Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Gyenizse-Nagy András Barnabás

Klasszikus és hermitikus trigonometria

Háromszögek egybevágósága valós és komplex elliptikus és hiperbolikus terekben

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezetők:
Csikós Balázs
egyetemi docens
Lakos Gyula
adjunktus

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Csikós Balázsnak a támogatását, türelmét, és hogy tovább növelte az érdeklődésemet a geometria iránt.

Ezen kívül szeretném megköszönni a szaktársaimnak a közösen eltöltött időt, hiszen együtt jutottunk el idáig sok nehézségen keresztül, de egymást mindig támogatva.

Valamint köszönöm Lakos Gyulának a problémafelvetést.

1. Bevezetés

A szakdolgozatom célja az egyszerűbb 2-pont homogén geometriák bemutatása, azok összehasonlítása. Ezen kívül arra keresem a választ, hogy mi egy háromszög létezésének feltétele rögzített adatok mellett, illetve milyen adatok határoznak meg egy háromszöget egyértelműen.

H-C. Wang [5] osztályozt a 2-pont homogén Riemann-sokaságokat. Ezek között szerepel mind a komplex elliptikus, mind a komplex hiperbolikus tér, melyek nem 3-pont homogének. Ez azt jelenti, hogy ezekben a terekben ahhoz, hogy két háromszög egymásba vihető legyen egy izometriával, nem elegendő, hogy oldalaik ugyanolyan hosszúak legyenek.

U. Brehm [2] konstruált egy ponthármasokhoz rendelt úgynevezett *alakinvariánst* a komplex számok, illetve a kvaterniók feletti elliptikus és hiperbolikus terekben, melyről belátta, hogy ezekben a terekben két háromszög pontosan akkor vihető egymásba a tér egy izometriájával, ha oldalhosszaik és alakinvariánsuk megegyezik. Ezen kívül geometriai jelentéssel bíró állandókat is létrehozott az alakinvariánsból, amik segítségével az alapvető geometriai tételeket mondjuk ki. A szakdolgozat célja az alakinvariáns konstrukciójának és alkalmazásainak bemutatása a komplex esetben.

A (valós) gömbi és hiperbolikus geometria bemutatásához támaszkodtunk Moussong Gábor [4] és M. Berger [1] tankönyveire.

A komplex hiperbolikus terek geometriájáról egy jó bevezetést kaphatunk M.W. Goldman [3] könyvéből.

2. Metrikus terek közti távolságtartó leképezések

2.1. Definíció. Ha (X, d) és (X', d') metrikus terek, akkor egy $f\colon X \to X'$ függvényt *távolságtartónak* nevezünk, amennyiben $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül minden $x, y \in X$-re. Az f leképezés *izometria*, ha távolságtartó és bijektív.

Megjegyzés. A távolságtartó leképezések automatikusan injektívek, de nem feltétlenül szürjektívek. Például a $[0, \infty)$ félegyenes egy eltolással átvihető az $[1, \infty)$ félegyenesbe. Ez az eltolás egy nem szürjektív távolságtartó leképezés a $[0, \infty)$ félegyenesről önmagába.

Egy (X, d) metrikus tér önmagába menő izometriái csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot $Iso(X, d)$-vel, vagy röviden $Iso(X)$-szel fogjuk jelölni.

2.2. Definíció. Legyen (X, d) egy metrikus tér, $k \geq 1$ egy természetes szám. Azt mondjuk, hogy (X, d) egy *k-pont homogén tér*, ha tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ és $B_1, \ldots, B_k$ X-beli pontokra, ha $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$ minden i, j párra, akkor létezik olyan $\Phi \in Iso(X, d)$ izometria, melyre $\Phi(A_i) = B_i$ minden i-re.

Az 1-pont homogén tereket röviden *homogén térnek* hívjuk. Egy metrikus tér pontosan akkor homogén, ha az izometriacsoportja tranzitívan hat az alaphalmazon.

Bármely G összefüggő gráf V csúcsponthalmazán bevezethető egy metrika úgy, hogy két csúcs távolságát a legrövidebb őket összekötő G-beli út hosszaként definiáljuk. A gráfelméletben a G gráfot akkor nevezik *távolság tranzitívnak*, ha ez a csúcsok halmaza ezzel a metrikával 2-pont homogén.

3. Euklideszi geometria

Ebben a fejezetben az euklideszi tér, mint az alapértelmezett metrikával vett metrikus tér önmagára vett izometiáival foglalkozunk. Ezeket *egybevágósági transzfor-*

mációknak is nevezik. A célunk megmutatni, hogy az euklideszi tér k-pont homogén minden k pozitív egész számra, valamint a trigonometriai azonosságokat bemutatni. Ezen kívül megvizsgáljuk, hogy egy háromszöget mi határoz meg egyértelműen, illetve milyen feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy egy háromszög létezhessen bizonyos paraméterekkel.

3.1. Definíció (affin tér)**.** Affin tér alatt egy X halmazt és egy V vektorteret értünk, ahol értelmezve van egy $\phi\colon X \times X \to V$ függvény, melyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) minden $O \in X$-re a $\phi_O\colon X \to V$, $\phi_O(P) = \phi(O, P)$ leképezés bijekció, valamint

(2) $\phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C)$, $\forall A, B, C \in X$.

Általában az X halmaz elemeit pontoknak nevezzük, az (A, B) pontpárhoz tartozó $\phi(A, B)$ vektort pedig $\overrightarrow{AB}$-vel jelöljük. Rögzített $O \in X$ pont esetén a $\phi_O(P)$ vektort a P pont *helyvektorának* hívjuk az O kezdőpontból.

Példa. Legyen V egy vektortér. Ekkor (V, V, ψ) affin tér a $\psi(a, b) = b - a \in V$ leképezésssel. Ennél az affin térnél a V elemei egyszerre játsszák a pontok és a vektorok szerepét. Minden V-hez tartozó (X, V, ϕ) affin tér izomorf a (V, V, ψ) affin térrel, ugyanis tetszőleges $O \in X$ pont esetén a $\phi_O\colon X \to V$ bijekció izomorfizmus a két affin tér között.

3.2. Definíció (euklideszi vektortér)**.** A (V, B) párt euklideszi vektortérnek nevezzük, ha V véges dimenziós valós vektortér, és $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény. Ekkor B-t a V-beli skaláris szorzásnak nevezzük.

3.3. Definíció. n-dimenziós euklideszi térnek nevezünk egy n-dimenziós (X, V, Φ) affin teret, ha V-n adva van egy skaláris szorzás, mellyel V euklideszi vektortérré válik.

Az u, illetve v vektorok skaláris szorzatát a $B(u, v)$ jelölés mellett általában $\langle u, v\rangle$ módon jelöljük. Az $\mathbb{R}^n$ dimenziós euklideszi téren vett skalárszorzatot a következőképp definiáljuk az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorokra:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

A skaláris szorzásból származtathatjuk a vektorok normáját (hosszát) is, a $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ módon. Két nullvektortól különböző u, v vektor szöge pedig α, ahol

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|}, \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

A vektortérből ki tudunk választani egy ortonormált bázist, ennek segítségével a teret tudjuk koordinátázni a megszokott módon.

3.4. Definíció. A $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \|y - x\|$ számot az x és y pontok távolságának hívjuk.

3.5. Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség)**.** *Legyen $x, y \in V$. Ekkor $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$*

Bizonyítás. Ha $x = 0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Ha $x \neq 0$, akkor tekintsük a

$$P(t) = \|tx - y\|^2 = \|x\|^2 t^2 - 2\langle x, y\rangle t + \|y\|^2$$

másodfokú polinomot. Mivel e polinom nem vesz fel negatív értékeket, legfeljebb 1 valós gyöke lehet, tehát diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

amiből átrendezéssel adódik az egyenlőtlenség. □

3.6. Tétel. *A $d(x, y)$ függvény egy metrika X felett.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a metrika tulajdonságokat, hogy teljesülnek-e:

(1) $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} > 0$ teljesül, hiszen a gyökvonás pozitív értéket ad.
$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x - y, x - y\rangle = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$, mert a skalárszorzat pozitív definit.

(2) $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(-1)^2\langle y - x, y - x\rangle} = d(y, x)$

(3)

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{\langle x - z + z - y, x - z + z - y\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x - z, x - z\rangle + \langle y - z, y - z\rangle + 2\langle x - z, z - y\rangle} \\
&\leq \sqrt{\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\|x - z\|\|z - y\|} = \sqrt{(\|x - z\| + \|z - y\|)^2} \\
&= \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(y, z)
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség a Cauchy-Schwarz-tétel miatt igaz. □

3.7. Definíció (háromszög)**.** Vegyünk az euklideszi térben három, A, B és C pontot. Ezeknek a konvex burkát *háromszög-tartománynak* nevezzük. A három pontot a háromszög *csúcsainak*, az $[A, B] = c, [B, C] = a, [A, C] = b$ szakaszokat, a háromszög *oldalainak* nevezzük (illetve azok hosszát is így jelöljük, amennyiben egyértelmű, hogy hosszról beszélünk). A b és c oldalak által bezárt szöget α-val, az a és c oldalak által bezárt szöget β-val, az a és b oldalak által bezárt szöget γ-val jelöljük.

Megjegyzés. Ha a három pont egy egyenesen van, azt *elfajuló háromszögnek* hívjuk.

Ha a három pont A, B és C, akkor a háromszöget $ABC\triangle$ módon jelöljük.

3.8. Definíció (Egybevágó háromszög)**.** Az ABC, illetve $A'B'C'$ háromszögek egybevágóak, ha létezik olyan f izometria, amelyre: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

3.9. Tétel. *Adott a, b, c pozitív számokra pontosan akkor létezik háromszög, ha teljesítik a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz*

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b$$

teljesül.

Bizonyítás. Az elégségességet korábban beláttuk, így elég a szükségességet. Vegyünk egy A és egy B pontot a síkon, amelyek c távolságra vannak egymástól. Rajzoljunk A köré egy b sugarú K kört, B köré pedig egy a sugarú L kört. Pontosan akkor létezik háromszög ezekkel az oldalhosszokkal, ha a két kör metszi egymást, ekkor a metszéspont(ok) meghatározzák a harmadik csúcs lehetséges helyét. tegyük fel, hogy nem metszik egymást. Ez két esetben lehetséges:

(1) Egyik kör sem tartalmazza a másikat. Ez csak úgy lehet, hogy mindkét kör elválasztja egymástól a két pontot, azaz az egyik pont a körön belül, a másik a körön kívül helyezkedik el. Legyen a K kör és az AB szakasz metszéspontja P_1, L és az AB szakasz metszéspontja P_2. Mivel a két kör nem metszi egymást, ezért P_1 közelebb van A-hoz, mint P_2, így $c = |AB| = |AP_1| + |P_1P_2| + |P_2B| = b + |P_1P_2| + a > a + b$. De a feltevés szerint $a + b > c$, tehát ellentmondásra jutottunk.

(2) Az egyik kör tartalmazza a másikat. Legyen ez most a K kör. Legyen Q_1 pont az L kör és az AB egyenes azon metszéspontja, amelyik nem az AB szakaszon van, és legyen a Q_2 pont a K kör és az AB egyenes azon metszéspontja, amelyik az AB szakasz B ponton túli meghosszabításában van. Mivel a két kör nem metszi egymást, ezért Q_1 közelebb van B-hez, mint Q_2. Így $b = |AQ_2| = |AB| + |BQ_1| + |Q_1Q_2| = c + a + |Q_1Q_2| > c + a$. De feltevés szerint $a + c > b$, tehát ellentmondásra jutottunk.

Amennyiben az L kör tartalmazza a K kört, akkor hasonló módon a $b + c > a$ feltétel szükségességét látjuk be. □

3.10. Definíció (affin függetlenség)**.** Egy affin tér k pontját affin függetlennek hívunk, ha semelyik $k - 1$ pont helyvektora által generált altér nem tartalmazza a maradék pontot.

3.11. Lemma. Tegyük fel, hogy $p, q \in \mathbb{R}^n, p \neq q$. Ekkor $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) = d(x,q)\}$ egy hipersík, mely átmegy a $[p,q]$ szakasz $\frac{p+q}{2}$ felezőpontján és merőleges a $(p-q)$ vektorra.

Bizonyítás. $d(x,p) = d(x,q) \Leftrightarrow d^2(x,p) = d^2(x,q) \Leftrightarrow \|x-p\|^2 = \|x-q\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - 2\langle x,p\rangle + \|p\|^2 = \|x\|^2 - \langle x,q\rangle + \|q\|^2 \Leftrightarrow \langle p+q, p-q\rangle = \|p\|^2 - \|q\|^2 = 2\langle x, p-q\rangle \Leftrightarrow \langle p-q, x - \frac{p+q}{2}\rangle = 0$
Ez annak a hipersíknak az egyenlete, amelyik átmegy $\frac{p+q}{2}$-n, és merőleges $(p-q)$-ra. □

3.12. Lemma. Ha egy $L\colon X \to X$ egy n-dimenziós euklideszi tér önmagába menő távolságtartó leképezése, mely fixen hagy $n+1$ affin független $a_1, ...a_{n+1}$ pontot, akkor L az identitás.

Bizonyítás. Indirekten bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik $p \in X$ pont, amelyre $L(p) = q \neq p$. Ekkor $d(p, a_i) = d(L(p), L(a_i)) = d(q, a_i)$, azaz $a_0, a_1, ..., a_n$ a $[p,q]$ szakasz felező hipersíkjában vannak. Ez viszont nem lehet, mert $n+1$ affin független pont nem lehet egy hipersíkban. Tehát L minden pontot önmagába képez, azaz identitás. □

3.13. Tétel (Cartan tétele)**.** *Legyen X egy n-dimenziós euklideszi tér, $L\colon X \to X$ egy távolságtartó leképezés. Ekkor létezik legfeljebb $n+1$ hipersíkra tükrözés, $R_1, R_2, R_3, ..., R_k (k \leq n+1)$, melyekre $R_k \circ R_{k-1} \circ ... \circ R_1 = L$*

Bizonyítás. Legyen $a_0, a_1, ..., a_n$ $n+1$ affin független pont $\mathbb{R}^n$-en, ahol $L(a_i) = b_i$. Rekurzívan definiálunk $\bar{R}_i$ $i = 0, 1, ...$ izometriákat úgy, hogy

(1) $\bar{R}_i$ vagy egy hipersíkra tükrözés, vagy az identitás

(2) $\bar{R}_i \circ \bar{R}_{i-1} \circ \cdots \circ \bar{R}_0$ $a_0, a_1, \ldots, a_j$-t rendre $b_0, b_1, ..., b_j$ pontokba képezi.

$\bar{R}_0$-t a következő módon definiáljuk:

$$\bar{R}_0 = \begin{cases} \text{identitás} & \text{ha } a_0 = b_0, \\ \text{tükrözés a } [c_0, b_0] \text{ felező merőleges hipersíkjára} & \text{különben.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $\bar{R}_j, \bar{R}_{j-1} \ldots, \bar{R}_1$ már definiálva van, és $j < n$ esetén $\bar{R}_j \circ \bar{R}_{j-1} \circ \cdots \circ \bar{R}_0\colon a_i \mapsto c_i$ $c_0 = b_0, \ldots c_j = b_j$ $\bar{R}_{j+1}$-t a következő módon definiáljuk:

$$\bar{R}_{j+1} = \begin{cases} \text{identitás} & \text{ha } c_{j+1} = b_{j+1}, \\ \text{tükrözés a } [c_{j+1}, b_{j+1}] \text{ felező merőleges hipersíkjára} & \text{különben.} \end{cases}$$

A definícióból világos, hogy $\bar{R}_{j+1} \circ \bar{R}_j \circ \cdots \circ \bar{R}_0\colon a_{j+1} \mapsto b_{j+1}$
Ha $0 \leq k \leq j \Rightarrow d(b_k, c_{j+1}) = d(c_k, c_{j+1}) = d(a_k, a_{j+1}) = d(b_k, b_{j+1}) \Rightarrow b_k$ benne van

$[b_{j+1}, c_{j+1}]$ merőleges hipersíkjában, ha $b_{j+1} \neq c_{j+1} \Rightarrow \bar{R}_{j+1}(b_k) = b_k$.
$\bar{R}_n \circ \bar{R}_{n-1} \circ \dots \circ \bar{R}_0$ legfeljebb $n+1$ hipersíkra tükrözés kompozíciójának inverze: $\bar{R}_0 \circ \dots \circ \bar{R}_n$. A $\bar{R}_0 \circ \dots \circ \bar{R}_n \circ L$ kompozíció egy olyan távolságtartó leképezés, amely az $a_0, a_1, \dots a_n$ pontokat fixen hagyja. Tehát $\bar{R}_0 \circ \dots \circ \bar{R}_n \circ L = id$, ami azt jelenti, hogy $\bar{R}_n \circ \bar{R}_{n-1} \circ \dots \circ \bar{R}_0 = L$ □

3.13.1. Következmény. Az euklideszi tér k-pont homogén minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Bizonyítás. A Cartan-tétel bizonyításában leírt rekurzív konstrukció szinte szó szerinti elismétlésével láthatjuk, hogy, ha az $a_1, \dots, a_k$ és $b_1, \dots, b_k$ pontokra teljesül a $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ feltétel minden $1 \le i, j \le k$-ra, akkor az $a_1, \dots, a_k$ pontok legfeljebb k hipersíkra tükrözés kompozíciójával átvihetők a $b_1, \dots, b_k$ pontokba. Azt kell csak észrevenni, hogy a rekurzió során sehol sincs szükség a pontok affin függetlenségére. □

3.13.2. Következmény. Egy háromszöget egyértelműen meghatároz a három oldalhossza izometria erejéig.

3.14. Tétel (szinusztétel). *A szokásos jelölésekkel teljesül minden háromszögre a következő egyenlőség:*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Bizonyítás. Vegyük a háromszög a oldalához tartozó magasságvonalat, ezt jelöljük m_a-val, a magasság talppontját pedig T_a-val. Az ACT_a háromszög derékszögű b átfogóval, így teljesül a következő: $\sin\gamma = m_a/b$. Ekkor a háromszög területe: $T_{ABC\Delta} = \frac{am_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$. A csúcsokat permutálva kétféleképpen fel tudjuk még írni a területet:

$$T_{ABC\Delta} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

Ebből az egyenlőségeket átrendezve megkapjuk a fenti tételt. □

3.15. Tétel (koszinusztétel). *A szokásos jelölésekkel teljesül minden háromszögre a következő egyenlőség:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Bizonyítás. Húzzuk be megint az a oldalhoz tartozó magasságot, jelöljük m_a-val, a talppontját pedig T_a-val. Az előző bizonyítás alapján: $m_a = b\sin\gamma$, hasonló gondolatmenet alapján $|T_aC| = b\cos\gamma$, és így $|T_aB| = a - b\cos\gamma$. Az ABT_a derékszögű háromszögre felírva a Pithagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2 = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + b^2\sin^2\gamma \\ &= a^2 + b^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$ □

3.16. Tétel. *Legyen egy ABC háromszög oldalai a, b, c, szögei α, β, γ. Ekkor a háromszöget a következő paraméterek egyértelműen meghatározzák izometria erejéig:*

(1) a, b, c

(2) a, b, γ

(3) a, β, γ

(4) a, b, α, *ha* $a \ge b$

Bizonyítás. (1) A 3.13.2. következményben láttuk.

(2) A koszinusztételbe beírva az eddigi értékeket megkapjuk a harmadik oldal hosszát, így az (1) pontra visszavezettük.

(3) β-ból és γ-ból ki tudjuk számolni α-t, majd α, β-t és a-t behelyettesítve a szinusztételbe, megkapjuk b-t, α, γ-t és a-t behelyettesítve pedig c-t, visszavezetve az (1) pontra a feladatot.

(4) A szinusztételből ki tudjuk számolni $\sin \beta$-t. $\sin \beta$ csak akkor nem határozza meg β-t egyértelműen, ha β lehet kisebb is, és nagyobb is, mint $\pi/2$. Viszont mivel $a \geq b$ és nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért ha $\beta > \pi/2$, akkor α is, viszont ekkor a szögek összege több, mint π, így $\beta < \pi/2$ mindenképp. Ekkor viszont $\sin \beta$ egyértelműen meghatározza β-t. Ebből meg tudjuk határozni γ-t is, és vissza tudjuk vezetni a feladatot a (3)-as pontra. □

4. Gömbi és elliptikus geometria

4.1. Gömbi geometria

A gömbi geometriát az általánosan használt modelljén keresztül mutatjuk be. Vegyük az 1 sugarú, origó középpontú

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

gömböt az $(n+1)$-dimenziós euklideszi térben. Az n-dimenziós gömbi tér pontjai a gömbfelület pontjai lesznek, az egyenesek pedig a főkörök. A pontokat meg lehet feleltetni az origóból induló egység hosszú vektoroknak.

4.1. Definíció (gömbi háromszög)**.** Vegyünk három, független, egység hosszúságú vektort az euklideszi térben, A, B, C-t. Az általuk kifeszített kúp, és a gömb metszetét hívjuk az *ABC gömbháromszögnek.* A háromszög *csúcsai* a három vektor, az *AB oldala* pedig az A és B oldalt tartalmazó (egyértelmű) főkör háromszögbe eső része. Hasonlóan a BC és AC oldalakra.

Amennyiben a három csúcs nem független, azaz egy egyenesre fekszik, a háromszöget *elfajult háromszögnek* nevezzük. Megegyezés szerint az A csúccsal szemben fekvő oldal hosszát a-val jelöljük, a másik két oldal hosszát ugyanez alapján b és c-vel.

4.2. Definíció (oldal hossza, oldalhoz tartozó szög)**.** Az oldalak hosszát a két határoló vektor közbezárt szögével tudjuk mérni, ezeket az *oldalhoz tartozó szögnek* szoktuk nevezni. Mivel a gömböt egységsugarúnak választottuk meg, ezért az ívhossz valóban megegyezik a radiánban mért szöggel.

Vegyük észre, hogy az oldalhossz mindig 0 és π között van.

4.3. Definíció (Csúcshoz tartozó szög)**.** Vegyük az A csúcsot, illetve a b és c oldalakat. Ezekhez pontosan egy-egy euklideszi érintő egyenes tartozik, amely az A pontban érinti őket. A két érintő egyenes szögét nevezzük az A csúcshoz tartozó szögnek, és α-val jelöljük. Hasonló módon definiáljuk a másik két csúcsra a szöget, azokat β-val és γ-val jelöljük.

4.4. Tétel (gömbi szinusztétel)**.** *Bármely ABC gömbháromszögre teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{\sin A}{sin\alpha} = \frac{\sin B}{sin\beta} = \frac{\sin C}{sin\gamma}$$

Megjegyzés. A későbbiekben A, B, C-vel fogjuk jelölni a csúcsokat is, illetve a csúcsokba mutató vektrorokat is.

Bizonyítás. A kifejtési tételt fogjuk használni. Vegyük az $(A\times B)\times(C\times A)$ vektort. Definíció szerint:

$$|(A\times B)\times(C\times A)| = |(A\times B)||(C\times A)|\sin(\pi-\alpha) = \sin c\sin b\sin\alpha$$

Viszont a kifejtési tétel miatt:

$$|(A\times B)\times(C\times A)| = |(A(C\times A))B-(B(C\times A))A| = |-(BCA)A| = |BCA|$$

Tehát:

$$BCA = \sin c\sin b\sin\alpha$$

Ugyanezen gondolatmenet alapján:

$$ABC = \sin b\sin a\sin\gamma$$

ill.

$$CAB = \sin a\sin c\sin\beta$$

Mivel $ABC = BCA = CAB$, ezért a jobb oldalak is egyenlők, így a $\sin c\sin b\sin\alpha = \sin b\sin a\sin\gamma$ egyenletből következik, hogy $\frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$. Hasonlóan a másik egyenlőség is kijön. □

4.5. Definíció (poláris háromszög)**.** Vegyük az ABC gömbi háromszöget, és a gömb O középpontját. Legyen $A^\star$ az a pont a gömbfelszínen, amely a B, C, O pontok által meghatározott síkra merőleges, és a sík azon oldalán van, amelyiken a háromszög is. Hasonlóan definiáljuk a $B^\star$ és $C^\star$ pontokat. Ekkor az $A^\star B^\star C^\star$ háromszöget az *ABC háromszög poláris háromszögének* nevezzük.

4.6. Tétel. *Háromszög poláris háromszögének polárisa önmaga.*

Bizonyítás. Definícióból adódóan a $B^\star$ és a $C^\star$ vektorok merőlegesek az A vektorra. Ezen kívül csak az A pontra átellenes ponthoz tartozó vektorra merőlegesek, azonban a poláris háromszög meghatározásakor választott irány miatt csak az A pont lehet a megfelelő csúcs. Hasonlóan a többi csúcsra. □

Látható, hogy a definiált pontok tényleg háromszöget alkotnak, mert ha egy egyenesen lennének, akkor az ABC háromszög oldalai által meghatározott főköröknek összesen csak két metszéspontjuk lenne, amik így nem határoznak meg háromszöget. Tehát háromszög polárisa csak valódi háromszög lehet.

A továbbiakban a poláris háromszög oldalait $a^\star, b^\star, c^\star$-gal fogjuk jelölni, a szögeit $\alpha^\star, \beta^\star, \gamma^\star$-gal.

4.7. Tétel. *Az ABC háromszög poláris háromszögének oldalaira és szögeire teljesülnek a következők:*

$$\begin{aligned} a^\star &= \pi-\alpha & \alpha^\star &= \pi-a \\ b^\star &= \pi-\beta & \beta^\star &= \pi-b \\ c^\star &= \pi-\gamma & \gamma^\star &= \pi-c \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az A csúcsnál levő α szög az ABO és ACO háromszögek által kifeszített síkok által bezárt szög is. Mivel a $B^\star$ és a $C^\star$ vektorok ezeknek a síkoknak a normálvektorai, ezért a két vektor által bezárt szög a két sík által bezárt szög kiegészítő szöge, azaz $a^\star = \pi-\alpha$. Mivel egy háromszög poláris háromszögének polárisa önmaga, ezért az összes többi egyenlőség hasonló módon bebizonyítható. □

4.8. Tétel (oldalakra vonatkozó koszinusztétel)**.** *Bármely ABC gömbháromszögre teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$$

Bizonyítás. Vegyük az $\langle a\times b, c\times a\rangle$ skalárszorzatot. Mivel az $a\times b$ vektor normáltja a $C^\star$ vektor, a $c\times a$ vektoré pedig $B^\star$, ezért definíció szerint:

$$\langle a\times b, c\times a\rangle = |a\times b||c\times a|\cos\pi-\alpha = -\sin c\sin b\cos\alpha$$

Másrészt a kifejtési és felcserélési tétel szerint:

$$\langle a\times b, c\times a\rangle = ((a\times b)\times c)a = ((ac)b-(bc)a)a = (ac)(ab)-(bc) = \cos b\cos c-\cos a$$

Tehát: $-\sin c\sin b\cos\alpha = \cos b\cos c - \cos a$, amiből átrendezéssel megkapjuk a tételt. □

4.8.1. Következmény. A gömbi háromszög oldalaira igaz a háromszög-egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Mivel $\pi>\alpha, b, c>0$, ezért $\cos\alpha>-1, \sin b\sin c>0$. Így:

$$\cos a = \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha > \cos b\cos c-\sin b\sin c = \cos b+c$$

Ha $\pi\le b+c$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség azért teljesül, mert $0<a<\pi$. Ha $b+c<\pi$, akkor pedig azért teljesül, mert a koszinusz függvény $[0,\pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökken. □

4.8.2. Következmény. A gömbi háromszög kerülete kisebb, mint 2π.

Bizonyítás. Jelöljük A'-vel az A pont átellenes pontját, azaz azt a pontot, amelyet az A pont, az origóra való tükrözésével kapunk. Ekkor, ha az ABC háromszög oldalai a, b, c hosszúak, az $A'BC$ háromszög oldalai $a, \pi-b, \pi-c$ hosszúak lesznek. Erre a háromszögre felírva a háromszög egyenlőtlenséget megkapjuk az állítást:

$$(\pi-b)+(\pi-c)>a$$

$$2\pi>a+b+c$$ □

4.8.3. Következmény. A háromszög szögösszege nagyobb, mint π.

Bizonyítás. Mivel a poláris háromszögre is igaz, hogy a kerülete kisebb, mint 2π, ezért ezt felírva, majd az azonosságokat használva megkapjuk az eredményt:

$$a^\star+b^\star+c^\star<2\pi$$

$$(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi$$

$$3\pi-\alpha-\beta-\gamma<2\pi$$

$$\alpha+\beta+\gamma>\pi$$ □

4.9. Tétel (szögekre vonatkozó koszinusztétel)**.** *Bármely ABC gömbháromszögre teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$$

Bizonyítás. Vegyük az ABC háromszög poláris háromszögét, és írjuk fel rá az oldalakra vonatkozó koszinusztételt:

$$\cos a^\star = \cos b^\star\cos c^\star+\sin b^\star\sin c^\star\cos\alpha^\star$$

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma)+\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a)$$

A szinusz- és koszinusz azonosságok miatt:

$$-\cos\alpha = (-\cos\beta)(-\cos\gamma)+\sin\beta\sin\gamma(-\cos a)$$

Amiből megkapjuk az eredményt egy (-1)-gyel való szorzással. □

4.9.1. Következmény. A háromszög szögei egyértelműen meghatározzák a háromszöget izometria erejéig.

Bizonyítás. A szögekre vonatkozó koszinusztételből a szögek ismeretében ki tudjuk számolni az egyik oldalt. A szögek ciklizálásával a képletben, az összeset ki tudjuk számolni. □

Megjegyzés. A következményből látszik, hogy a gömbi geometriában minden hasonló háromszög egybevágó.

4.10. Definíció (izometriák a gömbi térben)**.** A gömbi térben vett távolságtartó, bijektív leképezéseket *izometriának* nevezzük.

Vegyük az n-dimenziós euklideszi tér azon izometriáit, amelyek az egységgömöt önmagára képezik. Látható, hogy ezek lesznek a gömbi geometria izometriáinak halmaza, hiszen így a bijektivitás is teljesül. Ha veszünk $n+1$ független pontot a gömbön, illetve hozzávesszük az origót is, akkor látjuk, hogy ezek az izometriák helyben hagyják az origót, mert az $n+1$ pont helyzete egyértelműen meghatározza a többi pont helyét is, és mivel kezdetben az origó mindegyiktől 1 távolságnyira volt, ezért leképezés után is csak oda kerülhet. Természetesen az origót helyben hagyó izometriák önmagára képezik le az egységgömböt, így a definícióval egyenértékű megfogalmazás, hogy a gömbi tér izometriái az origót helyben hagyó euklideszi izometriák.

Példa (Tükrözés)*.* A gömbi tükrözéseknek ennek megfelelően azokat az euklideszi tükrözéseket hívjuk, amelyek az origót helyben hagyják. Egy főkörre való tükrözés alatt azt az euklideszi tükrözést értjük a gömbre megszorítva, amely a főkör által meghatározott síkra tükröz. Mivel az euklideszi tükrözés szögtartó, ezért a gömbi távolságokat is megtartja.

4.11. Tétel. *A gömbi geometria k-pont homogén minden k-ra.*

Bizonyítás. Ez a tétel egyértelműen következik abból, hogy az euklideszi tér k-homogén minden k-ra, hiszen a megfelelő euklideszi izometria egységgömbre való megszorítása jó gömbi izometria lesz. □

4.12. Tétel. *Egy háromszög létezésének szükséges és elégséges feltétele a következők:*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a, \\ a+b+c &< 2\pi. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A szükségességet korábban beláttuk, így elég csak az elégségességet bebizonyítani.

Tegyük föl, hogy léteznek a, b, c értékek, amelyekre teljesülnek a feltételek. Vegyünk fel két pontot A-t és B-t, amelyek c távolságra vannak egymástól. Rajzoljunk egy a sugarú, és egy b sugarú kört rendre A és B köré. Amennyiben a két kör metszi egymást, a metszéspont kijelöli a harmadik pontot. Bontsuk esetekre, hogy mikor nem metszheti egymást a két kör.

Legyen $a < c$, azaz az A köré rajzolt kör elválasztja A-t és B-t. Ekkor ha a B köré rajzolt kör szintén elválasztja A-t és B-t, azaz $b < c$, akkor a két kör csak akkor nem metszi egymást, ha a sugaraik összege kisebb, mint a középpontjaik távolsága, azaz $a + b < c$. Ez viszont ellentmond az egyik feltételnek, tehát ez az eset nem lehetséges. Ha a B pont köré rajzolt kör sugara ”túl nagy”, azaz az A pont a körön belül van, akkor a körvonal megegyezik a B' pont köré rajzolt, $\pi - b$ sugarú kör körvonalával, ahol B' a B pont átellenes pontja. Ekkor a problémát visszavezettük az előző esetre, ahol a két pont távolsága $\pi - c$, a két kör sugara pedig a és $\pi - b$.

Ha $a = c$, akkor a B köré rajzolt kör sugara csak "túl nagy" lehet, ekkor az első eset indoklása itt is működik.

Ha $a > c$, akkor a $b < c$ eset megegyezik a második esettel, a $b = c$ pedig az előző esettel. Amennyiben $b > c$, vegyük fel az A' és B' átellenes pontokat, feleltessük meg a körvonalakat ezek köré rajzolt rendre $\pi - a$ és $\pi - b$ sugarú körvonalaknak. A'-nak és B'-nek a távolsága szintúgy c így a feladatot megint az első esetre vezettük vissza.

Tehát a megadott feltételekkel a két körnek metszenie kell egymást, így a feltételek elégségesek a háromszög létezéséhez. □

4.2. Elliptikus geometria

Az elliptikus geometriát a gömbi geometriából fogjuk bevezetni.

Vegyünk egy gömbfelületet, és az átellenes pontokat feleltessük meg egymásnak. Ezek lesznek az elliptikus geometria pontjai. (Az egyeneseket is ennek megfelelően tudjuk definiálni a gömbi egyenesekből.) Másképpen megfogalmazva, a gömb átmérői alkotják az elliptikus geometria-beli pontokat. Ennek segítségével már tudunk további fogalmakat is bevezetni.

4.13. Definíció (távolság)**.** Két elliptikus pont távolsága az általuk meghatározott átmérők által bezárt szög. Ha a két pont P és Q, akkor a távolságukat d(P,Q)-val jelöljük.

Megjegyzés. Két átmérő által bezárt szög alatt mindig a kisebb szöget értjük. Ennek a tulajdonságnak köszönhető, hogy nem elég, ha a gömb felső félgömbjének pontjait feleltetjük meg az elliptikus pontoknak, mert ha két pont gömbi távolsága nagyobb, mint $\frac{\pi}{2}$, akkor a gömbi és elliptikus távolságuk nem fog megegyezni.

Megjegyzés. A fenti bevezetéssel igazából a projektív teret definiáljuk:
$S^n/\{x \sim -x\} = \mathbb{R}P^n$. Tehát az elliptikus geometriát a projektív geometriából is be lehet vezetni úgy, hogy egy metrikát definiálunk rajta.

4.14. Tétel. *Bármely két egyenesre pontosan egy pont illeszkedik.*

Bizonyítás. Vegyük az ellipitikus egyenesek által meghatározott gömbi egyeneseket. Két gömbi egyenes két átellenes pontban metszi egymást a gömbfelületen, amik egy elliptikus pontnak felelnek meg. □

4.15. Tétel. *A $H = \{x \mid d(P,x) = d(Q,x)\}$ (P és Q adott) ponthalmaz két, merőleges hipersík uniója.*

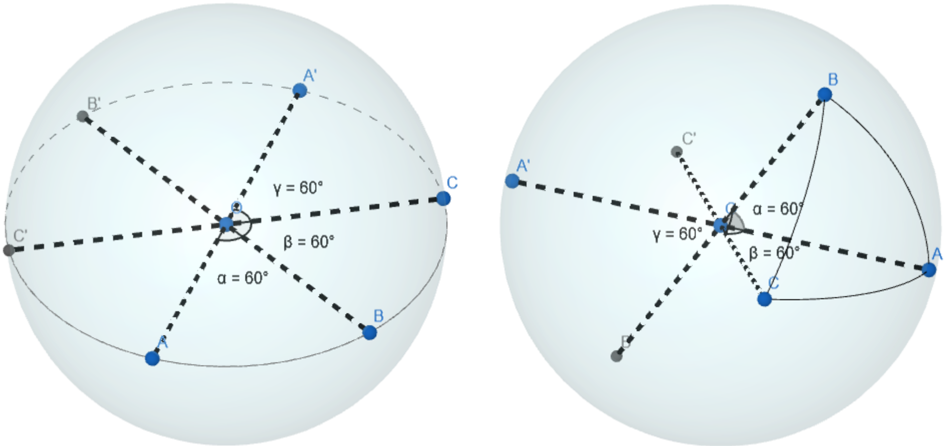
Bizonyítás. Vegyük a P és Q által meghatározott egyeneseket. Ezek az euklideszi térben egy síkot feszítenek ki. Itt tudjuk, hogy azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a két egyenestől, a két egyenes szögfelezői, az n-dimenziós térben pedig az erre a síkra merőleges, az egy-egy szögfelezőt tartalmazó hipersíkok lesznek ezek a pontok. Ezek a síkok a modellből pontosan két, merőleges elliptikus hipersíkot metszenek ki. (Azért merőlegesek, mert a két szögfelező merőleges egymásra.) □

4.16. Tétel. *Az elliptikus geometria 2-pont homogén.*

Bizonyítás. Mivel két pont távolságát az általuk reprezentált átmérők szögével definiáltuk, ahol az átmérők az euklideszi térben vannak, és az euklideszi izometriák szögtartóak, ezért ebből következik, hogy bármely két egyenlő távolságra levő elliptikus pontpár egymásba vihető. □

4.17. Tétel. *Az elliptikus geometria nem 3-pont homogén.*

Bizonyítás. Egy ellenpéldát mutatunk. Vegyünk három pontot, amelyek egy egyenesen vannak, és egyenlő távolságra vannak egymástól. Ekkor bármely kettő távolsága $\frac{\pi}{3}$. Ezen kívül vegyünk egy gömbi háromszöget, aminek az oldalai $\frac{\pi}{3}$ hosszúak (amik egyértelműen meghatározzák a háromszöget). Ennek a háromszögnek az elliptikus megfelelője nem vihető át izometriával az első három pontba, hiszen az izometriák egyenest egyenesbe visznek, és az egyik ponthármas egy egyenesen helyezkedik el, a másik nem. Azonban a páronkénti távolságok megegyeznek. $\square$



5. Valós hiperbolikus geometria

Az előzőekhez hasonlóan, ezt a geometriát is az egyik modelljén keresztül fogjuk bevezetni. Az n dimenziós modellt egy $n+1$ dimenziós valós vektortérbe ágyazzuk be, de ehhez előbb néhány fogalmat definiálunk.

5.1. Definíció (skalárszorzat)**.** A hiperbolikus skalárszorzatot a következőképpen definiáljuk: Ha $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, és $x = (x_1, x_2, \dots x_{n+1})$ és $y = (y_1, y_2, \dots y_{n+1})$, akkor a két vektor skaláris szorzata:

$$\{x, y\} = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$$

Ebből pedig a norma: $\|x\| = \sqrt{|\{x, x\}|}$

5.2. Definíció (időszerű, fényszerű, térszerű vektor, altér)**.** Egy x vektort fényszerűnek nevezünk, ha $\{x, x\} = 0$, időszerűnek, ha $\{x, x\} < 0$ és térszerűnek, ha $\{x, x\} > 0$.

A fényszerű vektorok egy kúpot alkotnak. Ennek segítségével egy alteret térszerűnek nevezünk, ha nem metsz bele a kúpba, fényszerűnek, ha az altér és a kúp metszete a kúp egy alkotója, és időszerű, ha a kúp belsejébe metsz. Speciálisan, ha az altér hipersík, akkor az $nx = 0$ egyenlettel megadott hipersík fényszerű, az $nx < 0$ egyenlettel megadott hipersík térszerű, és az $nx > 0$ egyenlettel megadott hipersík időszerű, ahol n rögzített, $\{n, n\} = 1$.

A modell megalkotása: vegyük a vektorteret $\mathbb{R}^{n+1}$ felett a szokásos koordinátázással, és tekintsük a $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \{x, x\} = -1\}$ ponthalmazt. Ez a halmaz a térben két összefüggő hiperfelületet határoz meg. Válasszuk ki a felület azon felét, amely az $x_{n+1} > 0$ féltérbe esik. Ez a ponthalmaz alkotja a modellt, ezt Z-vel fogjuk jelölni.

A sík egyeneseit a felület és az időszerű alterek metszete adja meg (amelyek önmagukban is hiperboloid modellt alkotnak).

5.3. Tétel (Fordított Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Legyen x és y két időszerű vektor. Ekkor:*

$$|\{x,y\}| \leq \sqrt{\{x,x\}\{y,y\}}$$

Bizonyítás. Ha x és y lineárisan összefüggők, ahol $y = \lambda x$, akkor

$$\begin{aligned} |\{x,y\}| &= |\{x,\lambda x\}| = |\lambda||\{x,x\}| = \sqrt{\lambda^2\{x,x\}\{x,x\}} \\ &= \sqrt{\{x,x\}\{\lambda x,\lambda x\}} = \sqrt{\{x,x\}\{y,y\}} \end{aligned}$$

Ha x és y nem függnek lineárisan, akkor a skalárszorzathoz tartozó kvadratikus alak mátrixa x és y bázisában: $A = \begin{pmatrix} \{x,x\} & \{x,y\} \\ \{x,y\} & \{y,y\} \end{pmatrix}$ Mivel a kvadratikus alak indefinit és nemelfajuló x és y által kifeszített altéren, ezért a mátrix determinánsa negatív. Tehát: $detA = \{x,x\}\{y,y\} - \{x,y\}^2 < 0$, amiből következik az állítás. $\square$

5.4. Definíció. A valós hiperbolikus tér metrikáját a következőképp definiáljuk:

$$d(x,y) = \operatorname{arccosh} -\{x,y\}$$

A definíció értelmes a fordított Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség miatt.

Példa (Tükrözés)*.* Vegyünk egy $\Sigma : \{n,x\} = 0$ hipersíkot, ahol $n \neq 0$ normálvektor. Ez a hipersík belemetsz a modellbe, ha $\{n,n\} > 0$, érinti a fényszerű vektorok által alkotott kúpot, ha $\{n,n\} = 0$, és a kúp külsejében halad, ha $\{n,n\} < 0$. Tegyük fel, hogy belemetsz a modellbe, azaz $\Sigma \cap Z \neq \emptyset$, valamint $\{n,n\} = 1$.

Ekkor az x pont Σ-ra tükrözése:

$$x' = x - 2\{n,x\}n$$

Ez továbbra is Z-ben van, mert:

$$x - 2\{n,x\}n, x - 2\{n,x\}n = \{x,x\} - 4\{x,n\}^2 + 4\{x,n\}^2 = -1$$

A tükrözés távolságtartó is, mert:

$$\begin{aligned} d(x',y') &= \cosh -\{x - 2\{n,x\}n, y - 2\{n,y\}n\} \\ &= \cosh -(\{x,y\} - 4\{x,n\}\{y,n\} + 4\{x,n\}\{y,n\}) \\ &= \cosh -\{x,y\} = d(x,y) \end{aligned}$$

Tehát a hipersíkra tükrözés izometria.

5.5. Definíció (Érintőtér)**.** Egy $x \in Z$ pont érintőterén az $(x\mathbb{R})^\perp = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \{x,u\} = 0\}$ vektorhalmazt értjük. Ezek egy n-dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

5.6. Definíció. Vegyünk egy x pontot Z-ben. Vegyünk egy $(x\mathbb{R})^\perp$-beli u vektort, az általuk kifeszített altér legyen V. Ekkor u-t az $L = V \cap Z$ hiperbolikus egyenes *irányvektorának* nevezzük.

L irányvektorai egy 1-dimenziós alteret alkotnak. Egy hiperbolikus egyenest meg tudunk adni paraméteresen egy pontjával és egy irányvektorával. Legyen a pont x, az irányvektor u, ahol u egység hosszúságú. Ekkor:

$$r(t) = \cosh t \cdot x + \sinh t \cdot u$$

képlet előállítja az egyenest.

5.7. Definíció (szög)**.** Vegyünk két, x-ből induló hiperbolikus félegyenest L-et és J-t. Legyen u L-nek azon irányvektora, amely nemnegatív értékekkel paraméterezi x-ből L-et. Hasonlóképp definiáljuk v-t, amely J-nek az irányvektora. Ekkor L és J bezárt szögén az u és v vektorok szögét értjük.

5.8. Tétel. *Egy L egyenes két különböző, egymástól a távolságra levő x és y pontjában válasszunk u és v egységnyi hosszú irányvektorokat úgy, hogy azok mindkét pontban a másik felé mutassanak. Ekkor* $\cosh a = -\{u, v\}$

Bizonyítás. Paraméterezzük az L egyenest az x ponttal és u vektorral:

$$r(t) = \cosh t \cdot x + \sinh t \cdot u$$

Ekkor $v = -r'(a) = -\sinh a \cdot x - \cosh a \cdot u$. Amiből pedig már következik, hogy $\{u, v\} = -\cosh a$ a skalárszorzat egyszerűsítése után. □

5.9. Tétel (oldalakra vonatkozó hiperbolikus koszinusztétel)**.**

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$$

Bizonyítás. Legyen $A, B, C \in Z$, rendre az a, b, c oldalakkal szemközti csúcsok. Legyen u és v az AB és AC szakaszok A csúcsból induló irányvektorai. Ekkor a szakaszok paraméterezése miatt:

$$\begin{aligned} B &= \cosh b \cdot A + \sinh b \cdot u \\ C &= \cosh c \cdot A + \sinh c \cdot v \end{aligned}$$

Vegyük a két csúcs skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned} \{B, C\} &= \{\cosh bA + \sinh bu, \cosh cA + \sinh cv\} \\ &= \{\cosh bA, \cosh cA\} + \{\cosh bA, \sinh cv\} \\ &+ \{\sinh bu, \cosh cA\} + \{\sinh bu, \sinh cv\} \\ &= \cosh b \cosh c\{A, A\} + \cosh b \sinh c\{A, v\} \\ &+ \sinh b \cosh c\{u, A\} + \sinh b \sinh c\{u, v\} \\ &= -\cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c \cos \alpha \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy $\{A, u\} = \{A, v\} = 0$, $\{A, A\} = -1$ és $\{u, v\} = \cos \alpha$. Mivel $\{B, C\} = -\cosh a$, ezért a tétel egy (-1)-gyel való szorzással kijön. □

5.10. Tétel (hiperbolikus szinusztétel)**.**

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}$$

Bizonyítás. Rendezzük át az oldalakra vonatkozó koszinusztételt:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha &= \left(\frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}\right)^2 \\ \sin^2 \alpha = 1 &- \left(\frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}\right)^2 \\ &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c} \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\sinh^2 a} &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \\ &= \frac{2 \cosh a \cosh b \cosh c - \sinh^2 a - \sinh^2 b - \sinh^2 c - 2}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \end{aligned}$$

Itt a jobb oldal invariáns a jelek permutációira, így permutált alakokkal felírva az egyenlőséget:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}.$$

Ebből már következik a tétel. □

5.11. Tétel (szögekre vonatkozó hiperbolikus koszinusztétel)**.**

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh a$$

Bizonyítás. Legyen A, B, C egy háromszög három csúcsa. Mivel ki tudunk választani egy 2-dimenziós alterét a hiperbolikus térnek, amely tartalmazza a háromszöget, ezért elég a 2-dimenziós modellen belátni a tételt. A három oldalt három 2-dimenziós vektoraltér határozza meg. Legyen ezeknek a normálvektorai n, m, o úgy, hogy $n \perp B, C$, $m \perp A, C$, $o \perp A, B$. Ezeket úgy választjuk meg, hogy mindegyik a tér azon felébe mutasson, amelyikben a háromszög van.

Legyenek az a oldal B-ből és C-ből mutató irányvektorai rendre u és v (mindkettő a másik csúcs fele mutat). Ekkor az 5.8. Tétel miatt: $\cosh a = -\{u, v\}$.

Mivel n és u is merőleges B-re, és egymásra, ezért egy ortonormált bázist alkotnak B érintőterében. Így o-t elő tudjuk állítani ezekből:

$$o = \cos(\pi - \beta)n + \sin(\pi - \beta)u = -\cos(\beta)n + \sin(\beta)u,$$

ahol β a B csúcsban levő szög. Hasonlóan:

$$m = \cos(\pi - \gamma)n + \sin(\pi - \gamma)v = -\cos(\gamma)n + \sin\gamma)v$$

Mivel m és o is benne van A érintőterében, és a bezárt szögük $\pi - \alpha$, ezért:

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) = \{m, o\} &= \cos\gamma\cos\beta\{n, n\} + \sin\gamma\sin\beta\{u, v\}\\ &= \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta(-\cosh a),\end{aligned}$$

amiből egy (-1)-gyel szorzással megkapjuk a tételt. □

5.11.1. Következmény. Egy háromszög szögei egyértelműen meghatározzák a háromszöget izometria erejéig.

6. Komplex elliptikus geometria

Legyen $\mathbb{C}^{n+1}$ vektortér. Minden $x \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$-ra legyen $[x] = x \cdot \mathbb{C}$ a hozzá tartozó pont $\mathbb{C}P^n$-ben, azaz $[x] = [\lambda x]$, ahol $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ezek legyenek a komplex elliptikus tér pontjai. Tehát:

$$\mathbb{C}P^n = \{[x] \mid x \in \mathbb{C}^n\}$$

6.1. Definíció. Ebben a térben a skalárszorzatot az euklideszihez hasonlóan definiáljuk:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i y_i$$

Emiatt:

$$\langle \lambda x, \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle\mu, \text{ illetve } \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

Az $\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle|$ módon definiáljuk a normát.

6.2. Definíció. A projektív téren vett metrikát a következőképp definiáljuk:

$$d([x], [y]) = \arccos\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}$$

A továbbiakban legyen $[x], [y], [z] \in \mathbb{C}P^n$, és $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$.

6.3. Definíció. Legyen egy *háromszög* egy $([x], [y], [z]) \in \mathbb{C}P^n$ ponthármas ($[x], [y], [z]$ különböző), ahol bármelyik kettő távolsága kisebb, mint $\pi/2$.

A három pontot a háromszög *csúcsainak* nevezzük, illetve a háromszög *oldalai* a három pontot összekötő legrövidebb szakaszok, ezeket a, b és c-vel jelöljük (valamint a hosszukat is ezzel fogjuk jelölni). A háromszög *szögeit* A, B, C-vel fogjuk jelölni.

A háromszög oldalainak a hossza értelemszerűen a pontok pontok távolsága, azaz

$$a = \arccos \frac{|\langle y, z\rangle|}{\|y\|\|z\|} = \arccos |\langle y, z\rangle|$$

$$b = \arccos \frac{|\langle z, x\rangle|}{\|x\|\|z\|} = \arccos |\langle z, x\rangle|$$

$$c = \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} = \arccos |\langle x, y\rangle|$$

Itt feltesszük, hogy $0 < a, b, c < \pi/2$.

6.4. Definíció. Legyen $([x], [y], [z])$ egy háromszög. Ekkor a háromszög alakinvariánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma([x], [y], [z]) = Re(\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle)$$

ahol $Re(x)$ az x valós részét jelöli.

A következőkben az $([x], [y], [z])$ háromszöget adottnak tekintjük, ezért az alakinvariánst csak σ-val fogjuk jelölni.

6.5. Tétel. *A komplex elliptikus tér 2-pont homogén.* [5]

6.6. Tétel. *A σ alakinvariáns invariáns a $\mathbb{C}P^n$ izometriáira nézve is.*

Bizonyítás. Egy $\phi\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ függvény izometria pontosan akkor, ha létezik egy $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ szemilineáris leképezés, ahol $\phi([x]) = [\bar{\phi(x)}]\, \forall x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, és $\langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \alpha_\phi(\langle x, y\rangle) \forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$, ahol $\alpha_\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ϕ-hez tartozó automorfizmus. $\square$

6.7. Tétel. *Egy háromszöget egyértelműen meghatározza a három oldalhossza, és az alakinvariánsa izometria erejéig.*

Bizonyítás. Látható, hogy minden háromszög izometrikus egy, az alábbi módon paraméterezett $([x], [y], [z])$ háromszöggel (azaz létezik egy $\mathbb{C}^{n+1}$-beli izometria, amely a három, egység hosszú vektort az alábbi vektorokba visz át):

$$\begin{aligned}
x &= (1{,}0, 0, \ldots, 0)\\
y &= (y_1, y_2, 0, \ldots, 0)\\
z &= (z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, 0, \ldots, 0)\\
\|y\| &= \|z\| = -1\\
&y_1, y_2, z_1, z_2, \tilde{z}_2, z_3 \in \mathbb{R}\\
&y_1, y_2, z_1 > 0, \qquad \tilde{z}_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Ezt a háromszög *normálalakjának* nevezzük. Könnyen látható, hogy két háromszög pontosan akkor izometrikus, ha a normálalakjuk megegyezik, emiatt elég belátni, hogy a, b, c, σ egyértelműen meghatározza az $y_1, y_2, z_1, z_2, \tilde{z}_2, z_3$ értékeket.

A skalárszorzások elvégzése után fel tudjuk írni a szükséges egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\cos c &= |\langle x, y\rangle| = y_1 \\
\sin c &= \sqrt{1-y_1^2} = y_2 \\
z_1 &= |\langle x, z\rangle| = \cos b \\
z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2 &= \|z\|^2 - z_1^2 = 1 - z_1^2 = \sin^2 b \\
cos^2 a &= (y_1 z_1 + y_2 z_2)^2 + y_2^2 \tilde{z}_2^2 = (\cos b \cos c + z_2 \sin c)^2 + \tilde{z}_2^2 \sin^2 c \\
\sigma &= y_1(y_1 z_1 + y_2 z_2) z_1 = (\cos b \cos c + z_2 \sin c) \cos b \cos c
\end{aligned}$$

Ezekből átrendezéssel következik, hogy:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{(\sigma - \cos^2 b \cos^2 c)}{(\cos b \cos c \sin c)} \\
\tilde{z}_2 &= \frac{(\cos^2 a - (\cos b \cos c + z_2 \sin c)^2)^{1/2}}{\sin c} = \frac{(\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{(\cos b \cos c \sin c)} \\
z_3 &= (\sin^2 b - z_2^2 - \tilde{z}_2^2)^{1/2} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2}}{\sin c}
\end{aligned}$$

(Mivel a fenti értékek valósak, ezért természetesen a gyökvonás során a pozitív gyököt vesszük.)

Ezekből látszik, hogy az adott értékek egyértelműen meghatározzák a normálalakot, így izometria erejéig a háromszöget. □

6.8. Tétel. *Legyen $0 < a, b, c < \pi/2$ és $\sigma \in \mathbb{R}$. Ekkor pontosan akkor létezik egy háromszög, amelynek az oldalai a, b, c hosszúak, és az alakinvariánsa σ, ha*

$$\frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1) \leq \sigma \leq |\sigma| \leq \cos a \cos b \cos c$$

Bizonyítás. A

$$z_3 = \frac{(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2}}{\sin c}$$

egyenletet átrendezve, és felhasználva, hogy $z_3^2 \sin^2 c \geq 0$, az első egyenlőtlenséget kapjuk. A második egyenlőtlenség triviális. A harmadik egyenlőtlenséget a

$$\tilde{z}_2 = \frac{(\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{(\cos b \cos c \sin c)}$$

átrendezésével, és egy gyökvonás után kapjuk, kihasználva, hogy $\tilde{z}_2^2(\cos^2 b \cos^2 c \sin^2 c) \geq 0$.

A másik irány triviális, hiszen ezekkel a feltételekkel az előző bizonyításban adott konstrukcióval elő tudjuk állítani az összes paramétert. A $0 < a, b, c < \pi/2$ és $\sigma \in \mathbb{R}$ feltételek miatt pedig $y_1, y_2, z_1 > 0, \tilde{z}_2, z_3 \geq 0$ is teljesül. □

Megjegyzés. A $\frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1) \leq \cos a \cos b \cos c$ állítás egyenértékű azzal, hogy $\cos(a-b) \geq \cos c \geq \cos(a+b)$, és mivel $0 < a, b, c < \pi/2$, ezért ez egyenértékű azzal, hogy $|a-b| \leq c \leq a+b$. Magyarán a háromszög-egyenlőtlenség teljesül a komplex elliptikus geometriában is, azonban itt megengedünk egyenlőséget is.

6.8.1. Következmény. A komplex elliptikus tér nem 3-pont homogén. Két, azonos oldalhosszú, de különböző alakinvariánsú háromszögeket nem lehet egymásba vinni izometriával.

6.8.2. Következmény. $\sigma = \frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1)$ akkor és csak akkor, ha $[x], [y], [z]$ egy projetív egyenesre esik.

Bizonyítás. Ha a fenti feltétel teljesül, akkor $z_3 = 0$, így x, y, z lineárisan összefüggőek, tehát benne vannak egy 2-dimenziós komplex altérben, így egy egyenesre esnek $\mathbb{C}P^n$-ben. □

6.1. Szöginvariánsok, és trigonometriai összefüggések

6.9. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\|x\| = 1$. $\mathbb{C}P^n$ *érintőtere* az $[x]$ pontban:

$$(x\mathbb{C})^\perp = \{y \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle x, y\rangle = 0\}$$

6.10. Definíció. Legyen

$$u(x, [y]) = \frac{y\langle y, x\rangle - x|\langle y, x\rangle|^2}{\|y\langle y, x\rangle - x|\langle y, x\rangle|^2\|}.$$

Ekkor $u(x, [y]) \in (xK)^\perp$, $\|u(x, [y])\| = 1$ és $\frac{\langle y, u(x,[y])\rangle}{\langle y, x\rangle} \in \mathbb{R}_+$. $u(x, [y])$-t az $[x]$ *-t és* $[y]$ *-t összekötő legrövidebb szakasz* $[x]$ *-beli érintő egységvektorának* nevezzük.

Az érintőtérben a metrika: $d(x, y) = Re\langle x, y\rangle$

6.11. Definíció. Legyen $([x], [y], [z])$ egy háromszög a, b, c oldalakkal, A, B, C szögekkel, és σ alakinvariánssal, valamint legyen $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$. Ekkor az A szög szöginvariánsait a következő módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \arccos Re\langle u_1, u_2\rangle, \\ \phi(A) &= \arccos |\langle u_1, u_2\rangle|, \\ \psi(A) &= \arcsin |Im\langle u_1, u_2\rangle|, \end{aligned}$$

ahol $u_1 = u(x, [y])$ és $u_2 = u(x, [z])$.

Megjegyzés. $\lambda(A), \phi(A), \psi(A)$ független az x reprezentáló vektortól, valamint ezek invariánsok a $\mathbb{C}P^n$-beli izometriákra nézve, illetve $0 \leq \lambda(A) \leq \pi$, $0 \leq \phi(A) \leq \pi/2$, $0 \leq \psi(A) \leq \pi/2$.

Megjegyzés. Geometriailag $\lambda(A)$ az oldalak által bezárt szokásos szög (hiszen $Re\langle , \rangle$ a metrika).

$\phi(A)$ a projektív egyenesek által bezárt szög, hiszen egy projektív egyenes érintőtere egy 1-dimenziós komplex altere a az érintőtérnek, és:

$$\begin{aligned} |\langle u_1, u_2\rangle| &= max\{Re\langle u_1\alpha, u_2\rangle \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\} \\ &= max\{Re\langle u_1\alpha, u_2\beta\rangle \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = |\beta| = 1\} \end{aligned}$$

A következő lemmákban és tételekben végig feltesszük, hogy $0 < a, b, c < \pi/2$.

6.12. Lemma.

$$\langle u_1, u_2\rangle = \frac{\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle\langle y, x\rangle - |\langle x, z\rangle|^2|\langle x, y\rangle|^2}{(1 - |\langle x, y\rangle|^2)^{1/2}((1 - |\langle x, z\rangle|^2)^{1/2})|\langle x, y\rangle||\langle x, z\rangle|}$$

Bizonyítás. u_1 és u_2 definíciójából következik átalakítással. □

6.13. Lemma.

$$\cos\lambda(A) = Re\langle u_1, u_2\rangle = \frac{4(\sigma - \cos^2 b\cos^2 c)}{\sin 2b \sin 2c}$$

Bizonyítás. Elég a háromszög normálalakjára belátni. Ekkor:

$$u_1 = u(x, [\,y]\,) = \frac{y\langle y, x\rangle - x|\langle y, x\rangle|^2}{\|y\langle y, x\rangle - x|\langle y, x\rangle|^2\|} = \frac{yy_1 - xy_1^2}{\|yy_1 - xy_1^2\|}$$
$$= \frac{(y_1, y_2, 0, \dots, 0)y_1 - (1, 0, \dots, 0)y_1^2}{\|(y_1^2, y_2y_1, 0, \dots, 0) - (1, 0, \dots, 0)y_1^2\|} = \frac{(0, y_1y_2, 0, \dots, 0)}{y_1y_2} = (0, 1, 0, \dots, 0).$$

Hasonlóan:

$$u_2 = u(x, [\,z]\,) = \frac{z\langle z, x\rangle - x|\langle z, x\rangle|^2}{\|z\langle z, x\rangle - x|\langle z, x\rangle|^2\|} = \frac{zz_1 - xz_1^2}{\|zz_1 - xz_1^2\|}$$
$$= \frac{(z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)z_1 - (1, 0, \dots, 0)z_1^2}{\|(z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)z_1 - (1, 0, \dots, 0)z_1^2\|}$$
$$= \frac{(0, z_1z_2 + z_1\tilde{z}_2 i, z_3z_1, 0, \dots, 0)}{(z_1^2(z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2))^{1/2}} = \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2)^{1/2}}$$
$$= \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(1 - z_1^2)^{1/2}} = \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(1 - \cos^2 b)^{1/2}} = \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{\sin b}.$$

Így:

$$\cos\lambda(A) = Re\langle u_1, u_2\rangle = Re\langle (0, 1, 0, \dots, 0), \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{\sin b}\rangle = \frac{z_2}{\sin b} =$$
$$= \frac{(\sigma - \cos^2 b \cos^2 c)}{\cos b \cos c \sin b \sin c} = \frac{4(\sigma - \cos^2 b \cos^2 c)}{\sin 2b \sin 2c}. \qquad \square$$

6.14. Lemma.

$$\sin\phi(A) = (1 - |\langle u_1, u_2\rangle|^2)^{1/2} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2}}{\sin b \sin c}$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség a $\phi(A)$ definíciójából és a $\cos^2\phi(A) + \sin^2\phi(A) = 1$ azonosság fehasználásával látszik. A második:

$$(1 - |\langle u_1, u_2\rangle|^2)^{1/2} = (1 - \left|\frac{z_2 + \tilde{z}_2 i}{\sin b}\right|^2)^{1/2} = (1 - \frac{z_2^2 + \tilde{z}_2^2}{\sin^2 b})^{1/2} = (1 - \frac{\sin^2 b - z_3^2}{\sin^2 b})^{1/2} =$$
$$= \frac{(\sin^2 b - \sin^2 b + z_3^2)^{1/2}}{\sin b} = \frac{z_3}{\sin b} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2}}{\sin b \sin c} \qquad \square$$

6.15. Lemma.

$$\sin\psi(A) = |Im\langle u_1, u_2\rangle| = \frac{4(\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\sin 2b \sin 2c}$$

Bizonyítás.

$$\sin\psi(A) = |Im\langle u_1, u - 2\rangle| = \left|Im(\frac{z_2 + \tilde{z}_2 i}{\sin b})\right| = \left|\frac{\tilde{z}_2}{\sin b}\right|$$
$$= \frac{(\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\cos b \cos c \sin c \sin b} = \frac{4(\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\sin 2c \sin 2b}$$

$\square$

Most pedig lássuk az erre a geometriára vonatkozó alapvető trigonometriai tételeket.

6.16. Tétel.

$$\frac{\sin\phi(A)}{\sin a} = \frac{\sin\phi(B)}{\sin b} = \frac{\sin\phi(C)}{\sin c}$$

Bizonyítás. A 6.13. Lemmából következik, ha a betűket permutáljuk, és az egyenletet átrendezzük:

$$\begin{aligned}(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2} &= \sin\phi(A)\sin b \sin c \\ = \sin\phi(B)\sin a\sin c &= \sin\phi(C)\sin b\sin a.\end{aligned}$$

Ebből pedig átrendezéssel következik a fenti egyenlőség. □

6.17. Tétel.

$$\frac{\sin\psi(A)}{\sin 2a} = \frac{\sin\psi(B)}{\sin 2b} = \frac{\sin\psi(C)}{\sin 2c}$$

Bizonyítás. A 6.14. Lemmából következik a betűket permutálva, és az egyenletet átrendezve:

$$\begin{aligned}4(\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c - \sigma^2)^{1/2} &= \sin\psi(A)\sin 2b\sin 2c = \sin\psi(B)\sin 2a\sin 2c \\ &= \sin\psi(C)\sin 2b\sin 2a\end{aligned}$$

Ebből pedig következik a fenti egyenlőség. □

6.18. Tétel.

$$\cos 2b\cos 2c - \cos 2a + \cos\lambda(A)\sin 2b\sin 2c = 2\sin^2\phi(A)\sin^2 b\sin^2 c$$

Bizonyítás. A 6.12., valamint 6.13. Lemmát felhasználva, és σ-ra átrendezve megkapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}2\sigma &= \sin^2\phi(A)\sin^2 b\sin^2 c + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 \\ &= \frac{1}{2}\cos\lambda(A)\sin 2b\sin 2c + 2\cos^2 b\cos^2 c\end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel, és trigonometriai azonosságok alkalmazásával kijön a fenti egyenlőség. □

Megjegyzés. a, b, c és $\psi(A)$ csupán σ^2-et határozza meg egyértelműen, σ-t nem. Mivel $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c < 1$ esetén $\sigma > 0$ és $\sigma < 0$ is lehetséges, ezért ez a háromszöget sem határozza meg egyértelműen (azonban a, b, c és $\lambda(A)$ vagy $\phi(A)$ igen, ezt később látjuk).

6.18.1. Következmény. Egy háromszög pontosan akkor esik egy projektív egyenesre, ha $\phi(A) = 0$ (és így a 6.15. Tétel miatt $\phi(B) = \phi(C) = 0$).

Bizonyítás. Vegyük ismét a következő egyenlőséget:

$$\sin\phi(A) = (1 - |\langle u_1, u_2\rangle|^2)^{1/2} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))^{1/2}}{\sin b\sin c}$$

Mivel a bal oldal 0, ezért átrendezve:
$\frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1) = \sigma$
Ezzel pedig visszavezettük a 6.7.2. következményre, és így beláttuk az állítást. □

6.2. Egybevágósági tételek

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a három oldalhossz és a három szöginvariáns közül ha kiválasztunk 4-et, azok mikor határozzák meg egyértelműen a háromszöget izometria erejéig.

6.19. Tétel. *Egy $\mathbb{C}P^n$-beli háromszög egyértelműen meghatározott izometria erejéig, ha a következő értékek vannak megadva (a szokásos jelöléssel):*

(1) $a, b, c, \lambda(A)$

(2) $a, b, c, \phi(A)$

(3) $\lambda(A), b, c, \phi(A)$

(4) $a, b, \lambda(C), \phi(A)$

(5) $a, b, \phi(C), \phi(A)$

(6) $a, \phi(B), \lambda(C), \phi(A)$

(7) $a, \phi(B), \phi(C), \phi(A)$

(8) $a, b, \lambda(B), \lambda(A)$

Az (5)-(7) esetben feltesszük, hogy $\phi(A) \neq 0$, a (8) esetben pedig azt, hogy $a \neq b$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a, b, c, σ a $0 < a, b, c < \pi/2$ feltétellel egyértelműen kiszámolható a fenti értékekből, amiből következik az egyértelműség.

(1) A 6.12. Lemma segítségével kiszámolható σ is.

(2) A 6.12. Lemma segítségével kiszámolható σ is.

(3) A 6.12. Lemma segítségével és $b, c, \lambda(A)$ felhasználásával kiszámoljuk σ-t, majd a 6.13. Lemma segítségével a-t.

(4) A 6.12. Lemma segítségével és $a, b, \lambda(C)$ felhasználásával kiszámoljuk σ-t, majd a 6.13. Lemma segítségével c-t.

(5) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk c-t, ekkor a (2) pontra visszavezettük a feladatot.

(6) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk b-t, ekkor a (4) pontra visszavezettük a feladatot.

(7) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk b-t és c-t, ekkor a (2) pontra visszavezettük a feladatot.

(8) A 6.12. Lemmát átalakítva kétszer, megkapjuk, hogy:

$$\cos\lambda(A)\sin 2b\sin 2c + 4\cos^2 b\cos^2 c = 4\sigma = \cos\lambda(B)\sin 2a\sin 2c + 4\cos^2 a\cos^2 c$$

(Itt kihasználtuk, hogy $a \neq b$) Ebből meghatározzuk c-t, ezzel visszavezetve az (1) pontra a feladatot.

□

6.20. Lemma. Az α, β, γ paraméterekkel adott $\alpha\sin 2c + \beta = \gamma\sin^2 c$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $c \in (0, \pi)$ intervallumon, ha $\beta(\gamma - \beta) > 0$ [2]

6.21. Tétel. *Egy háromszöget egyértelműen meghatározzák a következő értékek izometria erejéig, ha a hozzájuk tartozó egyenlőtlenségek teljesülnek:*

(1) $a, b, \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $(a - b)(\cos a - \sin b\cos\phi(A)) > 0$

(2) $a, b, \phi(B), \lambda(A)$, *ha* $(a - b)(\cos b - \sin a\cos\phi(B)) > 0$

(3) $a, \phi(B), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $(\phi(A) - \phi(B))(\tan\phi(A) - \tan a\sin\phi(B)) > 0$

(4) $b, \phi(B), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $(\phi(A) - \phi(B))(\tan\phi(B) - \tan b\sin\phi(A)) > 0$

(5) $b, \phi(C), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $\sin^2\phi(A) > \sin^2\phi(C)(1 - \cos^2\phi(A)\sin^2 b)$

(6) $a, b, \lambda(C), \lambda(A)$, ha $(\tan a - \tan b \cos\lambda(C))(\cot a + \tan b \cos\lambda(C)) > 0$

Amennyiben $\phi(A) \neq 0$, a (3)-(5) pontok legfeljebb két háromszöget határoznak meg az egyenlőtlenségek nélkül tetszőleges $c \in (0, \pi/2)$-re, kivéve ha

$$\lambda(A) = \lambda(B) = \pi/2, \qquad a = b \geq \pi/4, \qquad \phi(A) = \phi(B) = \arccos(\cot a)$$

Bizonyítás. (1) Vegyük észre, hogy a 6.17. Tétel bizonyításában használt

$$\begin{aligned}\sin^2\phi(A)\sin^2 b \sin^2 c +& \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 \\ &= \frac{1}{2}\cos\lambda(A)\sin 2b \sin 2c + 2\cos^2 b \cos^2 c\end{aligned}$$

egyenlet $\alpha \sin 2c + \beta = \gamma \sin^2 c$ alakú. Így a 6.19. Lemmában szereplő feltétel itteni megfelelője pont a kért feltétel. Látható, hogy ha teljesül a feltétel, akkor a 6.17. Tétel segítségével ki tudjuk számolni c-t is, és ezért a 6.18. Tétel alapján egyértelműen meghatároztuk a háromszöget.

(2) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk $\phi(A)$-t, és így visszavezettük az (1)-es pontra a feladatot.

(3) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk b-t, és így visszavezettük az (1)-es pontra a feladatot.

(4) A 6.15. Tétel segítségével kiszámoljuk a-t, és így visszavezettük a (2)-es pontra a feladatot.

(5) A 6.15. Tétel miatt $\sin^2 a = \frac{\sin^2 c \sin^2\phi(A)}{\sin^2\phi(C)}$, amit behelyettesítve

$$\begin{aligned}\sin^2\phi(A)\sin^2 b \sin^2 c +& \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 \\ &= \frac{1}{2}\cos\lambda(A)\sin 2b \sin 2c + 2\cos^2 b \cos^2 c\end{aligned}$$

-be, megint kapunk egy $\alpha \sin 2c + \beta = \gamma \sin^2 c$ alakú egyenletet, amire a feltétel megegyezik a kért feltétellel.

(6) A 6.12. Lemma segítségével ki tudjuk számolni σ-t. Ekkor ugyanezt az egyenletet felírva $\lambda(A)$-ra, egy $\alpha \sin 2c + \beta = \gamma \sin^2 c$ alakú egyenletet kapunk megint, amire a feltétel megegyezik a kért feltétellel.

Látható, hogy $\alpha \sin 2c + \beta = \gamma \sin^2 c$-nak legfeljebb két megoldása van $c \in [0, \pi/2)$-n, kivéve ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ez viszont csak akkor lehetéges, ha $\lambda(A) = \lambda(B) = \pi/2, a = b \geq \pi/4, \phi(A) = \phi(B) = \arccos(\cot a)$. Ekkor $\sigma = \cos^2 a \cos^2 c$, és c tetszőlegesen választható a $(0, \pi/2)$ intervallumon. □

Példa. $\lambda(A), \lambda(B), \lambda(C), a, b$ nem határozza meg a izometria erejéig a háromszöget. Például ha:

$$\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(C) = \frac{2}{3}\pi, \qquad a = b = \pi/3$$

akkor $c = \pi/3$ és $c = \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$ is lehetséges.

7. Komplex hiperbolikus geometria

A komplex hiperbolikus tér sok hasonlóságot mutat a komplex elliptikus térhez.

Legyen $\mathbb{C}^{n+1}$ vektortér. $[x] = x \cdot \mathbb{C}$-et a komplex elliptikus geometriában tárgyalt módon definiáljuk. Ekkor a komplex hiperbolikus tér:

$$\mathbb{C}H^n = \{[x] \mid x \in \mathbb{C}^{n+1}, \{x, x\} < 0\},$$

ahol a képletben szereplő $\{.,.\}$ hermitikus formát a $\mathbb{C}^{n+1}$ térben a valós hiperbolikus esethez hasonlóan definiáljuk:

7.1. Definíció.

$$\{x, y\} = -\bar{x}_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \bar{x}_i y_i.$$

Ebből pedig a norma: $\|x\|^2 = |\{x, x\}|$

Megjegyzés. A skalárszorzat definíciójából látható, hogy az x reprezentáló vektor választása nem befolyásolja, hogy $[\,x\,]$ benne van-e $\mathbb{C}H^n$-ben vagy sem.

7.2. Definíció. A komplex hiperbolikus téren vett metrikát a következőképp definiáljuk:

$$d([\,x\,], [\,y\,]) = \operatorname{arccosh} \frac{|\{x, y\}|}{\|x\|\|y\|}$$

ahol $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$, és $\{x, x\} < 0, \{y, y\} < 0$. Ennek van értelme, mert $\frac{|\{x,y\}|}{\|x\|\|y\|} \geq 1$.

A továbbiakban legyen $x, y, z \in \mathbb{C}^{n+1}$, és $\{x, x\} = \{y, y\} = \{z, z\} = -1$.

7.3. Definíció. Legyen egy *háromszög* egy $([\,x\,], [\,y\,], [\,z\,]) \in \mathbb{C}H^n$ ponthármas ($[\,x\,], [\,y\,], [\,z\,]$ különböző).

A három pontot a háromszög *csúcsainak* nevezzük, illetve a háromszög *oldalai* a három pontot összekötő legrövidebb szakaszok, ezek hosszát a, b és c-vel jelöljük. A háromszög *szögeit* A, B, C-vel fogjuk jelölni.

A háromszög oldalainak a hossza értelemszerűen a pontok pontok távolsága, azaz

$$a = \operatorname{arccosh} \frac{|\{y, z\}|}{\|y\|\|z\|} = \arccos |\{y, z\}|$$

$$b = \operatorname{arccosh} \frac{|\{z, x\}|}{\|z\|\|x\|} = \arccos |\{z, x\}|$$

$$c = \operatorname{arccosh} \frac{|\{x, y\}|}{\|x\|\|y\|} = \arccos |\{x, y\}|$$

7.4. Definíció. Legyen $([\,x\,], [\,y\,], [\,z\,])$ egy háromszög. Ekkor az alakinvariánst a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma([\,x\,], [\,y\,], [\,z\,]) = -Re\{x, y\}\{y, z\}\{z, x\}.$$

A következőkben az $([\,x\,], [\,y\,], [\,z\,])$ háromszöget adottnak tekintjük, ezért az alakinvariánst csak σ-val fogjuk jelölni.

7.5. Tétel. *A komplex hiperbolikus tér 2-pont homogén.* [5]

7.6. Tétel. *A σ alakinvariáns invariáns a $\mathbb{C}H^n$ izometriáira nézve is.*

Bizonyítás. Egy $\phi\colon \mathbb{C}H^n \to \mathbb{C}H^n$ függvény izometria pontosan akkor, ha létezik egy $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ szemilineáris leképezés, ahol $\phi([\,x\,]) = [\,\phi(\bar{x})]\ \ \forall x \in \mathbb{C}^{n+1}\}$, ami $\{x, x\} < 0$ és $\{\phi(x), \phi(y)\} = \alpha_\phi(\{x, y\}) \forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$, ahol $\alpha_\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ϕ-hez tartozó automorfizmus. $\square$

7.7. Tétel. *Egy háromszöget egyértelműen meghatározza a három oldalhossza, és az alakinvariánsa izometria erejéig.*

Bizonyítás. Látható, hogy minden háromszög izometrikus egy, az alábbi módon paraméterezett $([x],[y],[z])$ háromszöggel (a komplex elliptikus térhez hasonló érvelés alapján):

$$\begin{aligned}
&x = (1, 0, 0, \dots, 0)\\
&y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0)\\
&z = (z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, 0, \dots, 0)\\
&\{y, y\} = \{z, z\} = -1\\
&y_1, y_2, z_1, z_2, \tilde{z}_2, z_3 \in \mathbb{R}\\
&y_1, y_2, z_1 > 0, \qquad \tilde{z}_2, z_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Ezt a háromszög *normálalakjának* nevezzük. Látható, hogy két háromszög pontosan akkor izometrikus, ha a normálalakjuk megegyezik, emiatt elég belátni, hogy a, b, c, σ egyértelműen meghatározza az $y_1, y_2, z_1, z_2, \tilde{z}_2, z_3$ értékeket.

Könnyen látható, hogy szükségesek a következők:

$$\begin{aligned}
\cosh c &= |\{x, y\}| = y_1\\
\sinh c &= \sqrt{\cosh^2 c - 1} = \sqrt{y_1^2 - 1} = y_2\\
z_1 &= |\{x, z\}| = \cosh b\\
z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2 &= \{z, z\} + z_1^2 = -1 + z_1^2 = \sinh^2 b\\
cosh^2 a &= (-y_1 z_1 + y_2 z_2)^2 + y_2^2 \tilde{z}_2^2 = (-\cosh b \cosh c + z_2 \sinh c)^2 + \tilde{z}_2^2 \sinh^2 c\\
\sigma &= -(-y_1)(-y_1 z_1 + y_2 z_2)(-z_1) = (\cosh b \cosh c - z_2 \sinh c) \cosh b \cosh c
\end{aligned}$$

Ezekből átrendezéssel következik, hogy:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{(-\sigma + \cosh^2 b \cosh^2 c)}{(\cosh b \cosh c \sinh c)}\\
\tilde{z}_2 &= \frac{(\cosh^2 a - (-\cosh b \cosh c + z_2 \sinh c)^2)^{1/2}}{\sinh c} = \frac{(\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{(\cosh b \cosh c \sinh c)}\\
z_3 &= (\sinh^2 b - z_2^2 - \tilde{z}_2^2)^{1/2} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c))^{1/2}}{\sinh c}.
\end{aligned}$$

(Mivel a fenti értékek valósak, ezért természetesen a gyökvonás során a pozitív gyököt vesszük.)

Ezekből látszik, hogy az adott értékek egyértelműen meghatározzák a normálalakot, így izometria erejéig a háromszöget. □

7.8. Tétel. *Legyen $0 < a, b, c$ és $\sigma \in \mathbb{R}$. Ekkor pontosan akkor létezik egy háromszög, amelynek az oldalai a, b, c hosszúak, és az alakinvariánsa σ, ha*

$$\frac{1}{2}(\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1) \leq \sigma \leq \cosh a \cosh b \cosh c.$$

Bizonyítás. A

$$z_3 = \frac{(2\sigma + 1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c))^{1/2}}{\sinh c}$$

egyenletet átrendezve, és felhasználva, hogy $z_3^2 \sinh^2 c \geq 0$, az első egyenlőtlenséget kapjuk. A második egyenlőtlenséget a

$$\tilde{z}_2 = \frac{(\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{(\cosh b \cosh c \sinh c)}$$

átrendezésével, és egy gyökvonás után kapjuk, kihasználva, hogy $\tilde{z}_2^2(\cosh^2 b \cosh^2 c \sinh^2 c) \geq 0$.

A másik irány triviális, hiszen ezekkel a feltételekkel az előző bizonyításban adott konstrukcióval elő tudjuk állítani az összes paramétert. A $0 < a, b, c$ és $\sigma \in \mathbb{R}$ feltételek miatt pedig $y_1, y_2, z_1 > 0, \tilde{z}_2, z_3 \geq 0$ is teljesül. $\square$

Megjegyzés. A $\frac{1}{2}(\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1) \leq \cosh a \cosh b \cosh c$ állítás egyenértékű azzal, hogy $\cosh(a-b) \leq \cosh c \leq \cosh(a+b)$, és ez egyenértékű azzal, hogy $|a-b| \leq c \leq a+b$. Azaz a háromszög-egyenlőtlenség teljesül a komplex hiperbolikus geometriában is, azonban itt megengedünk egyenlőséget is.

7.8.1. Következmény. $\sigma = \frac{1}{2}(\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1)$ akkor és csak akkor, ha $[\,x\,], [\,y\,], [\,z\,]$ egy projetív egyenesre esik.

Bizonyítás. Ha a fenti feltétel teljesül, akkor $z_3 = 0$, így x, y, z lineárisan összefüggőek, tehát benne vannak egy 2-dimenziós komplex altérben, így egy egyenesre esnek $\mathbb{C}H^n$-ben. $\square$

7.1. Szöginvariánsok, és trigonometriai összefüggések

7.9. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\{x, x\} = -1$. $\mathbb{C}H^n$ *érintőtere* az $[\,x\,]$ pontban:

$$(x\mathbb{C})^{\perp} = \{y \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \{x, y\} = 0\}$$

7.10. Definíció. Legyen

$$u(x, [\,y\,]\,) = \frac{-y\{y, x\} - x|\{y, x\}|^2}{\|y\{y, x\} + x|\{y, x\}|^2\|}$$

Ekkor $u(x, [\,y\,]\,) \in (xK)^{\perp}$, $\{u(x, [\,y\,]\,), u(x, [\,y\,]\,)\} = 1$ és $\frac{-\{y, u(x, [\,y\,]\,)\}}{\{y, x\}} \in \mathbb{R}_+$. $u(x, [\,y\,]\,)$-t az $[\,x\,]$*-t és* $[\,y\,]$*-t összekötő legrövidebb szakasz* $[\,x\,]$*-beli érintő egységvektorának* nevezzük.

Az érintőtérben a metrika: $d(x, y) = Re\{x, y\}$

7.11. Definíció. Legyen $([\,x\,], [\,y\,], [\,z\,]\,)$ egy háromszög a, b, c oldalakkal, A, B, C szögekkel, és σ alakinvariánssal. Ekkor az A szög szöginvariánsait a következő módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \arccos Re\{u_1, u_2\}, \\ \phi(A) &= \arccos |\{u_1, u_2\}|, \\ \psi(A) &= \arcsin |Im\{u_1, u_2\}|, \end{aligned}$$

ahol $u_1 = u(x, [\,y\,]\,)$ és $u_2 = u(x, [\,z\,]\,)$

Megjegyzés. $\lambda(A), \phi(A), \psi(A)$ független az x reprezentáló vektortól, valamint ezek invariánsok a $\mathbb{C}H^n$-beli izometriákra nézve, illetve $0 \leq \lambda(A) \leq \pi$, $0 \leq \phi(A) \leq \pi/2$, $0 \leq \psi(A) \leq \pi/2$.

Megjegyzés. Geometriailag $\lambda(A)$ az oldalak által bezárt szokásos szög, $\phi(A)$ a projektív egyenesek által bezárt szög.

7.12. Lemma.

$$\{u_1, u_2\} = \frac{\{x, z\}\{z, y\}\{y, x\} + |\{x, z\}|^2|\{x, y\}|^2}{(1 - |\{x, y\}|^2)^{1/2}((1 - |\{x, z\}|^2)^{1/2})|\{x, y\}||\{x, z\}|}$$

Bizonyítás. u_1 és u_2 definíciójából következik átalakítással. $\square$

7.13. Lemma.

$$\cos\lambda(A) = Re\{u_1, u_2\} = \frac{4(-\sigma + \cosh^2 b \cosh^2 c)}{\sinh 2b \sinh 2c}$$

Bizonyítás. Elég a háromszög normálalakjára belátni. Ekkor:

$$\begin{aligned} u_1 = u(x, [\,y]\,) &= \frac{-y\{y,x\} - x|\{y,x\}|^2}{\|y\{y,x\} + x|\{y,x\}|^2\|} = \frac{yy_1 - xy_1^2}{\|yy_1 - xy_1^2\|} \\ &= \frac{(y_1, y_2, 0, \dots, 0)y_1 - (1, 0, \dots, 0)y_1^2}{\|(y_1, y_2, 0, \dots, 0)y_1 - (1, 0, \dots, 0)y_1^2\|} = \frac{(0, y_1y_2, 0, \dots, 0)}{y_1y_2} = (0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} u_2 = u(x, [\,z]\,) &= \frac{-z\{z,x\} - x|\{z,x\}|^2}{\|z\{z,x\} + x|\{z,x\}|^2\|} = \frac{zz_1 - xz_1^2}{\|zz_1 - xz_1^2\|} \\ &= \frac{(z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)z_1 - (1, 0, \dots, 0)z_1^2}{\|(z_1, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)z_1 - (1, 0, \dots, 0)z_1^2\|} = \frac{(0, z_1z_2 + z_1\tilde{z}_2 i, z_3z_1, 0, \dots, 0)}{(z_1^2(z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2))^{1/2}} \\ &= \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(z_2^2 + \tilde{z}_2^2 + z_3^2)^{1/2}} = \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(\{z,z\} + z_1^2)^{1/2}} = \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{(-1 + \cosh^2 b)^{1/2}} \\ &= \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{\sinh b}. \end{aligned}$$

Így:

$$\begin{aligned} \cos\lambda(A) = Re\{u_1, u_2\} &= Re\{(0, 1, 0, \dots, 0), \frac{(0, z_2 + \tilde{z}_2 i, z_3, 0, \dots, 0)}{\sinh b} = \frac{z_2}{\sinh b} \\ &= \frac{(-\sigma + \cosh^2 b \cosh^2 c)}{\cosh b \cosh c \sinh b \sinh c} = \frac{4(-\sigma + \cosh^2 b \cosh^2 c)}{\sinh 2b \sinh 2c}. \end{aligned}$$ □

7.14. Lemma.

$$\sin\phi(A) = (1 - |\{u_1, u_2\}|^2)^{1/2} = \frac{(2\sigma + 1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c))^{1/2}}{\sinh b \sinh c}$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség a $\phi(A)$ definíciójából és a $\cos^2\phi(A) + \sin^2\phi(A) = 1$ azonosság fehasználásával látszik. A második:

$$\begin{aligned} (1 - |\{u_1, u_2\}|^2)^{1/2} &= (1 - \left|\frac{z_2 + \tilde{z}_2 i}{\sinh b}\right|^2)^{1/2} = (1 - \frac{z_2^2 + \tilde{z}_2^2}{\sinh^2 b})^{1/2} \\ &= (1 - \frac{\sinh^2 b - z_3^2}{\sinh^2 b})^{1/2} = \frac{(\sinh^2 b - \sinh^2 b + z_3^2)^{1/2}}{\sinh b} = \frac{z_3}{\sinh b} \\ &= \frac{(2\sigma + 1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c))^{1/2}}{\sinh b \sinh c} \end{aligned}$$

□

7.15. Lemma.

$$\sin\psi(A) = |Im\{u_1, u_2\}| = \frac{4(\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\sinh 2b \sinh 2c}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \sin\psi(A) = |Im\{u_1, u_2\}| &= \left| Im\left(\frac{z_2 + \tilde{z}_2 i}{\sinh b}\right)\right| = \left|\frac{\tilde{z}_2}{\sinh b}\right| \\ &= \frac{(\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\cosh b \cosh c \sinh c \sinh b} = \frac{4(\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2}}{\sinh 2c \sinh 2b} \end{aligned}$$ □

Most pedig lássuk az erre a geometriára vonatkozó alapvető trigonometriai tételeket.

7.16. Tétel.

$$\frac{\sin\phi(A)}{\sinh a} = \frac{\sin\phi(B)}{\sinh b} = \frac{\sin\phi(C)}{\sinh c}$$

Bizonyítás. A 7.13. Lemmából következik, ha a betűket permutáljuk, és az egyenletet átrendezzük:

$$\begin{aligned}(2\sigma + 1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c))^{1/2} &= \sin\phi(A)\sinh b\sinh c\\ &= \sin\phi(B)\sinh a\sinh c = \sin\phi(C)\sinh b\sinh a.\end{aligned}$$

Ebből pedig következik a fenti egyenlőség. □

7.17. Tétel.

$$\frac{\sin\psi(A)}{\sinh 2a} = \frac{\sin\psi(B)}{\sinh 2b} = \frac{\sin\psi(C)}{\sinh 2c}$$

Bizonyítás. A 7.14. Lemmából következik a betűket permutálva, és az egyenletet átrendezve:

$$\begin{aligned}&4(\cosh^2 a\cosh^2 b\cosh^2 c - \sigma^2)^{1/2} = \sin\psi(A)\sinh 2b\sinh 2c\\ &\quad= \sin\psi(B)\sinh 2a\sinh 2c = \sin\psi(C)\sinh 2b\sinh 2a\end{aligned}$$

Ebből pedig következik a fenti egyenlőség. □

7.18. Tétel.

$$\begin{aligned}&\cosh 2b\cosh 2c - \cosh 2a + \cos\lambda(A)\sinh 2b\sinh 2c = 2\sinh^2\phi(A)\sinh 2b\sinh 2c\\ &= 2\sin^2\phi(A)\sinh^2 b\sinh^2 c\end{aligned}$$

Bizonyítás. A 7.12., valamint 7.13. Lemmát felhasználva, és σ-ra átrendezve megkapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}2\sigma &= \sin^2\phi(A)\sinh^2 b\sinh^2 c + \cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1\\ &= -\frac{1}{2}\cos\lambda(A)\sinh 2b\sinh 2c + 2\cosh^2 b\cosh^2 c\end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel, és trigonometriai azonosságok alkalmazásával kijön a fenti egyenlőség. □

Megjegyzés. a, b, c és $\psi(A)$ csupán σ^2-et határozza meg egyértelműen, σ-t nem, hasonló okokból, mint az elliptikus esetben (azonban a, b, c és $\lambda(A)$ vagy $\phi(A)$ itt is, ezt megint később látjuk).

7.18.1. Következmény. Egy háromszög pontosan akkor esik egy hiperbolikus egyenesre, ha $\phi(A) = 0$ (és így a 7.15. Tétel miatt $\phi(B) = \phi(C) = 0$).

Bizonyítás. Hasonló a gondolatmenet, mint az elliptikus esetben. □

7.2. Egybevágósági tételek

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a három oldalhossz és a három szöginvariáns közül ha kiválasztunk 4-et, azok mikor határozzák meg egyértelműen a háromszöget izometria erejéig.

7.19. Tétel. *Egy $\mathbb{C}H^n$-beli háromszög egyértelműen meghatározott izometria erejéig, ha a következő értékek vannak megadva (a szokásos jelöléssel):*

(1) $a, b, c, \lambda(A)$

(2) $a, b, c, \phi(A)$

(3) $\lambda(A), b, c, \phi(A)$

(4) $a, b, \lambda(C), \phi(A)$

(5) $a, b, \phi(C), \phi(A)$

(6) $a, \phi(B), \lambda(C), \phi(A)$

(7) $a, \phi(B), \phi(C), \phi(A)$

(8) $a, b, \lambda(B), \lambda(A)$

Az (5)-(7) esetben feltesszük, hogy $\phi(A) \neq 0$, a (8) esetben pedig azt, hogy $a \neq b$.

Bizonyítás. Ugyanaz a gondolatmenet, mint az elliptikus esetben. □

7.20. Lemma. Az α, β, γ paraméterekkel adott $\alpha \sinh 2c + \beta = \gamma \sinh^2 c$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, ha $c > 0$ és $\beta(\gamma - 2\alpha) > 0$ [2]

7.21. Tétel. *Egy háromszöget egyértelműen meghatározzák a következő értékek izometria erejéig, ha a hozzájuk tartozó egyenlőtlenségek teljesülnek:*

(1) $a, b, \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $a > b$

(2) $a, b, \phi(B), \lambda(A)$, *ha* $a > b$

(3) $a, \phi(B), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $\phi(A) > \phi(B)$

(4) $b, \phi(B), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $\phi(A) > \phi(B)$

(5) $b, \phi(C), \phi(A), \lambda(A)$, *ha* $\sin^2 \phi(A) > \sin^2 \phi(C)(\cosh^2 b + \sinh^2 b \cos^2 \phi(A) - \cos \lambda(A) \sinh 2b)$

(6) $a, b, \lambda(C), \lambda(A)$, *ha* $\tanh a + \cos \lambda(C) \tanh b > 0$

(7) $a, b, \phi(C), \lambda(A)$, *ha* $\sinh^2 a > \sinh^2 b(1 - \sinh^2 a \sin^2 \phi(C))$

Amennyiben $\phi(A) \neq 0$, az (3)-(5) pontok legfeljebb két háromszöget határoznak meg.

Bizonyítás.

(1) Vegyük észre, hogy a 7.17. Tétel bizonyításában használt

$$\begin{aligned}\sin^2\phi(A) \sinh^2 b \sinh^2 c + \cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1 \\ = -\frac{1}{2} \cos \lambda(A) \sinh 2b \sinh 2c + 2 \cosh^2 b \cosh^2 c\end{aligned}$$

egyenlet $\alpha \sinh 2c + \beta = \gamma \sinh^2 c$ alakú. Így a 7.19. Lemmában szereplő feltétel itteni megfelelője:

$$(a - b)(\cosh^2 b + \cos^2 \phi(A) \sinh^2 b - \cos \lambda(A) \sinh 2b) > 0.$$

Mivel

$$\begin{aligned}\cosh^2 b + &\cos^2 \phi(A) \sinh^2 b - \cos \lambda(A) \sinh 2b \\ &= (\cosh b - \cos \phi(A) \sinh b)^2 + (\cos \phi(A) - \cos \lambda(A)) \sinh 2b > 0,\end{aligned}$$

a feltétel így a kívánt $a > b$. Látható, hogy ha teljesül a feltétel, akkor a 7.17. Tétel segítségével ki tudjuk számolni c-t is, és ezért a 7.18. Tétel alapján egyértelműen meghatároztuk a háromszöget.

(2) A 7.15. Tétel segítségével kiszámoljuk $\phi(A)$-t, és így visszavezettük az (1)-es pontra a feladatot.

(3) A 7.15. Tétel segítségével kiszámoljuk b-t, és így visszavezettük az (1)-es pontra a feladatot.

(4) A 7.15. Tétel segítségével kiszámoljuk a-t, és így visszavezettük a (2)-es pontra a feladatot.

(5) A 7.15. Tétel miatt $\sinh^2 a = \frac{\sinh^2 c \sin^2 \phi(A)}{\sin^2 \phi(C)}$, amit behelyettesítve

$$\begin{aligned}\sin^2\phi(A)\sinh^2 b\sinh^2 c + \cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c - 1 \\ = -\frac{1}{2}\cos\lambda(A)\sinh 2b\sinh 2c + 2\cosh^2 b\cosh^2 c\end{aligned}$$

-be, megint kapunk egy $\alpha\sinh 2c + \beta = \gamma\sinh^2 c$ alakú egyenletet, amire a feltétel megegyezik a kért feltétellel.

(6) Az előző pontban használt egyenletben cseréljük ki A-t C-re, illetve a-t c-re. Ekkor megint egy $\alpha\sinh 2c + \beta = \gamma\sinh^2 c$ alakú egyenletet kapunk, amiben a feltétel a kért feltétel lesz, mert $\cosh b - \cosh\lambda(A)\sinh b > 0$

(7) Az előző két pontban használt egyenletben cseréljük le $\sin^2\phi(A)\sinh^2 c$-t $\sin^2\phi(C)\sinh^2 a$-ra, amelyet megint egy $\alpha\sinh 2c + \beta = \gamma\sinh^2 c$ alakú egyenletté lehet átalakítani. Ekkor a megfelelő feltétel:

$(\sinh^2 a - \sinh^2 b + \sin^2\phi(C)\sinh^2 b\sinh^2 c)(2\cosh^2 b - 1 - \cos\lambda(A)\sinh 2b) > 0.$

Hiperbolikus függvényazonosságokat felhasználva:

$$\begin{aligned}(2\cosh^2 b - 1 - \cos\lambda(A)\sinh 2b) \\ = (\cosh b - \sinh b)^2 + (1 - \cos\lambda(A))\sinh 2b > 0.\end{aligned}$$

Így megkapjuk a megfelelő feltételt.

Látható, hogy az $\alpha\sinh 2c + \beta = \gamma\sinh^2 c$ egyenletnek legfeljebb 2 megoldása van, ha $c > 0$, kivéve, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$. □

Példa. $\lambda(A), \lambda(B), \lambda(C), a, b$ nem határozza meg a izometria erejéig a háromszöget. Például ha:

$$\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(C) = 2/3\pi, a = b = \pi/3,$$

akkor $c = \pi/3$ és $c = \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$ is lehetséges.

Hivatkozások

[1] BERGER, M. *Geometry. I, II. Transl. from the French by M. Cole and S. Levy*, corrected 4th printing ed. Universitext. Berlin: Springer, 2009.

[2] BREHM, U. The shape invariant of triangles and trigonometry in two-point homogeneous spaces. *Geom. Dedicata 33*, 1 (1990), 59–76.

[3] GOLDMAN, W. M. *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Math. Monogr. Oxford: Clarendon Press, 1999.

[4] MOUSSONG, G. *Geometria.* Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához. Typotex: Budapest, 2014.

[5] WANG, H.-C. Two-point homogeneous spaces. *Ann. Math. (2) 55* (1952), 177–191.