

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Primál-duál algoritmusok nagyméretű optimalizációs feladatokra

Kelemen Anna

Szakdolgozat

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Jüttner Alpár



Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Definíciók, tételek	4
2. A teljes párosítások poliédere	6
Páros gráfban	6
Általános gráfban	7
3. Tört párosítás pakolások	10
Párosítás pakolás páros gráfban	11
Párosítás pakolás nem páros gráfban	13
Maximális pakolás	13
Padberg-Rao algoritmus minimális páratlan vágás megtalálására	14
Minimális költségű 1 értékű pakolás	15
4. Lagrange-relaxáció	17
Minimális költségű 1 értékű pakolás szubgradiens algoritmussal	17
Maximális párosítás pakolás	21
Volume algoritmus	22
5. Oszlopgenerálás	29
Maximális párosítás pakolás	29
Minimális költségű 1 értékű párosítás pakolás	31
Dantzig-Wolfe dekompozíció	34
Lagrange-relaxáció és oszlopgenerálás	35
Stabilizációs technikák	40
Büntető függvények	41
Belső pontos módszerek	41
Simítás és külső-belső szeparáció	42
6. Garg-Könemann közelítő algoritmus	47
Maximális tört párosítás pakolás	47
Hivatkozások	54

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Jüttner Alpárnak a témaválasztásban és a szakdolgozat elkészítésében nyújtott támogatását, a konzultációink során rám szánt idejét, továbbá azt, hogy továbbtanulási szándékaimban is megerősített.

Bevezetés

A pakolási és fedési feladatok széles körben vizsgált problémák, egész és tört megoldású esetben is. Egy gráfban különböző feltételeknek megfelelően pakolhatunk például utakat, feszítőfákat, párosításokat. A teljes párosítások pakolása páros gráfokban jól megoldott probléma, nem páros gráfok esetén azonban az egész értékű pakolás NP-teljes, a tört pakolásra pedig nem ismert erősen polinomiális algoritmus.

Egy gráf teljes párosítás pakolásainak poliédere egy nagyméretű, sok egyenlőtlenség által meghatározott poliéder. Az ilyen poliédereken történő optimalizációs feladatok megoldására általánosan alkalmazott módszer többek között az oszlopgenerálás és a Lagrange-relaxáció. Ezek mellett a dolgozatban egy pakolási feladatokra alkalmazható közelítő, kombinatorikus algoritmust is bemutatunk.

Az első fejezetben ismertetjük a dolgozatban bemutatásra kerülő módszerek és tételek megértéséhez szükséges alapvető tételeket és definíciókat.

A második fejezetben meghatározzuk a teljes párosítások poliéderét leíró egyenlőtlenségrendszert. Az [1] bizonyítását némileg általánosítva egy algoritmust is adunk a poliéder pontjainak teljes párosítások konvex kombinációjaként való előállítására. Az általános esetben használható leírás mellett kitérünk a páros gráfoknál alkalmazható egyszerűbb alakra is.

A harmadik fejezetben a maximális tört teljes párosítás pakolásra és a minimális 1 értékű pakolásra adunk egy megoldást a második fejezetben felírt teljes párosítás poliédert felhasználva. Külön vizsgálunk egy páros gráfoknál alkalmazható egyszerűbb eljárást, és egy nem páros gráfok esetén is működő vágósíkos algoritmust.

A negyedik fejezetben a Lagrange-relaxáció módszerét ismertetjük, majd ezt alkalmazva is megoldjuk a két vizsgált feladatot. A Lagrange-függvény optimumának meghatározására alkalmazható módszerek közül a szubgradiens- és volume [3] algoritmusokat mutatjuk be.

Az ötödik fejezetben először oszlopgenerálással oldjuk meg a két problémát, majd részletezzük ennek az eljárásnak a hátrányait, és az ezek kiküszöbölésére alkalmazható technikákat. Ezek közül egyet, a simítás (smoothing) módszerét részletesen is ismertetjük.

Az utolsó, hatodik fejezetben Garg és Könemann [11] folyam- és pakolási problémák közelítő megoldására kifejlesztett kombinatorikus algoritmusát adaptáljuk a maximális tört teljes párosítás pakolási feladatra.

1. Definíciók, tételek

Ebben a fejezetben ismertetjük a dolgozatban használt fontosabb definíciókat és tételeket. A lineáris optimalizálási feladatok felírásához és megoldásához használt alapvető fogalmak közé tartozik a poliéder, primál és duál feladat, valamint a TU mátrixok definíciója. Az ilyen feladatok megoldása során gyakran használjuk a dualitás tételt, egy megoldás optimális voltának ellenőrzésére pedig az optimalitási feltételt.

1.1. Definíció (poliéder). Affin félterek metszete, azaz $\{x : Ax \leq b\}$.

1.2. Definíció (konvex burok). Az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex burka az a legszűkebb $\text{conv}(X)$ konvex halmaz, amely tartalmazza X -et. Ez az X -beli pontok konvex kombinációinak halmaza.

A lineáris programozás (LP) alapproblémája a $\max \{cx : x \geq 0, Ax \leq b\}$ primál feladat megoldása, az ehhez tartozó duális feladat pedig a $\min \{yb : yA \geq c\}$.

1.3. Tétel (Gyenge dualitás). Legyen $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $D = \{y : yA \geq c\}$. Ekkor $cx \leq yb \quad \forall x \in P, \quad \forall y \in D$.

1.4. Tétel (Erős dualitás). Ha $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $D = \{y : yA \geq c\}$ és $P \neq \emptyset$ vagy $D \neq \emptyset$, akkor $\max \{cx : x \in P\} = \min \{yb : y \in D\}$.

1.5. Tétel (optimalitási feltétel). Legyen $x \in P$ és $y \in D$. Ekkor x és y pontosan akkor optimális megoldások, ha $cx = yb$ és minden i -re, ahol $x_i > 0$, ott $ya_i = c_i$.

1.6. Definíció (teljesen unimoduláris (TU) mátrix). Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ teljesen unimoduláris, ha minden négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1 .

Ismert példák TU mátrixokra irányított gráfok és páros gráfok incidenciamátrixai. Jól használhatóak LP feladatok egészértékű megoldásainak keresésénél a következő állítás miatt:

1.7. Állítás. Legyen A TU mátrix, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Ekkor ha van $x \in P$ megoldás, akkor létezik egész megoldás is, $z \in P \cap \mathbb{Z}^m$. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $\max \{cx : x \in P\}$ véges, akkor létezik optimális egész megoldás is.

A dolgozatban bemutatott módszereket teljes párosítás pakolási feladatokon szemléltetjük, így a gráfelmélet témaköréből is szükség van néhány definíció és tétel ismeretére.

1.8. Definíció (párosítás). A $G = (V, E)$ gráf éleinek M halmaza párosítást alkot, ha semelyik két M -beli élnek nincs közös csúcsa.

1.9. Definíció (teljes párosítás). A $G = (V, E)$ gráf éleinek M halmaza teljes párosítást alkot, ha M párosítás, és a gráf minden csúcsára illeszkedik M -beli él.

1.10. Definíció (vágás). A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmazának $V = \{S, V - S\}$, $S \neq \emptyset$, $S \neq V$ partíciója egy vágás. A vágás élhalmaza azokat az éleket tartalmazza, amelyek egyik vége S -ben, másik vége $V - S$ -ben van.

1.11. Definíció (Gomory-Hu fa [13]). Egy irányítatlan, élkapacitásokkal rendelkező $G = (V, E)$ gráf Gomory-Hu fája egy olyan súlyozott fa, ami minden $s, t \in V$ csúcspárra tartalmazza a minimális $s - t$ vágás értékét, úgy, hogy a minimális $s - t$ vágás értéke a fában az s és t között vezető úton található legkisebb súlyú él súlya.

A szubgradiens módszer megértéséhez elengedhetetlen a szubgradiens fogalmának ismerete, Gauss divergencia tételét pedig a volume algoritmus alkalmazhatóságának bizonyítása során használjuk fel.

1.12. Definíció (szubgradiens). Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkáv függvény. Az x_0 pontban f szubgradiense:

$$\partial f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0) + \langle v, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

1.13. Tétel (Gauss-Osztrogradszkij/divergencia). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt, $\partial\Omega$ zárt, szakaszosan folytonosan differenciálható, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F,$$

ahol ν a $\partial\Omega$ kifelé mutató egységnyi normálvektora és $\operatorname{div}(F) = \partial_1 F_1 + \dots + \partial_n F_n$. Ez konstans F esetén azt jelenti, hogy

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot F = 0.$$

2. A teljes párosítások poliédere

Ebben a fejezetben egy gráf teljes párosításainak poliéderét, azaz a teljes párosítások incidenciavektorainak konvex burkát határozzuk meg. Ez azt jelenti, hogy egy olyan egyenlőtlenségrendszer írunk fel, amelybe tetszőleges élsúlyozást leíró vektort behelyettesítve el tudjuk dönteni, hogy előáll-e teljes párosítások konvex kombinációjaként.

Páros gráfban

Először egy egyszerűbb, speciális esetben, páros gráfoknál vizsgáljuk a teljes párosítások poliéderét. Legyen $G = (S, T; E)$ egy irányítatlan páros gráf. Ha az $x \in \mathbb{R}^E$ egy teljes párosítás karakterisztikus vektora, akkor x minden komponense 0 vagy 1. Mivel egy teljes párosításban minden csúcsra pontosan 1 él illeszkedik, az x teljesíti azt a feltételt, hogy a gráf tetszőleges csúcsán összeadva a rá illeszkedő élekhez tartozó x -komponensek összegét, 1-et kapunk. A konvex burok ezen x -ek konvex kombinációiból áll elő, így egy $x \in \mathbb{R}^E$ vektor akkor van ebben benne, ha $x \geq 0$, és a gráf minden csúcsára teljesül, hogy a rá illeszkedő élekhez tartozó komponensek összege 1.

Ez egyenlőtlenségekkel felírva: $\{x : x \geq 0, Ax = \mathbb{1}\}$, ahol A a G incidenciamátrixa, azaz A sorai a gráf csúcsainak, oszlopai a gráf éleinek felelnek meg, és $A_{i,j} = 1$, ha az i . csúcsra illeszkedik a j . él, különben $A_{i,j} = 0$.

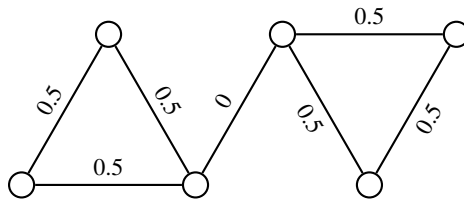
2.1. Állítás. Ha G páros gráf, akkor $P = \{x : x \geq 0, Ax = \mathbb{1}\}$ a teljes párosításainak poliédere, ahol A a G incidenciamátrixa.

Bizonyítás:

Mivel G páros gráf, incidenciamátrixa teljesen unimoduláris mátrix, ezért a P poliéder csúcsai egészek. Ezek az x nemnegativitása miatt csak 0–1 vektorok lehetnek, tehát teljes párosítások incidenciavektorai. Így G pontjai teljes párosítások konvex kombinációjaként állnak elő, azaz ez valóban a teljes párosítások poliédere. \square

Hasonlóképpen a párosítások poliéderét ebből úgy kaphatjuk meg, hogy a feltételeknél az egyenlőségeket egyenlőtlenségekre cseréljük, így a következő állítást kapjuk:

2.2. Állítás. A párosítások poliédere páros gráf esetén a $P = \{x : x \geq 0, Ax \leq \mathbb{1}\}$.



1. ábra

Általános gráfban

A következőkben megmutatjuk a teljes párosítások poliéderének felírását nem páros $G = (V, E)$ gráf esetén. Páros gráf esetén elég, hogy minden csúcsra a rá illeszkedő élek súlyainak összege 1, valamint hogy az élsúlyok nemnegatívak. Nem páros gráfban csupán ezek a feltételek nem elegendőek, mert például az 1. ábrán látható esetben mindegyik teljesül, azonban mégsem áll elő teljes párosítások konvex kombinációjaként.

2.3. Tétel (Edmonds [8]). Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan (nem páros) gráf, amelyben van teljes párosítás. Jelölje a teljes párosítások incidenciavektorainak konvex burkát P , és legyen P' az azon x -eket tartalmazó poliéder, melyekre teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ d_x(v) &= 1 \quad \forall v \in V, \\ d_x(Z) &\geq 1 \quad \forall Z \in Q, \end{aligned}$$

ahol Q a V legalább 3 elemű, páratlan elemszámú részhalmazainak rendszerét jelöli. Ekkor $P = P'$.

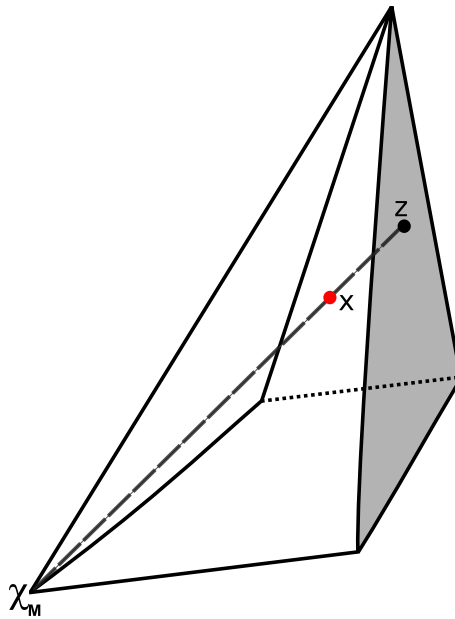
Bizonyítás:

$P \subseteq P'$: Egy P -beli x elem teljes párosítások incidenciavektorainak konvex kombinációja, így teljesül rá, hogy $x \geq 0$, és az is, hogy $\forall v \in V$ -re $d_x(v) = 1$. Tekintsük egy tetszőleges Z páratlan elemszámú csúcshalmazát a gráfnak. Ha veszünk egy teljes párosítást, annak legalább 1 éle olyan, hogy az egyik vége Z -ben, a másik vége pedig a Z -n kívül van, mert a páratlan sok csúcsot Z -ben nem tudjuk mind egymással összepárosítani. Tehát minden teljes párosítás legalább 1 élt tartalmaz at $(Z, V - Z)$ vágásból, így tetszőleges konvex kombinációjukra teljesül a harmadik feltétel is.

$P' \subseteq P$: A másik irányú tartalmazás bizonyításához egy polinomiális algoritmust adunk

egy tetszőleges $x \in P'$ teljes párosítások konvex kombinációjaként történő előállítására.

Kiindulásként válasszunk ki egy M párosításnak megfelelő χ_M pontot, és kössük össze az előállítani kívánt x ponttal. Tekintsük a $\chi_M \rightarrow x$ félegyenest, és vegyük az első metszéspontját a poliéder valamelyik oldalával, legyen ez a metszéspont z . Ha a pontok a félegyenesen $\chi_M - x - z$ sorrendben szerepelnek, akkor x -et elő tudjuk állítani a másik két pont konvex kombinációjaként: $x = \lambda\chi_M + (1 - \lambda)z$. Következően z -t kell előállítanunk teljes párosítások konvex kombinációjaként. Ez a poliéder egy kisebb dimenziós oldalán van rajta, így ezt az eljárást rekurzívan ismételhetjük. Egy ilyen lépést szemléltet a 2. ábra.



2. ábra

Ha az előállítani kívánt pontunk x , akkor most $x = \lambda_1\chi_1 + x'$, és ahhoz hogy x teljes párosítások konvex kombinációja legyen, x' -t kell tovább bontani úgy, hogy

$$x = \lambda_1\chi_1 + \dots + \lambda_n\chi_n$$

legyen, miközben $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ is teljesül.

Ha az M teljes párosításhoz tartozó χ_M pontot választottuk ki, akkor a

$$\max \left\{ \lambda : (x - \lambda\chi_M) \frac{1}{1 - \lambda} \in P' \right\}$$

megoldása adja meg λ értékét. Rögzített λ -ra legyen

$$x_\lambda = (x - \lambda \chi_M) \frac{1}{1 - \lambda}.$$

A következőkben a λ meghatározására adunk egy algoritmust. Legyen C egy páratlan vágás élhalmaza, ennek elemein az x_λ komponenseinek összegére az

$$x_\lambda(C) = \frac{1}{1 - \lambda} (x(C) - \lambda|C \cap M|) \geq 1$$

feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy x_λ a P' eleme legyen. Azaz egy adott C -re, mivel $|C \cap M| \geq 1$, ha $|C \cap M| = 1$, akkor mindig teljesül a feltétel, különben pedig

$$\lambda \leq \frac{x(C) - 1}{|C \cap M| - 1}$$

kell hogy legyen. Így minden páratlan vágás ad egy becslést a λ lehetséges értékére.

Rögzítsünk egy λ -t, és döntsük el róla, hogy jó-e vagy sem, azaz teljesül-e rá, hogy minden C páratlan vágásra

$$x_\lambda(C) = \frac{1}{1 - \lambda} (x(C) - \lambda|C \cap M|) \geq 1.$$

Legyen a \tilde{c} költségfüggvény az, amit úgy kapunk, hogy M élein levonunk x -ből λ -t, a többi komponensét pedig változatlanul hagyjuk:

$$\tilde{c} = (x - \lambda \chi_M) \frac{1}{1 - \lambda}.$$

A \tilde{c} szerint egy C páratlan vágás értéke pont

$$\frac{1}{1 - \lambda} (x(C) - \lambda|C \cap M|) = x_\lambda$$

lesz, ez határozza meg, hogy a jelenlegi λ megfelelő-e. Ha ez kisebb 1-nél, akkor a jelenlegi λ nem jó, mert túl nagy. A minimális költségű páratlan vágásból kapunk egy becslést λ -ra:

$$\lambda \leq \frac{x(C) - 1}{|C \cap M| - 1},$$

ha C a minimális költségű páratlan vágás.

Ha λ új értékét úgy választjuk, hogy ez az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesüljön,

akkor az eddigi minimális vágás, C értéke pontosan 1 lesz. Mivel

$$\tilde{c}(e) = \begin{cases} \frac{x(e) - \lambda}{1 - \lambda} & \text{ha } e \in M \\ \frac{x(e)}{1 - \lambda} & \text{ha } e \notin M, \end{cases}$$

λ csökkentésével a párosításon kívüli éleken \tilde{c} értéke nő, és a páratlan vágások értékei szintén nőnek, $|C \cap M|$ -mel arányosan. Ha egy páratlan vágás értéke az új λ -val is 1-nél kisebb, az csak úgy lehetséges, ha annál a vágásnál, amely a legújabb felső becslést adta λ -ra, szigorúan kevesebb éllel metsz bele M -be. Tehát ha az i . lépésben megtalált minimális költségű páratlan vágást C_i -vel jelöljük, a $|C_i \cap M|$ szigorúan monoton csökkenő sorozat, azaz az algoritmus legfeljebb élszámnyi lépésben végetér.

Legyen egy vágás az M teljes párosításra nézve *pontos*, ha a vágásbeli éleken χ_M komponenseinek összege 1, azaz ha M pontosan 1 éllel metsz bele a vágásba. Egy pontos vágáson az x komponenseinek összege is 1, így ez annak felel meg, hogy x a P' megfelelő lapján található. Minden lépésben kapunk egy új pontos vágást.

Mivel minimális páratlan vágást tudunk polinomiális időben keresni a Padberg-Rao [20] algoritmussal, polinomiális időben elő tudjuk állítani a P' egy pontját teljes párosítások konvex kombinációjaként. A teljes párosítások konvex burka tehát tartalmazza P' -t, a teljes párosítások pedig benne vannak P' -ben, ezért a kettő megegyezik.

Végezetül a teljes párosítások valóban a P' poliéder csúcsai, mert a teljes párosítások incidenciavektorai benne vannak P' -ben, és ezek 0 – 1 vektorok, amelyek nem állnak elő másik poliéderbeli pontok konvex kombinációjaként, így csak csúcsok lehetnek. \square

3. Tört párosítás pakolások

Adott $G = (V, E)$ gráf és $u : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény estén a maximális tört teljes párosítás pakolás feladat a következő:

$$\begin{aligned} & \max \left(\sum_{M \in TP} x_M \right) \\ & \sum_{e \in M} x_M \leq u(e) \quad \forall e \in E \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

ahol TP a G teljes párosításainak halmaza. A feladat lényege tehát az, hogy a gráf teljes párosításaihoz rendeljünk nemnegatív súlyokat úgy, hogy a súlyok összege az összes teljes párosításon maximális legyen.

Ha a kapacitásfüggvényen kívül adott egy $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ költségfüggvény is, akkor a minimális 1 értékű tört teljes párosítás pakolás feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{M \in TP} c_M x_M \right) \\ & \sum_{e \in M} x_M \leq u(e) \quad \forall e \in E \\ & \sum_{M \in TP} x_M = 1 \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $c_M = \sum_{e \in M} c(e)$. Azaz itt úgy rendelünk nemnegatív súlyokat a gráf teljes párosításaihoz, hogy az 1 összsúlyú hozzárendelések közül a minimális költségűt kapjuk.

Az egész értékű pakolás létezésének eldöntése NP-teljes feladat, ezért csak a tört esetet foglalkozunk. Ez páros gráfok esetén egyszerűen megoldható, nem páros gráfoknál azonban nehezebb feladat.

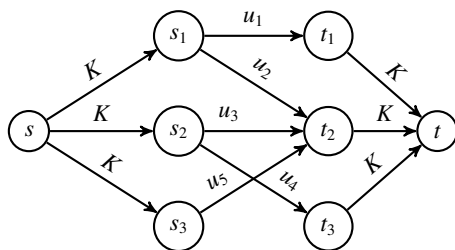
Párosítás pakolás páros gráfban

Páros gráf esetén mindkét általunk megoldani kívánt feladat átalakítható egy-egy folyam problémává.

Vegyünk fel 2 új csúcst a G csúcsai mellé, s -et és t -t. G éleit irányítsuk úgy, hogy mindegyik S -ből T -be mutasson, ezek kapacitása legyen az eredeti kapacitásuk. Az újonnan felvett s -ből mutasson irányított él minden S -beli csúcsba, T minden csúcsából pedig mutassanak t -be irányított élek.

Ha az új él kapacitását a 3. ábrán látható módon egy kellően nagy K számnak, például a kapacitások összegének választjuk, akkor a maximális pakolást megtalálhatjuk a maximális $s - t$ folyam megkeresésével, például a Ford-Fulkerson algoritmussal.

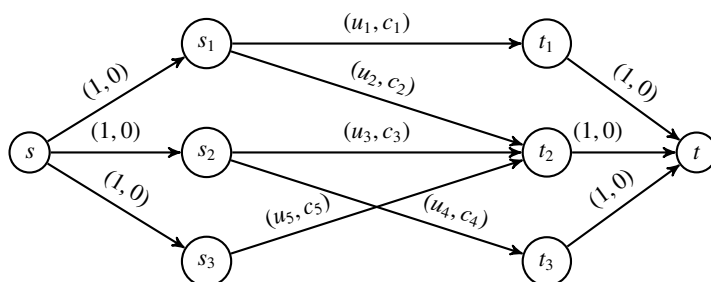
Ha pedig az új él kapacitását 1-nek, költségét 0-nak, az eredeti él költségét pedig a hozzájuk tartozó költségeknek választjuk, akkor az így kapott gráfban egy minimális költségű, $n = |V|$ értékű folyam megfelel a minimális költségű 1 értékű pakolásnak. Erre



3. ábra

egy példa a 4. ábrán látható.

A minimális költségű 1 értékű folyam probléma polinomiális időben megoldható [12].



4. ábra

A minimális költségű 1 értékű párosítás pakolás LP alakja páros gráf esetén

$$\min(cx)$$

$$x \geq 0$$

$$Ax = \mathbb{1}$$

$$Ix \leq u,$$

a maximális teljes párosítás pakolásé pedig

$$\min(y : y \in \mathbb{R})$$

$$x \geq 0$$

$$Ax = \mathbb{1}$$

$$x - uy \leq 0,$$

ahol $\frac{1}{y}$ lesz a maximális pakolás értéke.

Ha az u kapacitásvektor egész, akkor a G incidenciamátrixának TU-sága miatt mindkét

feladat esetében ha van megoldás, akkor 1.7 alapján van egész megoldás is.

Párosítás pakolás nem páros gráfban

Míg páros gráfban mindkét feladat könnyen kezelhető, nem páros gráf esetén ezekre nem ismert erősen polinomiális algoritmus, így más módon kell megoldást keresnünk.

Maximális pakolás

Az előző fejezetben bemutatott teljes párosítás poliéder segítségével szeretnénk felírni a maximális pakolás LP-t egy c költségfüggvénnyel és u kapacitásokkal rendelkező gráfon. Vezessünk be egy új, $y \in \mathbb{R}$ változót, így a következő LP feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \min(y) \\ x &\geq 0 \\ Ax &= 1 \\ Bx &\geq 1 \\ Ix - uy &\leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $\frac{1}{y}$ lesz a maximális pakolás értéke.

Az ilyen feladatokra szokásos megoldási mód a vágósíkos algoritmus. A B mátrix nagy mérete miatt a teljes egyenlőtlenségrendszer megoldása helyett vegyük először ennek egy olyan részmátrixát, amely a mátrix páratlan vágásokra vonatkozó (1) részén kívül minden más sort tartalmaz. Oldjuk meg az így kapott

$$\begin{aligned} \min(y) \\ x &\geq 0 \\ Ax &= \mathbb{1} \\ Ix - yu &\leq 0 \end{aligned} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$
$$\tag{4}$$
$$\tag{5}$$

a feladatot.

Ellenőrizzük le, hogy ez megoldása-e a teljes feladatnak is, azaz teljesül-e minden páratlan vágásra, hogy az élek x szerinti súlyozásával legalább 1 összsúlyú. Ezt úgy tudjuk gyorsan eldönteni, ha megkeressük az ezen élsúlyozás szerinti minimális súlyú

páratlan vágást. Ha ennek a súlya legalább 1, akkor teljesül az összes feltétel, tehát a megoldásunk a teljes feladat optimális megoldása. Ha a súly 1-nél kisebb, akkor a neki megfelelő sorban nem teljesül a feltétel. Ekkor vegyük hozzá ezt a feltételt a megoldandó részfeladatunkhoz, ezzel egy új vágósíkot adva a poliéderhez, és oldjuk meg újra. Ezt ismételjük addig, amíg nem kapunk olyan megoldást, ami minden feltételt teljesít.

3.1. Megjegyzés. Az első lépés visszavezethető egy párosítás keresésre.

Az (2)-(5) által leírt LP-t meg tudjuk úgy oldani, hogy a G gráfot módosítjuk a $G_1 = (V_1, E_1)$ gráffá úgy, hogy felvesszünk $|V|$ új csúcsot: $v'_1, \dots, v'_{|V|}$ -t, és ha az uv él volt G -ben, akkor helyette a G_1 -ben az uv' és $u'v$ éleket húzzuk be. Az így kapott G_1 egy páros gráf, ebben kell teljes párosítást keresnünk, amit könnyen tudunk találni Kuhn [14] magyar módszerével. Ha találtunk egy ilyet, az az eredeti G gráf minden csúcsát pontosan kettőször fedi, így ha minden él súlyát felezzük, egy olyan x élsúlyozást kapunk, amely szerint minden csúcsra pontosan 1 összsúllyal illeszkednek élek, vagyis amelyet kerestünk.

Az algoritmus során minden lépésben szükségünk van a minimális páratlan vágás értékére. Ezt a Padberg-Rao algoritmus [20] alapján a G gráf Gomory-Hu fájáról (1.11) le tudjuk olvasni.

Padberg-Rao algoritmus minimális páratlan vágás megtalálására

3.2. Lemma. [20] Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf a $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyozással, $|V|$ páros. Legyen S egy minimális vágás G -ben. Ha $|S|$ páratlan, akkor S a G -ben található minimális páratlan vágás. Különbön a minimális páratlan vágást egy $S' \subseteq S$ vagy $S' \subseteq V - S$ halmaz határozza meg.

Bizonyítás: [2]

Ha $|S|$ páratlan, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $|S|$ páros, és legyen $A \subseteq V$ egy minimális páratlan vágást meghatározó csúcshalmaz. Jelölje $\delta(H)$ a H csúcshalmaz által meghatározott vágást.

1. eset: $|A \cap S|$ páratlan.

Ha $A \cup S$ vágás, azaz legalább 2 csúcsot elválaszt egymástól V -ben, akkor

$$\sum_{e \in \delta(A \cap S)} c(e) + \sum_{e \in \delta(A \cup S)} c(e) \leq \sum_{e \in \delta(A)} c(e) + \sum_{e \in \delta(S)} c(e).$$

Mivel $A \cup S$ vágás és S minimális vágás,

$$\sum_{e \in \delta(S)} c(e) \leq \sum_{e \in \delta(A \cup S)} c(e).$$

Hasonlóan, mivel $A \cap S$ páratlan vágás és A minimális páratlan vágás,

$$\sum_{e \in \delta(A)} c(e) \leq \sum_{e \in \delta(A \cap S)} c(e).$$

Ebből a kettőből, valamint az ezeket megelőző egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_{e \in \delta(S)} c(e) = \sum_{e \in \delta(A \cup S)} c(e), \text{ valamint } \sum_{e \in \delta(A)} c(e) = \sum_{e \in \delta(A \cap S)} c(e),$$

azaz $A \cap S \subseteq S$ is minimális páratlan vágás.

Ha $A \cup S$ nem vágás (például ha $A \cup S = V$), akkor $\bar{A} = V - A$ is minimális páratlan vágás. Ekkor $\bar{A} \cup S$ vágás, mert nem tartalmazza az összes csúcsot. Innen a korábban leírtakhoz hasonlóan azt kapjuk, hogy $\bar{A} \cap S \subseteq S$ is minimális páratlan vágás.

2. eset: $|A \cap S|$ páros.

Ekkor $\bar{S} = V - S$ ugyanazt a vágást határozza meg, mint S , és $|A \cap \bar{S}|$ páratlan. Innen ismét alkalmazhatjuk az 1. esetben leírtakat, melyek alapján $V - S$ egy részhalmazáról derül ki, hogy szintén minimális páratlan vágás. \square

A lemma alapján az algoritmus a következő: ha S egy minimális vágás, akkor vagy páratlan elemszámú és nincs további teendők, vagy pedig ha nem, akkor rekurzívan haladunk tovább az S , illetve $V - S$ összehúzásával kapott gráfokon. A G Gomory-Hu fáján alkalmazva az algoritmust a minimális s -et és t -t elválasztó páratlan vágást úgy tudjuk megtalálni, hogy vesszük a fában az s -et t -vel összekötő utat, és valamelyik végéről elindulunk a másik csúcs felé, minden lépésben számontartva, hogy az aktuális vágás páratlan-e. (A gráfnak páros sok csúcsa van, így ha az egyik csúcshalmaz mérete páratlan, akkor a másiké is.) A páratlanok közül a legkisebb lesz a két csúcsot elválasztó minimális páratlan vágás értéke.

Minimális költségű 1 értékű pakolás

Jelölje továbbra is A a G gráf incidenciamátrixát, B pedig a G páratlan vágásainak incidenciamátrixát, így a minimális költségű, 1 értékű pakolást a következőképpen tudjuk

felírni:

$$\min(cx)$$

$$x \geq 0$$

$$Ax = \mathbb{1}$$

$$Bx \geq \mathbb{1}$$

$$Ix \leq u.$$

A megoldás ugyanúgy zajlik, mint a másik feladat esetében. Kezdetben itt is a B részmatrixon kívül a mátrix összes sorát bevesszük a megoldandó részfeladatok közé, keresünk egy ennek megfelelő élsúlyozást, és ellenőrizzük, hogy teljesül-e az összes feltétel. A feltételek közül itt is akkor sérül valamelyik, ha a minimális páratlan vágás értéke 1-nél kisebb, ez pedig leolvasható a Gomory-Hu fáról.

Ha megoldjuk a fenti LP feladatok valamelyikét, megoldásként kapunk egy x vektort, ami a gráf éleinek optimális súlyozását írja le. Ebből a vektorból az optimális megoldásban szereplő teljes párosításokat és a hozzájuk tartozó súlyokat úgy tudjuk megkapni, hogy az x pontot előállítjuk a teljes párosítás poliéder csúcsainak konvex kombinációjaként. Ezt a 2.3 tétel bizonyításában szereplő algoritmust alkalmazva polinomiális időben meg tudjuk tenni.

4. Lagrange-relaxáció

A Lagrange-relaxáció egy általános módszer nehezen kezelhető LP feladatok megoldásának megtalálására. Az eredeti, nehezen megoldható feladat bizonyos feltételeit relaxáljuk, az így kapott könnyebb feladat megoldásait pedig felhasználhatjuk az eredeti feladat megoldásának becslésére.

Tegyük fel, hogy van egy alapeladat, melynek ismert a megoldáshalmaza: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, ezen szeretnénk egy célfüggvény szerint optimalizálni. Az alapeladaton kívül adottak még további peremfeltételek is, olyan megoldást keresünk, ami ezeknek is megfelel. A Lagrange-relaxáció alap gondolata, hogy a peremfeltételeket relaxáljuk, azaz nem követeljük meg a szigorú teljesülést, azonban ha sérülnek, azt a célfüggvényben büntetjük. Erre egy λ vektort használunk, majd egy új célfüggvényt írunk fel, amely minden megfelelő λ -ra felső-/alsó becslése lesz az eredeti optimumnak, aszerint hogy maximalizálás vagy minimalizálás szerepel az eredeti feladatban.

Például legyen adott az X alaphalmaz, ezen keressük a c célfüggvény szerint $\min\{cx\}$ -et. Ha a peremfeltételek $Ax \leq b$ alakúak, ezeket a $\lambda \geq 0$ -val relaxálva a Lagrange-relaxált

$$L(\lambda) = \min\{cx + \lambda(Ax - b) : x \in X\}.$$

Ha valamelyik feltétel sérül, akkor ott $Ax > b$, és így $\lambda(Ax - b) \geq 0$, tehát a célfüggvénybe pozitív tagként kerül be, így valóban büntetjük a feltétel nem teljesülését.

Minimális költségű 1 értékű pakolás szubgradiens algoritmussal

Írjuk fel újra az előző fejezetben meghatározott teljes párosítás poliédert, és egészítsük ki azokkal a feltételekkel, hogy minden él súlya a hozzá tartozó kapacitáskorlát, $u : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ alatt van:

$$\min(cx)$$

$$x \geq 0$$

$$Ax = 1$$

$$Bx \geq 1$$

$$Ix \leq u.$$

Ez a minimális költségű 1 értékű pakolás LP alakja. Az alapfeladat az, hogy x a párosítás poliéder eleme, a peremfeltételek pedig a kapacitáskorlátok betartásának felelnek meg. A peremfeltételeket a $\lambda \geq 0$ -val relaxálva a Lagrange-relaxált a következő:

$$L(\lambda) = \min \{cx + \lambda(Ix - u) : x \in P\},$$

ahol P a teljes párosítások poliédere. Átrendezve

$$L(\lambda) = \min \{(c + \lambda)x : x \in P\} - \lambda u.$$

Ha az $Ix \leq u$ feltételek közül például az i . sérül, akkor $(Ix)_i > u_i$, tehát ha az ehhez a sorhoz tartozó $\lambda_i > 0$, akkor ez a sérülő feltétel egy pozitív taggal kerül be a célfüggvénybe, azaz büntetjük a feltétel nem teljesülését.

4.1. Állítás. $L(\lambda)$ minden $\lambda \geq 0$ -ra alsó becslése a minimális költségű 1 értékű pakolás költségének.

Bizonyítás:

Legyen $\alpha = \min \{cx : x \in P, Ix \leq u\}$. Az állítás igaz, ha $L(\lambda) \leq \alpha$ minden $\lambda \geq 0$ -ra. Legyen x' a peremfeltételeket is tartalmazó feladat optimális megoldása. Ekkor mivel $Ix' \leq u$ és $\lambda \geq 0$, így $\lambda(Ix' - u) \leq 0$, tehát:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min \{cx + \lambda(Ix - u)\} \\ &\leq cx' + \lambda(Ix' - u) \\ &\leq cx', \end{aligned}$$

azaz $L(\lambda)$ valóban alsó becslése a minimális 1 értékű pakolás költségének. \square

Így a legjobb alsó becslést a minimális 1 értékű pakolás költségére $L(\lambda)$ maximalizálásával érhetjük el. Sőt, mivel x -ről nem követeljük meg, hogy egész értékű legyen, az alábbi állítás is teljesül:

4.2. Állítás. A Lagrange-relaxált optimuma és az eredeti feladat optimuma megegyezik, azaz

$$\begin{aligned} &\max \{L(\lambda) : \lambda \geq 0\} \\ &= \min \{cx : x \in P, Ix \leq u\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

A párosítás poliédert felírhatjuk egyenlőségek nélkül, csak egyenlőtlenségekkel is:

$$\begin{aligned}
 P &= x \in \mathbb{R}^m \\
 &-x \leq 0 \\
 &Ax \leq 1 \\
 &-Ax \leq -1 \\
 &-Bx \leq -1,
 \end{aligned}$$

ahol A a G , B pedig a G páratlan vágásainak incidenciamátrixa, m pedig a gráf éleinek száma. Legyen $Q = [-I, A, -A, -B]^T$ és $b = [0, 1, -1, -1]^T$. A minimális 1 értékű pakolást így $\max \{cx : Qx \leq b\}$ -re tudjuk átírni, ahol $-cx$ lesz a minimális költségű pakolás értéke.

$$\begin{aligned}
 \tilde{L} &= \max \{L(\lambda) : \lambda \geq 0\} \\
 &= \max_{\lambda \geq 0} \{\min \{cx + \lambda(Ix - u) : Qx \leq b\}\} \\
 \tilde{L} &= \max_{\lambda \geq 0} \{\min \{(c + \lambda I)x : Qx \leq b\} - \lambda u\}
 \end{aligned}$$

A belső, minimalizálni kívánt kifejezéshez tartozó duális feladat:

$$\max_{y \geq 0} \{y(-b) : y(-Q) = c + \lambda I\},$$

így

$$\begin{aligned}
 \tilde{L} &= \max_{\lambda \geq 0} \left\{ \max_{y \geq 0} \{y(-b) : y(-Q) = c + \lambda I\} - \lambda u \right\} \\
 &= \max_{y \geq 0, \lambda \geq 0} \{y(-b) + \lambda(-u) : y(-Q) + \lambda(-I) = c\}
 \end{aligned}$$

Ennek ismét a duálisát véve

$$\begin{aligned}
 \tilde{L} &= \min \{cx : -Qx \geq -b, -Ix \geq -u\} \\
 &= \min \{cx : Qx \leq b, Ix \leq u\},
 \end{aligned}$$

amivel visszakaptuk az eredeti feladatot, azaz a két optimum valóban megegyezik. \square

Tehát az optimum megtalálásához

$$L(\lambda) = \min \{(c + \lambda)x : x \in P\} - \lambda u$$

maximumát kell megkeresnünk. Rögzített $\lambda \geq 0$ -ra $L(\lambda)$ értéke a $(c + \lambda)$ költségfüggvény szerinti minimális költségű teljes párosítás költsége és λu különbsége. Edmonds [9] algoritmusával a minimális költségű teljes párosítást polinom időben meg tudjuk határozni, így rögzített λ -ra ki tudjuk számolni a függvény értékét.

Könnyen látható, hogy $L(\lambda)$ egy konkáv, poliedrikus függvény, szubgradiense egy λ pontban az $Ix - u$ vektor, ahol x az a pont, ahol az $L(\lambda)$ értékének kiszámolásakor a minimalizálás során az optimum felvételik. Ha valamelyik él jelenleg u -nál nagyobb súllyal van kiválasztva, akkor ott a szubgradiens pozitív, így ezzel jobban büntetjük azoknak az éleknek a kiválasztását. Ha egy él pedig u -nál kisebb súllyal van kiválasztva, akkor ott negatív a szubgradiens, így ezeknek az éleknek a kiválasztása kevesebb büntetéssel jár, így számunkra kedvezőbb.

A következőkben ismertetünk egy gyakorlatban is használható, könnyen implementálható módszert, a **szubgradiens algoritmust** [5]. Ezen algoritmus lényege, hogy a függvény egy adott pontjában kiszámoljuk a szubgradienst, és annak irányába lépünk tovább, így keresve a függvényünk maximumát.

Tekintsük az $L(\lambda)$ függvényt. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pont, az L függvény szubgradiense a korábbiak alapján az x_0 -hoz tartozó λ -ban $v_0 = Ix_0 - u$ lesz. A továbbiakban legyen

$$x_{i+1} = x_i + s_i v_i,$$

ahol $v_i \in \partial L(x_i)$, s_i pedig a megadott irányba tett lépés hossza. Annak eldöntésére, hogy s_i -t mekkorának válasszuk és hogyan változtatjuk, gyakran az alábbi módszert alkalmazzák.

Ha tudnánk hogy hol veszi fel a függvény az optimumát, azaz hogy L' hol 0, akkor a szubgradiens irányában tudnánk annyit menni, hogy elérjük ezt a maximumot, utána vennénk ebben a pontban a szubgradienst, és ezt az eljárást ismételnénk. Így egy lépés a következőképpen nézne ki:

$$s_i = \frac{L' - L(x_i)}{\|v_i\|}.$$

Azonban L' -t nem ismerjük, ezért ez ilyen formában nem használható. L' azonban helyet-

tesíthető egy UB felső becsléssel, így a lépéshossz

$$s_i = \frac{UB_i - L(x_i)}{\|v_i\|}$$

lesz. Annak elkerülése végett, hogy egy lépésben túl nagyot növeljünk, skálázzuk a lépéshosszot egy további β_i számmal:

$$s_i = \beta_i \frac{UB_i - L(x_i)}{\|v_i\|}.$$

β_0 -nak válasszunk egy nem túl nagy, például $0 \leq \beta_0 \leq 2$ számot, a további lépések során pedig módosítsuk β_i -t aszerint, hogy sikerült-e javítanunk. Ha igen, akkor legyen $\beta_{i+1} = \beta_i$, ha pedig egy előre meghatározott lépésszámnyi lépés után sem tudtunk javítani, legyen $\beta_{i+1} = \frac{1}{2}\beta_i$.

UB_i felső becslése L maximumának, ami pedig alsó becslése a minimális költségű 1 értékű pakolás költségének. Így UB_i -nek tetszőleges 1 értékű pakolást választhatunk, az felső becslése lesz az alsó becslének, L -nek.

Maximális párosítás pakolás

Ahhoz, hogy erre a feladatra is tudjuk alkalmazni a Lagrange-relaxációt és a szubgradiens algoritmust, a maximális pakolást is fel kell írunk LP-ként. Ezt az előző fejezetben meghatározott teljes párosítás poliéder segítségével az ott látott módon a következőképpen tudjuk megtenni:

$$\begin{aligned} \min(y) \\ x &\geq 0 \\ Ax &= 1 \\ Bx &\geq 1 \\ Ix - uy &\leq 0, \end{aligned}$$

ahol a maximális pakolás értéke $\frac{1}{y}$. Ez jó felírás, mert az első 3 feltétel miatt x a teljes párosítás poliéderben van, az $Ix - uy \leq 0$ miatt pedig teljesül, hogy egy $\frac{1}{y}$ értékű pakolás esetén az élek kapacitáskorlátai nem sérülnek.

Az alapfeladat az, hogy x a teljes párosítás poliéder eleme, a peremfeltételek az

$Ix - uy \leq 0$, ezeket relaxáljuk a $\lambda \in \mathbb{R}^n$ -val. Az így kapott Lagrange-relaxált:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min \{y + \lambda(x - yu) : x \in P\} \\ &= \min \{y(1 - \lambda u) + \lambda x : x \in P\}. \end{aligned}$$

Az x és y változók egymástól függetlenek, így külön-külön minimalizálhatjuk $y(1 - \lambda u)$ -t és λx -et, utóbbi minimuma a λ élsúlyozás esetén a minimális súlyú teljes párosítás súlya. Mivel y tetszőleges előjelű lehet, ha $(1 - \lambda u) \neq 0$, akkor $\min \{y(1 - \lambda u)\} = -\infty$, tehát

$$L(\lambda) = \begin{cases} \min \{\lambda x : x \in P\} & \text{ha } \lambda u = 1 \\ -\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ahol $L(\lambda) = -\infty$, ott nincs értelmes szubgradiense L -nek, így a függvény minimumát a $\lambda u = 0$ altéren kell csak kiszámolni. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy tetszőleges pontban veszünk egy szubgradienst, ezt rávetítjük erre az altérre, és az így kapott irányban haladunk tovább a korábban részletezett szubgradiens algoritmus alapján.

Volume algoritmus

Az előzőekben ismertetett szubgradiens algoritmus előnye, hogy kevés számolással jár, azonban hátránya, hogy nem tudjuk vele meghatározni a primál változók értékeit. A volume algoritmus erre a problémára szolgáltat egy megoldást.

A volume algoritmus a szubgradiens módszer egy olyan kiterjesztése, ami a feladat primál megoldására ad egy közelítést. A [3] alapján a

$$\begin{aligned} \min(cx) \\ x \geq 0 \\ Ax = b \\ Dx = e \end{aligned}$$

alakú feladatok megoldásával fogunk foglalkozni. Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} \{x : Dx = e, x \geq 0\} \\ = \left\{x : x = \sum \lambda_i g_i, \sum \lambda_i = 1, \lambda \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Ekkor a Dantzig-Wolfe dekompozíciót [7] alkalmazva az eredeti feladat ekvivalens a következővel:

$$\min \left(\sum (cg_i)\lambda_i \right) \quad (6)$$

$$\sum (Ag_i)\lambda_i = b \quad (7)$$

$$\sum \lambda_i = 1 \quad (8)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (9)$$

Ezt oszlopgenerálással oldjuk meg, minden újonnan bekerülő oszlopot a

$$\min((c - \tilde{\pi}A)x) \quad (10)$$

$$Dx = e$$

$$x \geq 0$$

megoldásával kapunk meg, ahol $\tilde{\pi}$ az aktuális bázishoz tartozó duál vektor. A (6)-(9) ekvivalens a

$$\min \left(\sum cg_i\lambda_i \right) \quad (11)$$

$$\sum (Ag_i - b)\lambda_i = 0 \quad (12)$$

$$\sum \lambda_i = 1 \quad (13)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (14)$$

feladattal. Az ehhez tartozó duális feladat

$$\max(z)$$

$$z + \pi(Ag_i - b) \leq cg_i.$$

Ezt a szubgradiens algoritmussal úgy oldjuk meg, hogy először adott $\tilde{\pi}$ -re keresünk egy aktív (azaz egyenlőséggel teljesülő) egyenlőtlenséget a

$$\min(z = (c - \bar{\pi}A)x + \bar{\pi}b) \quad (15)$$

$$Dx = e$$

$$x \geq 0$$

megoldásával. Ha ennek \bar{x} megoldása, akkor $v = b - A\bar{x}$ egy szubgradiens a $\tilde{\pi}$ pontban. Ezután \bar{x} -ből a szokásos módon az $\bar{x} + sv$ pontba lépünk tovább, ahol s a lépéshossz. Általában

$$s = f \frac{UB - \bar{z}}{\|v\|^2}, \quad (16)$$

ahol $0 \leq f \leq 2$ egy szám, UB pedig az optimális megoldás egy felső becslése. Ha $Ax = b$ -ben nem mindenhol egyenlőség, hanem néhány helyen egyenlőtlenség szerepel, akkor az egyenlőtlenségekhez tartozó duál változóknak nemnegatívoknak kell lenniük. Ezért amikor továbblépünk, ha az i . feltétel egyenlőtlenség, akkor a hozzá tartozó komponensben $\max\{0, \bar{\pi}_i\}$ -t kell vennünk.

Amennyiben néhány iteráció után nem érünk el javulást, f értékét csökkentjük, megál-lási kritériumként pedig leggyakrabban az iterációk, vagy a javítás nélküli iterációk egy bizonyos számát határozzuk meg. Ennek az általunk vizsgált kiterjesztése, a volume al-goritmusa a következő tételen alapul.

4.3. Tétel. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \max(z) \\ z + a_i \pi &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \pi &\in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

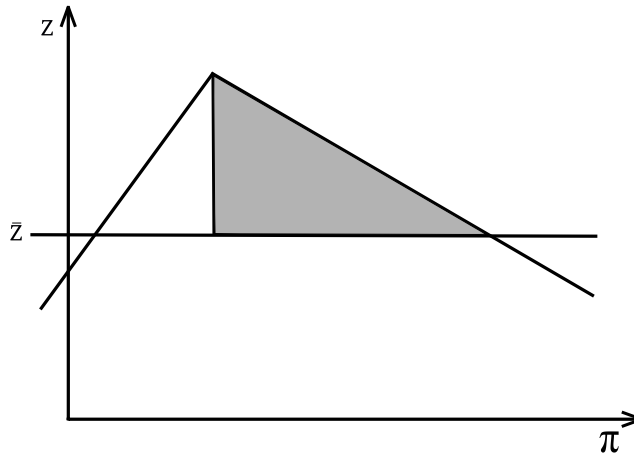
LP feladatot, legyen ennek optimális megoldása $(\hat{z}, \hat{\pi})$. Tegyük fel, hogy az optimális meg-oldásra az $1, \dots, m'$, $m' \leq m$ egyenlőtlenségek aktívak. Legyen $\bar{z} < \hat{z}$, és tegyük fel, hogy a

$$\begin{aligned} z + a_i \pi &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m' \\ z &\geq \bar{z} \end{aligned}$$

egy korlátos poliéder. Legyen $1 \leq i \leq m'$ -re γ_i ezen poliédernek a $z + a_i \pi \leq b_i$ lapja és a $z = \bar{z}$ hipersík közötti rész térfogata. Erre példa az 5. ábrán látható, a szürke rész felel meg egy ilyen térfogatnak. Ekkor a

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m'}) : \lambda_i = \frac{\gamma_i}{\sum_i \gamma_i}$$

egy optimális duál megoldást határoz meg.



5. ábra

Bizonyítás:

Legyen P az azokból a z pontokból álló poliéder, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

$$z + a_i \pi \leq b_i \quad i = 1, \dots, m'$$

$$z \geq \bar{z}.$$

Ez egy teljes dimenziós politóp. Jelölje F_0 P -nek a $z \geq \bar{z}$ által, F_i ($i \geq 0$) pedig a $z + a_i \pi \leq b_i$ által meghatározott lapját. A P politóp határát jelölje S , ez P lapjainak uniója. Mivel a szükséges feltételek teljesülnek, konstans v vektor esetén az 1.13 tételt alkalmazva

$$\int_S v \cdot n \, dS = 0,$$

ha n a kifelé mutató egységnyi normálvektor. Így v -t a j . egységvektornak, e_j -nek választva $j = 1, \dots, n$ esetén

$$\int_S n \, dS = \mathbf{0}.$$

Ebből következik, hogy ha F_i területét δ_i -vel jelöljük, akkor

$$\sum_{i=1}^{m'} \frac{\delta_i}{\|(1, a_i)\|} (1, a_i) - \delta_0 (1, 0, \dots, 0) = \mathbf{0},$$

hiszen F_0 -nak a $-(1, 0, \dots, 0)$, F_i -nek pedig $i = 1, \dots, m'$ esetén az $\frac{(1, a_i)}{\|(1, a_i)\|}$ az egységnyi,

kifelé mutató normálvektora. Ez azt jelenti, hogy

$$(1, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^{m'} \frac{\delta_i}{\delta_0 \|(1, a_i)\|} (1, a_i),$$

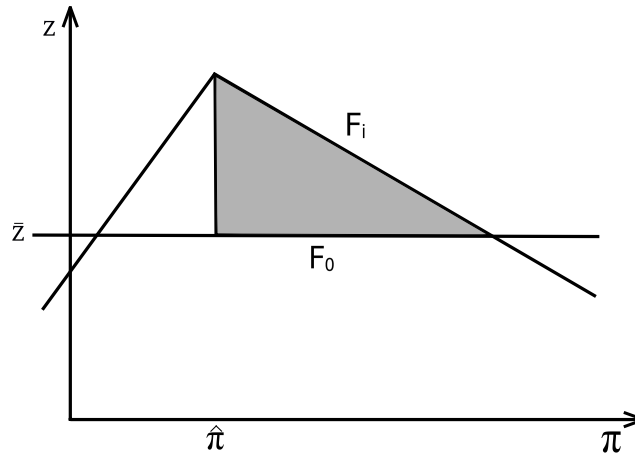
azaz a célfüggvény (szub)gradiensét előállítottuk az optimumban egyenlőséggel teljesülő feltételek nemnegatív lineáris kombinációjaként. Ezáltal egy optimális duál megoldást kapunk, hiszen ha egy pontban 0 a szubgradiens, akkor az az optimális megoldás.

Még be kell látnunk, hogy

$$\gamma_i = C \frac{\delta_i}{\|(1, a_i)\|},$$

ahol C konstans. Ha $\delta_i = 0$, akkor $\gamma_i = 0$, így az egyenlőség teljesül, tehát elég a $\delta_i \neq 0$ esettel foglalkoznunk.

Legyen a Q_i az F_i és a $(\bar{z}, \hat{\pi})$ konvex burka (a 6. ábrán szürkével jelölt terület), és legyen $\tilde{F}_0^i = F_0 \cap Q_i$. Q_i lapjait az F_i és \tilde{F}_0^i kivételével $c\pi \leq d$ alakú egyenlőtlenségek



6. ábra

határozzák meg. Mivel ezekben nem szerepel z , ezen oldalak normálvektorai merőlegesek a z tengelyére. Így Q_i lapjai közül csak F_i és \tilde{F}_0^i esetén lesz $e_1 \cdot n \neq 0$. Ismét alkalmazva az 1.13 tételt, ha \tilde{F}_0^i területe A_i , akkor

$$A_i = \frac{\delta_i}{\|(1, a_i)\|}.$$

Legyen $h = \hat{z} - \bar{z}$, így Q_i térfogatára $\gamma_i = \frac{1}{2} h A_i$. F_0 területe δ_0 , az \tilde{F}_0^i -k területeinek összege:

$$\delta_0 = \sum A_i$$

$$\implies \frac{\delta_i}{\delta_0 \|(1, a_i)\|} = \frac{A_i}{\sum A_j} = \frac{\frac{1}{2} h A_i}{\frac{1}{2} h \sum A_j} = \frac{\gamma_i}{\sum \gamma_j}$$

□

Ez a tétel képezi a volume algoritmus alapját. Az algoritmus lényege, hogy egy adott $(\bar{z}, \bar{\pi})$ vektorra megkeressük a poliéder aktív lapjait, és kiszámoljuk ezen lapok $z = \bar{z} - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) hipersíkra vett vetületének térfogatát. Legyen λ_i az F_i lap alatti térfogat aránya a teljes térfogathoz. Ezután számoljuk ki

$$(1, 0, \dots, 0) - \sum_{i=1}^{m'} \lambda_i (1, a_i)$$

értékét. Ha ez $\mathbf{0}$, akkor a λ vektor optimális megoldás, ha pedig nem, akkor kaptunk egy javító irányt.

1. Algoritmus Volume algoritmus

$\bar{\pi}$ tetszőleges

(\bar{x}, \bar{z}) a $\min \{z = (c - \bar{\pi}A)x + \bar{\pi}b : Dx = e, x \geq 0\}$ megoldásai

$x_0 := \bar{x}, \quad z_0 := \bar{z}$

$s := \alpha$ (16) alapján meghatározott lépéshossz

$v_1 := b - A\bar{x}, \quad \pi_1 := \bar{\pi} + sv_1$

$t := 1$

while $\|v_t\| > \epsilon_1$ **or** $|c\bar{x} - \bar{z}| > \epsilon_2$ **do**

$s := \alpha$ (16) alapján meghatározott lépéshossz

$v_t := b - A\bar{x}, \quad \pi_t := \bar{\pi} + sv_t$

(x_t, z_t) a $\min \{z = (c - \pi_t A)x + \pi_t b : Dx = e, x \geq 0\}$ megoldásai

$0 \leq \alpha \leq 1$

$\bar{x} \leftarrow \alpha x_t + (1 - \alpha)\bar{x}$

if $z_t > \bar{z}$ **then**

$\bar{\pi} \leftarrow \pi_t, \quad \bar{z} \leftarrow z_t$

end if

$t \leftarrow t + 1$

end while

Az algoritmus során kapott x_0, x_1, \dots, x_t vektorokkal

$$\bar{x} = \alpha x_t + (1 - \alpha)\alpha x_{t-1} + \dots + (1 - \alpha)^t x_0.$$

Az $\alpha, 1 - \alpha, \dots, (1 - \alpha)^t$ együtthatókat szeretnénk használni a Dantzig-Wolfe dekom-

pozícióval kapott

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum (cg_i)\lambda_i \right) \\ \sum & (Ag_i)\lambda_i = b \\ \sum & \lambda_i = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

optimális megoldásának közelítésére. Amíg a **while** ciklusban vagyunk, van egy ideiglenes duál vektorunk, λ , ami a

$$\begin{aligned} \max & (z) \\ z + \pi & (Ag_i - b) \leq cg_i \end{aligned} \tag{17}$$

feladathoz tartozik. Amikor az algoritmus során (15)-öt megoldva kapunk egy egyenlőtlenséget, az i -et, amely (17)-ben egyenlőséggel teljesül, akkor az ehhez tartozó duál változó értékét λ_i -ről $\alpha + (1 - \alpha)\lambda_i$ -re módosítjuk, az összes többi duál változót pedig $(1 - \alpha)$ -val szorozzuk.

Ezeket a duál értékeket használjuk arra, hogy meghatározzuk a v irányt, amerre javítani tudunk. Az egyik eltérés a szubgradiens algoritmushoz képest, hogy annál egyetlen aktív lap határozza meg ezt a javító irányt, míg itt az összeset használjuk. Ha nem tudunk tovább javítani, akkor a λ egy közelítése az eredetileg megoldani kívánt

$$\begin{aligned} \min & (cx) \\ Ax & = b \\ Dx & = e \\ x & \geq 0 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldásának. Az algoritmus akkor ér véget, ha $\|v\|$ és $|c\bar{x} - \bar{z}|$ is egy adott értéknél (ϵ_1 és ϵ_2) kisebb lesz.

5. Oszlopgenerálás

Ebben a fejezetben egy alternatív LP felírását adjuk a vizsgált feladatoknak, amely kevés feltételt, viszont sok változót tartalmaz, és a benne szereplő változók implicit vannak megadva. Az ilyen alakban adott LP feladatok megoldására szolgáló módszer az oszlopgenerálás [16, 21], melynek lényege, hogy az összes változó vizsgálata helyett lépésenként adunk hozzá újakat a modellünkhöz.

Először megoldjuk a két vizsgált feladatot oszlopgenerálást alkalmazva, majd foglalkozunk ezen módszer hátrányaival, valamint az ezek kiküszöbölésére alkalmazott technikákkal is.

Maximális párosítás pakolás

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, élein az $u : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitásokkal. A korábbi fejezetekhez hasonlóan most is a maximális, kapacitáskorlátoknak megfelelő tört párosítás pakolás meghatározása a cél. Legyen A a G teljes párosításainak incidencia(oszlop)vektoraiból álló mátrix. A oszlopainak száma így megegyezik a G -ben található összes teljes párosítás számával, ami akár exponenciálisan sok is lehet.

Az A mátrix segítségével LP-ként a következőképpen tudjuk felírni a feladatot:

$$\max(\mathbb{1}x)$$

$$x \geq 0$$

$$Ax \leq u,$$

az ehhez tartozó duális feladat pedig:

$$\min(yu)$$

$$y \geq 0$$

$$yA \geq \mathbb{1}.$$

Mivel az A mátrix mérete hatalmas, ezt a problémát nem tudjuk simán a szimplex módszerrel megoldani. Ezért kiindulásként vegyünk néhány teljes párosítást, és először az A mátrix ezeknek megfelelő oszlopaihoz tartozó részfeladatokat oldjuk meg, például

a (primál) szimplex módszer segítségével. Ezt meg tudjuk tenni, mert az $x = 0$ vektor megengedett megoldása az

$$x \geq 0$$

$$Ax \leq u$$

feladatnak. Így kapunk egy primál és egy duál megoldást, amelyek a kiválasztott részfeladatokra megengedett megoldások. Az x az összes többi komponensében 0, és $Ax \leq u$, így a kapott megoldás a teljes feladatra nézve is primál-megengedett. Azt kell tehát csak ellenőrizni, hogy y megengedett duál megoldás-e a teljes feladatra nézve.

Kétféleképpen fordulhat elő, hogy nem az: ha nem teljesül az $y \geq 0$, vagy ha nem teljesül az $yA \geq \mathbb{1}$ feltétel. Az első nem fordulhat elő, mert ahhoz hogy a kiindulásként vett oszlopokhoz tartozó részfeladatoknak megoldása legyen, szükséges, hogy $y \geq 0$. Az $yA \geq \mathbb{1}$ teljesüléséhez azt kell ellenőriznünk, hogy

$$(yA)_i = ya_i = \sum_{e \in M_i} y(e) \geq 1$$

teljesül-e minden i -re, ahol M_i az a teljes párosítás, amelynek incidenciavektora az A i . oszlopa. Az y megengedettsége tehát ekvivalens azzal, hogy az összes teljes párosítás súlya az y élsúlyozás szerint legalább 1, azaz a minimális súlyú teljes párosításé is. Ez azt jelenti, hogy elég kiszámolni a minimális súlyú teljes párosítás súlyát, ha ez legalább 1, akkor az y megengedett megoldás, ha pedig 1-nél kisebb, akkor A -nak a minimális súlyú teljes párosítás incidenciavektorának megfelelő oszlopát is hozzávesszük a megoldandó részfeladatok halmazához.

Ehhez a minimális súlyú teljes párosítást Edmonds [8] algoritmusával polinomiális időben meg tudjuk keresni.

Tehát ha egy lépésben sértő oszlopot találunk, azt is hozzáadjuk a feladathoz, és így mindig egyre több oszlopra oldjuk meg az LP feladatot. Megoldásra használhatjuk a primál szimplex algoritmust, hiszen egy új oszlop bevétele nem rontja el a primál megengedettséget, mert a hozzá tartozó változót 0-nak választva továbbra is primál megengedett marad. A duál megengedettség azonban nem fog fennállni az új oszlop bevétele után, mert egy olyan oszlopot vettünk be, amelyen nem teljesült a duális feltétel.

Minimális költségű 1 értékű párosítás pakolás

A maximális pakolás LP-felírásához képest a minimális költségű 1 értékű pakolás meghatározásához módosítsuk az LP-t a következőképpen:

$$\begin{aligned} \min(cx) \\ x \geq 0 \\ Ax \leq u \\ \mathbb{1}x = 1. \end{aligned}$$

Mivel az egyenlőtlenségeknél kisebbegyenlő feltételeink vannak, célszerűbb lenne a célfüggvény szerint maximalizálni. Mivel $\min\{cx\} = -\max\{-cx\}$, a továbbiakban a $d = -c$ jelölést alkalmazva az LP-t a következőképpen tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} \max(dx) \\ x \geq 0 \\ Ax \leq u \\ \mathbb{1}x = 1, \end{aligned}$$

a duális feladat pedig:

$$\begin{aligned} \min(yu + z) \\ y \geq 0 \\ yA + z \geq d, \end{aligned}$$

ahol $-dx$ lesz a minimális költségű 1 értékű pakolás költsége.

Tegyük fel, hogy van 1 értékű x megoldás. Ez akkor optimális, ha a hozzá tartozó duál (y, z) -re teljesül, hogy $yA + z \geq d$, azaz minden M teljes párosításra

$$\begin{aligned} y(M) + z \geq d(M) &\iff \sum_{e \in M} y(e) + z \geq \sum_{e \in M} d(e) \\ &\iff \min \left\{ \sum_{e \in M} (y(e) - d(e)) \right\} \geq -z. \end{aligned}$$

Az oszlopgenerálást a korábban leírtakhoz képest annyiban módosítjuk, hogy a sértő oszlop keresésénél az $(y - d)$ súlyozás szerinti minimális súlyú teljes párosításról nézzük meg, hogy van-e legalább 1. Ha igen, akkor a kapott megoldásunk optimális, ha nem, akkor a megfelelő teljes párosítás oszlopát az eddigiekhez hozzávéve oldjuk meg újra az LP-t.

Ahhoz, hogy el tudjuk indítani az algoritmust, szükségünk van egy 1 értékű pakolásra. Ennek megadásához alkalmazhatjuk a kétfázisú szimplex módszert, így az LP a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} \max & (d_M x + (-B)x') \\ & x \geq 0 \\ & x' \geq 0 \\ & Ax \leq u \\ & \mathbb{1}x' \leq \mathbb{1} \\ & \mathbb{1}x + x' = 1, \end{aligned}$$

ahol d_M azt a vektort jelöli, amire $(d_M)_i = \sum_{e \in M_i} d(e)$, azaz $(d_M)_i$ az i . teljes párosításban szereplő élek költségeinek összege. Ez annak felel meg, mint ha G -hez hozzávennénk olyan új, 1 kapacitású éleket, amelyek egy teljes párosítást alkotnak. Ennek az új párosításnak a költségét válasszuk egy kellően kicsi $-B (< 0)$ számnak, és a továbbiakban definiáljuk teljes párosításként azokat, amelyek teljes párosítások vagy csak az új, vagy csak az eredeti éleket tekintve. Ha B -t megfelelően választottuk meg, akkor az optimális megoldásban nem fog szerepelni a $-B$ költségű párosítás. Ezzel a kiegészítéssel a duál változók száma is nő, ezeket az új változókat jelölje w . Az ehhez tartozó duális feladat:

$$\begin{aligned} \min & (yu + w\mathbb{1} + z) \\ & y \geq 0 \\ & w \geq 0 \\ & yA + z \geq d_M \\ & w\mathbb{1} + z \geq -B. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{1}x + x' = 1$ és $x \geq 0, x' \geq 0$, x' és x semelyik komponensében nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért ha az új élekhez a kapacitásvektorban 1 helyett 2-t írunk, mivel ezek az élek csak egyetlen teljes párosításban szerepelnek, az ennek az oszlopához tartozó $x \leq 1$, tehát egy megengedett súlyozás esetén így is mindig teljesülni fog, hogy az új élek súlyai az eredeti kapacitáskorlát, 1 alatt vannak.

Egyenlőség azonban így soha nem fog fennállni, mert $x' \leq 1 < 2$. Tehát az ezekhez a sorokhoz tartozó duál változókra, w -re $w = 0$ teljesül az 1.5 optimalitási feltétel alapján, ezért a mátrix w -hez tartozó sorait akár el is hagyhatjuk. Az így kapott primál feladat:

$$\begin{aligned} \max(d_M x) \\ x \geq 0 \\ x' \geq 0 \\ Ax \leq u \\ \mathbb{1}x + x' = 1, \end{aligned}$$

a duális feladat pedig:

$$\begin{aligned} \min(yu + z) \\ y \geq 0 \\ yA + z \geq -B. \end{aligned}$$

Válasszuk az oszlopgenerálás kezdő oszlopának az utolsó, újonnan a mátrixhoz adott oszlopot, ennek a részfeladatnak a megoldása $x = 0, x' = 1$. Az ehhez tartozó duál megoldás $z = -B$ és $y = 0$, így $y(M) + z \geq d_M$ egyik eredeti M teljes párosításra sem fog teljesülni, ezért kezdetben belépő oszlopnak tetszőlegesen választhatunk.

A k . lépésben k darab teljes párosítást már kiválasztottunk. Ezekre vagy teljesül, hogy az x szerinti konvex kombinációjuk minden e élet tekintve az $u(e)$ kapacitás alatt van, ha pedig ez nem teljesül, akkor a $(k - 1)$ darab G -beli párosítás 1 összértékű súlyozásához hiányzó részét az új élek által alkotott párosítással pótoljuk. Amíg az utolsó oszlophoz tartozó $x > 0$, addig $z = -B$. Minden lépésben egy új y -t számolunk ki, így egy idő után a $-B$ kellően kicsi értéke miatt $x' = 0$ lesz, azaz kapunk egy olyan konvex kombinációt, ami csak az eredeti párosításokat tartalmazza. Ez lesz az optimális megoldás.

5.1. Megjegyzés. Ha a 2. fejezetben látott módon, a teljes párosítások poliéderét felhasználva írjuk fel a feladatot, majd az ebből adódó duális feladaton alkalmazzuk a 3. fejezetben leírt vágósíkos algoritmust, akkor az oszlopgenerálást kapjuk. Tehát a vágósíkos algoritmus lényegében a duális feladat oszlopgenerálásának felel meg.

Dantzig-Wolfe dekompozíció

A Dantzig-Wolfe dekompozíció [7] egy speciális alakú LP feladatok megoldására használható módszer. Oszlopgenerálási feladatok egy olyan osztályának megoldására ad általános keretet, ahol a feltételeket tartalmazó mátrix egyik része (A) blokkdiagonális szerkezetű, azaz egymástól független mátrixokból áll, melyek között a mátrix másik része (D) létesít kapcsolatot. Például:

$$\begin{aligned} \max & \left(\sum_{i=1}^k c_i x_i \right) \\ & A_i x_i \leq b_i \quad (1 \leq i \leq k) \\ & \sum_{i=1}^k D_i x_i \leq u \end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy a $P_i = \{x : A_i x \leq b_i\}$ politóp, akkor ez előáll csúcsainak konvex burkaként. Legyen V_i a P_i csúcsainak oszlopvektoraiból álló mátrix. Ekkor

$$P_i = \{V_i z : z \geq 0, \mathbb{1} z = 1\}.$$

Ekkor az eredeti feladatunk ekvivalensen átírható a

$$\begin{aligned} \max & \left(\sum_{i=1}^k c_i V_i z_i \right) \\ & z_i \geq 0 \quad \forall i \\ & \mathbb{1} z_i = 1 \quad \forall i \\ & \sum_{i=1}^k D_i V_i z_i \leq u \end{aligned}$$

alakba. Az így kapott feladatot ezután oszlopgenerálással oldjuk meg. Az első lépésben minden blokkból kiválasztunk egy oszlopot, és az azokból alkotott kisebb LP-t oldjuk meg. A kapott megoldást ellenőrizzük, hogy megoldása-e a teljes LP-nek is. Ehhez sértő

oszlopo(ka)t az egyes kis LP-k külön-külön, módosított célfüggvényekre történő megoldásával tudunk keresni. Speciális esetekben ezeknek a kisebb LP-knek a megoldására egy kombinatorikus algoritmust is tudunk használni, például ha legrövidebb utat vagy minimális költségű teljes párosítást kell keresnünk. Ezt ismételjük, amíg egy olyan megoldást kapunk, ami a teljes LP minden feltételét is kielégíti.

A Dantzig-Wolfe dekompozíciót korábban, a volume algoritmus során már alkalmaztuk, és a simítás módszerét bemutató alfejezetben is előkerül majd.

Lagrange-relaxáció és oszlopgenerálás

Az oszlopgenerálás módszerét kombinálhatjuk a Lagrange-relaxációval oly módon, hogy egy új oszlop bevitelénél kiszámolunk egy becslést az optimális duál megoldás értékére [21]. Legyen

$$Y = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq a\},$$

$$Z = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Bx \geq b, l \leq x \leq u\},$$

és $X = Y \cap Z$. Legyen a megoldandó feladat

$$[P] = \min \{cx : x \in X\}.$$

Z-ről tegyük fel, hogy viszonylag könnyen megoldható, az $Ax \geq a$ pedig neheztől feltételek, azaz tegyük fel, hogy az alproblémára, $[SP]$ -re teljesül, hogy

$$[SP] = \min \{cx : x \in Z\}$$

egyszerűen megoldható $[P]$ -hez képest. Továbbá Z-ről azt is tegyük fel, hogy korlátos és nem üres, azaz politóp. A $[P]$ megoldásához, vagy optimumának becsléséhez azt fogjuk felhasználni, hogy Z-n tudunk optimalizálni.

Jelölje Q az alapfeladat (Z) megoldásainak halmazát. Ez véges, mert Z korlátos, és elemei egészek, tehát $Q = \{z_1, z_2, \dots, z_{|Q|}\}$. Egy politóp elemei leírhatóak a politóp csúcsainak konvex kombinációjaként, és Z-ről feltettük hogy politóp, tehát

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^n : x = \sum_{z_q \in Q} z_q \lambda_q, \sum_{z_q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0 \quad \forall z_q \in Q \right\},$$

Z konvex burkára pedig

$$\text{conv}(Z) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x = \sum_{z_q \in Q} z_q \lambda_q, \sum_{z_q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0 \quad \forall z_q \in Q \right\}.$$

Így

$$\begin{aligned} [SP] &= \min \{cx : x \in Z\} \\ &= \min \{cz_q : z_q \in Q\} \\ &= \min \{cx : x \in \text{conv}(Z)\}. \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy az alapfeladatot meg tudjuk oldani, az $Ax \geq a$ feltételeket relaxálva a Lagrange-relaxációval alsó becslést tudunk adni az eredeti $[P]$ feladatra. Tetszőleges $\pi \in \mathbb{R}_+^m$ vektorra a Lagrange-függvény:

$$L(\pi, x) = \pi a + (c - \pi A)x.$$

Ezt optimalizáljuk Z -n a Lagrange-alprobléma, $[LSP]$ megoldásával:

$$[LSP(\pi)] = L(\pi) = \min_{x \in Z} \{L(\pi, x)\}.$$

A Lagrange-duális függvény értéke minden pontban alsó becslése az optimális duál megoldásnak, így a $[P]$ -hez tartozó duál megoldás legjobb alsó becslését az L maximalizálásával kaphatjuk. A Lagrange-duális feladat:

$$[LD] = \max_{\pi \in \mathbb{R}_+^m} L(\pi).$$

Ezt át tudjuk írni egy LP feladattá:

$$\begin{aligned} [LD] &= \max_{\pi \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ \min_{x \in Z} \{\pi a + (c - \pi A)x\} \right\} \\ &= \max_{\pi \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ \min_{x \in Z} \{cx + \pi(a - Ax)\} \right\}. \end{aligned}$$

Mivel a z_q vektorok a Z elemei,

$$\min_{x \in Z} \{cx + \pi(a - Ax)\} \leq cz_q + \pi(a - Az_q) \quad \forall z_q \in Q,$$

ezért

$$[LD] = \max(\eta) \quad (18)$$

$$\eta \leq cz_q + \pi(a - Az_q) \quad \forall z_q \in Q \quad (19)$$

$$\pi \in \mathbb{R}_+^m, \eta \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Az ehhez tartozó duális feladatot véve

$$\begin{aligned} [LD] &= \min \left(\sum_{z_q \in Q} (cz_q) \lambda_q \right) \\ &\quad \sum_{z_q \in Q} (Az_q) \lambda_q \geq a \\ &\quad \sum_{z_q \in Q} \lambda_q = 1 \\ &\quad \lambda_q \geq 0 \quad \forall z_q \in Q \\ &= \min(cx) \\ &\quad Ax \geq a \\ &\quad x \in \text{conv}(Z) \\ &= [M] \end{aligned}$$

Amit így kapunk, $[M]$, a Master Problem a $[P]$ Dantzig-Wolfe reformulációjának LP-relaxáltja. Ennek megoldására oszlopgenerálást alkalmazunk: a t . lépésben $[M]$ -et leszűkítjük a $Q_t = \{z_1, z_2, \dots, z_t\}$ oszlopokra, az így kapott feladat lesz az úgynevezett Restricted Master Problem (RMP):

$$\begin{aligned} [M_t] &= \min \left(\sum_{i=1}^t cz_i \lambda_i \right) \\ &\quad \sum_{i=1}^t Az_i \lambda_i \geq a \\ &\quad \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1 \\ &\quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, t \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az LP-t, és legyen λ^t egy optimális megoldása. Ekkor $x_t = \sum_{i=1}^t z_i \lambda_i^t$, a

célfüggvény értéke pedig cx_t . Az $[M_t]$ -hez tartozó duális feladat a Restricted Dual Master Problem (RDMP):

$$\begin{aligned} [DM_t] = \max(\eta) \\ \pi(Az_i - a) + \eta &\leq cz_i \quad i = 1, \dots, t \\ \pi &\in \mathbb{R}_+^m \\ \eta &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Innentől oszlopgenerálást alkalmazunk. Legyen (π_t, η_t) optimális megoldása $[DM_t]$ -nek. Ezt használva költségfüggvényként megkeressük a legnegatívabb (redukált) költségű oszlopot, a

$$z_{t+1} = z_{\pi_t} = \arg \min_{x \in Z} \{(c - \pi_t A)x\}$$

megoldásával. Ha

$$(c - \pi_t A)z_{\pi_t} + \pi_t a - \eta_t \geq 0,$$

akkor az aktuális x_t megoldás optimális megoldása $[M]$ -nek is. Ellenkező esetben z_{π_t} negatív (redukált) költségű oszlop, tehát x_t nem lehet optimális megoldása $[M]$ -nek, így ezt az oszlopot hozzáadjuk az RMP-hez.

A fent leírt algoritmus meghatároz egy $\{\pi_t\}_t$ Lagrange-relaxáló vektorsorozatot, amely tagjai az optimális duál vektorhoz, π^* -hoz konvergálnak. Ezen kívül kapunk egy $\{x_t\}_t$ sorozatot is, amely tagjai pedig a

$$\begin{aligned} \min(cx) \\ Ax &\geq a \\ x &\in \text{conv}(Z) \end{aligned}$$

optimális x^* megoldásához konvergálnak.

5.2. Állítás. Az algoritmus során az alábbiak teljesülnek:

1. $x_t = \sum_{i=1}^t z_i \lambda_i^t$ megoldása $[M_t]$ -nek, azaz a

$$\begin{aligned} \min(cx) \\ Ax \geq a \\ x \in \text{conv}(\{z_1, \dots, z_t\}) \end{aligned}$$

feladatnak.

2. Legyen L_t a Lagrange-duális függvény, L közelítése, amit úgy kapunk, hogy az alapfeladatnak csupán néhány megoldását vesszük figyelembe, azaz:

$$\begin{aligned} L_t(\lambda) &= \min \{L(z_1, \lambda), \dots, L(z_t, \lambda)\} \\ &= \min_{z \in \{z_1, \dots, z_t\}} \{\lambda a + (c - \lambda A)z\} \end{aligned}$$

A duál RMP, azaz $[DM_t]$ megoldása

$$\pi_t = \arg \max_{\pi \in \mathbb{R}_+^m} L_t(\pi).$$

Az L_t függvény felső becslése az L -nek, azaz

$$L_t(\pi) \geq L(\pi) \quad \forall \pi \in \mathbb{R}_+^m.$$

Az L_t függvény alatti pontok halmaza egy külső poliedrikus közelítése $[LD]$ -nek. Az

1.4 tétel alapján $L_t(\pi_t) = \eta_t = cx_t$.

3. $[LSP_t]$ megoldásával a következő 4 dolgot érjük el:

- (a) Megkapjuk a legnegatívabb redukált költségű oszlopot $[M]$ -ben: $z_{t+1} = z_{\pi_t} \in Q$.
- (b) Megkapjuk a $[DM]$ -ben a $z_q \in Q$ alapfeladat megoldások által meghatározott leginkább sérülő feltételt.
- (c) A z_{π_t} által sértett feltétel meghatározza L -nek π_t -ben egy g_t szubgradiensét:
 $g_t := (a - Az_{\pi_t})$.
- (d) Megkapjuk L pontos értékét a π_t pontban:

$$L(\pi_t) = \pi_t a + (c - \pi_t A)z_{\pi_t}.$$

Mivel ez a pontos érték, ez az L további lépésekben történő közelítései során már nem változik, tehát $L_i(\pi_i) = L(\pi_i) \quad \forall i > t$.

4. A t . lépésben $\text{conv}(\{(\pi_i, L_{i+1}(\pi_i))\}_{i=1, \dots, t})$ egy belső közelítését adja a (18)-(20) által meghatározott $[LD]$ -nek. A belső és a külső közelítés a $\{(\pi_i, L_{i+1}(\pi_i))\}_{i=1, \dots, t}$ pontokban egyenlő, mert $i = 1, \dots, t$ esetén $L_{i+1}(\pi_i) = L(\pi_i)$. Az aktuális legjobb duál megoldás ezen pontok valamelyike:

$$\hat{\pi} = \arg \max_{i=1, \dots, t} L_{i+1}(\pi_i) = L(\pi_i),$$

ennek értéke $\hat{\eta} = L(\hat{\pi})$.

5. Ha a t . lépésben $L_t(\pi_t) = L(\hat{\pi}) = \hat{\eta}$, vagy ha egy adott $\epsilon > 0$ -ra $\|cx_t - L(\hat{\pi})\| \leq \epsilon$, akkor elértük az optimális megoldást, azaz $\eta^* = L(\hat{\pi})$.

A továbbiakban jelölje (π^*, η^*) a Lagrange-duális egy optimális megoldását, $L(\hat{\pi})$ pedig az eddigi legjobb duális alsó becslést η^* -ra.

Stabilizációs technikák

A nagyméretű LP feladatok oszlopgenerálással történő megoldása számos előnnyel jár. Az algoritmus egyszerűségén kívül az is ezek közé tartozik, hogy a vágósíkos algoritmussal ellentétben itt nem okoz nehézséget megmondani az optimális pakolásban szereplő párosításokat és a hozzájuk tartozó súlyokat, mert ezeket a megoldásként kapott vektorról le tudjuk olvasni. Ugyanakkor az előnyeik kívül néhány hátránya is adódik ennek a megközelítésnek, melyek lassú konvergencia formájában nyilvánulnak meg [22]. Ezek kiküszöbölésére különböző stabilizációs technikákat dolgoztak ki [17, 21].

A lassú konvergencia leggyakoribb okai [22] az alábbiak lehetnek:

1. Az algoritmus vége felé a $[DM_t]$ -hez hozzáadott egyenlőtlenségek csak a duális megoldástérnek egy kis részét vágják le, így az optimális duál megoldáshoz való konvergencia jelentősen lelassul. (*tailing-off effect*)
2. A t . lépésben a $[DM_t]$ egyik optimális megoldásához tartozó csúcsa után a $t + 1$. lépésben $[DM_{t+1}]$ -nek egy másik csúcsát kapjuk. Ezért lehetséges, hogy

$$\|\pi_{t+1} - \pi^*\| > \|\pi_t - \pi^*\|.$$

Hasonlóan, a duális $L(\pi_t)$ korlátok sem mindig monoton módon konvergálnak, hanem előfordulhat, hogy túllépjek, majd újra a pontos érték alá kerülnek. (*dual oscillations/duál változók insabilitása*)

3. Az RMP egy primál megoldásához több különböző duál megoldás is tartozhat, az algoritmus ezeken iterál anélkül, hogy a célfüggvény értéke javulna. (*primál degeneráció és alternatív optimális duál megoldások*)
4. Az első néhány lépésben nem releváns oszlopokat adunk hozzá az RMP-hez, ezért ezek nem javítanak a duális korlátokon. (*heading-in effect*)

Ezen problémák elkerülése végett különböző stabilizációs technikákat alkalmazhatunk. Ezek 3 nagy kategóriába sorolhatók: büntető függvények, belső pontos módszerek (*centralized prices*), és simítási módszerek (*smoothing techniques*).

Büntető függvények

Ezen módszer lényege, hogy egy büntető értéket adunk a duál célfüggvényhez, hogy egy stabilitási központhoz közeli megoldásokat kapjunk. A stabilitási központot általában az eddig megtalált legjobb Lagrange-becslést adó duál megoldásnak, $\hat{\pi}$ -nek választjuk. $[DM_t]$ helyett a

$$\pi_t = \arg \max_{x \in \mathbb{R}_+^m} \{L(\pi_t) - S(\pi_t)\}$$

feladatot oldjuk meg, ahol $S : \pi \in \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ a büntető függvény. S általában konvex, a $\hat{\pi}$ -ban 0-t vesz fel, és értéke nő, ahogyan távolodunk $\hat{\pi}$ -től, azaz ahogyan $\|\pi - \hat{\pi}\|$ értéke nő. Ahhoz, hogy jól működő módszert kapjunk, több paraméter pontos beállítására van szükség.

Belső pontos módszerek

Gyorsabban javíthatjuk $[LD]$ külső poliedrikus közelítését, ha egy csúcsa helyett egy belső pontját tudjuk levágni. Az ilyen módszerek lényege, hogy egy belső pontot választanak duál megoldásnak, azzal a céllal, hogy egy $[LD]$ -be történő nagyobb vágással elkerüljék a primál degenerációt. Az ebbe a módszercsaládba tartozó egyik ismertebb módszer az ACCPM (*analytic-center cutting-plane method*).

Simítás és külső-belső szeparáció

Ennek az eljárásnak a lényege az, hogy az általunk sértő oszlop keresésére használt π_t duál megoldást módosítjuk a korábbi duál megoldások alapján. Erre két különböző elterjedt módszer létezik. A Neame-féle [19] új, javított $\tilde{\pi}_t$ megoldást úgy határozzuk meg, hogy az előző lépés során javítottnak, és a mostani nem javítottnak vesszük egy konvex kombinációját, azaz

$$\tilde{\pi}_t = \alpha \tilde{\pi}_{t-1} + (1 - \alpha)\pi_t.$$

Így $\tilde{\pi}_t$ a korábbi π_i -k súlyozott összegeként áll elő:

$$\tilde{\pi}_t = \sum_{i=0}^t (1 - \alpha)\alpha^{t-i}\pi_i.$$

A másik, Wentges-féle [24] módszerben pedig

$$\tilde{\pi}_t = \alpha \hat{\pi} + (1 - \alpha)\pi_t,$$

ahol $\hat{\pi}$ az a duál megoldás, ami eddig a legjobb Lagrange-korlátot adta, azaz így

$$\tilde{\pi}_t = \hat{\pi} + (1 - \alpha)(\pi_t - \hat{\pi}),$$

ami annak felel meg, hogy egy $(1 - \alpha)$ hosszú lépést teszünk $\hat{\pi}$ -ből π_t irányába. Mindkét esetben $\alpha \in [0, 1)$ az eljárás paramétere.

Sértő oszlopot ezután π_t helyett az újonnan kiszámolt $\tilde{\pi}_t$ -vel keresünk a

$$z_{\tilde{\pi}_t} = \arg \min_{x \in Z} \{(c - \tilde{\pi}_t A)x\}$$

megoldásával, és amennyiben a Lagrange-becslés javul, $\hat{\pi}$ -t frissítjük. Előfordulhat, hogy $\tilde{\pi}_t$ -vel nem találunk negatív redukált költségű oszlopot annak ellenére, hogy π_t -vel létezik ilyen. Ez az úgynevezett hibás árazás (*mis-pricing*). Ilyenkor ha ugyanarra a π_t megoldásra mégegyszer alkalmazzuk valamelyik (Neame/Wentges) szabályt, egy π_t -hez közelebbi duális vektort kapunk.

Ehhez a módszerhez kapcsolódik a külső-belső szeparáció. A duál poliéder a (18)-(20):

$$\begin{aligned}
 [LD] &= \max(\eta) \\
 \eta &\leq cz_q + \pi(a - Az_q) \quad \forall z_q \in Q \\
 \pi &\in \mathbb{R}_+^m, \eta \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Ennek a t . lépésben vett közelítésének egy megoldása egy az $[LD]$ poliéder belső konvex közelítésén kívüli, külső pontot határoz meg: $(\pi_{\text{out}}, \eta_{\text{out}}) = (\pi_t, L_t(\pi_t))$. A poliéder belső konvex közelítésének egy belső pontját is meg tudjuk határozni, attól függően, hogy melyik szabályt alkalmaztuk:

$$(\pi_{\text{in}}, \eta_{\text{in}}) = \begin{cases} (\tilde{\pi}_{t-1}, L(\tilde{\pi}_{t-1})) & \text{a Neame-szabállyal} \\ (\hat{\pi}, L(\hat{\pi})) & \text{a Wentges-szabállyal} \end{cases}$$

Ezek azért belső pontok, mert az L értékét ezekben a pontokban már kiszámoltuk. A belső és a külső pontot összekötő szakaszon, a külső ponttól α távolságra kijelölünk egy szeparáló pontot:

$$(\pi_{\text{sep}}, \eta_{\text{sep}}) = \alpha(\pi_{\text{in}}, \eta_{\text{in}}) + (1 - \alpha)(\pi_{\text{out}}, \eta_{\text{out}}).$$

Ennek a szeparációs stratégiának a lényege, hogy megpróbáljuk ezt a szeparáló pontot egy hipersíkkal (a z_t -vel) levágni. Ha sértő oszlop keresésénél nem találunk olyan hipersíkot, ami levágja a szeparáló pontot, akkor az egy belső pont. Ha találunk olyat, ami levágja a szeparáló pontot, akkor külső pont volt, a hipersík az eredeti külső pontot is levágja, így az eddigi szeparáló pontunk lehet az új külső pont. Azonban az az eset is előállhat, hogy sem a külső, sem a szeparáló pontot nem tudjuk levágni, ez az úgynevezett hibás árazás (*mis-pricing*). Ha minden lépésben vagy a belső, vagy a külső pontot le tudjuk cserélni a szeparáló pontra (*standard in-out separation*), akkor bebizonyítható [4], hogy a külső és belső pontok közötti távolság a 0-hoz tart.

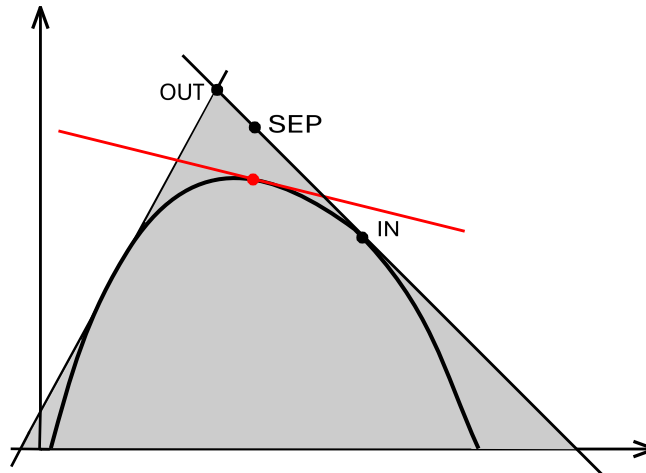
A következő állítások a Neame- és Wentges-szabály alapján simítással történő oszlop-generálásra vonatkoznak.

5.3. Állítás. Ha a szeparáló pontot levágja a $z_{\pi_{\text{sep}}}$ által meghatározott egyenlőtlenség féltére, azaz

$$L(\pi_{\text{sep}}) = a\pi_{\text{sep}} + (c - A\pi_{\text{sep}})z_{\pi_{\text{sep}}} < \eta_{\text{sep}},$$

akkor a $(\pi_{\text{out}}, \eta_{\text{out}})$ külső pontot is levágja, és $z_{\pi_{\text{sep}}}$ egy negatív redukált költségű oszlopot határoz meg $[M_t]$ -ben, vagyis

$$(c - A\pi_{\text{out}})z_{\pi_{\text{sep}}} + a\pi_{\text{out}} < \eta_{\text{out}}.$$



7. ábra

Bizonyítás:

$[LD]$ konvex, a szeparáló pont pedig $[LD]$ -n kívül van. Ha a belső pont mellett a külső pont is $[LD]$ -n belül lenne, akkor mivel a szeparáló pont a belső és külső pontokat összekötő szakaszon található, annak is $[LD]$ -n belül kéne lennie annak konvexitása miatt, tehát nem vághatta volna le a fenti féltér. Azaz a külső pontot is levágja. Erre példa a 7. ábrán látható. \square

5.4. Állítás. Hibás szeparáció (*mis-separation*) esetén, vagyis amikor a szeparáló pontot nem vágjuk le, mert $L(\pi_{\text{sep}}) \geq \eta_{\text{sep}}$, a szeparáló $(\pi_{\text{sep}}, L(\pi_{\text{sep}}))$ pont belső pont, amit a következő lépésben felhasználhatunk. Ilyenkor ha a belső pontot úgy választottuk, hogy $\eta_{\text{in}} \geq L(\tilde{\pi}_{t-1})$, az új duális korlátra, $L(\pi_{\text{sep}})$ -re teljesül, hogy

$$(cx_t - L(\tilde{\pi}_t)) \leq \alpha(cx_t - L(\tilde{\pi}_{t-1})),$$

azaz a különbség az optimális megoldás és a Lagrange-relaxációval kapott becslés között α -szorosára csökken. Erre példa a 8. ábrán látható.

Bizonyítás:

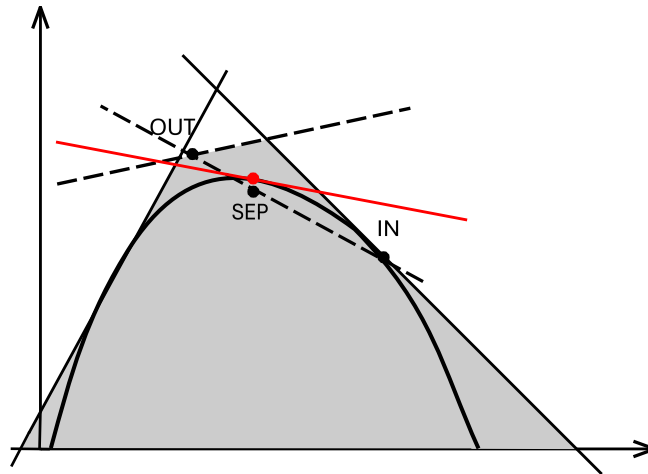
Azt látjuk be, hogy ha nem tudjuk levágni a szeparáló pontot, akkor eleme az $[LD]$

poliéder belső közelítésének. Mivel nem vágtuk le, $L(\pi_{\text{sep}}) \geq \eta_{\text{sep}}$, a belső pontra pedig a Neame- és a Wentges-módszer esetén is teljesül, hogy $\eta_{\text{in}} \geq L(\tilde{\pi}_{t-1})$, mert a Neame-módszernél egyenlőség áll fenn, a Wentges-módszer esetén pedig $\eta_{\text{in}} = L(\hat{\pi}) \geq L(\tilde{\pi}_{t-1})$. Ezekből következik, hogy

$$\begin{aligned} cx_t - L(\tilde{\pi}_t) &= \eta_{\text{out}} - L(\pi_{\text{sep}}) \leq \eta_{\text{out}} - \eta_{\text{sep}} \\ &= \alpha(\eta_{\text{out}} - \eta_{\text{in}}) \leq \alpha(cx_t - L(\tilde{\pi}_{t-1})), \end{aligned}$$

ami pont az, ami az állításban szerepel. Ilyenkor az is teljesül, hogy $L(\pi_{\text{sep}}) > L(\hat{\pi})$, tehát ilyenkor javul a Lagrange-függvény által adott becslés, és $\hat{\pi}$ új értéke π_{sep} lesz. \square

5.5. Állítás. A $z_{\pi_{\text{sep}}}$ által meghatározott vágás levághatja $(\pi_{\text{out}}, \eta_{\text{out}})$ -ot úgy is, hogy $(\pi_{\text{sep}}, \eta_{\text{sep}})$ -et nem vágja le, ez a hibás szeparáció (*mis-separation*) esete.



8. ábra

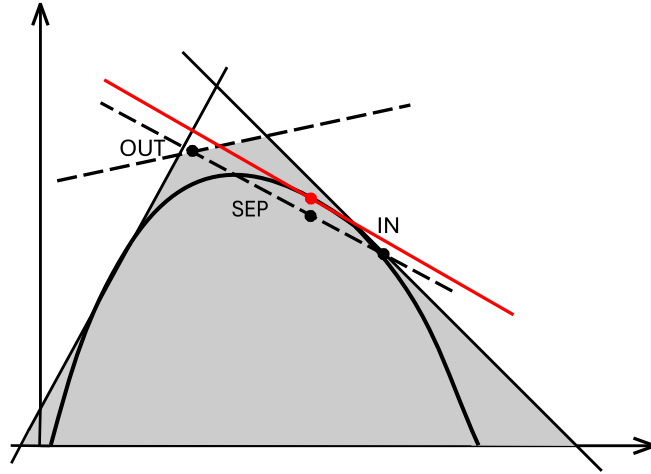
Ha nem sikerül levágni a külső pontot sem, azt hibás árazásnak (*mis-pricing*) nevezzük. Ilyenkor $(\pi_{\text{out}}, \eta_{\text{out}}) = (\pi_t, \eta_t)$ megoldása marad $[DM_{t+1}]$ -nek is, amit úgy kapunk, hogy $[DM_t]$ -hez hozzáadjuk $z_{\pi_{\text{sep}}}$ -et, és a javított duál vektorokra teljesül, hogy

$$\|\tilde{\pi}_{t+1} - \pi_{t+1}\| = \alpha\|\tilde{\pi}_t - \pi_t\| < \|\tilde{\pi}_t - \pi_t\|.$$

Erre példa a 9. ábrán található.

Bizonyítás:

Ha a szeparáló pont nem kerül levágásra, azaz hibás szeparáció esetén előfordulhat, hogy hibás árazás is történik (azaz a külső pont sem kerül levágásra), de az is, hogy nem.



9. ábra

Ha a hibás szeparáció mellett történik hibás árazás is a t . lépésben, akkor $\pi_{t+1} = \pi_t$, és a következő szeparáló pont közelebb lesz a külső ponthoz. Ez azért van, mert

$$\pi_{\text{sep}} = \alpha\pi_{\text{in}} + (1 - \alpha)\pi_{\text{out}},$$

tehát

$$\|\pi_{\text{out}} - \pi_{\text{sep}}\| = \alpha\|\pi_{\text{out}} - \pi_{\text{in}}\|,$$

és a $t + 1$. lépésben $\tilde{\pi}_{t+1} = \pi_{\text{sep}}$, $\pi_{\text{in}} = \tilde{\pi}_t$, valamint $\pi_{\text{out}} = \pi_{t+1} = \pi_t$ és $0 \leq \alpha < 1$. \square

A két bemutatott (Neame és Wentges) módszeren kívül másfajta szabályokat is alkalmazhatunk a duál vektor javítására, és az új belső pont meghatározására. Ha egy szabályra teljesül, hogy $\eta_{\text{in}} \geq L(\tilde{\pi}_{t-1})$, akkor az is teljesülni fog, hogy hibás szeparáció esetén a javított duál vektor és az optimális közötti különbség α -szorosára csökken, azaz

$$(cx_t - L(\tilde{\pi}_t)) \leq \alpha(cx_t - L(\tilde{\pi}_{t-1})).$$

5.6. Állítás. A Wentges-módszer globálisan konvergens, azaz a $\|cx_t - L(\hat{\pi})\|$ távolság minden hibás szeparáció során szigorúan csökken, így a hibás szeparációk száma korlátos.

Bizonyítás:

A Wentges-módszert alkalmazva $L(\tilde{\pi}_t) = L(\hat{\pi}_t) = L(\hat{\pi})$. Az oszlopgenerálás során cx_t értéke monoton csökken, az 5.4 állítás alapján pedig minden hibás szeparáció esetén $\|cx_t - L(\hat{\pi})\|$ értéke az α -szorosára csökken. \square

6. Garg-Könemann közelítő algoritmus

Garg és Könemann kidolgozott egy kombinatorikus algoritmust [11], amely közelítő megoldást ad különböző többtermékes folyamokkal kapcsolatos feladatokra, amit később többen is továbbfejlesztettek [10, 18]. Ez az algoritmus némi módosítással tetszőleges pakolási problémára, így az általunk vizsgált teljes párosítás pakolási feladatokra is alkalmazható. Ebben a fejezetben a maximális többtermékes folyam megoldására készített algoritmust módosítjuk és alkalmazzuk a maximális tört teljes párosítás pakolás egy közelítő megoldásának meghatározására.

Maximális tört párosítás pakolás

A korábbi fejezetekhez hasonlóan most is adott egy $G = (V, E)$ gráf az $u : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitásokkal, ebben keressük a maximális tört teljes párosítás pakolást.

Ennek LP-felírása:

$$\max(\mathbb{1}x)$$

$$Ax \leq u$$

$$x \geq 0,$$

ahol A sorai a gráf éleinek, oszlopai pedig a gráfban található teljes párosítások incidenciavektorainak felelnek meg. A feladat duálisa a

$$\min(lu)$$

$$lA \geq 1,$$

azaz olyan $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény rendelése az élekhez, amelyre teljesül, hogy $\sum_{e \in E} l(e)u(e)$ minimális, továbbá bármely teljes párosítás hossza (azaz a párosításban szereplő élek hosszainak összege) legalább 1.

Legyen $D(l) = \sum_{e \in E} l(e)u(e)$ és $\alpha(l)$ a legrövidebb teljes párosítás hossza. Ekkor a duális feladat ekvivalens egy olyan $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény keresésével, amelyre $\frac{D(l)}{\alpha(l)}$ minimális. Ugyanis ha van egy megoldásunk, amire néhány teljes párosítás esetén nem teljesül, hogy a hosszuk legalább 1, akkor ezek közül a legkisebb hosszával leosztva a

hosszfüggvényt, az így kapott megoldásra már teljesülni fog. (Az algoritmus végén pedig majd ezzel a számmal visszaszorozva kapjuk meg a megoldást.) Jelölje ezt a minimumot β .

Az algoritmus ciklusokból épül fel. Jelölje l_i a hosszfüggvényt az i . ciklus elején, f_{i-1} pedig az $1, \dots, i-1$. ciklusokban kiválasztott teljes párosítások kiválasztási súlyainak összegét. Legyen P egy $\alpha(l_i)$ hosszúságú teljes párosítás, és u a P -ben szereplő legkisebb kapacitású él kapacitása.

Az algoritmus a következő:

2. Algoritmus Garg-Könemann maximális tört teljes párosítás pakolásra

```

 $f_0 := 0$ 
for  $e \in E$  do
     $l_0(e) := \delta$ 
end for
while  $\alpha(l_i) < 1$  do
     $P$  teljes párosítás,  $\sum_{e \in P} l_i(e) = \alpha(l_i)$ 
     $u \in \mathbb{R} : \exists e \in P : u(e) = u$  és  $u(e) \geq u \quad \forall e \in P$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $f_i \leftarrow f_{i-1} + u$ 
    for  $e \in P$  do
         $l_i(e) \leftarrow l_{i-1}(e) \left(1 + \frac{\epsilon u}{u(e)}\right)$ 
    end for
end while

```

Az i . ciklusban u -val megnöveljük a P teljes párosítás súlyát, azaz ha eddig nem volt kiválasztva, akkor most u súllyal bekerül az eddig kiválasztottak közé, ha pedig már valamilyen súllyal ki volt választva, akkor ezt a súlyt növeljük u -vel, tehát $f_i = f_{i-1} + u$. Az l_i hosszfüggvényt csak a P -beli éleken módosítjuk l_{i-1} -hez képest, ezeken legyen

$$l_i(e) = l_{i-1}(e) \left(1 + \frac{\epsilon u}{u(e)}\right),$$

ahol ϵ konstans, melynek értékét később határozzuk meg.

Kezdetben legyen minden él δ hosszúságú, azaz $l_0(e) = \delta \quad \forall e \in E$, ahol δ konstans, értékét szintén a későbbiekben határozzuk meg. Az algoritmus t ciklus után fog befejeződni, ahol t a legkisebb olyan szám, amire $\alpha(l_t) \geq 1$, azaz amire teljesül az élhosszokra vonatkozó duális feltétel.

Minden ciklusban, ahol $i \geq 1$

$$\begin{aligned}
 D(l_i) &= \sum_{e \in E} l_i(e)u(e) \\
 &= \sum_{e \in E} l_{i-1}(e)u(e) + \epsilon \sum_{e \in P} l_i(e)u \\
 &= D(l_{i-1}) + \epsilon(f_i - f_{i-1})\alpha(l_{i-1}),
 \end{aligned} \tag{21}$$

mert az i . és az $i-1$. ciklusban lévő összsúly különbsége az i . ciklusban u súllyal kiválasztott P teljes párosítás. Ebből következik, hogy

$$D(l_i) = D(l_0) + \epsilon \sum_{j=1}^i (f_j - f_{j-1})\alpha(l_{j-1}).$$

Tekintsük az $l_i - l_0$ hosszfüggvényt:

$$\begin{aligned}
 D(l_i - l_0) &= \sum_e (l_i - l_0)(e)u(e) \\
 &= \sum_e l_i(e)u(e) - \sum_e l_0(e)u(e) \\
 &= D(l_i) - D(l_0),
 \end{aligned}$$

valamint $\alpha(l_i - l_0) \geq \alpha(l_i) - \alpha(l_0) = \alpha(l_i) - \delta L$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, ahol $L = \frac{|V|}{2}$, mert minden teljes párosítás fele annyi élből áll, mint amennyi csúcsa van a gráfnak. Így hát

$$\begin{aligned}
 \beta &= \min_l \frac{D(l)}{\alpha(l)} \\
 &\leq \frac{D(l_i - l_0)}{\alpha(l_i - l_0)} \\
 &\leq \frac{D(l_i) - D(l_0)}{\alpha(l_i) - \delta L} \\
 \implies \alpha(l_i) &\leq \frac{D(l_i) - D(l_0)}{\beta} + \delta L
 \end{aligned}$$

(21)-et átrendezve, és a fenti eredményt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\alpha(l_i) \leq \delta L + \frac{\epsilon}{\beta} \sum_{j=1}^i (f_j - f_{j-1})\alpha(l_{j-1}).$$

Azaz minden i -re $\alpha(l_i)$ akkor maximális, ha minden j -re, ahol $0 \leq j \leq i - 1$, $\alpha(l_j)$ a lehető legnagyobb. Mivel kezdetben $\alpha(l_0) = \delta L$, és az élhosszok a ciklusok során monoton nőnek,

$$\alpha(l_i) \leq \alpha(l_{i-1}) \left(1 + \frac{\epsilon}{\beta} (f_i - f_{i-1}) \right).$$

$1 + x \leq e^x$, ezért

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\epsilon}{\beta} (f_i - f_{i-1}) &\leq e^{\frac{\epsilon}{\beta} (f_i - f_{i-1})} \\ \implies \alpha(l_i) &\leq \alpha(l_{i-1}) e^{\frac{\epsilon}{\beta} (f_i - f_{i-1})}. \end{aligned}$$

Ebből, valamint abból, hogy $\alpha(l_0) = \delta L$ következik, hogy

$$\alpha(l_i) \leq \delta L e^{\frac{\epsilon f_i}{\beta}}.$$

Az algoritmus akkor áll meg a t . lépésben, ha teljesül, hogy $\alpha(l_t) \geq 1$. Ezt az előzőekkel összevetve:

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha(l_t) \leq \delta L e^{\frac{\epsilon f_t}{\beta}} &\implies \frac{1}{\delta L} \leq e^{\frac{\epsilon f_t}{\beta}} \\ &\implies \frac{\beta}{f_t} \leq \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{1}{\delta L}\right)}. \end{aligned} \quad (22)$$

6.1. Állítás. Létezik olyan megengedett tört teljes párosítás pakolás, amelynek értéke $\frac{f_t}{\log_{1+\epsilon}\left(\frac{1+\epsilon}{\delta}\right)}$.

Bizonyítás:

Vegyünk egy tetszőleges e élet. Minden $u(e)$ egységnyi súlyra, amivel e kiválasztásra került, e hossza legalább az $(1 + \epsilon)$ -szorosára nőtt. Amikor e hosszát utoljára növeltük, akkor egy olyan párosításban került kiválasztásra, melynek hossza kisebb volt 1-nél. Mivel egy lépésben legfeljebb $u \leq u(e)$ -vel növeltük a kiválasztott párosítások összsúlyát, e hossza egy lépésben legfeljebb $(1 + \epsilon)$ -szorosára nőhetett, ezért

$$l_t(e) < 1(1 + \epsilon).$$

Tegyük fel, hogy az e -t tartalmazó teljes párosítások összsúlya $f(e) = \frac{f(e)}{u(e)}u(e)$. Ekkor

$$l_t(e) \leq \delta(1 + \epsilon)^{\frac{f(e)}{u(e)}} < 1 + \epsilon$$

$$\implies f(e) < u(e) \log_{1+\epsilon} \left(\frac{1 + \epsilon}{\delta} \right)$$

Tehát minden él súlya a kapacitásának legfeljebb $\log_{1+\epsilon} \left(\frac{1 + \epsilon}{\delta} \right)$ -szorososa, így ha minden párosítás súlyát ennyivel leosztjuk, minden él súlya a kapacitáskorláton belülré kerül.

□

6.2. Állítás. Megfelelő ϵ és δ választással tetszőleges ω -ra az algoritmus $(1 + \omega)$ -közelítő.

Bizonyítás:

Az 1.4 erős dualitás tétel alapján az optimális duál és primál megoldások értéke egyenlő. Az általunk megtalált duál érték β , a primál pedig $\frac{f_t}{\log_{1+\epsilon} \left(\frac{1+\epsilon}{\delta} \right)}$, a kettő hányadosa

$$\gamma = \frac{\beta}{f_t} \log_{1+\epsilon} \left(\frac{1 + \epsilon}{\delta} \right).$$

A (22)-ben a $\frac{\beta}{f_t}$ -re kapott becslést behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \frac{\epsilon}{\ln \left(\frac{1}{\delta L} \right)} \log_{1+\epsilon} \left(\frac{1 + \epsilon}{\delta} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{\ln(1 + \epsilon)} \frac{\ln \left(\frac{1+\epsilon}{\delta} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\delta L} \right)} \end{aligned}$$

A $\delta = \frac{1 + \epsilon}{((1 + \epsilon)L)^{\frac{1}{\epsilon}}}$ választással $\frac{\ln \left(\frac{1+\epsilon}{\delta} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\delta L} \right)} = \frac{1}{1 - \epsilon}$, így ebből és a logaritmus Taylor-sorfejtéséből

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon) \ln(1 + \epsilon)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon) \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} \right)} \\ &\leq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} \end{aligned}$$

adódik. Ahhoz, hogy az algoritmus $(1 + \omega)$ -közelítő legyen, az kéne, hogy ez a kifejezés

legfeljebb $(1 + \omega)$ legyen, ami ϵ megfelelő választásával elérhető. \square

6.3. Állítás. Az általunk megadott algoritmus $\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \log_{1+\epsilon}(L) \right\rceil T$ idő alatt kiszámol egy $(1 - \epsilon)^{-2}$ -közelítést a maximális tört teljes párosítás pakolására, ahol $L = \frac{|V|}{2}$, T pedig a minimális költségű teljes párosítás megkereséséhez szükséges idő egy nemnegatív élköltségekkel rendelkező gráfban.

Bizonyítás:

Az algoritmusunk i . ciklusában a P párosításban szereplő legkisebb kapacitású él hosszát az $(1 + \epsilon)$ -szorosára növeljük. Minden e élre kezdetben $l_0(e) = \delta$, és a végén $l_i(e) < 1 + \epsilon$. Ha q a legnagyobb szám, hogy minden e él hosszát legfeljebb q alkalommal növelhettük, akkor teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \delta(1 + \epsilon)^q &= \frac{1 + \epsilon}{((1 + \epsilon)L)^{\frac{1}{\epsilon}}}(1 + \epsilon)^q < 1 + \epsilon \\ &\iff (1 + \epsilon)^{q - \frac{1}{\epsilon}} < L^{\frac{1}{\epsilon}} \\ &\iff q < \frac{1}{\epsilon} \log_{1+\epsilon}(L) + \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

így legfeljebb $\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \log_{1+\epsilon}(L) \right\rceil$ olyan ciklus lehetett, amelyben e volt a legkisebb kapacitású él a kiválasztott legrövidebb párosításban. Ezt a legrövidebb párosítás meghatározásához szükséges idővel szorozva éppen a kívánt eredményt kapjuk. \square

Összegzés

A szakdolgozatban két példán, a maximális tört teljes párosítás pakoláson, és a minimális költségű 1 értékű tört teljes párosítás pakoláson keresztül mutattunk be néhány lineáris programozási feladatok megoldására alkalmazható módszert.

Először felírtuk a teljes párosítások poliéderét, különválasztva a páros gráfokhoz tartozó egyszerűbb esetet és a nem páros gráfok párosításait leíró nagyobb poliédert. Ennek segítségével egy vágósíkos algoritmust adtunk a két feladat megoldására.

Következőként a Lagrange-relaxáció módszerét és a szubgradiens algoritmust, valamint utóbbi kiterjesztését, a volume algoritmust ismertettük.

A két feladathoz tartozó LP felírásoknak egy alternatív alakját használva az oszlop-generálással történő megoldást is bemutattuk, és ennek a módszernek néhány javítási lehetőségére is kitértünk.

Végezetül Garg és Könemann kombinatorikus algoritmusát módosítottuk úgy, hogy ezt alkalmazva a maximális teljes párosítás pakolás megoldását kapjuk polinomiális időben.

Az ebben a szakdolgozatban ismertetett módszerek listája korántsem teljes, számos további lehetőség is adott, ha egy LP feladatot szeretnénk megoldani. Ezek közé tartozik például [23] és [6].

Hivatkozások

- [1] Frank András. A magyar módszer és általánosításai. *SZIGMA Matematikai-közgazdasági folyóirat*, 33:13–44, 2002.
- [2] Francisco Barahona. Fractional packing of t-joins. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 17:661–669, 2004.
- [3] Francisco Barahona and Ranga Anbil. The volume algorithm: producing primal solutions with a subgradient method. *Mathematical Programming*, 87:385 –, 05 2000.
- [4] Walid Ben-Ameur and José Neto. Acceleration of cutting-plane and column generation algorithms: Applications to network design. *Networks*, 49(1):3–17, 2007.
- [5] Stephen Boyd, Lin Xiao, and Almir Mutapcic. Subgradient methods. *lecture notes of EE392o, Stanford University, Autumn Quarter, 2004(01)*, 2003.
- [6] Sergei Chubanov. A polynomial projection algorithm for linear feasibility problems. *Mathematical Programming*, 153, 2015.
- [7] George B. Dantzig and Philip Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, 8(1):101–111, 1960.
- [8] Jack Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematics and Mathematical Physics*, 69B(1 and 2):125–130, 1965.
- [9] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467, 1965.
- [10] Lisa K. Fleischer. Approximating fractional multicommodity flow independent of the number of commodities. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 13(4):505–520, 2000.
- [11] Naveen Garg and Jochen Könemann. Faster and simpler algorithms for multicommodity flow and other fractional packing problems. *SIAM Journal on Computing*, 37(2):630–652, 2007.

- [12] Andrew V Goldberg. An efficient implementation of a scaling minimum-cost flow algorithm. *Journal of Algorithms*, 22(1):1–29, 1997.
- [13] R. E. Gomory and T. C. Hu. Multi-terminal network flows. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9(4):551–570, 1961.
- [14] H. W. Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2(1-2):83–97, 1955.
- [15] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2009.
- [16] Marco Lübbecke. *Column Generation*. 01 2011.
- [17] Marco E. Lübbecke and Jacques Desrosiers. Selected topics in column generation. *Operations Research*, 53(6):1007–1023, 2005.
- [18] Aleksander Madry. Faster approximation schemes for fractional multicommodity flow problems via dynamic graph algorithms, 2010.
- [19] Philip James Neame. *Nonsmooth dual methods in integer programming*. PhD thesis, University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics, 2000.
- [20] Manfred W. Padberg and M. R. Rao. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Mathematics of Operations Research*, 7(1):67–80, 1982.
- [21] Artur Pessoa, Ruslan Sadykov, Eduardo Uchoa, and François Vanderbeck. Automation and combination of linear-programming based stabilization techniques in column generation. *INFORMS Journal on Computing*, 30(2):339–360, 2018.
- [22] François Vanderbeck. *Implementing Mixed Integer Column Generation*, pages 331–358. Springer US, Boston, MA, 2005.
- [23] László A. Végh and Giacomo Zambelli. A polynomial projection-type algorithm for linear programming. *Operations Research Letters*, 42(1):91–96, 2014.
- [24] Paul Wentges. Weighted dantzig-wolfe decomposition for linear mixed-integer programming. *International Transactions in Operational Research*, 4(2):151–162, 1997.