cauchy-feladatot fogjuk vizsgálni, mint amit az upwind-sémával néztünk, mivel így össze tudjuk hasonlítani a két módszer által adott numerikus megoldást.



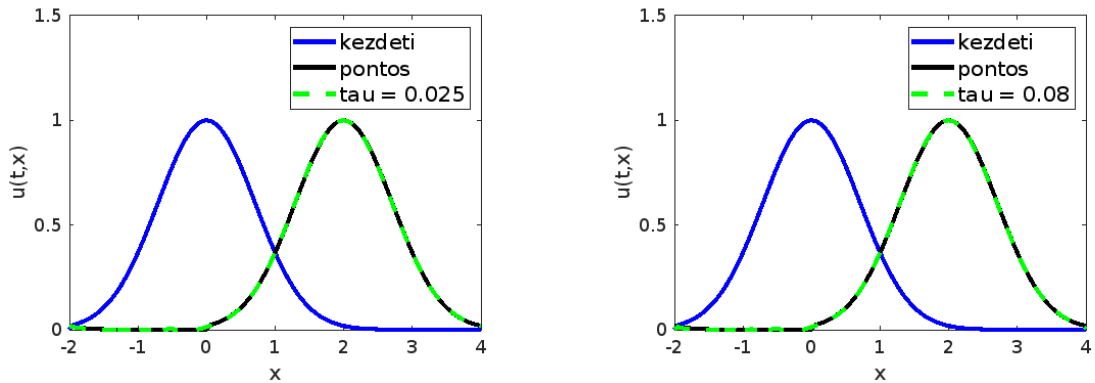
4. ábra. A Lax–Wendroff-módszer által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítva $h = 0,05$ lépésköz és két különböző τ érték esetén, $t = 2$ időpillanatban

A 4. ábrán a Lax–Wendroff-módszerből kapott numerikus megoldásokat láthatjuk. A bal oldalon $\tau = 0,025$ esetén $a \frac{\tau}{h} = \frac{1}{2} \leq 1$, és jól látszik, hogy ezzel a választással a módszer valóban stabil, és szinte a pontos megoldással azonos közelítést ad vissza. A jobb oldalon viszont megint $a \frac{\tau}{h} = \frac{8}{5} > 1$, és egyértelműen instabil lesz a megoldás az intervallum szélein. A 4. ábrán látható $t = 2$ időpillanatban a görbe közepén a pontos megoldáshoz, közel marad a numerikus közelítés, de azt várjuk, hogy több idő elteltével itt is elszálljon.

Magnus-módszer az egydimenziós advekciós egyenletre Ahhoz, hogy a (2.12) vagy a (2.13) Magnus-módszert alkalmazni tudjuk bármilyen egyenletre, először meg kell határoznunk a (2.11)-ben szereplő $Q(u^n)$ mátrixot. Az egy térdimenziós advekció esetén ez egyszerű, hiszen $f(u) \equiv a$, ezért a $Q(u^n)$ mátrix nem függ u^n -től:

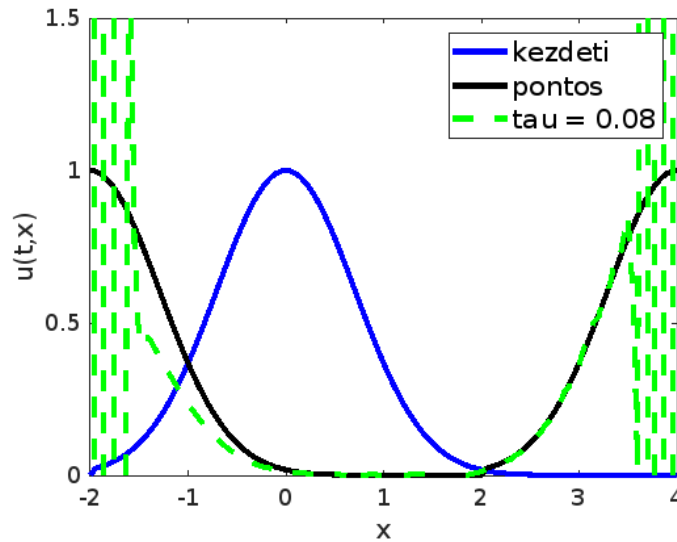
$$Q = \frac{-1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & -a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

A Magnus-módszerrel is a (3.3) feladatot vizsgáljuk először.



5. ábra. Az egylépéses Magnus-módszer által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítva $h = 0,05$ lépésköz és két különböző τ érték esetén, $t = 2$ időpillanatban

Az 5. ábráról úgy látszik, hogy az egylépéses Magnus-módszer stabilabb, mint az előző két véges különbséges módszer, hiszen az $a\frac{\tau}{h} = \frac{8}{5} > 1$ esetben nem láthatóak oszcillációk. Azonban a 6. ábrán láthatjuk, hogy ha több ideig futtatjuk a módszert, mégis instabilitások alakulnak ki. Ez arra enged következtetni, hogy a Magnus-módszerre is létezik valamilyen stabilitási feltétel.



6. ábra. Az egylépéses Magnus-módszer által adott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítva $h = 0,05$ és $\tau = 0,08$ lépésközök esetén, $t = 4$ időpillanatban

Ahogy az a Magnus-módszerről szóló fejezetben tárgyaltuk, a lineáris esetben a kétlépéses módszer ugyanazt a módszert adja meg, mint az egylépéses, ezért azt itt fölösleges vizsgálni.

Godunov-módszer az egydimenziós advekción egyenletre Ahogyan korábban ismertettük, a Godunov-módszerben az általános esetben minden időlépésben (1.6) Riemann-problémákat kell megoldanunk. Azonban az advekción egyenletnél explicit képletünk van a megoldásra, ezért ez a lépés nem okoz problémát. Az $[x_{j-1}, x_j]$ intervallumon az alábbi Riemann-problémát kell megoldanunk:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + a \partial_x u(t, x) = 0 & \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \\ u(t_n, x) = \begin{cases} \bar{u}_{j-1}^n, & \text{ha } x < x_{j-1/2}, \\ \bar{u}_j^n, & \text{ha } x > x_{j-1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

A (2.21) képlet szerint

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t_{n+1}, x) dx,$$

ahol az u függvény a (3.5) Riemann-probléma megoldása. A 3.1. tétel szerint

$$u(t_{n+1}, x) = u(t_n, x - a\tau),$$

amiből következik

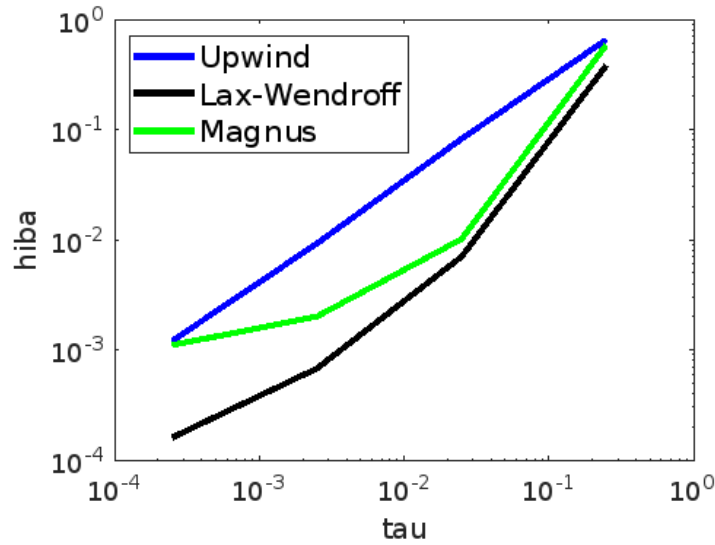
$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t_n, x - a\tau) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2} - a\tau}^{x_{j+1/2} - a\tau} u(t_n, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2} - a\tau}^{x_{j-1/2}} u(t_n, x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2} - a\tau} u(t_n, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} (a\tau \bar{u}_{j-1}^n + (h - a\tau) \bar{u}_j^n) = \left(1 - a\frac{\tau}{h}\right) \bar{u}_j^n + a\frac{\tau}{h} \bar{u}_{j-1}^n = \\ &= \bar{u}_j^n - a\frac{\tau}{h} (\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Látható, hogy ez azonos a (3.2) upwind-sémával, ezért a Godunov-módszert nem tárgyaljuk külön az advekción egyenlet esetén.

Hibaelemzés az advekción egyenletnél Most összehasonlítjuk az eddig vizsgált numerikus módszerekből kapott megoldások hibáit. A hibát az (1.18) norma alapján fogjuk számolni, azaz rögzített $\tau > 0$ érték és $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ index mellett

$$\text{hiba} = \sum_j |u(t_n, x_j) - u_j^n|.$$

Az upwind-sémára és a Lax–Wendroff-módszerre feltettük a konzisztencia vizsgálatánál, hogy a τ és h lépésközök azonos nagyságrendűek, emiatt állandó $\frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$ mellett fogjuk különböző τ értékekre megvizsgálni a hibát a (3.3) feladat esetén. A Magnus-módszert is ugyanazokkal a lépésközökkel vizsgáljuk, azonban érdemes megjegyezni, hogy mivel ott minden lépésben egy mátrix exponenciálisával számolunk, a leggyorsabb módszerekkel is lassabban fut, mint a véges különbséges módszerek. A 7. ábráról leolvashatjuk, hogy mindhárom tesztelt módszer valóban konvergens a lineáris esetben folytonos kezdeti feltétel mellett, hiszen a lépésközzel arányosan csökken a hiba



7. ábra. Az eddig vizsgált módszerek hibái összehasonlítva az advekciós egyenleten, Gauss-görbe kezdeti feltétellel

is. Azt is láthatjuk, hogy a Lax–Wendroff-módszer jobban közelíti a pontos megoldást az upwind-sémánál és a Magnus-módszernél is. Az upwind-sémánál erre számítottunk, hiszen a Lax–Wendroff-módszerben magasabb rendű a konzisztencia, az viszont érdekes eredmény, hogy a Magnus-módszernél is jobb közelítést ad. Ez azt jelenti, hogy a Magnus-módszer nem egy jó módszer a vizsgált problémára, hiszen jóval nagyobb a számításigénye.

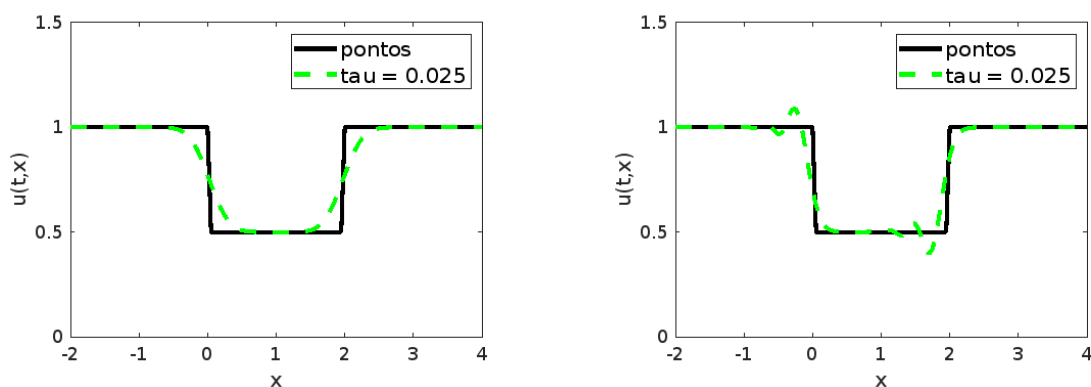
Nem folytonos kezdeti feltételek Eddig láttuk, hogy a stabilitásra vonatkozó feltétel teljesülése mellett folytonos kezdeti feltételek esetén mindegyik vizsgált módszer megfelelő megoldást nyújt. Azonban egy mennyiség kezdeti eloszlása nem mindig egy folytonos függvénnyel írható le, ezért indokolt a nem folytonos kezdeti feltételekre is vizsgálni a numerikus módszerek viselkedését.

Tekintsük a

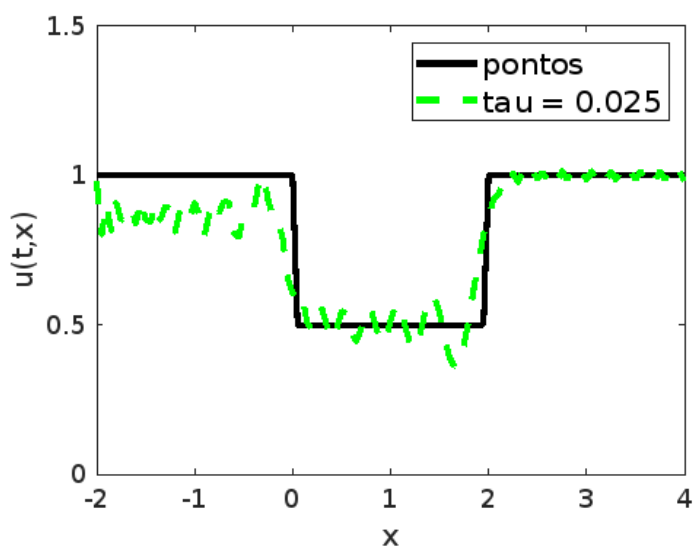
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0 & t > 0, x \in (-2, 4), \\ u(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \\ u(t, -2) = u(t, 4) & t > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Riemann-problémát. Az előző feladathoz hasonlóan itt is egy periodikus peremfeltételt veszünk, azonban a kezdeti feltétel nem folytonos.

A 8. ábrán láthatjuk, hogy a nem folytonos kezdeti feltétellel ellátott feladatnál sem az upwind-séma, sem a Lax–Wendroff-módszer által adott numerikus megoldás nem közelíti jól a pontos megoldást. Az upwind-séma nem tudja követni a szakadás miatti meredek ugrást, a Lax–Wendroff-módszer pedig bár meredekebb pontos megoldást ad, ennek a javult pontosságnak az áráként oszcillációkat láthatunk a konstans részekben.



8. ábra. Az upwind-séma és a Lax–Wendroff-módszer által adott numerikus megoldások $h = 0,05$ lépésközzel



9. ábra. Az egylépéses Magnus-módszer által adott numerikus megoldás $h = 0,05$ lépésközzel

A 9. ábrán pedig láthatjuk, hogy a Magnus-módszer sem ad jó megoldást a (3.6) feladatra, hiszen itt is oszcillál a numerikus megoldás, sőt, a $[-2, 0]$ intervallumon közel sincs a pontos megoldáshoz.

3.2. Burgers-egyenlet egy térdimenzióban

A Burgers-egyenlet egy olyan megmaradási törvény, ami jelentős szerepet játszik az alkalmazott matematikában. Az egyenlet többek között a folyadékok és gázok modellezésében játszik fontos szerepet. A Burgers-egyenlet általános alakja

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx} u,$$

de itt csak azzal az estettel foglalkozunk, ahol a $\nu \geq 0$ ún. diffúziós együttható nullával egyenlő. Tehát a továbbiakban a

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.7)$$

Cauchy-feladatot fogjuk vizsgálni. Az egyenletet átírhatjuk az (1.10) alakba is:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Látszik, hogy ez az egyenlet nemlineáris, emiatt egy érdekes példa lesz arra, hogy a különböző numerikus módszerek mennyire pontosak ilyen esetben. Az advekción egyenlethez hasonlóan a Burgers-egyenletnek is meg tudjuk adni a megoldását, de ez sajnos implicit lesz, és csak fixpontiterációval tudjuk majd egy közelítését kiszámolni.

3.2. Tétel. *A (3.7) Cauchy-feladatnak az $u(t, x) = \Phi(x - u(t, x)t)$ függvény pontos megoldása adott $\Phi \in C^1(\Omega)$ függvény esetén.*

Bizonyítás. A karakterisztikák módszerét fogjuk használni. A

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (3.9)$$

egyenlet egy $\langle f, \nabla u \rangle = 0$ alakú elsőrendű parciális differenciálegyenlet, ahol $f(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ u(t, x) \end{pmatrix}$.

Ekkor a (3.9) Burgers-egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\xi'(s) = f(\xi(s)),$$

azaz

$$\begin{cases} \xi_1'(s) = 1, \\ \xi_2'(s) = u(t, x). \end{cases} \quad (3.10)$$

Látszik, hogy a $\xi_2(s) - u(t, x)\xi_1(s)$ függvény állandó minden s -re, hiszen

$$\frac{d}{ds} (\xi_2(s) - u(t, x)\xi_1(s)) = \xi_2'(s) - u(t, x)\xi_1'(s) = u(t, x) - u(t, x) \cdot 1 = 0.$$

Tehát $V(t, x) = x - u(t, x)t$ első integrálja a Burgers-egyenletnek, mivel állandó a karakterisztikák mentén. Az 1.4. állítás szerint egy $V(t, x)$ függvény pontosan akkor megoldása a (3.9) egyenletnek, ha első integrálja a (3.10) karakterisztikus egyenletnek. Ezért az

$$u(t, x) = \Psi(x - u(t, x)t)$$

függvény megoldása a (3.9) egyenletnek tetszőleges $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ esetén. A (3.7) Cauchy feladatban ki kell elégítenünk az

$$u(0, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

kezdeti feltételt is. Könnyen látszik, hogy a $\Psi = \Phi$ választással az $u(t, x) = \Phi(x - u(t, x)t)$ függvény megoldása lesz a (3.9) egyenletnek, valamint kielégíti a kezdeti feltételt is, hiszen

$$u(0, x) = \Phi(x - u(0, x)0) = \Phi(x).$$

□

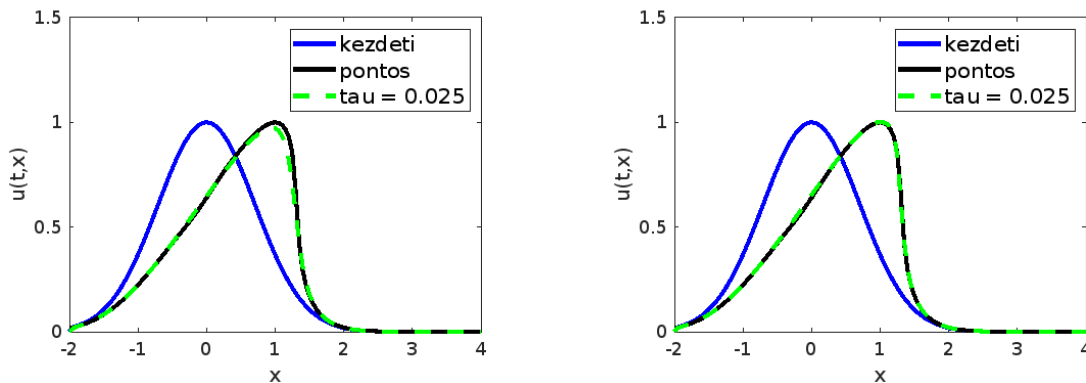
Mivel az advekción egyenlet vizsgálatánál állandó $\frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$ hányadost használtunk, az egyszerűség kedvéért a Burgers-egyenlet vizsgálatánál is $\frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$ lesz a lépésközök aránya minden kísérletben.

Upwind-séma az egy térdimenziós Burgers-egyenletre Abban az esetben, ha $f(u(t, x))$ azonos előjelű minden t és x értékekre, akkor alkalmazhatjuk a (2.1)-(2.2) upwind-séma valamelyik alakját. Mivel a Burgers-egyenletben is a kezdeti értékek tolnak el változó sebességgel, ehhez elég az, hogy $f(u(0, x))$ azonos előjelű minden x értékre. Tekintsük a Burgers-egyenletet az advekciónál is vizsgált Gauss-görbe kezdeti feltétellel:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0 & t > 0, x \in (-2, 4), \\ u(0, x) = e^{-x^2}, & x \in (-2, 4), \\ u(t, -2) = u(t, 4) & t > 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Mivel $e^{-x^2} > 0$ teljesül minden x érték esetén, használhatjuk erre a feladatra a (2.1) bal oldali upwind-sémát. Mivel a Burgers-egyenletben $f(u_j^n) = u_j^n$, a bal oldali upwind-séma az alábbi alakot veszi fel:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - u_j^n \frac{\tau}{h} (u_j^n - u_j^{n+1}).$$



10. ábra. Az upwind-séma és a Lax-Wendroff-módszer által adott megoldás $h = 0,05$ lépésköz esetén, $t = 1$ időpillanatban

A 10. ábra bal oldalán láthatjuk, hogy a leírt upwind-séma közelítő megoldása jól követi a pontos megoldást, azonban a legmeredekebb részen nem képes elérni azt a meredekséget, ami a pontos megoldásnál látható. Ez motivációt ad arra, hogy bonyolultabb módszerekkel is próbálkozzunk.

Lax–Wendroff-módszer az egy térdimenziós Burgers-egyenletre Mivel a (3.7) Burgers-egyenlet nemlineáris, a Lax–Wendroff-módszert a (2.7) Richtmyer-féle két lépéses módszerrel fogjuk implementálni. A (3.8) egyenletben $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, ezért a módszer köztes lépései

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\tau}{2h} \left(\frac{1}{2} (u_{j+1}^n)^2 - \frac{1}{2} (u_j^n)^2 \right),$$

$$u_{j-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_j^n) - \frac{\tau}{2h} \left(\frac{1}{2} (u_j^n)^2 - \frac{1}{2} (u_{j-1}^n)^2 \right),$$

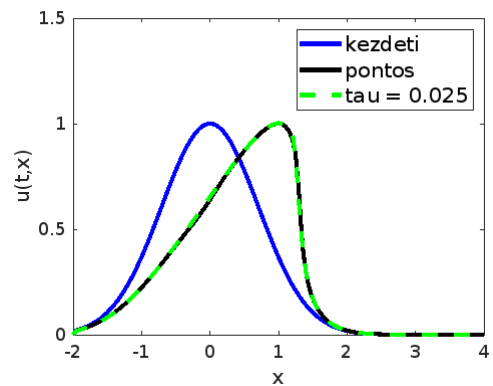
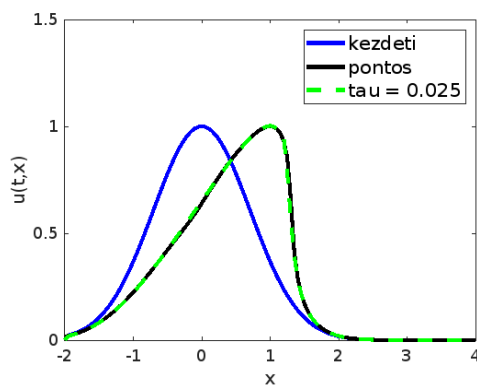
a második lépés pedig

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} \left(\frac{1}{2} (u_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - \frac{1}{2} (u_{j-1/2}^{n+1/2})^2 \right).$$

A 10. ábra jobb oldalán látható a Lax–Wendroff-módszer numerikus megoldása. Az upwind-sémával összehasonlítva látható, hogy a meredek részen valóban meredekebb lesz a numerikus megoldás, tehát a Lax–Wendroff-módszer szemmel láthatóan jobban közelíti a pontos megoldást az upwind-sémánál.

Magnus-módszer az egy térdimenziós Burgers-egyenletre A (2.12) és (2.13) Magnus-módszerekhez először megállapítjuk a (2.11)-beli $Q(u^n)$ mátrixot. Mivel a (3.7) Burgers-egyenletben $f(u_j^n) = u_j^n$,

$$Q(u_n) = \frac{-1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & u_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ -u_0^n & 0 & u_2^n & \ddots & \vdots \\ 0 & -u_1^n & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_j^n \\ 0 & \cdots & 0 & -u_{j-2}^n & 0 \end{pmatrix}.$$



11. ábra. Az egy lépéses és két lépéses Magnus-módszer által adott megoldás $h = 0,05$ lépésköz esetén, $t = 1$ időpillanatban

Az előzőekhez hasonlóan a (3.11) Cauchy-feladatra alkalmazzuk a módszert. Mivel a Burgers-egyenlet nemlineáris, a Magnus-módszer mindkét formáját alkalmazhatjuk rá. A 11. ábrán látható, hogy mindkét módszer megfelelő közelítő megoldást nyújt a Burgers-egyenletre. A hibaelemzésnél majd megvizsgáljuk, hogy a kétlépéses módszer nyújt-e valamilyen előnyt az egy lépéses módszerrel szemben.

Godunov-módszer az egy dimenziós Burgers-egyenletre Ahhoz, hogy a (2.21) Godunov-módszert alkalmazzuk a Burgers-egyenletre, ismernünk kell a

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0 & \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \\ u(t_n, x) = \begin{cases} \bar{u}_{j-1}^n, & \text{ha } x < x_{j-1/2}, \\ \bar{u}_j^n, & \text{ha } x > x_{j-1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (3.12)$$

Riemann-feladat pontos megoldását. Bár a Burgers-egyenletnek nincs explicit megoldása, mégis ismert a Riemann-feladat megoldása, amely az [5] könyv 3. fejezetében található. A megoldás attól függően különbözik, hogy az \bar{u}_{j-1}^n és \bar{u}_j^n értékek közül melyik a nagyobb.

Az egyszerűbb eset az, amikor $\bar{u}_{j-1}^n \geq \bar{u}_j^n$. Ilyenkor a szakadás az $s = \frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2}$ sebességgel mozog, ezzel a jelöléssel a t_{n+1} időpontbeli pontos megoldás

$$u(t_{n+1}, x) = \begin{cases} \bar{u}_{j-1}^n, & \text{ha } x < x_{j-1/2} + s\tau, \\ \bar{u}_j^n, & \text{ha } x > x_{j-1/2} + s\tau. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ha $\bar{u}_{j-1}^n < \bar{u}_j^n$, akkor végtelen sok megoldása van a Riemann-problémának, ezek közül a fizikailag jelentőset ismertetjük. Ebben az esetben a pontos megoldás

$$u(t_{n+1}, x) = \begin{cases} \bar{u}_{j-1}^n, & \text{ha } x < x_{j-1/2} + \bar{u}_{j-1}^n \tau, \\ \frac{x - x_{j-1/2}}{\tau}, & \text{ha } x_{j-1/2} + \bar{u}_{j-1}^n \tau \leq x \leq x_{j-1/2} + \bar{u}_j^n \tau, \\ \bar{u}_j^n, & \text{ha } x > x_{j-1/2} + \bar{u}_j^n \tau. \end{cases} \quad (3.14)$$

A (2.22) CFL-feltétel szerint $\max_j |F'(\bar{u}_j^n)| \leq \frac{h}{\tau}$, a (3.11) vizsgált Burgers-egyenletben pedig $|F'(\bar{u}_j^n)| = |f(\bar{u}_j^n)| = \bar{u}_j^n$, mivel $u(0, x) \geq 0$ kezdeti feltétel esetén minden pillanatban a közelítő megoldás, és emiatt a cellaátlag is nemnegatív. Ebből következik

$$\max_j \bar{u}_j^n \leq \frac{h}{\tau},$$

ahonnan

$$\bar{u}_j^n \tau \leq h \quad \forall j.$$

Ez azt jelenti, hogy $x_{j-1/2} + \bar{u}_{j-1}^n \tau \leq x_{j-1/2} + h = x_{j+1/2}$ és $x_{j-1/2} + \bar{u}_j^n \tau \leq x_{j-1/2} + h = x_{j+1/2}$ teljesülnek, vagyis a cellák valóban nem hatnak ki egymás pontos megoldására.

Azt is érdemes észrevenni, hogy nemnegatív cellaátlagok esetén az $\bar{u}_{j-1}^n \tau$, $\bar{u}_j^n \tau$ és $s\tau$ értékek is nemnegatívak. Ezért az $[x_{j-1}, x_{j-1/2}]$ intervallumon biztosan \bar{u}_{j-1}^n lesz a Riemann-feladat megoldásának értéke mindkettő esetben.

Ezekkel az ismeretekkel már meg tudjuk határozni az

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx$$

frissített cellaátlagot.

A (3.13) első esetben

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j-1/2}+s\tau} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+s\tau}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j-1/2}+s\tau} \bar{u}_{j-1}^n dx + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+s\tau}^{x_{j+1/2}} \bar{u}_j^n dx = \frac{s\tau}{h} \bar{u}_{j-1}^n + \left(1 - \frac{s\tau}{h}\right) \bar{u}_j^n = \\ &= \bar{u}_j^n + \frac{\tau(\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n)}{2h} \bar{u}_{j-1}^n - \frac{\tau(\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n)}{2h} \bar{u}_j^n = \\ &= \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{2h} ((\bar{u}_j^n)^2 - (\bar{u}_{j-1}^n)^2). \end{aligned}$$

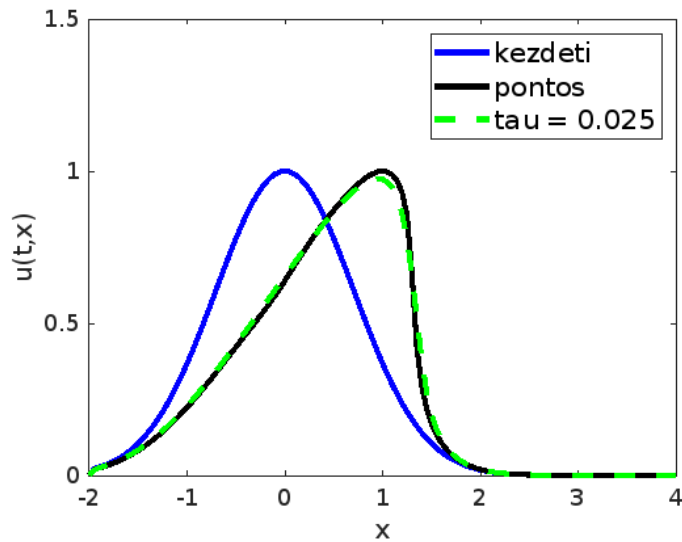
A (3.14) második esetben

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j-1/2}+\bar{u}_{j-1}^n\tau} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+\bar{u}_{j-1}^n\tau}^{x_{j-1/2}+\bar{u}_j^n\tau} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+\bar{u}_j^n\tau}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(t_{n+1}, x) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j-1/2}+\bar{u}_{j-1}^n\tau} \bar{u}_{j-1}^n dx + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+\bar{u}_{j-1}^n\tau}^{x_{j-1/2}+\bar{u}_j^n\tau} \frac{x - x_{j-1/2}}{\tau} dx + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}+\bar{u}_j^n\tau}^{x_{j+1/2}} \bar{u}_j^n dx = \\ &= \frac{\tau}{h} (\bar{u}_{j-1}^n)^2 + \frac{\tau}{2h} ((\bar{u}_j^n)^2 - (\bar{u}_{j-1}^n)^2) + \left(1 - \frac{\bar{u}_j^n\tau}{h}\right) \bar{u}_{j-1}^n = \\ &= \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{2h} ((\bar{u}_j^n)^2 - (\bar{u}_{j-1}^n)^2). \end{aligned}$$

Mindkét esetben ugyanazt a képletet kaptuk az új cellaátlagra, ezért a módszerben nem kell különbséget tennünk a két eset között. Érdekességként megfigyelhetjük, hogy ha a Burgers-egyenletnek a

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

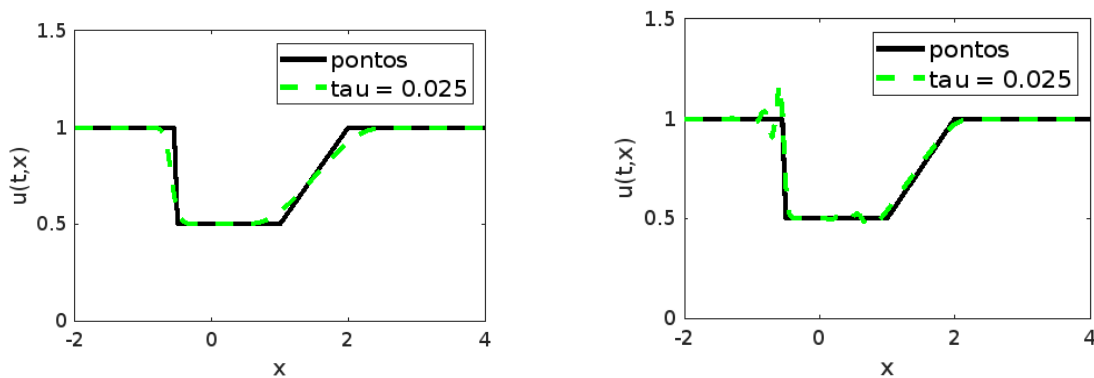
alakjára alkalmazzuk az upwind-módszerhez hasonlóan az (1.13)-(1.14) bal oldali közelítéseit az időbeli és térbeli deriváltaknak, akkor ugyanezt a módszert kapjuk, a cellaátlagok helyett pontbeli értékekre.



12. ábra. A Godunov-módszer által adott numerikus megoldás $h = 0,05$ lépésközzel

A 12. ábrán látható, hogy a Godunov-módszer is megfelelő numerikus megoldást ad a Burgers-egyenletre. Szemmel is látható, hogy ez a numerikus megoldás nem illeszkedik olyan jól a pontos megoldásra, mint például a Lax–Wendroff-módszer numerikus megoldása, azonban a Godunov-módszer erősségét inkább a nem folytonos kezdeti feltételeknél várjuk el.

Nem folytonos kezdeti feltételek Az advekcióhoz hasonlóan a Burgers-egyenletnél is megvizsgáljuk a numerikus módszerek viselkedését nem folytonos kezdeti feltételek esetén. Azt várjuk, hogy itt a Godunov-módszer ki fog tűnni a többi módszer közül a konzervatív tulajdonsága miatt.

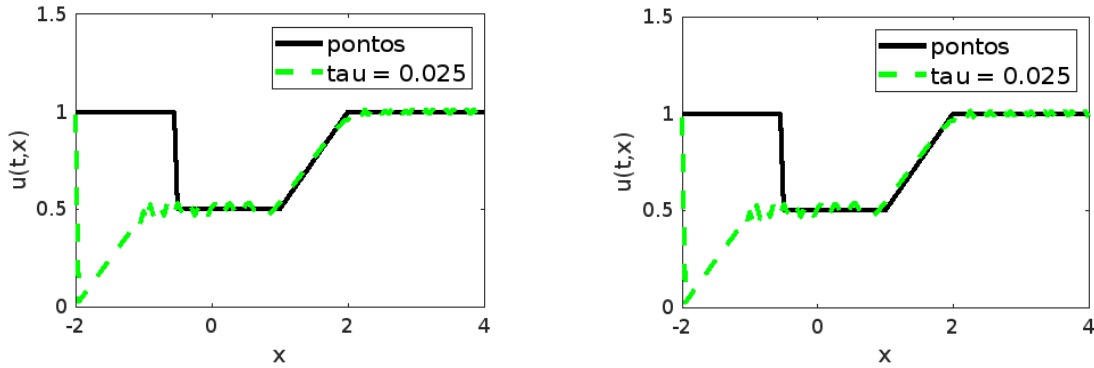


13. ábra. Az upwind-séma és a Lax–Wendroff-módszer által adott megoldás $h = 0,05$ lépésköz esetén, $t = 2$ időpillanatban

A vizsgált kezdeti feltétel megegyezik az advekcionál vizsgálttal:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in (-2, 4), \\ u(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \\ u(t, -2) = u(t, 4) & t > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Ennek a Riemann-problémának a pontos megoldását ki tudjuk számolni a (3.14) képlet szerint, azzal az egy különbséggel, hogy itt a periodikus peremfeltétel miatt az intervallum bal peremén újra bejön a magasabb u_ℓ érték, ezért ott gyakorlatilag egy másik Riemann-problémát kapunk, amelyet a (3.13) képlettel tudunk megoldani. Veszélyt okozhat, hogy elég idő elteltével a két Riemann-probléma utoléri egymást, ezért olyan időpontban vizsgáljuk az egyenletet, amikor ez még nem következett be.

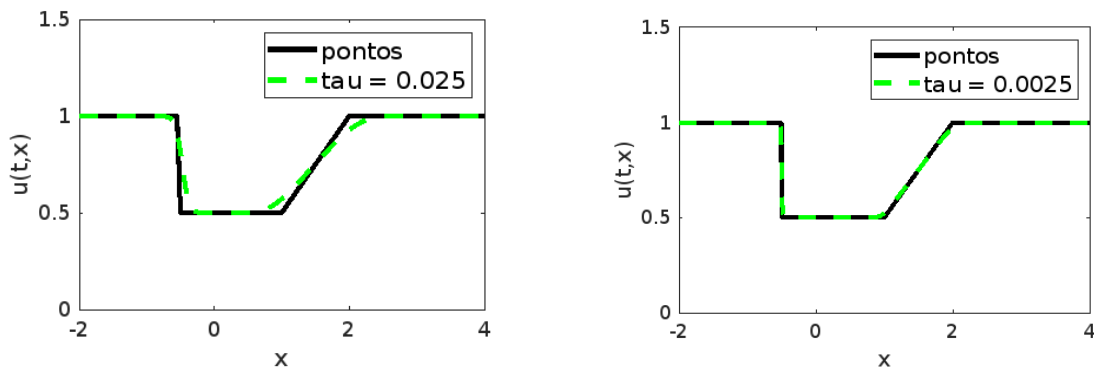


14. ábra. Az egy lépéses és két lépéses Magnus-módszer által adott megoldás $h = 0,05$ lépésköz esetén, $t = 2$ időpillanatban

A 13. ábrán láthatjuk, hogy az upwind-séma elfogadható megoldást ad a nem folytonos feladatra. Azonban azt észben kell tartanunk, hogy az upwind-séma csak akkor működik, ha a terjedés sebessége mindig és mindenhol azonos előjelű az egyenletben, ezért nem mindig használható a való életben. A Lax–Wendroff-módszer által adott megoldás is jól követi a megoldást az intervallum nagy részén, azonban a meredek részeknél nagy oszcillációk jelennek meg. Az ábrán látható legnagyobb oszcillációnál a numerikus megoldás eléri az 1,17 értéket is, ami nem reális, hiszen egyértelmű, hogy a valódi megoldás sehol nem lehet 1-nél nagyobb a kezdeti feltétel miatt. Az alkalmazás jellegétől függően ez akár elfogadhatatlan is lehet, ezért érdemes alkalmasabb módszert keresnünk.

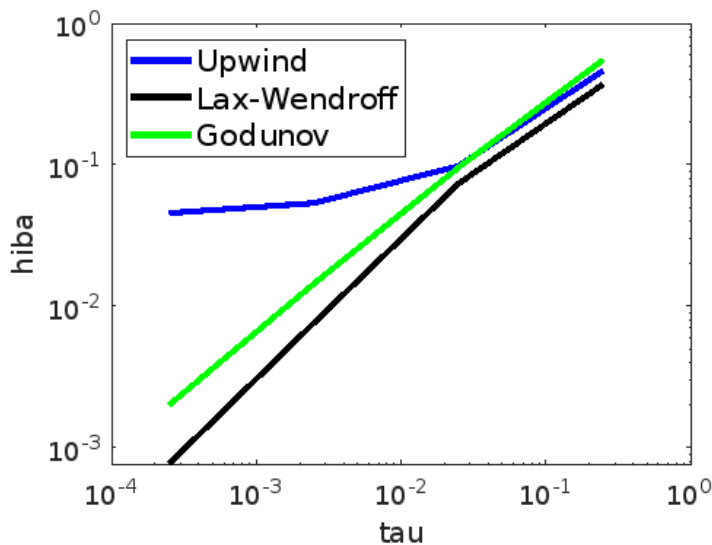
A 14. ábrán a Magnus-módszer megoldásait láthatjuk. Egyértelmű, hogy ezek a megoldások nem megfelelőek. Az a sejtésem, hogy a jelenlegi implementációval nem tudja a Magnus-módszer kezelni az olyan nem folytonos periodikus feladatokat, ahol nem nulla a bal oldalon bejövő mennyiség. Valószínűnek tartom, hogy ez a probléma kiküszöbölhető valamilyen módon, de ebben a dolgozatban ezt nem vizsgáljuk bővebben.

A 15. ábra bal oldalán látható a Godunov-módszer által adott megoldás $h = 0,05$ érték esetén. Szabad szemmel ez a megoldás nagyon hasonlít a 13. ábrán bal oldalon



15. ábra. A Godunov-módszer által adott megoldás $h = 0,05$, illetve $h = 0,005$ lépésköz esetén, $t = 2$ időpillanatban

látható megoldásra, amelyet az upwind-sémából kaptunk. A 15. ábra jobb oldalán azonban látható, hogy a τ és h lépésközök csökkentésével egy olyan numerikus megoldást ad a Godunov-módszer, ami az egész intervallumon rásimul a pontos megoldásra.



16. ábra. Három módszer hibája a Burgers-egyenleten, nem folytonos kezdeti feltétellel

Hibaelemzés a Burgers-egyenleten nem folytonos kezdeti feltétel mellett
 Korábban említettük, hogy a Godunov-módszer szélesebb körben alkalmazható, mint az upwind-séma vagy a Lax-Wendroff-módszer, most pedig azt vizsgáljuk meg, hogy a hibája hogyan viszonyul a többi módszeréhez. Mivel a Magnus-módszer mindkét változata szemmel láthatóan rossz eredményt adott a feladatra, azoknak a hibáját nem vizsgáljuk.

A 16. ábrán találjuk az upwind-séma, a Lax-Wendroff-módszer és a Godunov-módszer hibáit különböző lépésközök esetén. Az upwind-módszer konvergenciája je-

lentősen lassult a 7. ábrán látotthoz képest, sőt, abban sem lehetünk biztosak, hogy ebben az esetben egyáltalán konvergál-e. A Lax–Wendroff-módszer bár a legkisebb hibát okozza a három módszer közül, a 13. ábrán láttuk, hogy a numerikus megoldásban nemkívánatos oszcillációk vannak.

A Godunov-módszer szinte azonos sebességgel konvergál, mint a Lax–Wendroff-módszer, viszont semmilyen oszcillációkat nem vezet be a numerikus megoldásban. Ez azt jelenti, hogy a Godunov-módszernek valódi előnyei vannak a többi vizsgált módszerrel szemben, ha nemlineáris és nem folytonos kezdeti feltételű feladatra keresünk numerikus módszert.

Összefoglalás

A numerikus módszerek bemutatása után megvizsgáltuk azokat a gyakorlatban egy lineáris és egy nemlineáris egyenleten. A lineáris esetben azt láttuk, hogy folytonos kezdeti feltétel mellett minden vizsgált módszer kielégítő közelítő megoldást adott a feladatra. Nemfolytonos kezdeti feltétel mellett azonban azt tapasztaltuk, hogy a vizsgált módszerek a szakadásoknál nem képesek megfelelően közelíteni a pontos megoldást.

A Burgers-egyenlet vizsgálatánál is hasonlóakat tapasztaltunk, sőt az itt bemutatott formában a Magnus-módszer megoldása használhatatlan volt a nemfolytonos esetben, az upwind-séma pedig csak nagyon lassú sebességgel konvergált. Ezzel szemben a Godunov-módszerről és a Lax–Wendroff-módszerről láttuk, hogy gyorsan konvergálnak, viszont a Godunov-módszer nem produkált olyan oszcillációkat, amiket a Lax–Wendroff-módszernél láttunk. Ez mutatja, hogy a konveratív módszerek valóban alkalmasak a nemlineáris, nemfolytonos kezdeti feltételű feladatok megoldására.

Irodalomjegyzék

- [1] Besenyei Ádám - Komornik Vilmos - Simon László: *Parciális differenciálegyenletek*, Typotex, 2014.
- [2] Casas F. és Iserles A.: Explicit Magnus expansions for nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(19), 5445–5461, 2006.
- [3] Courant, R., Friedrichs, K. O. és Lewy, H.: On the partial difference equations of mathematical physics, *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), 215-234, 1967.
- [4] Faragó István - Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*, Typotex, 2011.
- [5] LeVeque, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Basel, 1992.
- [6] Magnus, W.: On the exponential solution of differential equations for a linear operator, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7(4), 649-673, 1954.
- [7] von Neumann, J. és Richtmyer, R. D.: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *Journal of Applied Physics*, 21(3), 232–237, 1950.