

A Steiner-fa feladat és alkalmazása a VLSI-designban

Szakdolgozat

Készítette: Kántor András

Matematika BSc - alkalmazott szakirány

Témavezető: Pap Gyula



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	3
2	A Steiner-fa probléma bonyolultsága	3
2.1	A Steiner-fa probléma NP -ben van	4
2.2	Pontos fedés 3-as halmazokkal (X3C)	4
2.3	X3C transzformációja a Steiner-fa problémába	5
3	Steiner-fákhoz approximáció	7
3.1	Metrikus eset	7
3.2	Általános approximáció	10
4	Euklideszi Steiner-fák	12
4.1	Történelmi áttekintés	12
4.1.1	Az euklideszi Steiner probléma tipikus esetei ($n = 1, 2$)	12
4.1.2	Fermat Probléma	12
4.1.3	Általánosítások	14
4.2	Kezdeti ötletek	14
4.2.1	Terminológia	14
4.2.2	Lehetséges fa típusok	15
4.3	Alapvető tulajdonságai a Steiner-fáknak	17
4.3.1	Szög feltétel	17
4.3.2	A csúcsok fokai	18
4.3.3	Steiner pontok száma	18
4.3.4	Geometriai tulajdonságok összefoglalója	19
4.3.5	Konvex burok	19
4.3.6	Teljes Steiner-fák	20
4.4	Steiner topológiák száma	20
4.5	Pontos algoritmus	23
4.5.1	Melzak algoritmus	23
4.5.2	Az algoritmus	24

5	VLSI dizájn	25
5.1	Derékszögű Steiner-fák	26
5.2	Minimális Steiner-fák másodlagos célfüggvénnyel	27
5.2.1	A probléma megalapozása	27
5.3	Pontos algoritmus	33
5.3.1	Heurisztika	35

1 Bevezetés

A Steiner-fa probléma egy alapvető kombinatorikus optimalizálási és gráfelméleti feladat, amelynek célja egy minimális súlyú fa megtalálása egy adott csúcshalmaz összekötésére egy súlyozott gráfban, esetleges további csúcsok (Steiner-pontok) hozzáadásával. Ez a probléma, amely NP-nehéz, kiemelkedően fontos különböző gyakorlati alkalmazásokban, mint például a nagyon nagy integráltságú (VLSI) áramkörök tervezése és az euklideszi Steiner-fa probléma folyamán.

Az euklideszi Steiner-fa probléma, ahol a cél a minimális összekötő fa megtalálása az euklideszi térben, szintén számos alkalmazási területtel rendelkezik, beleértve a hálózattervezést és a biológiai rendszerek modellezését. Az optimalizálás ezen formája segít hatékony hálózatok kialakításában, minimalizálva a költségeket és javítva a teljesítményt.

A VLSI tervezés során, ahol integrált áramkörök ezernyi tranzisztorból állnak, a Steiner-fák segítenek minimalizálni a huzalhosszakat, csökkentve ezzel a jel késleltetését és energiafogyasztását. Ez növeli az áramkörök teljesítményét és megbízhatóságát, miközben jobb helykihasználást tesz lehetővé a chipen.

2 A Steiner-fa probléma bonyolultsága

A gráfokban lévő Steiner-fa probléma, röviden ST, a következőképpen van definiálva döntési formában [San]:

Adott:

- egy irányítatlan gráf $G = (V, E)$;
- a csúcsok egy részhalmaza $R \subseteq V$, melyeket terminális csúcsoknak nevezünk;
- egy szám $k \in \mathbb{N}$.

Kérdés: Létezik-e G -nek egy olyan rész fája, amely tartalmazza R összes csúcsát (azaz R -re feszítőfa) és legfeljebb k élt tartalmaz?

Már korábban említettük, hogy a probléma az NP -teljes, de most ezt be is fogjuk látni. Ehhez az alábbi séma lesz segítségünkre:

1. belátjuk, hogy az adott Π probléma az NP -ben van;

2. "ügyesen" választunk egy ismert NP – teljes Π' problémát
3. konstruálunk egy Π' -ből Π -be vivő f transzformációt
4. belátjuk, hogy f egy polinomiális idejű transzformáció

2.1 A Steiner-fa probléma NP -ben van

Először azt akarjuk belátni, hogy a Steiner-fa probléma benne van NP -ben. Tegyük fel hogy, $\langle G, R, k \rangle \in ST$, vagyis, hogy $\langle G, R, k \rangle$ -ra a válasz "igen". Ebben az esetben egy $T \subseteq G$ hipotetikus jó megoldásra polinomiális időben tudjuk ellenőrizni, hogy:

- T az valóban egy fa: nincsenek benne körök és összefüggő;
- a T fa az valóban érinti az összes terminálpontot, amit az R halmaz definiál;
- a fa legfeljebb k darab élt tartalmazhat.

A következő lépés, hogy találjunk egy ismert "megfelelő" NP -teljes problémát.

2.2 Pontos fedés 3-as halmazokkal (X3C)

A Pontos Fedés 3-as halmazokkal probléma alkalmasnak tűnik erre a feladatra. Ez egy jól ismert probléma, az alap NP teljes problémák között tartják számon és az általánosítása a 3 dimenziós párosítási problémának (3DM).

Adott:

- egy végés X halmaz, amire teljesül $|X| = 3q$;
- C halmaz, aminek az elemei az X tetszőleges három elemű részhalmazai, $C = \{C_1, \dots, C_n\}$,
 $C_i \subseteq X$, $|C_i| = 3$, $1 \leq i \leq n$;

Kérdés:

- tartalmazza-e C egy pontos fedését X -nek, vagyis, van-e olyan $C' \subseteq C$ részhalmaz, melyre X minden eleme pontosan egy elemében fordul elő C' -nek?

Most készen állunk a következő lépésre: egy transzformációs függvény konstruálása $X3C$ -ből ST -re.

2.3 X3C transzformációja a Steiner-fa problémába

Ebben a szakaszban javaslatot teszünk arra, hogyan vezessük vissza az X3C problémát egy ST problémára. Az átlakításhoz egy szabálykészletet használunk, hogy létrehozzunk egy ST példányt egy általános X3C példányból kiindulva. Bizonyítjuk, hogy az ilyen átalakítás végrehajtható polinomiális idő alatt.

Vegyünk X3C egy esetét, amelyet az X halmaz definiál $\{x_1, \dots, x_{3q}\}$, és 3-elemű halmazok alkotják $C = \{C_1, \dots, C_n\}$. Ezután fel kell építenünk az ST egy példányát, amely meghatározza a G gráfot $= (V, E)$, a terminálok R halmazát, és a feszítőfa méretének felső k korlátját.

- definiáljuk a V csúcsokat, mint:

$$V(G) = \{v\} \cup \{c_1, \dots, c_n\} \cup \{x_1, \dots, x_{3q}\}$$

Magyarán definiálunk egy új V segédcsúcsot és csúcsokat rendelünk c és X minden eleméhez.

- definiáljuk az élek halmazát:

$$E(G) = \{vc_1, \dots, vc_n\} \cup \left(\bigcup_{x_j \in C_i} \{c_i x_j\} \right)$$

Vagyis fut él V -ből mindenképp c_i csúcsba és van él minden olyan $c_i x_j$ csúcspár között, ahol x_j eleme c_i -nek az X3C példában.

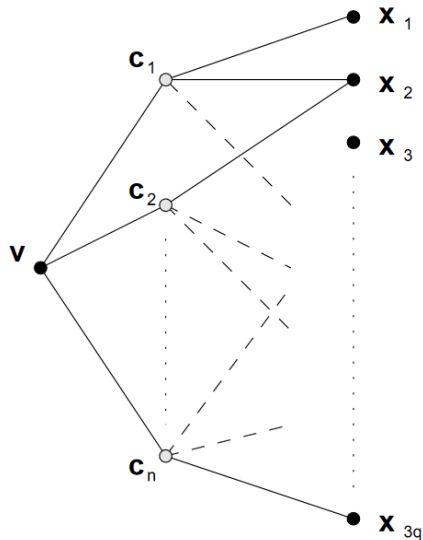
- az $R \subseteq V$ terminális csúcsok halmaza pedig:

$$R = \{v, x_1, \dots, x_{3q}\}$$

- k legyen egyenlő $4q$ -val.

Az könnyen belátható, hogy az X3C-ből az ST-be történő redukció polinomiális idő alatt végrehajtható, hiszen csak egy szimpla megfeleltetést hajtottunk végre. Az előbbi szabályok alapján létrehozott gráfot az 1. ábra szemlélteti. A hozzáadott v segéd csúcsnak az a szerepe, hogy a létrehozott gráf összefüggő legyen.

Most belátjuk, hogy akkor és csak akkor létezik az így létrehozott gráfban ST-fa, legfeljebb k éllel, ha van pontos fedése az eredeti x3c problémának.



Ábra 1: A transzformáció során kapott gráf. A fekete pontok jelölik a terminális csúcsokat.

Lemma 2.1. $\langle X, C \rangle$ eset akkor része az X3C-nek, ha a $\langle G, R, k \rangle$ is része az ST-nek.

Bizonyítás: A bizonyítást két részre bontjuk. Mindkét irányba belátjuk.

- $X3C \Rightarrow ST$

Tegyük fel hogy, létezik egy pontos C' fedése az X3C problémának. Ekkor C' fedés q számú fedést használ (hiszen az X alaphalmaz $3q$ elemből áll. Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy ezek a részhalmazok a C_1, \dots, C_q (elég lenne csak átindexelnünk őket). Ekkor a keletkezett fának ezek az élei:

- vc_1, \dots, vc_q
- $c_i x_j$, ha $x_j \in C_i$ és $1 \leq i \leq q$

Ezek egy Steiner-fát alkotnak $q + 3q = 4q = k$ éllel. Vagyis, ha létezik egy pontos 3-as fedés, akkor kell lennie egy legfeljebb k élű ST-nek is.

- $X3C \Leftarrow ST$

Tegyük fel, hogy létezik egy T ST legfeljebb $4q$ éllel. Mivel T az egy fa, így legfeljebb $4q + 1$ csúcsa van. A ST definíciójából következik, hogy ténylegesen érintenie kell az $x_1, \dots, x - 3q$ terminál pontokat és v -t. Vagyis T legfeljebb q db c csúcsot tartalmaz. De a c csúcsok foka (csak az x csúcsok felé tartó éleket figyelembe véve) az 3, vagyis az lehetetlen hogy elérjük mind a db x csúcsot, ha a fa kevesebb mint $4q + 1$ csúcsot tartalmaz. Megállapíthatjuk, hogy T -nek valóban pontosan $4q$ éle van és pontosan q

darab C_i csúcsa van. Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy ezek a c_1, \dots, c_q csúcsok, és ekkor az $X3C$ probléma C' megoldását az alábbi módon kapjuk:

$$C' = \{C_1, \dots, C_q\}.$$

Ezzel befejeztük a bizonyítást.

□

3 Steiner-fákhoz approximáció

3.1 Metrikus eset

Legyen az input egy $X = R \cup S$ ponthalmaz, ahol R a terminál pontok halmaza, S pedig az opcionális pontok halmaza, valamint egy szimmetrikus távolságfüggvény $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ami egy nem-negatív távolságot rendel minden pontpárhoz, és kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget [Tre]:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

A cél az, hogy találjunk egy $T = (V, E)$ fát, ahol V ponthalmazra teljesül: $R \subseteq V \subseteq X$, vagyis tartalmazza a összes terminál pontot és valahány opcionálisat, úgy hogy:

$$cost_d(T) := \sum_{(u,v) \in E} d(u, v)$$

minimális legyen.

Egy lehetséges algoritmus, hogy figyelmen kívül hagyjuk az S belüli opcionális csúcsokat és keresünk egy minimális feszítőfát az R csúcshalmazon a $d(\cdot, \cdot)$ élsúlyozás mellett. Ezzel az ötlettel elérhetünk egy 2-approximációt, vagyis egy olyan fát, ami legfeljebb kétszer rosszabb, mint az optimális megoldás. Ehhez szükségünk van az alábbi lemmára:

Lemma 3.1. *Legyen $(X = R \cup S, d)$ egy metrikus Steiner-fa probléma, és legyen $T = (V, E)$ egy Steiner-fa, amire teljesül, hogy $R \subseteq V \subseteq X$.*

Ekkor létezik egy olyan $T' = (R, E')$ fa, mely R összes csúcsát lefedi, de semmi többet úgy, hogy:

$$cost_d(T') \leq 2 \cdot cost_d(T)$$

A lemmát alkalmazva az optimális Steiner-fára következik, hogy van olyan R feszítőfa, ami legfeljebb kétszer olyan költséges, mint az optimum. Ebből nyilván következik, hogy egy minimális feszítőfa is legfeljebb kétszer olyan költséges, mint az optimális Steiner-fa.

Bizonyítás: Vegyük egy mélységi bejárását T -nek, vagyis egy sorozat

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = x_0$$

ahol a csúcsok abban a sorrendben vannak, ahogy az algoritmus eléri és elhagyja őket. Ez a sorrend egy kört definiál V elemein, melynek a teljes hossza az $\sum_{i=1}^m d(x_i, x_{i+1})$, ami pontosan $2 \cdot \text{cost}_d(T)$.

Legyen y_0, y_1, \dots, y_k az a sorozat, amit úgy kapunk, hogy kivesszük a $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ sorozatból az S belüli csúcsokat, és a maradék R belüli csúcsokból csak az első előfordulást hagyjuk benn.

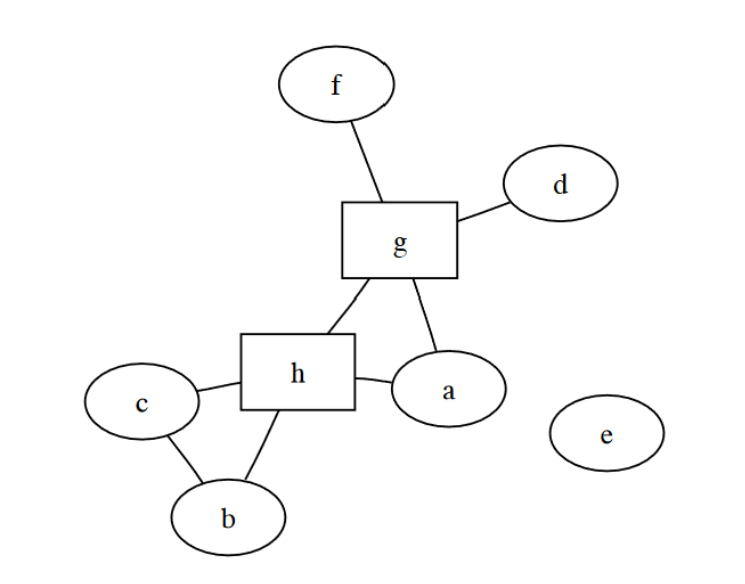
Ekkor y_0, y_1, \dots, y_k egy olyan utat képez, mely minden R belüli csúcsot tartalmaz, de semelyik másikat, és az összköltsége az $\sum_{i=1}^k d(y_i, y_{i+1})$, ami nyilván nem lehet több, mint az $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ köré (felhasználva a háromszög egyenlőtlenséget). Vagyis a maximum lehetséges költsége ennek az útnak az $2 \cdot \text{cost}_d(T)$.

Na most, ha y_0, y_1, \dots, y_k az egy út, akkor fa is, vagyis vehetjük T' -t az (R, E') fának, ahol E' az az $\{(y_i, y_{i+1})\}$ élhalmaz. \square

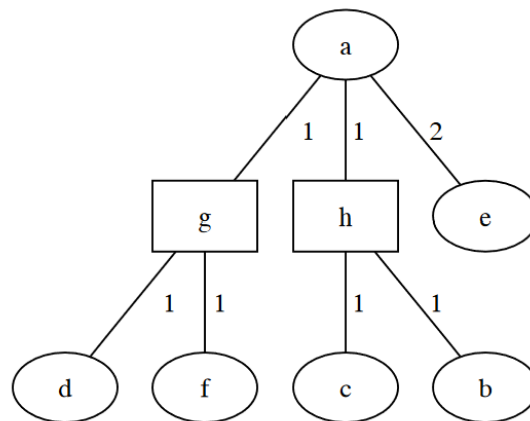
Szemléltetésül vegyünk egy példát (Ábra2), $R = \{a, b, c, d, e, f\}$, $S = \{g, h\}$. és a távolsággfüggvény $d(\cdot, \cdot)$ rendeljen 1-et az éllel összekötött csúcsokhoz, míg a nélküliekhez 2-öt. Ekkor az Ábra 3 egy lehetséges Steiner-fa a gráfunkhoz, 8-as költséggel.

A Lemma bizonyításában alkalmazott érvelést használjuk arra, hogy igazoljuk: létezik legfeljebb 16 költségű R belüli feszítőfa.

A sorrend amiben látogatjuk a csúcsokat a mélységi bejárásban az $a \rightarrow g \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow a \rightarrow h \rightarrow c \rightarrow h \rightarrow b \rightarrow h \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow a$. Ha ezt egy körnek vesszük, ami a -ból indul és végződik, miután mindegyik csúcsot érintette (néhányat többször is), akkor a kör költsége az 16, hisz minden élet kétszer használ.

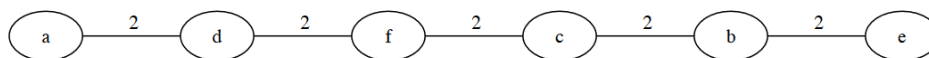


Ábra 2: Példa gráf



Ábra 3: Lehetséges fa

Na már most, ha vesszük a mélységi bejárás sorrendjét és kihagyjuk az opcionális csúcsokat és a már korábban elérteket, akkor kapunk egy olyan új sorrendet, ami a kötelező pontokat tartalmazza, de mást nem. Ebben a példában a sorrend az $a \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow e$ lesz.



Mivel ezt az utat úgy kaptuk, hogy egy a T -nél legfeljebb kétszer olyan drága úton

”levágásokat” alkalmaztunk (a háromszög egyenlőtlenség mellett), így az új út is legfeljebb kétszer olyan drága, mint T . A példában a költség csupán 10. Mivel egy út az egyszerre egy fa is, így találtunk egy feszítőfát R -ben, melynek költsége maximum duplája T -nek.

A 2-es faktor a lemmában sajnos nem javítható, mert vannak olyan esetek, ahol a minimális feszítőfa költsége tetszőlegesen közel kerül a minimális Steiner-fa költségének kétszereséhez.

Például vegyünk azt az esetet, ahol $S = \{v_0\}$, $R = \{v_1, \dots, v_n\}$, $d(v_0, v_i) = 1$ minden $i = 1, \dots, n$ -re és $d(v_i, v_j) = 2$ minden $1 \leq i < j \leq n$ -re. Vagyis ahol minden kötelező pont 2 távolságra van egymástól, de van egy opcionális pont, amitől mind 1 távolságra vannak. Ekkor a minimális Steiner-fa az a v_0 középi csillag, n -es költséggel, de a minimális R beli feszítőfa költsége az $2n - 2$ kell legyen, mert egy n csúcsú fának $n - 1$ éle van, és minden él 2 súlyos.

3.2 Általános approximáció

Az általános Steiner fa probléma hasonlít a metrikus változathoz azzal a különbséggel, hogy a távolság függvény az bármilyen lehet.

Ebben az esetben már sajnos nem igaz, hogy egy minimális feszítőfa jó approximációt ad: vegyük azt a példát, ahol $R = \{a, b\}$, $S = \{c\}$, $d(a, b) = 10^{100}$, $d(a, c) = 1$ és $d(b, c) = 1$. Itt a R minimális feszítőfájának az összköltsége az 10^{100} , míg a minimális Steiner fáé csak 2.

Ugyanakkor belátható, hogy pár okos változtatással a metrikus Steiner fához tartozó algoritmus átalakítható, hogy az általános problémára is működjön.

Lemma 3.2. *Bármely $c \geq 1$ konstanshoz, ha létezik c -approximáló algoritmus a metrikus Steiner fa problémánál, akkor létezik c -approximáló algoritmus az általános Steiner fa problémánál is.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A az egy polinomiális idejű c -közelítő algoritmus metrikus Steiner fákhoz, és kapunk egy példát az általános Steiner fa problémából ($X = R \cup S, d$). Megmutatjuk, hogy hogyan polinomiális időben c -approximációs megoldást találni (X, d) -

hez.

Bármely két $x, y \in X$ pontra legyen $d'(x, y)$ egy lehető legrövidebb $x - y$ út távolsága az X csúcshalmazú súlyozott gráfban a $d(\cdot, \cdot)$ távolságfüggvény mellett. Ekkor a $d'(\cdot, \cdot)$ távolságfüggvény már kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget, hiszen bármely három x, y, z pontra teljesül, hogy a legrövidebb út hossza x -ből z -be az nem lehet több, mint a legrövidebb út hossza x -ből y -ba plusz a legrövidebb út hossza y -ből z -be.

Ez azt jelenti, hogy az (X, d') az egy metrikus Steiner fa eset, és akkor alkalmazhatjuk az előbbi A algoritmust, amivel találunk egy $T' = (V', E)$ fát, melyre teljesül

$$\text{cost}_{d'}(T') \leq c \cdot \text{opt}(X, d')$$

Emellett azt is tudjuk, hogy bármely pontpárra igaz, hogy $d'(x, y) \leq d(x, y)$, vagyis vagyis ha T^* az egy optimális fa az eredeti (X, d) inputra, akkor

$$\text{opt}(X, d') \leq \text{cost}_{d'}(T^*) \leq \text{cost}_d(T^*) = \text{opt}(X, d)$$

Ezt mind összevéve kapjuk

$$\text{cost}_{d'}(T') \leq c \cdot \text{opt}(X, d)$$

Most a T' fából csinálunk egy $G = (V, E)$ gráfot úgy, hogy bármely két csúcsot összekötő (x, y) élt kicseréljük az x -ből y -ba tartó, $d(\cdot)$ szerinti legrövidebb úttal. Ezzel a konstrukcióval kapjuk

$$\text{cost}_d(G) = \sum_{(x,y) \in E} d(x, y) \leq \sum_{(x,y) \in E'} d'(x, y) = \text{cost}_{d'}(T')$$

és a gráf nyilván összefüggő.

Azért van egyenlőtlenség az egyenlőség helyett, mert G bizonyos élei több legrövidebb úthoz is tartozhatnak, de a bal oldalon nyilván csak egyszer vannak számolva.

Végül vegyünk egy T minimális feszítőfáját G -nek $d(\cdot, \cdot)$ szerint. Ekkor T az egy Steiner fa, és

$$\text{cost}_d(T) \leq \text{cost}_d(G) \leq c \cdot \text{opt}(X, d)$$

□

4 Euklideszi Steiner-fák

4.1 Történelmi áttekintés

4.1.1 Az euklideszi Steiner probléma tipikus esetei ($n = 1, 2$)

Legegyszerűbben úgy tudjuk megérteni az euklideszi ST problémát, ha először a legegyszerűbb eseteit vizsgáljuk, majd abból kiindulva felépítjük az elméletet [Soo].

- $n = 1$ esetén vizsgáljuk, hogy mekkora a minimális távolsága a v_1 pontot tartalmazó vonalnak. Triviális, hogy ebben az esetben ez a hossz 0, hiszen maga a pont tartalmazza önmagát.
- $n = 2$ esetén azt vizsgáljuk, hogy mekkora a v_1 és v_2 pontokat tartalmazó vonal minimális hossza. Mivel két pont között legrövidebb távolság az őket összekötő egyenes, így ezek a pontok a két pontot összekötő szakaszon helyezkednek el.

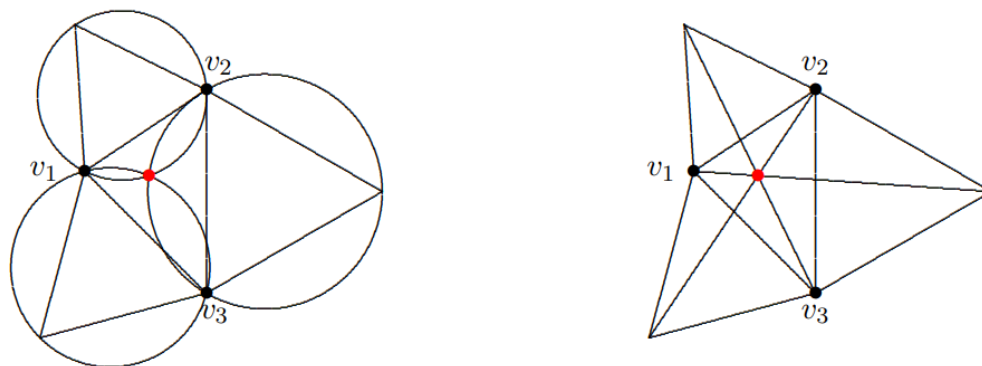
4.1.2 Fermat Probléma

Az euklideszi ST problémát egészen Fermatig (1601-1655) vezethetjük vissza. A Fermat által felvázolt probléma: Találjuk meg egy síkban azokat a pontokat amelyek távolságának összege 3 adott ponttól minimális.

Torricelli és Simpson két geometria bizonyítással álltak elő a következő száz év során. Ezek a körzőt és vonalzót használó konstrukciók a következő képpen működtek. Jelöljük a három pontot a síkon v_1, v_2, v_3 -mal. Mindkét módszer úgy indul, hogy összekötik a pontokat, ezzel egy $\Delta v_1 v_2 v_3$ háromszöget kapunk, majd rajzolunk három szabályos háromszöget, egyet minden oldalára az eredetinek. A Torricelli módszer ezután megrajzolja a három szabályos háromszögre a köréjük írható köröket. A p pontot, ahol a körök metszik egymást *Torricelli pont*-nak hívjuk. A Simpson metódus pedig úgy működik, hogy megrajzolja a Simpson

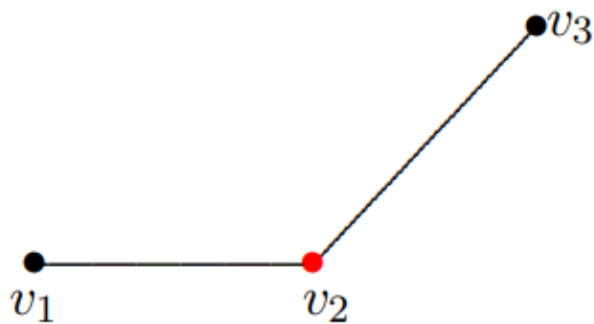
egyeneseket a szabályos háromszögek nem $\Delta v_1 v_2 v_3$ -beli csúcsai és a velük szemben levő $\Delta v_1 v_2 v_3$ -beli csúcsok között. Ezen egyenesek metszete megegyezik a *Toricelli pont*-tal.

Ezen pont, amit az előbbi módokon kaptunk megoldja a Fermat problémát és teljesül rá, hogy a v_1, v_2, v_3 háromszög csúcspárjai mind 120° -os szögben látszódnak belőle.



Ábra 4: A Torricelli és a Simpson módszer

Sajnos egyik algoritmus sem ad helyes megoldást abban az esetben, mikor a $\Delta v_1 v_2 v_3$ háromszögnek van 120° -nál nagyobb szöge. Ekkor a Torricelli módszer egy háromszögen kívüli pontot ad meg, míg a Simpson módszerben az egyenesek nem feltétlen egy pontban metszik egymást. Abban az esetben, mikor a háromszögnek van 120° -nál nagyobb szöge a keresett minimális pont az a tompa csúcs.



Ábra 5: Több mint 120° -os szög

Egy matematikus, Heinen, volt az, aki összehozta ezen gondolatokat és megalkotta az első teljes megoldását a Fermat problémának 1834-ben:

1. Ha a háromszög bármely belső szöge nagyobb, mint 120° , akkor a Fermat probléma

megoldása megegyezik a 120° -nál nagyobb szögű csúccsal.

2. Ha a háromszög belső szögei mind kisebbek 120° -nál, akkor a Fermat probléma megoldása a Simpson vonalak metszete vagy a Torricelli pont, mely megegyezik azzal a ponttal, ahonnan a három oldal mind 120° -ban látszódik.

Fermat problémája megegyezik a Steiner fa probléma $n = 3$ esetével, és hasznos lesz majd a nagyobb n -es esetek vizsgálatában is.

4.1.3 Általánosítások

Fermat problémáját több féle képpen lehet általánosítani. Egy lehetséges eset, hogy megkeressük adott n darab v_1, v_2, \dots, v_n ponthoz azt a p pontot, melyre $\sum_{j=1}^n |v_j p|$ minimális. Ezen probléma tekinthető úgy is, mintha egy sokszögben próbálnánk megkeresni azt a pontot, melyre a csúcsoktól vett távolságok összege minimális. Ez egy csillag alakú megoldást ad, ahol p minden csúccsal egy éllel van összekötve. Ez volt az a probléma, amivel Jacob Steiner(1796-1863) foglalkozott, de mégis egy másik, ennél érdekesebb feladat lett róla elnevezve.

Ez az érdekesebb általánosítás csak 1930 körül került elő: adott n pont a síkon, konstruáljuk meg azt a legrövidebb fát, melynek csúcsai tartalmazzák ezt az n pontot. Courant és Robbins foglalkoztak a Fermat problémával és ezen általánosításával az 1941-ben megjelent könyvükben: *Mi a matematika?*, és ők hivatkoztal először a problémára mint az Euklideszi Steiner probléma. Melzak dolgozta ki az első algoritmust a Euklideszi Steiner probléma megoldására, amelyet a *On The Problem Of Steiner* című cikkében publikált. Ezt részletesebben megvizsgáljuk majd a következő fejezetben. Az algoritmus a Fermat-probléma geometriai megoldására épít.

4.2 Kezdeti ötletek

4.2.1 Terminológia

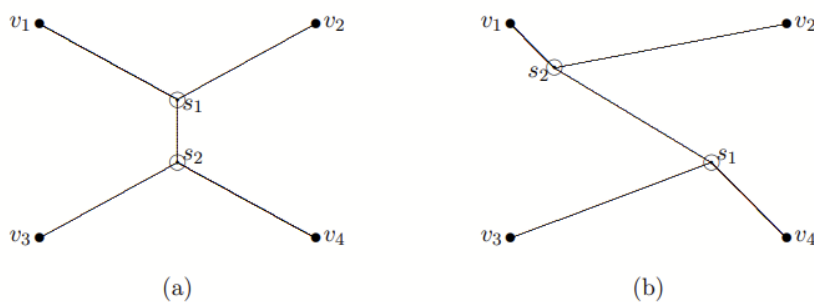
Az n pontú Euklideszi Steiner problémának a lehetséges megoldásai olyan T hálózatok az euklideszi síkban, melyek összekötik ezen n és a sík még néhány extra pontját. A T csúcsai közül az eredeti n -et termináloknak, t_i , $i = 1, \dots, n$, míg a továbbiakat Steiner pontoknak, s_j , hívjuk.

Az euklideszi steiner fa feladat megoldását, vagyis azt a T hálózatot, melyre az összhossz minimális, azt steiner minimum fának nevezzük.

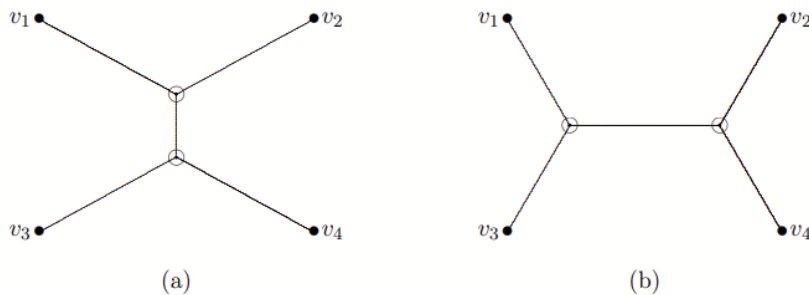
4.2.2 Lehetséges fa típusok

A steiner minimum fa, nevéből is adódóan fa kell, hogy legyen. Következésképpen, amikor az euklideszi steiner probléma megoldását keressük, csak lehetséges fákat kell vizsgálnunk.

Steiner minimum fát találni adott n -hez nehéz. Ez azért van, mert T megoldás, ami lokálisan minimális, az globálisan már nem feltétlen az.



Ábra 6: Egyező topológiák



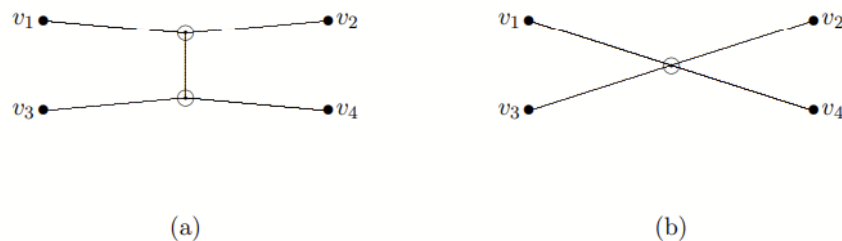
Ábra 7: Különböző topológiák

A T fa topológiája T topológiai jellemzőinek leírása. Ez azt jelenti, hogy leírjuk, mely csúcspárok kapcsolódnak az összes lehetséges terminál és Steiner-pont közül $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_j$. A topológia csak a kapcsolatokat határozza meg, nem a Steiner-pontok elhelyezkedését, és ezért nem az élek hosszát. A n terminál elhelyezkedése ismert, mivel ez a probléma bemenete. A 6. ábra két, topológiailag azonos gráfot mutat be. Mindkettőnek négy terminálja van, v_1, \dots, v_4 , és két Steiner-pontja, s_1, s_2 , amelyek pozíciói a 7.(a) és 7.(b) ábrák között

változnak. A fekete pontok a terminálok, az üres körök pedig a Steiner-pontok. Nyilvánvaló, hogy mindkét fánál a v_1 és v_2 terminálok ugyanahhoz a Steiner-ponthoz kapcsolódnak, mint a v_3 és v_4 terminálok. Azonban a Steiner-pontok s_1 és s_2 elhelyezkedése különbözik a két gráfban, és így az összekötő élek teljes hossza is különbözik. A 7. ábra két, topológiailag különböző hálózatot mutat be. A 7.(a) ábrán a v_1 és v_2 terminálok ugyanazon Steiner-ponton keresztül kapcsolódnak, mint a v_3 és v_4 , de a 7.(b) ábrán a v_1 és v_3 terminálok egy Steiner-ponton keresztül kapcsolódnak, míg v_2 és v_4 a másikon keresztül. Egy fa, amely rövidebb, mint bármely más fa ugyanazzal a topológiával, relatíve minimális fának nevezhető az adott topológiára. A 6.(a) ábra egy relatíve minimális fa az adott topológiára.

A relatíve minimális fák nem tartalmazhatnak nulla hosszúságú éleket. Ennek a feltételnek köszönhetően egyes topológiáknak nincs relatíve minimális fája. Vegyük figyelembe a 8.(a) ábrát; ennek a topológiának a fájának hossza minimális, ha $|s_1 - s_2| \rightarrow 0$. Azt a fát, amelyhez közeledik, degenerált fának nevezzük. A 8.(b) ábra a degenerált fája ennek a topológiának.

Két művelet, amelyekkel egy fán dolgozhatunk, az összehúzás és a felosztás. Egy él törlését és végpontjainak összevonását összehúzásnak nevezzük. Az összehúzás ellentéte a felosztás, amely során szétkapcsoljuk az éleket. Vegyük a $[v_1, u]$ és $[v_2, u]$ éleket, amelyek az u csúcsot v_1 -hez és v_2 -höz kapcsolják, majd három új élt hozunk létre, $[v_1, u_0]$, $[v_2, u_0]$, $[u, u_0]$, amelyek a v , u_1 , u_2 csúcsokat egy újonnan létrehozott u_0 csúcshoz kapcsolják. A 9.(a) ábra azt az eredményt mutatja, amikor az $[v_1, s_1]$ élt összehúzzuk a 6.(a) ábrán. A 9.(b) ábra azt

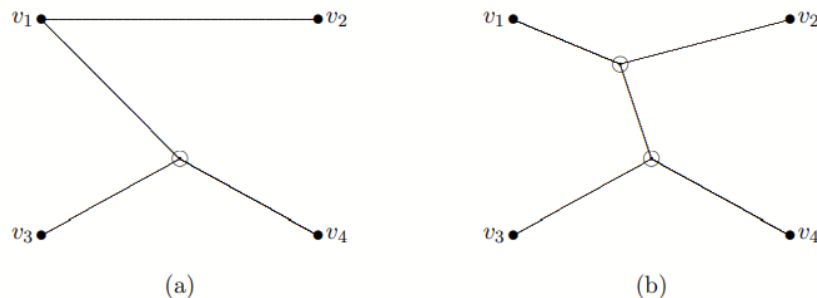


Ábra 8: Degenerált fa

az eredményt mutatja, amikor újra felosztjuk a 9(a) ábrán az $[v_1, v_2]$ és $[v_1, s_2]$ éleket.

Ha egy fát nem lehet lerövidíteni egy kis permutációval, beleértve a felosztást és az összehúzást, akkor a fát Steiner-fának nevezzük. A Steiner-fa mindig relatíve minimális fa a topológiája szempontjából, és a Steiner minimális fa mindig Steiner-fa.

A relatíve minimális fák hasznosak, mert egy topológiához legfeljebb egy relatíve minimális



Ábra 9: Összehúzás és felosztás

fa létezik, és ha létezik, akkor lehetséges azt megkonstruálni. Lehetséges Steiner minimális fákat kapni úgy, hogy először megkonstruáljuk a relatíve minimális fát minden topológiához, majd megtaláljuk azt, amelyiknek a legrövidebb a hossza, ez lesz a Steiner minimális fa. Ahogy látni fogjuk, ez nem könnyű feladat, mivel több ezer különböző relatíve minimális fa létezik még egy $n = 6$ pontú hálózat esetén is.

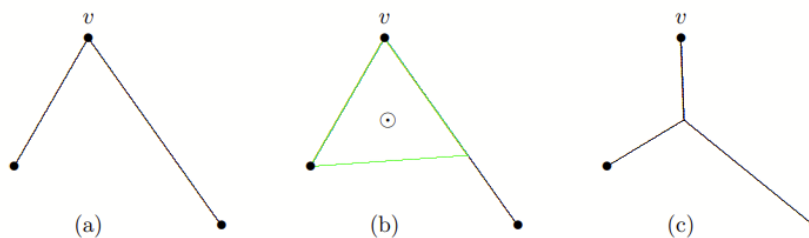
4.3 Alapvető tulajdonságai a Steiner-fáknak

Megvizsgáltuk az euklideszi Steiner-probléma alapvető ötleteit, beleértve három típusú fát, amelyek fontosak a probléma megoldásánál. Ez a rész a Steiner-fák néhány alapvető tulajdonságával foglalkozik. Ezek a tulajdonságok megkönnyítik az összes Steiner-fa keresését egy adott probléma esetén, így megkönnyítve a Steiner minimális fa keresését.

4.3.1 Szög feltétel

Ha T két éle 120° -nál kisebb szögben találkozik, akkor lehetséges a fa rövidítése a következő módon. Nevezzük v -nek azt a csúcsot, ahol két él, e_1 és e_2 , 120° -nál kisebb szögben találkozik. Ezután találjuk meg a p_1 és p_2 pontokat az e_1 és e_2 éleken úgy, hogy $|p_1 - v| = |p_2 - v|$. Ekkor egy új s Steiner-pontot helyezünk a $\Delta p_1 v p_2$ Torricelli-pontjában (emlékezzünk az $n = 3$ esetére). Ekkor egy új, rövidebb fa jön létre, ha v -t és e_1 és e_2 másik két végpontját összekötjük az s Steiner ponttal; lásd a 10. ábrát. Ezért egy minden Steiner-fára vonatkozó feltétel: **egyetlen él sem találkozhat 120° -nál kisebb szögben**. Ezt a feltételt a Steiner-fák szögfeltételének nevezzük. A szögfeltétel azt jelenti, hogy egy Steiner-fa egyetlen csúcsának (Steiner-pont vagy terminál) fokszáma sem lehet nagyobb 3-nál, mivel ez 120° -nál kisebb szöget eredményezne. A szögfeltétel azt is jelenti, hogy egy Steiner minimális fa

élei nem keresztezik egymást, mert a keresztező élek két 90° -nál kisebb vagy egyenlő szöget eredményeznének.



Ábra 10: Szögfeltétel

4.3.2 A csúcsok fokai

Steiner-pontok nem szükségesek egy Steiner-fában, a céljuk csak az összekötő vonalak teljes hosszának csökkentése. Így világos, hogy minden 1 fokú Steiner-pontot, $d(s_j) = 1$, el lehet távolítani T -ből, a hozzájuk kapcsolódó élekkel együtt, így csökkentve a fa teljes hosszát. Továbbá, minden 2 fokú Steiner-pontot, $d(s_j) = 2$, el lehet távolítani, a hozzájuk kapcsolódó két éllel együtt, és helyettesíteni őket egy direkt éllel, mely összeköti s_j eredeti két szomszédos csúcsát (akár terminálok, akár Steiner-pontok). Ebből következtethetünk arra, hogy minden Steiner-pontnak legalább 3 fokúnak kell lennie, $d(s_j) \geq 3$.

A szögfeltétel eredményeként minden Steiner-fa csúcsának, legyenek azok terminálok vagy Steiner-pontok, fokszáma legfeljebb 3 lehet. Ebből következtethetünk arra, hogy minden Steiner-pontnak pontosan 3 fokúnak kell lennie, $d(s_j) = 3$, és három élnek kell találkoznia 120° -os szögben. Továbbá, minden terminálnak legfeljebb 3 fokúnak kell lennie, $d(v_i) \leq 3$, és az éleknek 120° -os vagy annál nagyobb szögben kell találkozniuk.

4.3.3 Steiner pontok száma

Legyen egy T Steiner-fának n terminál pontja, v_1, \dots, v_n , és k Steiner-pontja, s_1, \dots, s_k . Ismert gráfelméleti eredmények: (i) minden fának $|V|$ csúccsal $|E| = |V| - 1$ éle van, (ii) minden gráfnál $|E| = \frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{2}$.

Lemma 4.1. *Egy Steiner-fának legfeljebb $n - 2$ Steiner-pontja van.*

Bizonyítás: Egy Steiner-fának $n + k$ csúcsa van, ezért (i) alapján $n + k - 1$ éle van. Mivel minden Steiner-pont fokszáma 3, $d(s_j) = 3$, és minden terminálnak legalább 1 egy fokszáma, $d(v_i) \geq 1$, (ii) alapján az élek száma legalább $\frac{3k+n}{2}$ kell, hogy legyen. Ebből következik, hogy

$$n + k - 1 \geq \frac{3k + n}{2}$$

$$n - 2 \geq k$$

□

4.3.4 Geometriai tulajdonságok összefoglalója

Legyen T egy Steiner-fa n terminállal, v_i és k Steiner-ponttal, s_j :

1. T csúcsai $v_1, \dots, v_n, s_1, \dots, s_k$
2. T -ben nincsenek keresztező élek
3. $d(s_i) = 3, \quad 1 \leq i \leq k$
4. Minden $s_j, 1 \leq j \leq k$ Steiner-pont a három s_j -hez szomszédos csúcs által alkotott háromszögre
5. $d(v_i) \leq 3, \quad 1 \leq i \leq n$
6. $0 \leq k \leq n - 2$

4.3.5 Konvex burok

Az euklideszi térben egy S alakzatot konvexnek nevezünk, ha minden benne lévő pontpár, p_i és p_j esetén az egyenes vonalon, $\overrightarrow{p_i p_j}$ lévő minden pont is S -ben van.

A v_1, \dots, v_n pontok konvex burka az euklideszi térben az a minimális konvex alakzat, amely tartalmazza az v_1, \dots, v_n pontokat, azaz az a forma, amelynek a teljes területe minimális. Ezt a fogalmat úgy is lehet értelmezni, hogy a v_1, \dots, v_n pontok oszlopokként viselkednek, a konvex burok pedig az a forma, amelyet akkor kapunk, ha egy nagy gumiszalagot helyezünk az oszlopok köré.

Egy Steiner-fában minden Steiner-pont a v_1, \dots, v_n terminálok konvex burkán belül helyezkedik el.

4.3.6 Teljes Steiner-fák

Azt a topológiát, amely a maximális számú Steiner-ponttal rendelkezik, $k = n - 2$, teljes topológiának nevezzük. Az ehhez a topológiához tartozó relatíve minimális fát teljes Steiner-fának nevezzük. A teljes Steiner-fa Steiner-fa, mert nincs lehetőség felosztani és új Steiner-pontokat létrehozni. Egy teljes Steiner-fában minden terminálnak pontosan 1 a fokszáma, $d(v_i) = 1$. Minden teljes Steiner-fának $n + k - 1 = n + n - 2 - 1 = 2n - 3$ éle van.

Egy Steiner-topológia egyértelműen szétszedhető éldiszjunkt részgráfokra (éldiszjunkt azt jelenti, hogy egyik részgráf sem osztozik éleken), amelyek mindegyike egy teljes Steiner-topológia. A teljes Steiner-fák könnyebben konstruálhatók, mint a Steiner-fák, így egy módja annak, hogy Steiner-fát találjunk az az, hogy a teljes Steiner-fa komponensekből építjük fel.

Egy nem teljes Steiner-fa az alábbi módon bontható fel teljes fák uniójára: minden terminált, v_i , amelynek fokszáma $d(v_i) = d$, ahol $d \geq 2$, helyettesítsünk d új terminállal, v_{i_1}, \dots, v_{i_d} , mindegyik ugyanazon a helyen van, mint v_i , de nincsenek összekötve. Csatlakoztassuk mindegyik d élt, amely v_i -hez volt kapcsolva, egy különböző új terminálhoz, v_{i_1}, \dots, v_{i_d} . Ez több kisebb teljes Steiner-fát eredményez, amelyeket az eredeti Steiner-fa teljes komponenseinek nevezünk. Fordítva, amikor egy adott topológia nem teljes, meg lehet találni a teljes komponensek topológiáit, majd külön-külön megépíteni a teljes komponenseket, mielőtt egyesítjük őket a kívánt Steiner-fa előállításához.

Az a tény, hogy egy Steiner-topológia szétszedhető éldiszjunkt teljes Steiner-topológiákra, az alábbi két állításhoz vezet.

Megjegyzés 4.1.1. *Egy adott Steiner-topológiához legfeljebb egy relatíve minimális fa létezik.*

Megjegyzés 4.1.2. *Egy adott Steiner-topológiához legfeljebb egy Steiner-fa létezik.*

4.4 Steiner topológiák száma

Az egyik módja annak, hogy megtaláljuk egy n terminálos Steiner minimális fát, az az összes lehetséges Steiner-fa megépítése és annak megkeresése, amelyiknek a legrövidebb a hossza. A 4.1.2-es következmény kimondja, hogy egy adott Steiner-topológiához legfeljebb egy Steiner-fa létezik, így az összes lehetséges Steiner-fa kimerítéséhez elegendő az összes lehetséges Steiner-topológia megtalálása.

Nyilvánvaló, hogy a lehetséges Steiner-topológiák száma növekszik a terminálok számával. Most megvizsgáljuk, hogy mi a valós kapcsolat a lehetséges Steiner-topológiák száma és a

terminálok száma között. Mivel a minimális Steiner-fát az összes Steiner-topológia figyelembevételével kell megtalálni, az, hogy a különböző Steiner-topológiák száma hogyan növekszik az n -nel, jelzi, hogy mennyivel nehezebb megtalálni a Steiner minimális fákat, ahogy az n növekszik.

Legyen $f(n)$, $n \geq 3$ a teljes Steiner-topológiák száma egy adott n -re. Mivel ezek teljes Steiner-topológiák, tudjuk, hogy $n - 2$ Steiner-pontjuk lesz. Először is egy képletet akarunk levezetni a teljes Steiner-topológiák számára.

Emlékezzünk arra, hogy egy teljes Steiner-topológiában minden terminálnak 1 a fokszáma, és egy Steiner-ponttal szomszédos. Emlékezzünk arra is, hogy minden teljes Steiner-topológiának $2n - 3$ éle van. Legyen $f(n + 1)$ egy teljes Steiner-fa $n + 1$ terminállal. Ha eltávolítjuk a v_{n+1} terminált és a hozzá tartozó Steiner-pontot, akkor egy n terminálos teljes Steiner-topológiát kapunk. Minden $n + 1$ terminálos teljes Steiner-topológia megkapható egy n terminálos teljes Steiner-topológiából úgy, hogy egy Steiner-pontot, s_j , hozzáadunk az egyik $(2n - 3)$ él középehez, és hozzáadunk egy élt, amely s -t összeköti az új terminállal, v_{n+1} -el. Így $f(n + 1) = (2n - 3)f(n)$.

Tétel 4.2. *Legyen $f(n)$, $n \geq 2$, a n terminálos teljes Steiner-topológiák száma. $f(n) = (2n - 4)! / [2^{n-2}(n - 2)!]$.*

Bizonyítás: Csináljuk indukcióval: $n = 3$: $f(3) = 1$, mivel csak egy lehetséges teljes Steiner-fa van $n = 3$ esetén, amelyben minden terminált egy él köt össze ugyanazzal a Steiner-ponttal. $f(3) = \frac{(2 \times 3 - 4)!}{2^{3-2}(3-2)!} = 1$. Tehát igazoltuk $n = 3$ esetén.

Tegyük fel, hogy igaz n -re: ekkor $f(n) = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!}$.

Bizonyítsuk $n + 1$ esetén: (Be akarjuk mutatni, hogy $f(n + 1) = \frac{(2(n+1)-4)!}{2^{(n+1)-2}((n+1)-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$)

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= (2n-3) \cdot f(n) \\
&= (2n-3) \cdot \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-2) \times (2n-3)!}{(2n-2) \times 2^{n-2}(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{2 \times 2^{n-2} \cdot (n-1) \times (n-2)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}
\end{aligned}$$

□

Legyen $F(n, k)$, $n \geq 3$, az n terminálos és k Steiner-pontos Steiner-topológiák száma, ahol nincs 3 fokszerű terminál csúcs, $d(v_i) = 1, 2$. $F(n, k)$ az $n = k$ teljes Steiner-topológiák számából, $f(k)$ -ből nyerhető. Ezt úgy érjük el, hogy először kiválasztunk $k + 2$ terminált és egy teljes Steiner-topológiát, majd hozzáadjuk a maradék $n - k - 2$ terminált egyenként az egyik $(k + 2) + k - 1 = 2k + 1$ él belső pontjaira. Az első terminál a $2k + 1$ él egyikére kerülhet, a második a $2k + 2$ él egyikére, és az $(n - k - 2)$ -ik a $2k + n - k - 2 = k + n - 2$ darab él egyikére. Így

$$F(n, k) = \binom{n}{k+2} f(k) \frac{(n+k-2)!}{(2k)!}$$

Ez a Steiner-topológiák száma 1 és 2 fokú terminálokkal, $d(v_i) = 1, 2$. Most vegyük figyelembe a 3 fokú terminálokkal rendelkező Steiner-topológiákat is, $d(v_i) = 3$. Legyen n_3 a 3 fokú terminálok száma a topológiában. Egy n_3 darab 3 fokú terminált tartalmazó Steiner-topológia $n - n_3$ darab 1 és 2 fokú terminált és $k + n_3$ darab Steiner-pontot tartalmazó topológiából nyerhető úgy, hogy n_3 darab Steiner-pontot terminálként jelölünk meg.

Legyen $F(n)$, $n \geq 3$ az n terminálos Steiner-topológiák száma.

$$F(n) = \sum_{k=0} \sum_{n_3=0} \binom{n}{n_3} \frac{F(n-n_3, k+n_3)(k+n_3)!}{k!}$$

Mind a teljes Steiner-topológiák $f(n)$, mind a Steiner-topológiák $F(n)$ függvénye szuperexponenciálisak. Ez azt jelenti, hogy még gyorsabban növekednek, mint egy exponenciális függvény. Az $f(n)$ és $F(n)$ első értékeit a következő táblázat tartalmazza.

n	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	1	3	15	105	945
$F(n)$	1	4	31	360	5625	110800

Table 1: A teljes Steiner-topológiák és a Steiner-topológiák számának növekedése n -nel

4.5 Pontos algoritmus

Az ebben a fejezetben bemutatott algoritmust pontos algoritmusnak nevezzük, mert célja a probléma pontos megoldásának megtalálása. Ez különbözik a közelítő algoritmusok vagy heurisztikákétól, amelyek célja a probléma hozzávetőlegesen jó megoldásának megtalálása.

4.5.1 Melzak algoritmus

Melzak volt az első matematikus, aki algoritmust javasolt az euklideszi Steiner-fa problémára. Az algoritmus azzal működik, hogy megtalálja az összes lehetséges topológiához tartozó Steiner-fát. A 4.1.2-es következmény szerint minden topológiához egyedi Steiner-fa tartozik. Melzak algoritmusa arra összpontosít, hogy hogyan találjuk meg a Steiner-fát egy adott topológiához, majd miután mindet megtaláltuk, a legrövidebb lesz a Steiner minimális fa. Az algoritmus működését itt fogjuk bemutatni,

Tegyük fel, hogy ismerjük a Steiner-fánk, T , topológiáját. Ezért ismerjük a Steiner-pontok számát T -ben és az összes kapcsolatot a terminálok és a Steiner-pontok között, $v_1, \dots, v_n, s_1, \dots, s_k$. De nem ismerjük a Steiner-pontok helyzetét.

Minden Steiner-fa, amelynek legalább egy Steiner-pontja van, legalább két terminált is tartalmaz, nevezzük ezeket a -nak és b -nek, amelyek ugyanahhoz a Steiner-ponthoz, nevezzük p -nek, kapcsolódnak. Azt mondjuk, hogy a és b terminálok testvérek. Tudjuk, hogy minden Steiner-pont fokszáma 3, így lesz egy harmadik csúcs is, amely p -hez szomszédos, nevezzük c -nek. Tudjuk, hogy p a Δabc Torricelli-pontja. A T' fa, amelyet úgy kapunk, hogy eltávolítjuk az ap és bp éleket, és hozzáadjuk a pd élt, ugyanolyan hosszú, mint a T fa (ahol d az ab élre épített egyenlő oldalú háromszög Δabd harmadik pontja a Δabc háromszögben). Ezért az

n -es Steiner-fa egy adott topológiához való megtalálása ekvivalens azzal, hogy megtaláljuk a T -fa Steiner-fáját, ahol a és b terminálok és a hozzájuk kapcsolódó élek c -vel új terminálra, d -re cserélődnek, amely c -hez kapcsolódik.

A Steiner-pont p helyzete meghatározható az ab élre épített egyenlő oldalú háromszög Δabd konstrukciójával a Δabc háromszögben. Ha c egy terminál, akkor egyértelmű, hogy melyik oldalra építsük az egyenlő oldalú háromszöget, de ha c egy Steiner-pont, akkor helyzete nem ismert, így mindkét lehetőséget ellenőrizni kell.

Melzak algoritmus két szakaszból áll. Az első szakasz, amelyet egyesítési szakasznak nevezünk, a topológia csökkenésével n -ről 2-re csökken a terminálok száma, és az eredeti terminálok új terminálokkal helyettesítődnek a fent leírt folyamat során. Minden eredeti terminál, kivéve legfeljebb egyet, kicserélődik ebben a szakaszban. Ebben a szakaszban számos alprobléma keletkezik, mivel ha c egy Steiner-pont, akkor két lehetséges hely van a helyzetének meghatározására. Miután a terminálok száma 2-re csökkent, és a megváltozott topológiában már nincs több Steiner-pont, a második szakasz veszi át a szerepet. A második szakasz a rekonstrukciós vagy bővítési szakasz. Ez azzal kezdődik, hogy a két megmaradt terminált egy egyenes vonallal összekötjük. Ezután egy Steiner-fa épül fel úgy, hogy az eredeti terminálokat Steiner-pontokkal helyettesítjük, a három csúcs Torricelli-pontjának helyén.

Az algoritmus szavakkal történő leírása nem teszi egyértelművé, hogyan működik. Az algoritmus formális definícióját következik, amelyben az algoritmus működése világosabbá válik.

4.5.2 Az algoritmus

Az algoritmus bemenete egy n terminálból álló halmaz és egy topológia. Az algoritmus kimenete a Steiner-fa ehhez a topológiához.

1. **amíg** létezik egy Steiner-pont

- (a) Válasszunk ki két terminált, a -t és b -t, amelyek ugyanazzal a p Steiner-ponttal szomszédosak. Nevezzük a p -hez szomszédos harmadik pontot c -nek. Számítsuk ki a két pontot, d_1 -et és d_2 -t, amelyek egyenlő oldalú háromszöget alkotnak a -val és b -vel. Távolítsuk el a -t és b -t a topológiából.
- (b) Ha c egy terminál, akkor válasszunk ki d_1 és d_2 közül azt a pontot, amelyiknél a Δabd_i háromszög kívül esik a Δabc háromszögen, és helyettesítsük p -t d_i -vel.

- (c) Ellenkező esetben hozzunk létre két új problémát, egyet d_1 -re és egyet d_2 -re. Mindkettőben helyettesítsük a p Steiner-pontot egy terminállal, amelynek koordinátái d_i . Kezeljük a generált problémákat rekurzívan.

2. **amíg** a fa T nem tartalmazza az összes eredeti terminált

(a) **ha** nem létezik több Steiner-pont **akkor**

- Kössük össze a terminálokat éllel az aktuális topológia szerint.

(b) **amúgy** [Ez a visszalépés. Legyen a és b a két terminál, amelyet eltávolítottunk az 1. szakasz megfelelő lépésénél, d az újonnan beillesztett terminál, és c a d -hez szomszédos csúcs a fa aktuális topológiájában]:

- Ha az Δabd háromszöget körülíró kör metszi a dc egyenest (kivéve d -t), akkor kösse össze a -t és b -t a metszésponttal, p -vel, és törölje a dp vonalszakaszt.
- Ellenkező esetben **STOP**: az adott topológia nem ad érvényes Steiner-fát.

5 VLSI dizájn

Az elektronikus áramkörök tervezése egy hierarchikus folyamat, amely több fázisból áll. A kezdete azon feladat leírása, amelyet a tervezendő áramkörnek kell elvégeznie. Egy ilyen feladat tekinthető egy összetett logikai függvénynek, amely sok elemi logikai műveletből áll. Általában több ilyen elemi logikai művelet egy logikai egységbe van kombinálva. A logikai tervezési fázisban a chip tervezői meghatározzák, hogy mely előre definiált logikai egységeket kell használni, és eldöntik, hogy mely kiválasztott logikai egységeket kell vezetékkel összekötni, hogy a chip a kívánt módon működjön.

A logikai egységeket celláknak is nevezik. Minden cella jellemzői közé tartozik a szélessége, magassága, érintkezési pontjai (ún. terminálok) és elektromos tulajdonságai. A net egy olyan terminálkészlet, amelyet egy vezetéknek kell összekötnie (ahogy azt a logikai tervezési fázisban meghatározták). A cellák listája és a netek listája a fizikai tervezési fázis bemenete. Itt a feladat az, hogy a cellákat egy adott téglalap alakú területhez rendeljük, és a hálókat vezetékkel összekössük (útvonaltervezés). A fizikai tervezési probléma természetesen bonyolultabb, mint ahogy a fenti vázlat sugallja, mivel bizonyos tervezési szabályokat figyelembe kell venni, egy célfüggvényt minimalizálni kell, stb. A tervezési szabályok nagymértékben függenek az adott elrendezési stílustól, és meghatározzák például, hogy két netnek milyen

távolságra kell lennie egymástól. Ez különösen érvényes a célfüggvényre. Általában az elsődleges cél a chip teljes területének minimalizálása, vagy ha a chip területe előre rögzített, a huzalozhatóság garantálása, azaz a cellák elhelyezési problémájának megoldása úgy, hogy létezzen egy megvalósítható útvonaltervezési megoldás.

A huzalozhatóság azonban nehezen mérhető és kifejezhető célfüggvény formájában. Ezért nagyon gyakran a teljes útvonalhossz minimalizálását használják helyette. Egy másik ok az útvonalhossz minimalizálására az, hogy egy kis útvonalhosszú elektronikus áramkör általában kevés helyet igényel. Így a teljes terület minimalizálása (valahogy) implicit módon figyelembe van véve az útvonalhossz minimalizálásával [M G].

5.1 Derékszögű Steiner-fák

A derékszögű Steiner-fa probléma kulcsfontosságú a VLSI dizájnban [Pey]. Számos alkalmazásban jelenik meg, például az inverterfa és az órajelfa algoritmusokban, valamint a globális és részletes útvonaltervezésben. A vezetékek orientációjára vonatkozó technológiai korlátok miatt a VLSI tervezésben az összeköttetések általában derékszögű Steiner-fák. A Steiner-fa probléma hatékony kezelése érdekében a gyakorlatban szinte mindig kétdimenziós problémává alakítják. Bár ez az egyszerűsítés egyértelműen korlátozás, megoldása elegendő a Steiner-fákkal dolgozó algoritmusok többségéhez.

A probléma során adott egy véges (elektromos) terminálok halmaza, amelyet a sík egy Z pontkészletének tekintünk. A síkban lévő derékszögű Steiner-fa olyan fa, amely a megadott pontkészletet kizárólag vízszintes és függőleges vonalszakaszokkal kapcsolja össze. A fa vonalszakaszait éleknek nevezzük. Az él csak a fa csúcspontjain találkozhat, és egyetlen csúcs sem metszi egy él belső részét. Megjegyzendő, hogy minden terminál csúcs. Egy adott T fa esetén a $V(T)$ jelöli a csúcseit, az $E(T)$ pedig az éleit. A derékszögű Steiner-fák feltételezése szerint nincsenek átfedő élek, mivel ezek egyértelműen szuboptimálisak a teljes hossz tekintetében. Ezért minden csúcsnak legfeljebb egy szomszédos éle van mind a négy irányban. Egy csúcs fokszáma az élek száma, amelyekhez kapcsolódik. Egy Steiner-pont egy nem-terminál csúcs, amelynek fokszáma három vagy négy, míg egy sarokpont egy olyan nem-terminál csúcs, amelynek fokszáma kettő, ahol a két él, amely a sarokponton találkozik, merőleges. Az olyan nem-terminál csúcsokat, amelyek fokszáma kettő, és amelyek két ko-lineáris szomszédos éllel rendelkeznek, eltávolítjuk mindkét él egyesítésével. Feltételezzük, hogy minden összeköttetés a terminálok és/vagy a Steiner-pontok között a legrövidebb derékszögű utak, és hogy ninc-

senek két szomszédos sarokpont a fában, azaz lépcsős összeköttetések nem megengedettek. Így a terminálok és/vagy Steiner-pontok közötti összeköttetések legfeljebb két élből állnak. Ebben a fejezetben a távolságokat mindig l_1 metrika alapján mérjük, ha nincs másként meghatározva. Az u és v csúcsok közötti derékszögű távolságot $|uv|$ jelöli, míg egy T fa hossza $|T|$ az összes éle hosszának összege. A legrövidebb derékszögű Steiner-fát Steiner-minimális fának (SMT) nevezik.

5.2 Minimális Steiner-fák másodlagos célfüggvénnyel

Ebben a szakaszban azt a problémát tárgyaljuk, hogy miként lehet egy fát létrehozni - az összes legrövidebb hosszúságú rektilineáris Steiner fa közül - amely minimalizálja a megadott célfüggvényt. Főként azzal a problémával foglalkozunk, ahol a célfüggvényt a súlyozott útvonalhosszak összege határozza meg.

5.2.1 A probléma megalapozása

A vizsgált problémában feltételezzük, hogy a fa gyökere a forrás $r \in Z$, míg a többi terminál Z -ben a nyelők. Így a fa valójában egy Steiner fásítás Z -re, amely a forrásnál van gyökerezve. Az elektromos jelnek a forrástól a nyelőkig kell terjednie az elkészített fán keresztül. A fa kialakításakor számos ellentmondó célkitűzést kell figyelembe venni. Itt az alábbi két célkitűzés érdekel minket [Pey]:

- A fa teljes hosszát minimalizálni kell, mivel ez csökkenti a területigényeket, a zsúfoltságot és az energiafogyasztást.
- A jel késleltetését a forrástól a nyelőkig minimalizálni kell, mivel ez csökkenti az összes órajelciklus idejét.

Az a megoldás, amely csak az első célkitűzést veszi figyelembe, egy derékszögű Steiner-minimálfa (RSMT). Az RSMT-k bármilyen gyakorlati méretű változatát gyorsan ki lehet számítani. A teljes hossz minimalizálása hagyományosan az elsődleges cél, mivel ez a célkitűzés a gyakorlatban a jelkésleltetés szempontjából is ésszerűen jó. Továbbá, a legtöbb terminálkészlet (más néven net) esetében a jelkésleltetés nem fontos; ezek a netek nem részei a chip kritikus jelpályájának. Azonban azoknál a neteknél, amelyek a kritikus jelpálya részét képezik, a jelkésleltetés nyilvánvalóan nagyon fontos.

Ebben a szakaszban az olyan RSMT-k (derékszögű Steiner-minimálfák) építésének problémáját vizsgáljuk, amelyek minimális teljes hosszal rendelkeznek, és amelyek a jelkéleltetés szempontjából a lehető legjobbak. Ezért anélkül, hogy feláldoznánk a minimális teljes hosszúságot, megpróbáljuk javítani a jelkéleltetést (ha lehetséges), azaz a jelkéleltetést másodlagos célként kezeljük az RSMT-k építésekor. Az így javasolt algoritmusok tehát felhasználhatók a chipen található összes minimális hosszúságú összeköttetés javítására. Azonban a kritikus jelpályán található egyes hálók esetében szükséges lehet a minimális teljes hosszúság feláldozása alternatív módszerek alkalmazásával

Egy adott T fa esetén, amely lefedi Z -t, legyen $P_T(r, z_i)$ az útvonal a forrástól r a $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőig T -ben, és $|rz_i|_T$ annak hossza (vagy a távolság T -ben r -től z_i -ig). Továbbá, legyen $w_i > 0$ egy pozitív súly a z_i nyelőre. Tanulmányunk főként a következő problémára összpontosít:

Derékszögű Steiner-fa probléma súlyozott útvonalhosszak összegével (RST-PWP)

Adott:

- Egy terminálkészlet Z a síkban;
- egy kijelölt forrás $r \in Z$;
- $w_i > 0$ súlyok minden $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőre.

Cél: Építsünk egy T derékszögű Steiner-minimálfát r -re, úgy hogy $\sum_{z_i \in Z \setminus \{r\}} w_i |rz_i|_T$ minimális legyen.

Egy optimális megoldást az RSTPWP-re T derékszögű Steiner-minimálfával jelöljük. Lásd az alábbi ábrát.



Ábra 11: Két RSMT ugyanarra a terminálkészletre. A jobb oldali RSMT jobb jelátviteli késleltetési tulajdonságokkal rendelkezik, mint a bal oldali RSMT. Valójában a jobb oldali RSMT egy optimális megoldás az RSTPWP-re, mivel az összes út a forrástól (r) a lefolyóig a legrövidebb rektilineáris utak.

Az RSTPWP célkitűzéseit a VLSI tervezés motiválja, ahol fontos, hogy a fákat ne csak a lehető legrövidebbre építsük, hanem jó időzíteni tulajdonságokkal is rendelkezzenek. Egy forrásból egy fán keresztül terjedő jelnek meg kell felelnie a meghatározott időzíteni korlátoknak. Ezeket a korlátokat hozzávetőlegesen tükrözhetik a w_i súlyok minden $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőre, ahol a kritikus nyelők magasabb súlyt kapnak, mint a kevésbé kritikus nyelők.

Az RSTPWP probléma megfogalmazásának előnye, hogy egyszerű és nem használ semmilyen időzíteni paramétert. Azonban a súlyokat gondosan kell megválasztani annak érdekében, hogy megfelelően kifejezzék a nyelők kritikus voltát. Egy általánosan használt késleltetési közelítés Elmore-tól [1948] származik. Az Elmore késleltetési modell jó becslésként szolgál a jel késleltetésének kiszámításához a forrástól a nyelőig egy T fában. Adott egy forrásellenállás R_d , vezetékességkénti ellenállás R_{unit} és kapacitás C_{unit} , valamint c_i terhelési kapacitások minden $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőre, az Elmore késleltetés $del_T(z_i)$ egy z_i nyelőre az alábbiak szerint definiált:

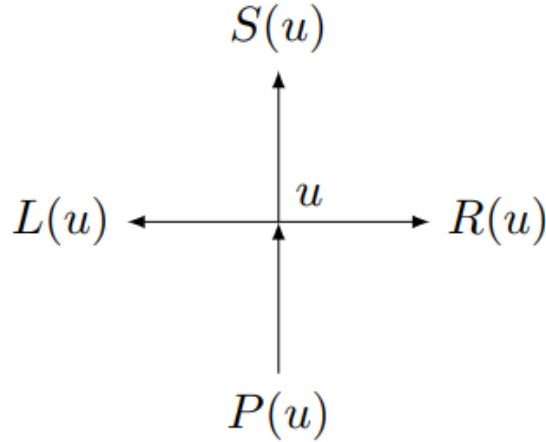
$$del_T(z_i) := R_d C_{T,r} + \sum_{e=(u,v) \in E(P_T(r,z_i))} r_e \left(\frac{c_e}{2} + C_{T,v} \right),$$

ahol $r_e := R_{unit} \cdot |uv|_T$ és $c_e := C_{unit} \cdot |uv|_T$ jelenti az (u, v) él ellenállását illetve kapacitását, és $C_{T,v}$ a T fa v csúcsán gyökerező részfájának lefelé irányuló kapacitása.

Alapvető jelölések és definíciók

Egy adott T fára, amely r -nél gyökerezik, a következő jelöléseket használjuk egy $u \in V(T) \setminus \{r\}$ csúcsra:

- $P(u)$: u elődje vagy szülője.
- $S(u)$: u utódja, azaz u gyermeke, amely egyvonalban van $P(u)$ -val és u -val. Ha ilyen gyermek nem létezik, akkor $S(u) = \text{nil}$.
- $L(u)$: u bal oldali gyermeke, ha $P(u)$ -tól u felé nézünk. Ha ilyen gyermek nem létezik, akkor $L(u) = \text{nil}$.
- $R(u)$: u jobb oldali gyermeke, ha $P(u)$ -tól u felé nézünk. Ha ilyen gyermek nem létezik, akkor $R(u) = \text{nil}$.



Egy u csúcsot T -csúcsnak nevezünk, ha mind $L(u)$, mind $R(u)$ létezik, de $S(u)$ nem létezik; különben u -t nem T -csúcsnak nevezzük.

Egy vagy több szomszédos, egyvonalban lévő él sorozatát szegmensnek nevezzük. Egy maximális szegmens olyan szegmens, amely nem része egy másik szegmensnek. Egy teljes szegmens olyan szegmens, amelynek belső csúcsai mind Steiner-pontok, és amely nem része egy másik szegmensnek, amelynek csak Steiner-pontok a belső csúcsai. Megjegyezzük, hogy bármely él pontosan egy maximális/teljes szegmens része.

Egy szegmens S belépő csúcsa az a csúcs a szegmensben, amely a legközelebb van a forráshoz. Ha a belépő csúcs nem maga a forrás, akkor az S belépő éle az az él, amelynek a belépő csúcs a feje. (A maximális szegmens S belépő éle mindig merőleges S -re.) Hasonlóképpen, egy kilépő él S -ből olyan él, amelynek a farka S -hez tartozik, míg a feje nem.

A Z terminálkészlet Hanan-rácsa $H(Z)$ úgy nyerhető, hogy függőleges és vízszintes vonalakat húzunk Z minden pontján keresztül. Ennek megfelelően a Hanan-rács gráf $HGG(Z)$ a következőképpen definiált: az $H(Z)$ metszéspontjai a csúcsok, és egy csúcspárt akkor és csak akkor kötünk össze, ha a megfelelő metszéspontok szomszédosak a Hanan-rácsban. Az $HGG(Z)$ gráf egy élének $\{u, v\}$ hossza l_{uv} az (euklideszi) távolság a megfelelő Hanan-rács metszéspontok között. A $T(Z)$ a $HGG(Z)$ olyan részfáinak halmazát jelöli, amelyek összekötik Z -t és $r \in Z$ -nél gyökereznek.

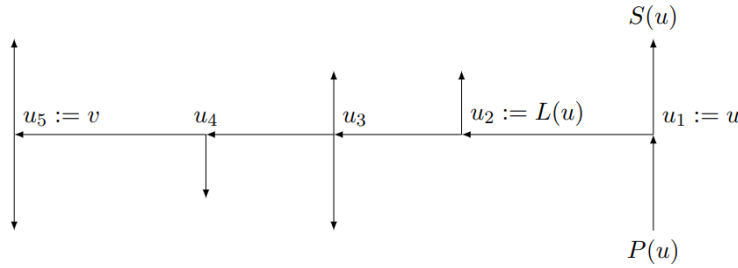
Teljes Steiner-fák az RSTPWP-hez

Ebben a szakaszban egy szerkezeti eredményt mutatunk be, amely az RSTPWP optimális megoldásait jellemzi. Ez az eredmény például felhasználható egy előfeldolgozási fázisban a gráf példányainak csökkentésére a később bemutatott pontos algoritmushoz.

Egy teljes Steiner-fa (FST) olyan Steiner-fa, amelyben minden terminál levél. Az FST minden belső csúcsa Steiner-pont vagy sarokpont. Az RSTPWP egy optimális T megoldása, irányított FST-kre bomlik, azaz minden FST-nek van egy kijelölt terminálja, mint helyi gyökér, és minden él ebből a gyökérből kifelé irányul. Az alábbiakban jellemzést adunk az FST-kről bármely T -ben. Legyen F egy FST egy T -ben, amelynek helyi gyökere r_F . Egy (u, v) él esetén $F_{(u,v)}$ jelöli az u -nál gyökerező és v -t tartalmazó részfat F -ben.

Lemma 5.1. *Legyen u egy belső nem T -csúcs F -ben, amelyre $L(u)$ létezik. Legyen v a teljes szegmens végpontja, amely tartalmazza a $(u, L(u))$ élt, és amely u ugyanazon oldalán van, mint $L(u)$ a teljes szegmensben. Ekkor v terminál.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy v nem terminál. Legyen $u_1 := u$, $u_2 := L(u)$, $u_3, \dots, u_k := v$ ahol $k \geq 2$ a uv szegmens csúcsai. Ha uv -t és minden csúcsát fel vagy le mozgatjuk, F hosszának változása lineáris a mozgásban. Mivel F egy RSMT, a változásnak



valójában nullának kell lennie. Így uv $P(u)$ felé mozgatható anélkül, hogy megváltoztatná F hosszát. Vegyük észre, hogy az út hossza $P(u)$ -tól minden olyan csúcsig, amely az uv szegmens felett van és szomszédos az u_1, \dots, u_k egyik csúcsával, nem változik, amikor uv $P(u)$ felé mozog. Azonban, ha létezik egy szomszédos csúcs $w \neq P(u)$ uv alatt, akkor az út hossza w -hez csökken. Mivel w vagy egy terminál, vagy legalább egy terminál tartozik az w -nél gyökerező részfához (és minden út súlya pozitív), az RSMT_r nem optimális a másodlagos célkitűzés, az út hosszak súlyozott összegének minimalizálása szempontjából.

Ha nincs szomszédos csúcs $P(u)$ kivételével uv alatt, akkor v egy sarokpont kell, hogy

legyen, amely közvetlenül u -hoz kapcsolódik (mert különben F nyilvánvalóan nem hossz-optimalizált). Most, ha u is sarokpont, akkor uv egy lépcsőzetes kapcsolat része. Ellenkező esetben $S(u)$ -nek léteznie kell, de ebben az esetben F nyilvánvalóan nem hossz-optimalizált — ellentmondás. \square

Hasonló eredményt kapunk a 5.1 lemmára, ha u egy belső nem T -csúcs, és $R(u)$ létezik.

Lemma 5.2. *Legyen u egy belső nem T -csúcs F -ben, amelyre $L(u)$ létezik. Ekkor $F_{(u,L(u))}$ nem tartalmaz sarokpontot.*

Bizonyítás: Az 3.1 lemmából tudjuk, hogy a teljes szegmens végpontja v , amely tartalmazza $(u, L(u))$ élt (és amely u ugyanazon oldalán van, mint $L(u)$ a teljes szegmensben), terminál. Így ezen a szegmensben egyik csúcs sem sarokpont. Most rekurzívan ismételjük ezt az érvelést az uv minden belső csúcsára; mivel ezek a csúcsok nem T -csúcsok, a bal/jobbs éleik által meghatározott teljes szegmensek végpontjainak is termináloknak kell lenniük. Így az egész részfat kimerítjük anélkül, hogy sarokpontot találjunk. \square

Hasonló eredményt kapunk a 5.2 lemmára, ha u egy belső nem T -csúcs, és $R(u)$ létezik.

Lemma 5.3. *Legyen u egy (belső) T -csúcs F -ben. Legyen $v_L v_R$ a teljes szegmens, amely tartalmazza $(u, L(u))$ és $(u, R(u))$ éleket úgy, hogy v_L (illetve v_R) u ugyanazon oldalán van, mint $L(u)$ (illetve $R(u)$) $v_L v_R$ -on. Ekkor vagy v_L vagy v_R (vagy mindkettő) terminál.*

Bizonyítás: Az 3.1 lemmában használt bizonyítási technikát alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy mind v_L , mind v_R nem terminálok, így a $v_L v_R$ szegmens csak nem terminálokat tartalmaz. Ekkor $v_L v_R$ szabadon mozgatható fel vagy le anélkül, hogy megváltoztatná F hosszát. Legalább egy szomszédos csúcsnak kell lennie $P(u)$ kivételével $v_L v_R$ alatt, mert különben a fa nem hossz-optimalizált. Ha $v_L v_R$ -t $P(u)$ felé mozgatjuk, az út hossza ehhez a csúcshoz csökken, míg más csúcsokhoz az út hossza nem nő — ez ellentmondás F másodlagos célkitűzés szerinti optimalitásával szemben. \square

Tétel 5.4. *Egy teljes Steiner-fa az RSTPWP optimális megoldásában legfeljebb egy sarokponttal rendelkezik.*

Bizonyítás: Vegyük figyelembe egy F FST helyi gyökerét r_F . Mivel r_F terminál, pontosan egy kimenő éle van F -ben; legyen $r_F v$ a teljes szegmens, amely tartalmazza ezt az élt. Mivel az $r_F v$ belső Steiner-pontjai (ha vannak ilyenek) nem T -csúcsok, a bal/jobbs részfáik nem

tartalmaznak sarokpontot a 5.2 lemmából következően. Ezért csak a v csúcsot és annak részfáit (ha vannak ilyenek) kell figyelembe vennünk. Három esetet különböztetünk meg:

- v terminál: Ebben az esetben F nyilvánvalóan nem tartalmaz sarokpontot.
- v sarokpont: Ebben az esetben v az egyetlen sarokpont F -ben, mivel a v által meghatározott részfa nem tartalmaz sarokpontot a 3.2 lemmából következően.
- v egy T -csúcs: Legyen $v_L v_R$ a teljes szegmens, amely v -t tartalmazza, a lemmában meghatározottak szerint. Vagy v_L vagy v_R (vagy mindkettő) terminálok; tegyük fel, hogy v_R terminál. Ekkor az $F_{(v,R(v))}$ részfa nem tartalmaz sarokpontot (ugyanazokat az érveket használjuk, mint a lemma bizonyításában). Ezért, ha F tartalmaz sarokpontot, az az $F_{(v,L(v))}$ részfában van. Ugyanezeket az érveket rekurzívan ismétljük az $F_{(v,L(v))}$ részfára, v -t helyi gyökéreként használva. Vegyük észre, hogy egyetlen útvonalat követünk F -en keresztül, és amint egy sarokpontot azonosítunk (ha van ilyen), az lesz az egyetlen sarokpont F -ben.

□

Ezért mindhárom esetben arra a következtetésre jutunk, hogy F legfeljebb egy sarokponttal rendelkezik.

Tétel 5.5. *Az RSTPWP optimális megoldásának a Z terminálkészlet $(H(Z))$ Hanan-rácsának része kell, hogy legyen.*

Bizonyítás: Vegyünk figyelembe egy s Steiner-pontot az RSTPWP optimális megoldásában. Nyilvánvalóan s pontosan egy maximális vízszintes szegmens és egy maximális függőleges szegmens része. Vegyük figyelembe a vízszintes szegmenst, és tegyük fel, hogy nem tartalmaz terminált. Ekkor a szegmens belépő éle merőleges kell, hogy legyen a szegmensre. Az 5.1 és 5.3 lemmát alkalmazva a belépő csúcsra, bizonyíthatjuk, hogy a szegmensnek kell tartalmaznia terminált. Hasonlóképpen, a maximális függőleges szegmensnek is kell. Így s egy Hanan-rács metszéspont.

□

5.3 Pontos algoritmus

Az RSTPWP optimális megoldásának konstruálásához elegendő az optimális megoldást kiszámítani a megfelelő Hanan-rács gráfban a 5.5 tétel alapján. A bemenet egy irányítatlan,

él-súlyozott gráf $G = (V, E)$, amelyben adott egy terminálkészlet $Z \subseteq V$ és egy $r \in Z$ forrás. Minden $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőhöz egy útvonal hosszúsági súly $w_i > 0$ van rendelve.

Ebben a szakaszban egy vegyes egészértékű programozási (IP) formulációt adunk meg az általános gráfproblémára; ezt a formulációt standard branch-and-cut módszerekkel oldhatjuk meg [Pey]. Az IP formuláció lényegében egy irányított formuláció a Steiner-fa problémához gráfokban. Ezenkívül egy a forrástól a nyelőig tartó áramlás méri a másodlagos célkitűzés értékét, azaz az útvonalak hosszúságának súlyozott összegét. Legyen $G_d = (V, E_d)$ egy irányított gráf, amely ugyanazokat a csúcsokat tartalmazza, mint G , és két irányított, el-lentétes élt minden G -beli élhez. Feltételezzük, hogy minden $(u, v) \in E_d$ él pozitív egész értékű súllyal rendelkezik, $l_{uv} = l_{vu}$. Ez megkönnyíti a másodlagos célkitűzés kezelését, mivel a fa hossza egésznek tekinthető.

Legyen bármely nem üres $S \subset V$ halmazra $\delta^+(S) := \{(u, v) \in E_d : u \in S \text{ és } v \in V \setminus S\}$ az S -ből induló és $V \setminus S$ -be érkező élek halmaza. Két változót definiálunk egy $(u, v) \in E_d$ élhez: egy döntési változót $x_{uv} = 1$, akkor és csak akkor, ha $(u, v) \in E_d$ él része a Steiner-fának, különben 0; míg egy f_{uv} változó az élen áthaladó áramlás mennyiségét adja meg; $f_{uv} = 0$, ha az él nem része a Steiner-fának.

Egy IP formuláció az RSTPWP gráf verziójára:

$$\min \sum_{(u,v) \in E_d} l_{uv}(x_{uv} + f_{uv})$$

$$\sum_{(u,v) \in \delta^+(S)} x_{uv} \geq 1 \quad \text{minden } S \subset V, r \in S, (V \setminus S) \cap Z \neq \emptyset \quad (5.1)$$

$$\sum_{(u,v) \in E_d} f_{uv} - \sum_{(v,u) \in E_d} f_{vu} = D_v \quad \text{minden } v \in V \setminus \{r\} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} f_{uv} &\geq 0 \quad \text{minden } (u, v) \in E_d \\ f_{uv} &\leq x_{uv} \quad \text{minden } (u, v) \in E_d \\ x_{uv} &\in \{0, 1\} \quad \text{minden } (u, v) \in E_d \end{aligned} \quad (5.3)$$

A (5.1) és (5.3) egyenlőtlenségek irányított Steiner-fa formulációhoz vannak. Az útvonalhossz célkitűzése azáltal mérhető, hogy bizonyos mennyiségű áramlást küldünk a forrástól a nyelőig. Az áramlási igény D_v a (5.2) korlátban nulla minden nem terminál $v \in V \setminus Z$ csúcsra, azaz áramlásmegmaradást követelünk meg a nem termináloknál. A $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelő D_{z_i} igénye

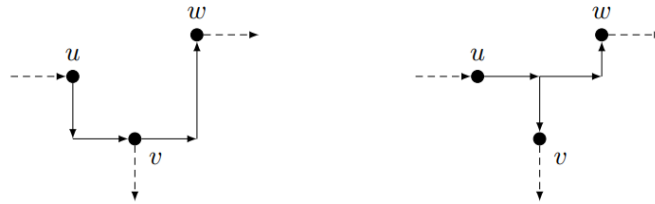
arányos az útvonal hosszúsági súlyával, w_i -vel és az alábbiak szerint van meghatározva: Legyen L egy felső korlát bármely útvonalra (például az összes él teljes hossza), és legyen $W := \sum_{z_i \in Z \setminus \{r\}} w_i$ az összes nyelő útvonal hosszúsági súlyának összege. Ekkor beállítjuk, hogy $D_{z_i} := \frac{w_i}{LW}$.

Vegyünk egy $z_i \in Z \setminus \{r\}$ nyelőt. Az r -től z_i -ig terjedő áramlás hozzájárulása a célfüggvényhez legfeljebb $L \cdot \frac{w_i}{LW} = \frac{w_i}{W}$. Az összes hozzájárulás határa $\sum_{z_i \in Z \setminus \{r\}} \frac{w_i}{W} = 1$. Következésképpen a megépített fának minimális hosszúságúnak kell lennie, mivel az él-súlyokat egész értékűnek feltételeztük.

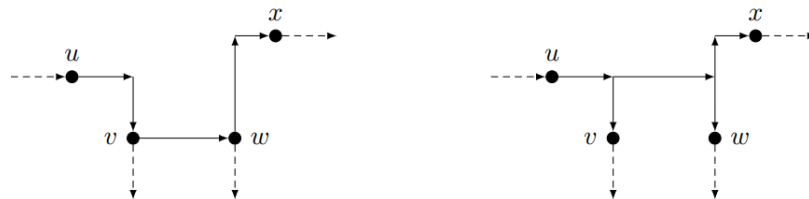
5.3.1 Heurisztika

Az ebben a szakaszban tárgyalt általános heurisztikus megközelítés a következő. Tegyük fel, hogy adott egy T derékszögű Steiner-minimálfa (RSMT) a Z terminálkészlethez. Adjunk meg egy sor (helyi) módosítást T -re, amelyek megtartják a teljes minimális hosszúságot, miközben csökkentik az útvonalak hosszának súlyozott összegét – vagy valamilyen más késleltetéssel kapcsolatos célkitűzést [Pey].

Egy ilyen utófeldolgozó javító algoritmus a Global Slack Removal (GSR). Ez az algoritmus eltávolítja az úgynevezett V-ket és U-kat a fából, amíg el nem fogynak.



Ábra 12: V törlés



Ábra 13: U törlés

GSR műveletek: V-törlés: három csúcs sorozata u , v és w növekvő távolságra a forrástól; a

részfa helyettesítve egy legrövidebb úttal u -tól w -ig és egy kapcsolattal v -hez. Megjegyzendő, hogy a V -eltávolítás nem alkalmazható bármely hossz-optimalizált fára. U -törlés: négy csúcs sorozata u, v, w és x növekvő távolságra a forrástól; a részfa helyettesítve egy legrövidebb úttal u -tól x -ig és kapcsolatokkal v -hez és w -hoz.

A GSR által végrehajtott helyi módosítások egy úgynevezett szegmens csúsztatás speciális esetei, amely az A. szakaszban van definiálva. A B. szakaszban bemutatunk egy algoritmust, amely lineáris időben azonosít egy legjobbat” szegmens csúsztatást.

A Szegmens Csúsztatások

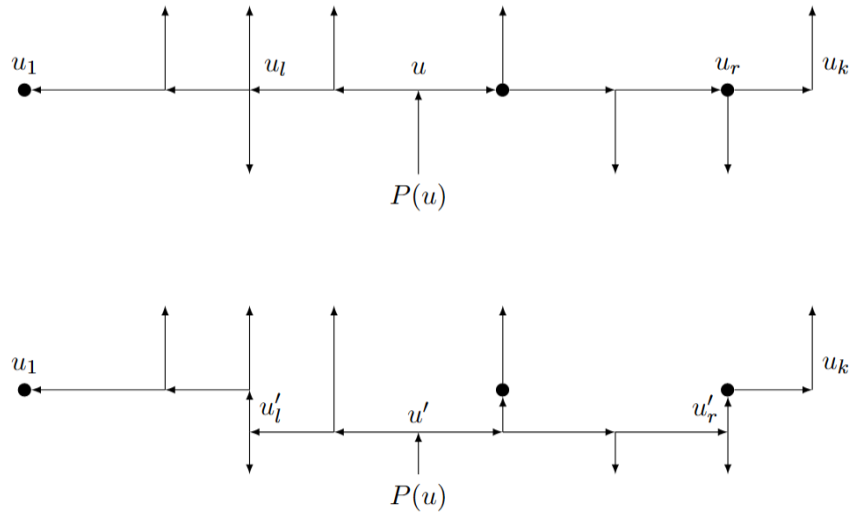
Vegyünk egy $u \neq r$ csúcsot a T fában. Ez a csúcs meghatároz egy egyedi maximális szegmenst (MS), amely tartalmazza u -t és merőleges a $(P(u), u)$ élre. Degenerált esetben MS csak az u csúcsot tartalmazza, de tegyük fel, hogy MS legalább egy élt tartalmaz. Továbbá, az általánosság elvesztése nélkül legyen a $(P(u), u)$ él függőleges u -ra $P(u)$ felett úgy, hogy MS vízszintes 14.(a) ábra.

Legyenek u_1, u_2, \dots, u_k a csúcsok MS -en balról jobbra, ahol $u = u_m$ valamilyen $m \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Legyen S bármely szegmens, amelyet az $u_l, \dots, u, \dots, u_r$ csúcsok részsorozata alkot, ahol $1 \leq l \leq m \leq r \leq k$, azaz u a S szegmens része. Egy szegmens csúsztatás S -re egy függőleges (lefelé irányuló) mozgást jelent az $u_l, \dots, u, \dots, u_r$ csúcsaira és éleire, úgy hogy minden csúcsot ugyanakkora távolságra $\epsilon > 0$ mozgatunk. Az új csúcsokat $u'_l, \dots, u', \dots, u'_r$ jelöli 14.(b) ábra. Attól függően, hogy az eredeti csúcsok terminálok vagy Steiner-pontok — és hogy mely irányokba kapcsolódnak ezek a csúcsok — szükséges lehet a régi csúcs megtartása és az eredeti és az új csúcs összekapcsolása (a részletek a B. szakaszban találhatóak).

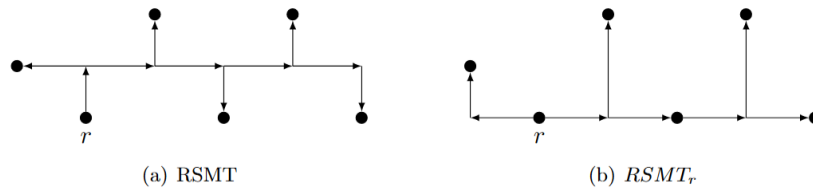
Nyilvánvalóan olyan szegmens csúsztatások iránt érdeklődünk, amelyek nem növelik a fa teljes hosszát. Az RSMT-k esetében a fa hosszának változásának pontosan nullának kell lennie. Nyilvánvaló, hogy a V -törlések és U -törlések speciális esetei a szegmens csúsztatásoknak. Ezenkívül a szegmens csúsztatások szigorúan erősebbek: az ábra egy olyan fát mutat, amely nem tartalmaz V -ket vagy U -kat, de amelyre létezik egy szegmens csúsztatás, amely optimális megoldássá alakítja az RSTPWP-re. Azonban könnyen létrehozhatók olyan példák is, amelyek nem lehetséges szegmens csúsztatást alkalmazni, és a fa nem optimális megoldás az RSTPWP-re 16. ábra.

B Legjobb Szegmens Csúsztatások Azonosítása

Az S szegmens az u_l, \dots, u_r csúcsokból áll. A fa hosszának változása kiszámítható úgy, hogy összeadjuk minden csúcs hozzájárulását. Feltételezve, hogy minden csúcsot $\epsilon > 0$ távolságra mozgatunk, a fa hosszának változása egy csúcs esetén lehet $-\epsilon$, 0 vagy $+\epsilon$. Azt mondjuk, hogy a csúcs értéke rendre -1 , 0 vagy $+1$. Az esetek elemzése a következő értékeket adja egy $v \in \{u_l, \dots, u_r\}$ csúcs mozgására:

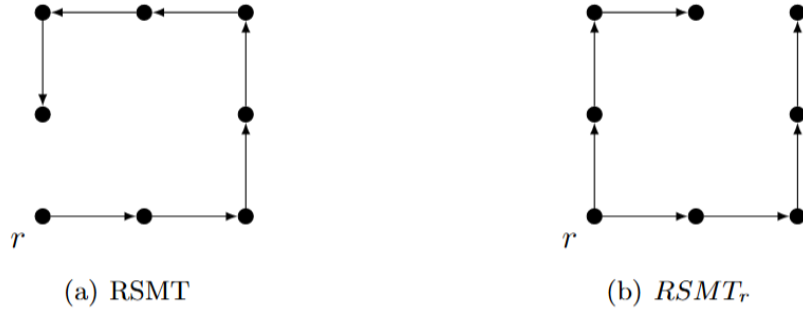


Ábra 14: Szegmens csúsztatásra példa



Ábra 15: (a) Egy RSMT, amit nem tud a GSR javítani; (b) optimális megoldás az RSTPWP-hez

- v az végponti csúcs ($v = u_l$ vagy $v = u_r$): Ha v egy sarokpont és lefelé irányuló kilépő éllel rendelkezik, értéke -1 . Ha v -nek nincs lefelé irányuló kilépő éle, értéke $+1$, egyébként értéke 0 .



Ábra 16: (a) Egy RSMT, amit nem lehet javítani szegmens csúsztatásokkal; (b) optimális megoldás egy RSTPWP-hez

- **v az belső csúcs** ($v \neq u_l$ és $v \neq u_r$): Ha v egy Steiner-pont és lefelé irányuló kilépő éllel rendelkezik, és nincs felfelé irányuló kilépő éle, értéke -1 . Ha v -nek nincs lefelé irányuló kilépő éle, értéke $+1$, egyébként értéke 0 .

Most egy algoritmust adunk meg egy adott belépő csúcs által meghatározott maximális szegmens legjobb (rész)szegmensének megtalálásához. A szegmens a legjobb szegmens abban az értelemben, hogy az ϵ függvényeként a lehető legnagyobb mértékben csökkenti a teljes fa hosszát (döntetlen esetén a leghosszabb szegmenst adjuk vissza). Az $EvalNodeEndpoint(v)$ és az $EvalNodeInterior(v)$ függvények az itt megadott értékeket adják vissza. Megjegyezzük, hogy a végponti értékelés nem függ attól, hogy $v = u_l$ vagy $v = u_r$.

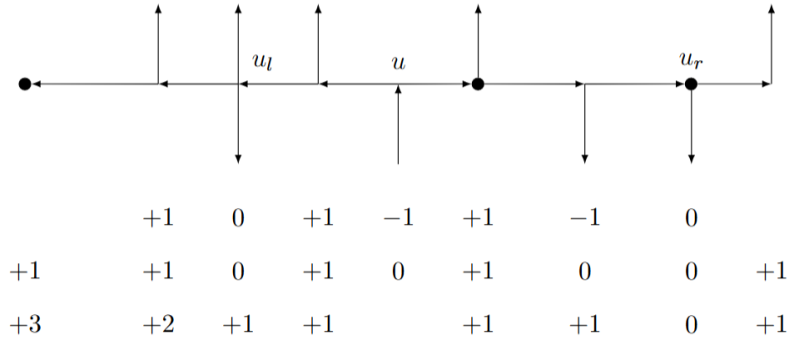
A $BestSlide(u)$ algoritmus először megtalálja a legjobb baloldali végpontot v_l , majd a legjobb jobboldali végpontot v_r a maximális szegmensben. Az összességében legjobb szegmens lehet a v_l, \dots, u szegmens, az u, \dots, v_r szegmens, vagy a v_l, \dots, v_r szegmens. Egy példa látható a 17. ábrán.

Nyilvánvaló, hogy a $BestSlide(u)$ algoritmus lineáris időben fut a maximális szegmensben lévő élek számában. Mivel minden él pontosan egy maximális szegmenshez tartozik, a $BestSlide(u)$ futtatása az összes $u \in V(T) \setminus \{r\}$ csúcsra lineáris időt vesz igénybe a fán lévő élek (vagy csúcsok) számában.

Algorithm 1 BestSlide(u) [Pey]

// a maximális szegmens legjobb baloldali végpontjának, v_l megtalálása, amit u ad meg

```
1:  $v = L(u)$ ;  $\Delta = 0$ ;  $\Delta_l = \infty$ ;  $v_l = u$ ;  
2: while  $v \neq \text{nil}$  do  
3:    $\delta = \Delta + \text{EvalNodeEndpoint}(v)$ ; //  $v$  értékelése mint végpont  
4:   if  $\delta \leq \Delta_l$  then  
5:      $\Delta_l = \delta$ ;  $v_l = v$ ;  
6:   end if  
7:    $\Delta = \Delta + \text{EvalNodeInterior}(v)$ ;  $v = S(v)$ ;  
8: end while // a maximális szegmens legjobb jobboldali végpontjának,  $v_r$  megtalálása,  
   amit  $u$  ad meg  
9:  $v = R(u)$ ;  $\Delta = 0$ ;  $\Delta_r = \infty$ ;  $v_r = u$ ;  
10: while  $v \neq \text{nil}$  do  
11:    $\delta = \Delta + \text{EvalNodeEndpoint}(v)$ ; //  $v$  értékelése mint végpont  
12:   if  $\delta \leq \Delta_r$  then  
13:      $\Delta_r = \delta$ ;  $v_r = v$ ;  
14:   end if  
15:    $\Delta = \Delta + \text{EvalNodeInterior}(v)$ ;  $v = S(v)$ ;  
16: end while // a legjobb kombinált csúsztatás megtalálása (akár mindkét oldalon, akár  
   csak bal vagy jobb oldalon)  
17:  $\Delta = \infty$ ;  $u_l = \text{nil}$ ;  $u_r = \text{nil}$ ;  
18:  $\delta = \Delta_l + \Delta_r + \text{EvalNodeInterior}(u)$ ; // mindkét oldal  
19: if  $\delta < \Delta$  then  
20:    $\Delta = \delta$ ;  $u_l = v_l$ ;  $u_r = v_r$ ;  
21: end if  
22:  $\delta = \Delta_l + \text{EvalNodeEndpoint}(u)$ ; // bal oldal  
23: if  $\delta < \Delta$  then  
24:    $\Delta = \delta$ ;  $u_l = v_l$ ;  $u_r = u$ ;  
25: end if  
26:  $\delta = \Delta_r + \text{EvalNodeEndpoint}(u)$ ; // jobb oldal  
27: if  $\delta < \Delta$  then  
28:    $\Delta = \delta$ ;  $u_l = u$ ;  $u_r = v_r$ ;  
29: end if  
30: return  $(\Delta, u_l, u_r)$ 
```



Ábra 17: A legjobb csúsztatás azonosítása egy maximális szegmensre a 14. ábra példájában, Az első sor a +1, 0 és 1 értékekkel megadja az adott csúcs lefelé mozgásának értékét, mint belső csúcs. A második sor a megfelelő végponti értékeket adja meg. A harmadik sor minden végpont felhalmozott értékét adja meg. A legjobb csúsztatás az az u_l, \dots, u_r szegmens, amelynek összértéke nulla, azaz nem változtatja meg a fa hosszát.

Hivatkozások

- [Jor11] Szeszlér Dávid Jordán Tibor Recski András. *Rendszeroptimalizálás*. Információelmélet. 2011. ISBN: 978-963-2791-16-6.
- [M G] R. Weismantel M. Grötschel A. Martin. *The Steiner Tree Packing Problem in VLSI-Design*.
- [Pey] Sven Peyer. *Shortest Paths and Steiner Trees in VLSI Routing*. URL: <https://bonndoc.ulb.uni-bonn.de/xmlui/bitstream/handle/20.500.11811/3198/1286.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [San] Alessandro Santuari. *Steiner Tree NP-completeness Proof*. URL: <http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/Complexity/provette/Santuari/steiner.pdf>.
- [Soo] Germander Soothill. *The Euclidean Steiner Problem*. URL: https://maths.durham.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill_Steiner_report.pdf.
- [Tre] Luca Trevisan. *Approximating the Metric Steiner Tree Problem*. URL: <http://theory.stanford.edu/~trevisan/cs261/lecture02.pdf>.

NYILATKOZAT

Név: Kántor András


ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSC

NEPTUN azonosító: EFH3VP

Szakedolgozat címe: A Steiner-fa feladat és alkalmazása a VLSI-designban

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.06.01.



hallgató aláírása