Véges ponthalmazok bizonyos tulajdonságai a d-dimenziós térben

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Inges Domonkos Máté

Matematika BSc - alkalmazott szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Ebben a dolgozatban az olvasó betekintést nyerhet az euklideszi geometria egyik témakörébe, az antipodális ponthalmazokba. Az első kérdést, ami a ma antipodális ponthalmazoknak nevezett fogalmora vonatkozik, Erdős Pál tette fel 1948-ban. Azt kérdezte, mekkora lehet azon ponthalmaz maximális mérete a 3-dimenziós euklideszi térben, amelynek tetszőleges ponthármasa nem tompaszögű háromszöget alkot.

Ezzel indult az antipodalitás története. Ma a Klee-féle antipodalitás definíció a legismertebb, amelynek az Erdős által használt „a halmaz nem tartalmaz tompaszögű háromszöget" egy speciális esete.

Egy ponthalmazt akkor nevezünk antipodálisnak*, ha bármely két A és B pontjához találhatunk két különböző párhuzamos hipersíkot, amelyek közül az egyik A-t a másik B-t tartalmazza, és a ponthalmaz többi pontja a két hipersík által közrezárt nyílt térrészben helyezkedik el.*

A témakör fejlődéséhez Danzer és Grünbaum is sokat hozzátettek mind cikkeikkel (lásd:[DG62], [Grü63]), mind pedig a témakör népszerűsítésével. Legfontosabb eredményüket *a* 3.1.1. tétel, ami a következőt mondja ki: „$\mathbb{R}^d$-ben egy antipodális halmaz maximális elemszáma 2^d". Továbbá Danzer azt a sejtést is megfogalmazta, hogy a lehető legjobb alsó becslés az antipodális halmazok méretére $2d-1$. Erdős is többször visszatért újabb ötletekkel és társakkal, például Füredi Zoltánnal, akivel dimenzióban nézve $(1.15)^d$-es, azaz exponenciális alsókorlátot adtak a szigorúan antipodális halmazok maximális méretére (lásd: [EF83]), ami cáfolta Danzer sejtését. Ezt a bizonyítást, és az aktuális legjobb eredményt, Harangi és Gerencsér tételét, is leírjuk a 3. fejezetben.

A dolgozatomat fél év kutató munka előzte meg Naszódi Márton témavezetőmmel, aki bevezetett a témakörbe egy évvel korábban. Jelenleg Szilágyi Zsomborral és Weiner Mihállyal egy cikken dolgozik, amelyben az antipodalitás fogalmát természetesen általánosítják, amit a General Probability theory pontosabb megértése és leírása motivált, ami pedig a kvantum információ illetve a kvantum valószínűségek elméletéhez kapcsolódik. Az így nyert általános fogalom a k-rangú antipodalitás, amely ennek a dolgozatnak a fő tárgya. Az ő munkájukkal párhuzamosan dolgoztunk együtt témavezetőmmel, akivel végül egyre jobb eredményekre jutottunk. Minden ebben a témában elért eredményünk látható a 4. és 5. fejezetben, amelyek csak közös eredményeinket taglalják.

A fő eredményünk a k-rangúan antipodális politópok összekötése a k-szomszédsági poltiópokkal. Az 5.3.3. tétel miatt megadható d-dimenzióban pontosan a maximális méretű $\lfloor \frac{1}{2} d \rfloor$-nél nagyobb rangúan antipodális ponthalmazok elemszáma.

A dolgozat struktúrája a következő: A 2. fejezetben bemutatjuk a témához szükséges legalapvetőbb geometriai és algebrai tételeket, fogalmakat. A 3. fejezetben ismertetjük az antipodalitás témakörét, és a témában elért fontosabb eredményeket. A 4. fejezetben az új k-rangú antipodalitáshoz kötődő eszköztárunkat vezetjük be. Az 5. és egyben utolsó fejezetben pedig a közös munka során általunk elért eredményeket mutatjuk be bizonyítással együtt.

2. Fogalmi bevezető

Ebben a fejezetben bevezetjük a témakörhöz szükséges elemi geometriai és lineáris algebrai fogalmakat. Ezek segítségével az összetettebb eredmények is feldolgozhatóak. Előbb bevezetjük az affin tér általános tulajdonságait, majd ezeket felhasználva és bevezetve az origót a vektortér fogalmához, illetve a pozitív definit skalárszorzást, végső soron megkapjuk az euklideszi teret, ahol későbbi munkánk zajlik majd. Definiáljuk a lineáris leképezéseket, majd ezeknek kiterjesztéseit affin és vektor terekben. A vektorok lineáris, nemnegatív és konvex kombinációinak fogalmát is bevezetjük azért, hogy bevezethessük az általuk értelmezhető affin- vagy konvex burok fogalmakat, affin- vagy lineáris altereket. Ezeket a későbbi fejezetekben gyakran fogjuk használni.

2.1. Euklideszi geometria

Sajnos nincs lehetőségünk mindenre kiterjedő euklideszi geometriai bevezetést készíteni, ezért szigorúan csak azon definíciókat és állításokat tűntetjük fel, melyek elengedhetetlenek a megértéshez. Ilyen magának a tetszőleges dimenziójú euklideszi térnek a bevezetése illetve a kezelésével járó eszköztár bemutatása.

Először bevezetjük az affin-, vagyis illeszkedési tér fogalmát, majd az euklideszi térét, így rámutatva ez utóbbi többlet tulajdonságaira. Ezt a fejezetet Moussong Gábor [Gá14] könyve alapján készítettem.

2.1.1. Definíció. *Legyen $\mathbb{T}$ (kommutatív) test, V vektortér $\mathbb{T}$ fölött, és X tetszőleges halmaz. $\mathbb{T}$ fölötti* ***Affin struktúrának*** *nevezzük a $\Phi : X \times X \to V$ leképezést, és* ***affin térnek*** *az (X, V, Φ) hármast, ha teljesülnek az alábbiak.*

1) *Minden $A \in X$-re a $\Phi_A : X \to V$, $\Phi_A(B) = \Phi(A, B)$ leképezés bijektív, és*

2) *Minden $A, B, C \in X$-re $\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C)$.*

Gyakran magát X-et nevezzük affin térnek, ha egyértelmű milyen affin struktúrával van ellátva. X elemeit pontoknak nevezzük.

Egyéb megállapítások és konvenciók ezen fogalom kapcsán:

- A dolgozatban $\mathbb{T}$ mindig $\mathbb{R}$ lesz. A későbbiekben minden vektortér és affintér ugyan azon $\mathbb{T}$ test fölött értelmezendő.
- $A, B \in X$ esetén $\Phi(A, B) \in V$ vektorra inkább az $\overrightarrow{AB}$ jelölést használjuk. Ezzel rögtön adódik, hogy 2) az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ alakban

írható.

- $A \in X$-re X_A az X alaphalmazú vektorteret jelüli, melyre $\Phi_A : X_A \to V$ izomorfizmus. Azt mondjuk, hogy az X_A vektorteret az X affin tér "vektorizációjával" nyerjük az A pontban.
- X dimenziójának definíció szerint V dimenzióját tekintjük és $dim X$-el jelöljük.
- Egy **vektortér természetes affin struktútája**: Ha V vektortér, akkor az $X = V$ halmazon a $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)$ leképezés affin struktúrát ad meg.
- Ha V egy tetszőleges altér W vektortérben, továbbá $\mathbf{v} \in W$ tetszőleges rögzített vektor, akkor az $X = V + \mathbf{v}$ halmazon affin struktúrát definiál a $\Phi : X \times X \to V$, $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V + \mathbf{v})$ leképezés.
- Ha (X_1, V_1, Φ_1) és (X_2, V_2, Φ_2) affin terek, akkor a direkt szorzatuk $(X_1 \times X_2, V_1 \times V_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$ is az.

2.1.2. Definíció. *Legyenek V és W ugyanazon $\mathbb{T}$ fölötti vektorterek. $\varphi : V \to W$ egy **lineáris leképezés**, ha*

i) összegtartó, azaz $v_1, v_2 \in V$-re $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$, és

ii) skalárszorostartó, azaz $\lambda \in \mathbb{T}$-ra és $v \in V$-re $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

2.1.3. Definíció. *Legyenek (X, V, Φ) és (X', V', Φ') affin terek. Egy $f : X \to x'$ leképezést **affin leképezésnek** nevezünk, ha alkalmas $\varphi : V \to V'$ lineáris leképezéssel bármely $A, B \in X$-re $\varphi(\Phi(A, B)) = \Phi'(f(A), f(B))$, azaz $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ teljesül.*

Nyilván φ-t az f affin leképezés egyértelműen meghatározza. Illetve igaz lesz a következő két állítás:

2.1.1. Állítás. *Egy $f : X \to X'$ leképezés pontosan akkor affin, ha bármely $A \in X$-re $f_A : X_A \to X'_{f(A)}$ lineáris, és ahol f_A leképezés minden rögzített A-ra az $\overrightarrow{AB}$ vektorhoz a $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ vektort rendeli.*

2.1.2. Állítás. *Bármely affin tér identikus leképezése és bármely konstans leképezése affin, affin leképezések kompozíciója affin, bijektív affin leképezés inverze affin.*

2.1.3. Állítás. *Az affin leképezések halmaza zárt a kompozíció műveletére.*

A következő állítás megmutatja, hogy az affin tér és a vektortér fogalma közti különbség lényegében az, hogy az affin tér esetében nem foglalkozunk azzal, hogy hol van az origó. Az affin teret bármely pontjának origóként való kitüntetése vektortérré teszi.

2.1.4. Állítás. *Lássuk el a V és W vektorterket a természetes affin struktúrájukkal. Egy $f : V \to W$ leképezés pontosan akkor affin, ha $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$ alakú, ahol $\varphi : V \to W$ lineáris és $\boldsymbol{b} \in W$.*

2.1.4. Definíció. *Adott $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in V$ vektortérbeli vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok esetén a $\boldsymbol{b} := \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ vektort az $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ vektorok* ***lineáris kombinációjának*** *nevezzük.*

2.1.5. Definíció. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz* ***altér****, ha maga is vektortér $\mathbb{T}$ fölött a V műveleteire nézve.*

Ezen definícióval ekvivalens definíció a következő: W-t **lineáris altérnek** nevezzük, ha $W \subseteq V$ vektortér és zárt a lineáris kombináció műveletére nézve.

2.1.6. Definíció. *Legyen (X, V, Φ) affin tér és $Y \subseteq X$ tetszőleges részhalmaz. Azt mondjuk, hogy Y* ***affin altér*** *X-ben, ha létezik olyan V-beli W lineáris altér, hogy a $(Y, W, \Phi|_{Y \times Y})$ hármas affin tér. Ilyenkor Y a W alteret egyértelműen meghatározza. W-re időnként az $\overrightarrow{Y}$ jelölést használjuk. (Példa: $V = \overrightarrow{X}$.)*

A következő állítás további karakterizációval szolgál az affin altereket illetően, valamint összeköti az eddig leírt definíciókat.

2.1.5. Állítás. *Az X affin tér tetszőleges $Y \subseteq X$ részhalmazára az alábbi állítások ekvivalensek.*

i) *Y affin altér;*

ii) *$Y \neq \emptyset$ és minden $A \in Y$-ra $\Phi_A(Y)$ V-beli lineáris altér;*

iii) *létezik olyan $A \in Y$, hogy $\Phi_A(Y)$ V-beli lineáris altér legyen;*

iv) *létezik olyan V-beli W lineáris altér és olyan $A \in X$, hogy $Y = \Phi_A^{-1}(W)$.*

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ implikációk a definíciókból rögtön adódnak. A $(iv) \Rightarrow (i)$ következtetéshez azt kell meggondolni, hogy bármely $B, C \in Y$-ra $\overrightarrow{BC} \in W$. Viszont $Y = \Phi_A^{-1}(W)$ miatt $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \in W$, és így $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \in W$. $\square$

Megfigyelhető, hogy a 2.1.5. Állítás miatt vektorterek természetes affin struktúrájához tartozó affin alterek pontosan a lináris alterek eltoltjai. Illetve a 2.1.4. állítás miatt tetszőleges $f : X \to X'$ affin leképezés képhalmaza affin altér az X' affin térben.

A következő két definícióra az affin vetítések bevezetése miatt lesz szükség, bár az affin vetítéseket csak a következő alfejezetben írjuk le.

2.1.7. Definíció. *Legyenek Y és Z affin alterek az X affin térben. Azt mondjuk, hogy Y és Z* ***párhuzamos*** *(jele: $Y||Z$), ha $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Z}$.*

A párhuzamosság nyilván ekvivalencia reláció X affin altereinek halmazán. A párhuzamos affin alterek dimenziója egyenlő.

2.1.8. Definíció. *Az Y és Z affin alterek* ***komplementer alterek*** *az X affin térben, ha $V = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Z}$ direkt összeg.*

Ilyenkor $Y \cap Z$ egyetlen pont. A komplementaritás szimmetrikus reláció X affin altereinek halmazán. $\overrightarrow{Z}$-t szoktuk $\overrightarrow{Y}$ **direkt kiegészítőjének** is nevezni.

Ezek után bevezetjük az euklideszi teret, amelyre igazak lesznek az affin terek tulajdonságai:

2.1.9. Definíció. *A (V, B) párt* ***euklideszi vektortérnek*** *nevezzük, ha V véges dimenziós valós vektortér, és $B : V \times V \to \mathbb{R}$ pozitív definit, szimmetrikus bilineáris függvény. Ezt a függvényt V-beli* ***skaláris szorzásnak*** *nevezzük, és az $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vektorokon felvett értékét $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ helyett inkább $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$-vel jelöljük.*

Az $\mathbb{R}^d$ koordinátateret az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ skaláris szorzat automatikusan euklideszi térré teszi. Ezt nevezzük **standard d-dimenziós euklideszi vektortérnek**.

Bármely euklideszi vektortérben bármely lineáris altér maga is euklideszi vektortér, ha skaláris szorzást megszorítjuk az altérre.

2.1.10. Definíció. *Az* ***$\boldsymbol{x}$ euklideszi normája*** *$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_j x_j^2}$, ami megmutatja az x pont távolságát az origótól, vagy az x vektor hosszát.*

2.1.6. Állítás. *Az euklideszi norma valóban norma, azaz teljesíti a $||.|| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ norma függvény három tulajdonságát:*

1. *$||\boldsymbol{x}|| \geq 0$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$-re és egyenlőség akkor és csak akkpr áll fent, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,*

2. $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda|||\boldsymbol{x}||$ *minden* $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ *esetén,*

3. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ *minden* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$*-re.*

A 3. pont bizonyításához szükséges a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség, ami kimondja, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$-re $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$.

2.1.11. Definíció. *Legyen V vektortér a $\mathbb{T}$ test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$. Ezek a vektorok* ***lineárisan függetlenek****, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{T}$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Különben a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok* ***lineárisan összefüggők****.*

2.1.12. Definíció. *Legyen V egy vektortér $\mathbb{T}$ fölött és $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Ekkor a $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{T}$, egy alteret alkotnak V-ben. Ezt az alteret a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ által* ***generált altérnek*** *nevezzük, és $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$-vel jelüljük.*

A $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ vektorkat generátoroknak, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számokat pedig a generátorok lineáris kombinációjának együtthatóinak nevezzük. Továbbá $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$-t ***generátorrendszernek*** *hívjuk, ha $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$.*

2.1.13. Definíció. *Egy vektorrendszer* ***bázis****, ha lineárisan független és generátorrendszer.*

A bázisokról közismert tétel kimondja, hogy ha $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in V$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ lineáris kombinációjaként.

2.1.14. Definíció. *A $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ vektorok* ***ortonormált rendszert*** *alkotnak, ha páronként merőleges egységvektorok, azaz $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$ és $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 1$, ha $i = j$.*

Bármely ortonormált rendszer lineárisan független, mert a lineáris algebrából ismert Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást használva látjuk, hogy bármely ortonormált vektorrendszer kiegészíthető ortonormált bázissá. Ezért V-ben az ortonormált bázisok pontosan a maximális ortonormált vektorrendszerek.

Az euklideszi tér **standard bázisa** az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_d = (0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból áll, és ezért tetszőleges V-beli $\mathbf{x}$ vektor előáll $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{e}_j$ alakban.

2.1.15. Definíció. *Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ nemüres részhalmazok. Ekkor $A + B = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} : a \in A, b \in B\}$ A és B Minkowski összegének nevezzük.*

A skalárral való szorzást hasonlóan értelmezzük, azaz $\lambda A = \{\lambda \boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} \in A\}$ és

dilatációnak *nevezzük. Speciálisan, azt mondjuk hogy az A halmaz* ***szimmetrikus****, ha $A = -A$, illetve $-A$-t, azaz $(-1)A$-t A szimmetrikus képének nevezzük.*

2.1.16. Definíció. *Az $\mathbb{R}^d$-beli $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorok euklideszi távolságát az* ***euklideszi metrikájukkal*** *adjuk meg:*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

2.1.7. Állítás. *Az euklideszi metrika valóban metrikát definiál a skalárszorzás tulajdonságai miatt, azaz teljesül rá, hogy*

1. *minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$-re $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ akkor és csak akkor áll fent, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,*
2. *minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$-re $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, azaz szimmetrikus,*
3. *minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$-re $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.*

2.1.17. Definíció. *Az $S \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaznak* ***belső pontja*** *$x \in S$, ha létezik olyan ε távolság, hogy amely pontok ennél közelebb vannak x-hez szintén S pontjai. Jele: $x \in int(S)$.*

Ha S minden pontja belső pont, akkor S-et ***nyílt halmaznak*** *nevezzük.*

Egy halmazt ***zártnak*** *nevezünk, ha a komplementere nyílt.*

2.1.18. Definíció. *Ha $S \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz x pontját S* ***lezárási pontjának*** *nevezzük, ha tetszőleges ε távolság esetén létezik olyan S-beli y pont, amelyre $d(x, y) < \varepsilon$. (Ez a pont lehet akár maga az x pont is.) Az S* ***halmaz lezártjának*** *a lezárási pontjainak halmazát nevezzük, és $\overline{S}$-sel jelöljük.*

Megjegyezzük, hogy az $\overline{S}$ halmaz valóban zárt halmaz.

2.1.19. Definíció. *Az $S \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz* ***határának*** *az $\overline{S} \backslash S$ halmazt nevezzük és $bd(S)$-sel jelöljük.*

2.1.20. Definíció. *Az $S \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz* ***külső pontjának*** *nevezzük x-et, ha $x \in \overline{S}^c$. Az S külső pontjainak halmazát $ext(S)$-sel jelöljük.*

2.2. Lineáris és affin burkok, altérre vetítés

2.2.1. Definíció. *Adott $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^d$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok esetén a $\boldsymbol{b} := \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ vektort az $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ vektorok* ***lineáris kombinációjának*** *nevezzük, (ahogy ezt már korábban is definiáltuk).*

Ha a λ_i számok összege 1, akkor ***affin kombinációról*** *beszélünk, míg ha valamennyi λ_i nemnegatív, úgy* ***nemnegatív kombinációról*** *van szó.*

Egy nemnegatív, affin kombinációt ***konvex kombinációnak*** *nevezünk.*

2.2.1. Állítás. *Az affin leképezések felcserélhetők az affin kombinációk képzésével. Azaz: ha $f : X \to Y$ affin leképezés, és X-ben a B pont az $A_1, \ldots, A_k$ pontok affin kombinációja, akkor Y-ban $f(B)$ pont az $f(A_1), \ldots, f(A_k)$ pontok ugyanilyen együtthatós affin kombinációja.*

2.2.2. Állítás. *Az X affin tér egy nemüren Y részhalmaza pontosan akkor affin altér, ha zárt az affin kombinációképzésére, azaz $A_1, \ldots, A_k \in Y$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{T}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ estén az A_i pontok λ_i együtthatós affin kombinációja is eleme Y-nak.*

2.2.2. Definíció. *Tetszőleges S halmaz elemeiből álló lineáris kombinációk halmazát a vektorok* ***lineáris burkának*** *nevezzük. Az S halmaz pontjainak affin vagy konvex kombinációinak halmazát* ***affin****- vagy* ***konvex burkának*** *hívjuk. S affin burkának jele: $aff\,(S)$. S konvex burkának jele: $conv\,(S)$.*

2.2.3. Definíció. *Véges sok vektor* ***lineáris burkának nevezzük*** *a tartalmazásra nézve legkisebb őket tartalmazó lineáris alteret. Véges sok pont* ***affin*** *vagy* ***konvex burkának*** *nevezzük, a tartalmazásra nézve legkisebb őket tartalmazó affin alteret vagy konvex halmazt.*

Az előző két definícióról megmutatható, hogy azok ekvivalensek. Ehhez kulcs állításokat mond ki a következő állítás.

2.2.3. Állítás. *1. Lineáris alterek metszete lineáris altér.*

2. Affin alterek metszete affin altér.

3. Konvex halmazok metszete konvex halmaz.

Az előzőek alapján pedig világos, hogy véges sok vektor lineáris burka maga is lineáris altér, illetve véges sok pont affin- vagy konvex burka is affin altér illetve konvex halmaz.

2.2.4. Definíció. *Legyen Y affin altér az X affin térben, és rögzítsük a V-beli $\overrightarrow{Y}$ altér U direkt kiegészítőjét a V vektortérben. Definiáljuk a $p : X \to Y$ leképezést a következő módon. Tetszőleges $A \in X$-hez egyértelműen található $Z(A) \subseteq X$ affin altér, hogy $A \in Z(A)$ és $\overrightarrow{Z(A)} = U$. Ekkor $Z(A) \cap Y$ egypontú; legyen $p(A)$ ez a pont. Rögtön látszik, hogy p affin leképezés. Nyilván $p \circ p = p$. A p leképezést az* ***X affin tér Y affin altérre történő U irányú vetítésének*** *nevezzük.*

Ezt a definíciót az euklideszi térre alkalmazva a következőképpen fogjuk értelmezni: Legyen $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ affin altér. A $p : \mathbb{R}^d \to Y$ leképezést Y-ra vett

vetítésnek nevezzük, ha p az affin kombinációkat magtartja, és megszorítva a képhalmazára az identitás.

2.3. Politópok

Ebben az alfejezetben bevezetjük a politópok fogalmát, illetve pár hasznos tulajdonságát, amelyeket a későbbiekben használni fogunk. Ezt a fejezetet Günter M. Ziegler [Zie95] könyve alapján készítettük.

2.3.1. Definíció. ***Konvex politópnak*** *nevezzük véges sok pont konvex burkát $\mathbb{R}^d$-ben, melynek a belselye nem üres.*

2.3.2. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ egy vektor, és $c_0 \in \mathbb{R}$ adott. Ekkor $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{cx} \leq c_0\}$ egy* ***zárt féltér*** *$\mathbb{R}^d$-ben.* ***Nyílt féltér*** *pedig akkor, ha nem engedjük meg az egyenlőséget a halmaz definiálásakor.*

2.3.1. Tétel. *Minden politóp előáll véges sok zárt féltér metszeteként.*

2.3.2. Tétel. *Amennyiben véges sok zárt féltér metszete korlátos és a belseje nem üres, akkor a metszet halmaz egy poltióp.*

2.3.3. Definíció. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ egy* ***konvex politóp****. A $\boldsymbol{cx} \leq c_0$ lineáris egyenlőtlenség igaz P-re, ha minden $\boldsymbol{x} \in P$ pont kielégíti. P egy* ***lapja*** *előáll, mint*

$$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{cx} = c_0\},$$

ahol $\boldsymbol{cx} \leq c_0$ egy igaz egyenlőtlenség P-re. A lap dimenziója megegyezik az őt tartalmazó affin altér dimenziójával, azaz $dim(F) := dim(aff(F))$.

A definícióból következik, hogy mivel a $\mathbf{0x} \leq 0$ egyenlőtlenség teljesül P-re, ezért P maga is egy lapja P-nek. Minden olyan F lapot, amelyre $F \subsetneq P$ teljesül, P **valódi lapjának** nevezzük.

A $0, 1, dim(P) - 1$ dimenziós lapokat rendre P **csúcsainak**, **éleinek** illetve **hiperlapjainak** nevezzük. A csúcsok a minimális nemüres lapok, a hiperlapok pedig a maximális valódi lapok. P csúcsainak halmazát $vert(P)$-vel jelöljük.

Az ezt követő két állításban összegyűjtünk egyszerű tényeket a politópok lapjairól.

2.3.1. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ egy politóp. Ha egy politóp megegyezik egy V ponthalmaz konvex burkával, akkor a V ponthalmaz tartalmazza a politóp csúcsait: $P = conv(V)$-ből következik, hogy $vert(P) \subseteq V$.*

2.3.2. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ egy politóp és $V := vert(P)$. Legyen továbbá F a P politóp egy lapja. Ekkor:*

1. *F maga is egy politóp és $vert(F) = F \cap V$.*
2. *ha $F_1, \dots, F_l$ a P politópnak lapjai, akkor $\bigcap_{i=1}^{l} F_i$ is P lapja.*
3. *F lapjai megyegyeznek P azon lapjaival, amelyeket F tartalmazza .*
4. *$F = P \cap aff\,(F)$*

Bizonyítás. Legyen F a $\mathbf{cx} \leq c_0$ P-re igaz egyenlőtlenséggel definiálva.

Az 1. állítás első részének bizonyításához kihasználjuk a politópok a 2.3.1. állítás karakterizációját, azaz hogy előállnak véges sok zárt féltér nem üres metszeteként. F politóp, mivel F előáll, mint P elmetszve a H hipersíkkal, ahol

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{cx} = c_0\}.$$

Továbbá az $F \subseteq aff\,(F) \subseteq H$ tartalmazási sor bizonyítja a 4. állítást.

Az 1. állítás második részének bizonyításához észrevehetjük, hogy $vert(F) \supseteq F \cap V =: V_0$. Ez valóban igaz, mert F lapja tartalmazhat további csúcsokat V-ből. A másik irányú tartalmazáshoz legyen $\mathbf{x} \in F$, $\mathbf{v}_i \in V$, úgy hogy $\mathbf{x}$ reprezentálható legyen, mint $\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{v}_i \lambda_i$, ahol a λ_i-k olyan együtthatók, amelyekre igaz, hogy $\lambda_i \geq 0$ és $\sum_i \lambda_i = 1$ is teljesül. Ekkor

$$c_0 = \mathbf{cx} = \mathbf{c}(\textstyle\sum_i \mathbf{v}_i \lambda_i) = (\sum_i \mathbf{cv}_i \lambda_i) \leq c_0 \sum_i \lambda_i = c_0,$$

ezért $(\mathbf{cv}_i - c_0)\lambda_i = 0$ teljesül minden i-re. Ebből következik, hogy $\lambda = 0$ minden olyan i-re, ahol $\mathbf{v}_i \notin V_0$, és ezért $\mathbf{x} \in conv\,(V_0)$. Ebből látható, hogy $F = conv\,(V_0)$ és ezért $vert(F) \subseteq V_0$ is fenn áll a 2.3.1 állítás 2. része miatt. Ezzel befejeztük az 1 bizonyítását.

A 2. állítás bizonyításához, tegyük fel, hogy $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{cx} = c_0\}$ és $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{bx} = b_0\}$, ahol $\mathbf{cx} \leq c_0$ és $\mathbf{bx} \leq b_0$ egyenlőtlenségek igazak P-re. Ekkor $(\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} \leq c_0 + b_0$ is igaz lesz P-re és $P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : (\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} = c_0 + b_0\} \supseteq F \cap G$. Megmutatjuk, hogy a két halmaz valójában egyenlő:

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathbf{y} \in P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : (\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} = c_0 + b_0\}$ amire $\mathbf{y} \notin F \cap G$, azaz olyan további pontja a politópnak, amit még megtámaszt a hipersík, de nem $F \cap G$ beli. Mivel $\mathbf{y}$ nincs benne a metszetben, ezért egyszerre nem teljesíti a $\mathbf{cy} = c_0$ és a $\mathbf{by} = b_0$ egyenleteket. Mivel ezek közül legalább az egyiket nem teljesíti, ezért a két egyenlet összegét sem teljesíti, azaz $(\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{y} = c_0 + b_0$ egyenletet sem teljesíti, ami nyilvánvalóan ellentmondásra vezet.

A 3. állítás bizonyítása: Ha $G \subseteq F$ egy lapja P-nek, akkor F-nek is egy lapja. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{cx} = c_0\}$ és $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{bx} = b_0\} \subseteq F$, ahol $\mathbf{cx} \leq c_0$ igaz P-re és $\mathbf{bx} \leq b_0$ igaz F-re, de nem feltétlenül teljesül P-re. Legyen $V_0 := vert(F)$, ahogy korábban és $V_1 := V \backslash V_0$. Feltehető, hogy $F \neq P$ és hogy $V_1 \neq \emptyset$. Ekkor $(\lambda\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} \leq \lambda c_0 + b_0$ egy igaz egyenlőtlenség F-re minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, és G-t definiálja, mint F lapja.

Válasszuk λ-t elég nagynak ahhoz, hogy kielégítse a $\lambda > -\frac{b_0 - \mathbf{bv}}{c_0 - \mathbf{cv}}$ szigorú egyenlőtlenséget tetszőleges $\mathbf{v} \in V_1$ választásával. Ekkor $(\lambda\mathbf{c}+\mathbf{b})\mathbf{x} \leq \lambda c_0 + b_0$ egy igaz szigorú egyenlőtlenség lesz minden $\mathbf{x} \in V_1$-re. Ebből pedig következik már, hogy G egy lapja P-nek.

□

2.3.1. Lemma. *(Az előző állítás 2. részének következménye) Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ politóp, $V := vert(P)$ és $A \subset V$ tetszőleges. Ekkor létezik F lapja P-nek, hogy $A \subset F$ és F minimális.*

Bizonyítás. Legyen $A \subset V$ tetszőleges csúcs részhalmaza P-nek. Legyen $\mathcal{F}_0$ a P lapjainak halmaza. Vegyük a $G := \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}_0 \\ A \subset F}} F$ halmazt. A 2.3.2 állítás 2. része miatt ez is egy lapja lesz P-nek sőt tartalmazni fogja A-t.

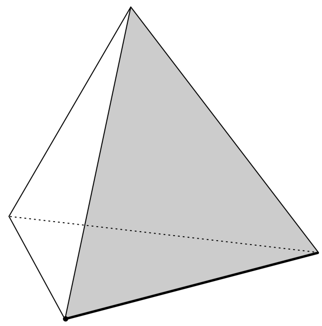
Indirekt módon tegyük fel, hogy nem minimális, azaz létezik olyan L lapja P-nek, amelyre L tartalmazza A-t, de $L \subset G$. Ez utóbbi ellentmondás, hisz ekkor L is szerepel G definíciójában, így nem lehet szigorún kisebb mint a metszet. □

2.3.4. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^d$ hipersík a **támaszhipersíkja** $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ véges zárt halmaznak, ha $H \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, és $\mathcal{X}$ a H által határolt egyik zárt féltérben helyezkedik el.*

Végül bevezetjük a d-dimenziós szimplexet, amely elengethetetlen a k-rangú antipodalitás később bevezetendő fogalmához.

2.3.5. Definíció. ***Szimplexnek*** *nevezünk tetszőleges $d+1$ affin független pont konvex burkaként kapott politópot.*

A szimplex a 2-dimenziós háromszög és a 3-dimenziós tetraéder általánosítása d-dimenzióra. k-dimenziós lapjai k-dimenziós szimplexek. Az i-dimenziós lapjainak számát pedig a $\binom{n+1}{i+1}$ binomiális együttható adja meg.



1. ábra. Egy tetraéder, melynek egy háromszöglapját, egy élét és egy csúcsát kiemeltük, mert ezek mind példák a 3-, 2-, 1- vagy 0-dimenziós szimplexre

2.3.3. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ politóp a d-dimenziós szimplex, és legyen $F \subseteq P$ egy ℓ-dimenziós lapja P-nek. Ekkor van olyan $\Pi : \mathbb{R}^d \to aff(F)$ vetítés, amely P csúcsait az F lapra képzi.*

Bizonyítás. Legyen $vert(P) = \{q_1, \ldots, q_{d+1}\}$ és $vert(F) = \{q_1, \ldots, q_{\ell+1}\}$. Jelöljük azon csúcsait P-nek, amelyek nem csúcsai F-nek $(vert(F))^c$-vel, azaz $(vert(F))^c = \{q_{\ell+2}, \ldots, q_{d+1}\}$. Algoritmust adunk a következőkben. Kezdésként legyen $P_0 = P$.

A lépés a következő: Legyen L egy olyan hiperlapja P_0-nak, amely tartalmazza F-et. Legyen $\Pi_1 : \mathbb{R}^d \to aff(L)$ egy olyan vetítés, amely $(vert(F))^c$ azon elemét képzi rá az L lapra, amelyik nincs benne $aff(L)$-ben. Legyen ez az elem q_{i_1}. Ilyen Π_1 vetítés a következő miatt létezik: Vegyük a $t \in int(L) \cup bd(L)$ pontot. Ekkor a $\overrightarrow{q_{i_1}t}$ vektor meghatároz egy irányt, amelyet használva a Π_1 vetítéskor a q_{i_1} pont képe éppen t pont lesz, amely megfelelővé teszi Π_1-et.

Ekkor a P_0 képét jelöljük $\Pi_1(P_0) = P_1$-gyel. "Frissítsük" $(vert(F))^c$-t úgy, hogy $vert(F) \cup (vert(F))^c = vert(P_1)$ legyen, azaz az „új” $(vert(F))^c$-ben nem lesz benne q_{i_1}.

Az i-edik lépésben alkalmazott vetítést Π_i-vel, az általa kapott $\Pi_i(P_{i-1})$ képet P_i-vel jelöljük.

A lépést addig kell ismételnünk, amíg $(vert(F))^c = \emptyset$ be nem következik, azaz $d - \ell$ lépést kell tennünk. Végül pedig a keresett vetítés Π, ami $vert(P)$-t az F lapra képzi, előáll mint $\Pi_{d-\ell} \circ \Pi_{d-\ell-1} \circ \cdots \circ \Pi_1$ kompozíció a 2.1.3. állítás miatt. $\square$

3. Antipodalitás

Ebben a fejezetben először bemutatjuk a Klee által a [Kle60]-ben megfogalmazott antipodalitási fogalmat, illetve az Erdős által [Erd48]-ban és [Erd57]-ben megfogalmazott kérdést is felvázoljuk. A [DG62]-ben bemutatott bizonyítást megmutatjuk, amely megadja a maximális méretű Klee-féle antipodalitású halmaz méretét. Ez a cikk taglalja azt is, mi a összefüggés Erdős felvetése, és Klee felvetése között. Ezen felül kimondjuk a jelenleg ismert legjobb alsó becsléseket is ugyanezen halmazok méretéről.

Ezek után pedig egy még lektorálatlan Naszódi Márton, Szilágyi Zsombor és Weiner Mihály kézirat alapján kiterjesztjük a Klee-féle antipodalitási fogalmat.

3.1. Klee- és Erdős-féle antipodalitás

Erdős kérdése a [Erd48] a következő:

> Legyen adott 8 pontunk a háromdimenziós euklideszi térben. Mutassuk meg, hogy mindig választható közülük három úgy, hogy az általuk bezárt szög nem hegyes.

Ezt később [Erd57]-ben átfogalmazta, tovább gondolja:

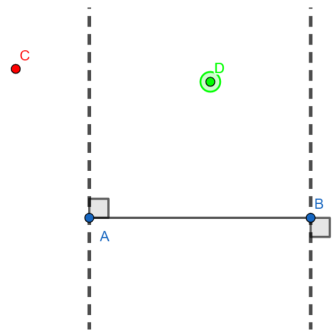
1. Legyen $\mathcal{S}$ egy $2^k + 1$ elemű halmaz a k-dimenziós euklideszi térben. Ekkor létezik három olyan pont, amely tompa szögű háromszöget alkot.

   Illetve felveti a következőt kérdést is:

2. Létezik-e olyan hatpontú halmaz a 3-dimenziós euklideszi térben, amelynek bármely ponthármasa szigorúan hegyes szögű háromszöget határoz meg?

Az 1 kérdésben lévő állítást $k = 2, 3$ esetén belátta, az általános esetet Danzer és Grünbaum igazolta a [DG62]-ben. Ahhoz, hogy a bizonyítást megértsük kimondunk két definíciót, hogy konkretizáljuk a problémát.

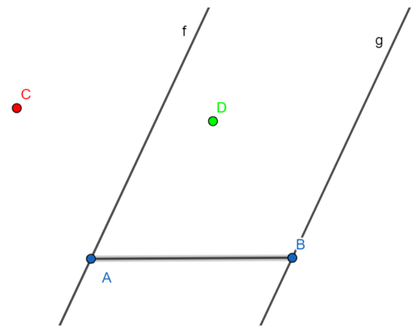
3.1.1. Definíció. *(Erdős-féle antipodális ponthalmaz) Legyen $\mathcal{S}$ egy ponthalmaz a d-dimenziós euklideszi téren. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$* ***Erdős-féle antipodális****, ha minden $\mathcal{S}$ pontjai által meghatározott háromszög hegyes- vagy derékszögű. $\mathcal{S}$* ***Erdős-féle szigorúan antipodális****, ha Erdős-féle antipodális, de nem engedjük meg a derékszögű háromszögeket.*



2. ábra. Ezen az ábrán látható egy példa, hogy A és B pontokhoz képest hol helyezkedhetnek el további pontjai az Erdős-féle antipodális ponthalmaznak a síkon. C nem megengedett, D viszont az.

Ehhez hasonló nevet kapott a [Kle60]-ben Klee által megfogalmazott definíció:

3.1.2. Definíció. *(Klee-féle antipodális ponthalmaz) Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ konvex ponthalmaznak két pontja q_1 és q_2* ***antipodális helyzetben*** *van, ha létezik L_1 és L_2 egymástól különböző $\mathcal{S}$-et támasztó hipersík, hogy $q_1 \in L_1$ és $q_2 \in L_2$, $L_1||L_2$, és minden másik $\mathcal{S}$-beli pont az L_1 és L_2 által határolt zárt térrészben helyezkedik el. A két pont* ***szigorúan antipodális helyzetben*** *van, ha antipodális helyzetben vannak, és a többi pont az L_1 és L_2 által határolt nyílt térrészben helyezkedik el. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ konvex ponthalmaz (**szigorúan**) **antipodális**, ha bármely két pontja (szigorúan) antipodális helyzetben van.*



3. ábra. Ezen az ábrán látható egy példa, hogy A és B pontokhoz képest hol helyezkedhetnek el további pontjai a Klee-féle antipodális ponthalmaznak a síkon. C nem megengedett, D viszont az.

Az összefüggést a következő állítás adja meg:

3.1.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d$ egy Erdős-féle antipodális ponthalmaz. Ekkor*

$\mathcal{S}$ Klee-féle antipodális is.

Bizonyítás. Legyen $q_1, q_2 \in \mathcal{S}$ két tetszőleges elem. Ekkor vegyük azt az L_1 és L_2 hipersíkot, melyre a q_1q_2 szakasz merőleges, és $q_1 \in L_1$ illetve $q_2 \in L_2$. $\mathcal{S}$ antipodalitásából következik, hogy $\mathcal{S}$ további elemei az L_1 és L_2 között zárt térrészben helyezkednek el, hisz tetszőleges ezen térrészen kívüli pont tompa szögű háromszöget alkot q_1, q_2-vel. □

Egy egyszerű példa arra, hogy nem minden Klee-féle antipodális halmaz erdős féle antipodális a nem téglalap paralelepipedonok 3-dimenzióban. Ez is mutatja, hogy a maximális elemszámú Klee-féle antipodális halmaz mérete legalább akkora lesz, mint a maximális elemszámú Erdős-féle antipodális halmaz mérete. Illetve ugyan ilyen irányú következmény igaz a szigorúan antipodális halmazokra nézve is.

A következőekben antipodális halmaz alatt a Klee-féle definíciónak megfelelő halmazt fogunk érteni.

3.1.1. Tétel (Danzer-Grünbaum tétel)**.** *$\mathbb{R}^d$-ben egy antipodális halmaz maximális elemszáma 2^d.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^d$ antipodális halmaz. Legyen $P = conv\,(x_1, \ldots, x_k)$. Legyen továbbá P_i a P-nek az x_i középpontú $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyített képe illetve legyen ugyanígy P_j az x_j középpontú ugyanilyen arányú kicsnyített képe P-nek. Ekkor nem létezik közös belső pontja P_i-nek és P_j-nek, mert az antipodalitás miatt éppen egybeesnek a kicsnyített hipersíkok.

1) $int(P_i) \cap int(P_j) = \emptyset$,

2) $P_i \subseteq P$ minden i-re.

2) valóban igaz, mert P konvex, így tartalmazza saját kicsinyítéseit. 1) és 2) együtt igazzá teszik a következő egyenlőtlenséget:

$$vol\,(P) \geq \sum_{i=1}^{k} vol\,(P_i)$$

Azért áll továbbá fenn az előbbi egyenlőtlenség a térfogatok között, mert a P_i-k páronként csak egy pontban metszik egymást. Felhasználjuk, hogy a "jobb oldal" $= k \cdot \frac{1}{2^d} \cdot vol\,(P)$. Átszorzás után pedig megkapjuk a bizonyítandó állítást: $k \leq 2^d$. □

Megjegyzendő, hogy egyenlőség akkor és csak akkor állhat fent, ha az antipodális halmaz a d-dimenziós parallelotóp csúcsainak halmaza.

A szigorúan antipodalis halmazokról Grünbaum a [Grü63] cikkében belátta, hogy egy 3-dimenziós maximális elemszámú ilyen halmaz mérete 5, illetve még korábban a [DG62] cikkben konstrukciót mutat arra, hogy a maximális méretű szigorúan antipodális halmaz legalább $2d-1$ elemből áll.

A kontrukció az Erdős-féle definíciónak tesz eleget, de így a Klee-féle halmazokra is alkalmas becslést ad.

Legyen $\{e_i\}_{i=1}^d$ a standard bázisa d-dimenziós euklideszi térnek. A $2d-1$ pontú halmaz pedig a következő: $\{A, B_2, \ldots, B_d, C_2, \ldots, C_d\}$, ahol $A = e_1$, $B_k = \alpha_k e_1 + e_k$, $C_k = -\alpha_k e_1 - e_k$, $k = 2, \ldots, d$, és α_k-ra teljesül, hogy $0 < \alpha_k < 1$ és az α-ák különböznek egymástól.

Később a $2d-1$-es eredményt javítva Erdős és Füredi a [EF83]-ban adta a következő tételt és bizonyítást, amit most megmutatunk.

3.1.2. Tétel. *Létezik olyan $\mathcal{P}$ ponthalmaz a d-dimenziós euklideszi téren, amelynek tetszőleges ponthármasa által alkotott háromszög hegyes szögű, és* $|\mathcal{P}| \geq (1.15)^d$.

Bizonyítás. A $\mathcal{P}$ halmaz elemeit a d-dimenziós kocka csúcsai közül fogjuk kiválasztani. Szokásosan, a d-dimenziós $0-1$ vektorok megfeleltethetők a d elemű X halmaz részhalmazainak. Ha a $a \in \{0,1\}^d$ vektor, akkor legyen $A = A(a) = \{i : a_i = 1\}$, $X := \{1, \ldots, d\}$.

3.1.1. Lemma. *Az $a, b, c \in \{0,1\}^d$ vektorok egy hegyes szöget zárnak be a c csúcsban akkor és csak akkor, ha*

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B, \tag{1}$$

ahol az $A, B, C \subset X$ azonosítható a, b, c-vel.

(Ez a lemma egy triviális következménye a Pitagorasz tételnek.) Mivel a ponthármasok a kocka csúcsai közül nem alkotnak $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb szöget, ezért a keresett $\mathcal{P}$ halmaz megtalálásához a következők szükségesek: Találnunk kell olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert X felett három olyan különböző tag nélkül, amely kielégíti (1)-t és amely halmaznak az elemszáma nagyobb mint $(1.15)^d$. Legyen $h(d)$ a legnagyobb megfelelő $\mathcal{F}$ halmaz számossága, azaz $h(d) := \{max|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset 2^X, \forall A \neq B \neq C \in \mathcal{F}, A \cap B \not\subseteq C \vee C \not\subseteq A \cup B\}$.

3.1.2. Lemma. $h(d) > (\frac{2}{\sqrt{3}})^{d-1}$

Bizonyítás. Válasszunk ki függetlenül a d-dimenziós $0-1$ koordinátákból álló $a_1, \ldots, a_{2m}$ vektorokat a következő módon: $P(a_{ij}=0)=\frac{1}{2}$ és $P(a_{ij}=1)=\frac{1}{2}$ valószínűséggel $1 \leq i \leq 2m$, $1 \leq j \leq d$ és $m = \left\lfloor \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{d-1} \right\rfloor$. Az így kiválasztott vektorok között "kis eséllyel" előfordulhatnak páran többször is.

Ekkor annak a valószínűsége, hogy a, b, c pontok (1)-nek megfelelőek:

$$P(a, b, c, \text{pontok kielégítik(1)tartalmazási sort}) = (\tfrac{3}{4})^d \tag{2}$$

Valóban, (1) azt jelenti, hogy minden $1 \leq i \leq d$ esetén sem $a_i = b_i = 1$, $c_i = 0$, sem $a_i = b_i = 0$, $c_i = 1$ nem áll fenn. A koordináták függetlensége miatt lesz igaz (2). Emiatt a várhatóérték:

$E(a, b, c$ hármasok száma, melyek teljesítik(1)-t$) = 2m(2m-1)(2m-2)\left(\frac{3}{4}\right)^d < m.$

Az összes olyan 3-masból amely nem elégíti ki a (1)-et hagyjunk el egy pontot. A pontok kihagyása után megmaradó vektorok már mind különbözőek lesznek, sőt a várható száma azoknak, amelyek derékszöget alkotnak, nagyobb mint $2m - m = m$, így erre a vektorhalmazra vonatkoztatott esetben a feltételek már teljesülnek. □

Végül pedig mivel a maximális antipodális ponthalmaz mérete legalább $max\{2d-1, h(d)\}$, amiből a 3.1.2. tétel igazsága már következik. □

Ezt az eredményt később 2009-ben tovább javította az [ABZ09] cikkben Ackerman és Ben-Zwi egy további $\sqrt{d}$-s szorzóval. Illetve a ma ismert legjobb eredmény a [GH19] cikkben Gerencsértől és Harangitól származik, akik nem véletlen módszert alkalmazva adtak konstrukciót egy $2^{d-1}+1$ elemszámú antipodális ponthalmazra, amely a maximális méretét az ilyen halmazoknak így alulról korlátozza. Tehát a mai állás szerint, ha $\mathcal{S}$ egy maximális méretű antipodális ponthalmaz a d-dimenziós euklideszi téren, akkor $2^{d-1}+1 \leq |\mathcal{S}| \leq 2^d$.

3.2. k-rangú antipodalitás

A következő definíció egy természetes általánosítása a 3.1.2. definíciónak.

3.2.1. Definíció. *Egy $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz esetén a $q_1, \ldots, q_{k+1} \in \mathcal{S}$ pontokról azt mondjuk, hogy együttesen antipodálisak $\mathcal{S}$-re nézve, ha létezik olyan affin vetítés $\mathcal{S}$-ből a k-dimenziós szimplexre, ami szürjektíven leképezi* *a $q_1, \ldots, q_{k+1}$ pontokat a k-dimenziós szimplex $k+1$ darab csúcsába. Egy $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$* ***ponthalmaz k-rangúan antipodális****, ha bármely $k+1$ pontja együttesen antipodális $\mathcal{X}$-re nézve.*

Egy k-rangúan antipodális ponthalmaznak tetszőleges $k+1$ eleme általános helyszetű kell hogy legyen.

Megjegyezzük, az 1-rangúan antipodális halmazok teljes mértékben megegyeznek a Klee-féle antipodális halmazoknak.

3.2.2. Definíció. *Egy $P \subseteq \mathbb{R}^d$* ***politópot k-rangúan antipodálisnak*** *nevezünk, ha $vert(P)$ k-rangúan antipodális ponthalmaz.*

A maximális méretű d-dimenziós k-rangúan antipodális halmaz elemszámát $A(d,k)$-val jelöljük.

Fontos megjegyeznünk, hogy az így definiált k-rangúan antipodális halmaz merőben eltér az Erdős által a [EF83]-ban definált k-antipodális halmaz definíciójától, amit a későbbiekben nem fogunk használni és le sem írunk.

4. k-rangúan antipodalis halmazok néhány alaptulajdonsága

4.0.1. Lemma. *(Monotonitási lemma) Ha $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ k-rangúan antipodális halmaz, akkor $k - i$-rangúan is az, ahol* $0 < k < d$ *egész és* $i = 1, \ldots, k-1$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{X}$ egy k-rangúan antipodális halmazt, és legyen adott ℓ egész, amire teljesül, hogy $0 < \ell < k$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{X}$ ℓ-rangúan is antipodális.

Legyenek $q_1, \ldots, g_{\ell+1} \in \mathcal{X}$ pontok. Szükségünk van arra, hogy találjunk olyan vetítést, mely $\mathcal{X}$ összes elemét beleképzi a belőlük képzett ℓ-dimenziós szimplexbe.

Legyen $q_{\ell+2}, \ldots, q_{k+1} \in \mathcal{X}$ különböző pontok $q_1, \ldots, g_{\ell+1}$-től. Vegyünk egy Π_1 vetítést, a $q_1, \ldots, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots, q_k, q_{k+1}$ csúcs $(k+1)$-esre, amely $\mathcal{X}$ további pontjait a $conv\,(q_1, \ldots, q_{k+1})$ szimplexbe képzi. Ilyen vetítés létezik, mert a halmazun k-rangúan antipodális volt.

Legyen Π_2 az a vetítés, amely a $conv\,(q_1, \ldots, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots, q_k, q_{k+1})$ k-dimenziós szimplex csúcsait a $conv\,(q_1, \ldots, q_{\ell+1})$ lapra vetíti. Ilyen Π_2 vetítés létezik a 2.3.3. állítás miatt.

Ekkor $(\Pi_2 \circ \Pi_1)(\mathcal{X})$ az $\mathcal{X}$ pontokat beleképzi a $conv\,(q_1, \ldots, q_{\ell+1})$ ℓ-dimenziós szimplexbe, ami mutatja, hogy $\mathcal{X}$ ℓ-rangúan is antipodális. □

4.0.2. Lemma. *(Megszorítási lemma) Legyen $\mathcal{X}$ egy k-rangúan antipodális ponthalmaz az $\mathbb{R}^d$ térben. Ha $A \subset \mathcal{X}$ és $|A| \geq k+1$, akkor A is k-rangúan antipodális ponthalmaz lesz.*

Bizonyítás. Legyen $S \subset \mathcal{X}$ tetszőleges és $|S| = k+1$. Mivel $\mathcal{X}$ egy k-rangúan antipodális ponthalmaz, ezért létezik S-hez olyan $\Pi : \mathbb{R}^d \to aff\,(S)$ projekció, ami minden $\mathcal{X}$-beli pontot az S pontjainak konvex burkába képez. Ez azt jelenti, hogy A tetszőleges csúcs $(k+1)$-eséhez is létezik ilyen projekció. Tehát ha megszorítjuk a ponthalmazt A elemeire, és a teret $aff\,(A)$-ra, akkor ha a Π projekciót is megszorítjuk $aff\,(A)$-ra, akkor megkapjuk a nekünk megfelelő leképezéseket, amelyek megmutatják A-ról, hogy k-rangúan antipodális. □

4.0.3. Lemma. *(Kiszorítási lemma) Legyen $\mathcal{X}$ egy k-rangúan antipodális ponthalmaz az $\mathbb{R}^d$ térben. Legyen $A \subset \mathcal{X}$ és $|A| = k+1$. Ekkor nem létezik $q \in (\mathcal{X} \setminus A)$ pont, amire igaz lenne, hogy $q \in aff\,(A)$.*

Bizonyítás. Legyen $A = \{p_1, \ldots, p_{k+1}\}$ pontokból álló részhalmaza $\mathcal{X}$-nek. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $q \in (\mathcal{X} \backslash A)$, amire igaz, hogy $q \in aff\,(A)$.

Három eset lehetséges:

1. $q \in ext\,conv\,(A)$,
2. vagy $q \in int\,conv\,(A)$,
3. vagy $q \in bd\,conv\,(A)$.

Az első esetben legyen $\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow aff\,(A)$ az a vetítés, mely $\mathcal{X}$ elemeit beleképzi A konvex burkába. az ellentmondás onnan származik, hogy minden ilyen vetítés megszorítva az $aff\,(A)$-ra az identitás, így $\Pi(q) = q$, ami viszont nem volt benne A konvex burkában.

A második esetet visszavezetjük az elsőre a következő képpen: Legyen $A' = \{p_1, \ldots, p_k, q\}$ halmaz, azaz a p_{k+1} pontot „lecseréltük" A-ban q-ra. Ezzel elérve, hogy $p_{k+1} \in ext\,conv\,(A')$. Legyen A' az új A és p_{k+1} az új q. Ezzel kész a visszavezetés.

A harmadik eset egy kicsit összetettebb. Legyen $A_k := A$, minthogy $dim(aff\,(A)) = k$. Mivel $q \in bd\,conv\,(A)$, ezért létezik $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{l+1}}\} \subset A$, hogy $q \in aff\,\left(\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{l+1}}\}\right)$, azaz q benne van egy A $l+1$ pontja által generált affin altérben, ahol természetesen $l < k$. Legyen $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{l+1}}\} = A_l$, minhogy az affin burkuk ℓ-dimenziós. A 4.0.1.-es monotonitási lemma miatt $\mathcal{X}$ ℓ-rangúan is antipodális, így az eredeti problémát visszavezettük egy kisebb dimenziós esetre, tehát újfent a fenti 3 eset állhat fent q és $conv\,(A_l)$ elhelyezkedését illetően.

Észre kell vegyük, hogy ezt a lépést, azaz hogy a problémát átírjuk A_k halmazról A_l-re, nem lehet a végtelen sokszor megtenni, mert véges sok pontunk volt kezdetben, és a dimenziószám minden egyes átíráskor csökken. Tehát létezik egy legkisebb dimenziós eset, azaz A_r halmaz ($r > 0$), amelyre már csak az első két eset valamelyike állhat fent, és amelyből megkapjuk az ellentmondást, vagy egészen visszavezethető a probléma az A_1 halmazig.

Az A_1-es esetben egy egyenesen helyezkedik el p_1, p_2 és q pont. A harmadik eset itt azt jelentené, hogy vagy $q = p_1$, vagy hogy $q = p_2$, ami ellentmond annak, hogy $q \notin A$. Emiatt csak az első két eset állhat fent q elhelyezkedésére, így a bizonyítást befejeztük, ellentmondásra jutottunk. □

A 4.0.3. lemma onnan kapta a nevét, hogy egy k-rangúan antipodális halmaznál minden csúcs ℓ-esre, ahol $k \geq \ell > 0$, igaz hogy a csúcs ℓ-es affin burkában nincsen már több halmazbeli csúcs, azok kiszorítják a többi elemet az affin altérből.

A következő tétel a lektorálatlan Naszódi Márton, Szilágyi Zsombor és Weiner Mihály [NSW23] kéziratból származik, melynek bizonyítását most nem írjuk le, de becslését felhasználjuk.

4.0.1. Tétel. *Bármely $k \leq d$-re:* $A(d,k) \leq k\left(\frac{k+1}{k}\right)^d$.

5. Saját eredmények

5.1. A 3-dimenziós eset

5.1.1. Tétel. *$A(3,2) = 4$.*

A továbbiakban ezt bizonyítjuk.

A 4.0.1. tétel becslése jelen esetben $A(3,2) \leq 6,75$-ot ad, ami azt jelenti, hogy a triviális 4 pontú halmazon kívül az 5 és 6 pontú eseteket kell csak megvizsgálnunk.

Megmutatjuk, hogy $A(3,2) < 5$, amiből következik hogy csakis 4 lehet.

Indirekt tegyük fel, hogy van $\mathbb{R}^3$-ban egy 5-pontú 2-rangúan antipodális halmaz, legyenek ennek csúcsai $q_1, \ldots, q_5$.

Ekkor a 4.0.3. kiszorítási lemma miatt semelyik négy közülük nincs egy síkban.

Mielőtt a következő lemmát kimondjuk, egy elnevezést vezetünk be. Ha egy poliéder két csúcsa által meghatározott szakasz nem éle a poliédernek azt mondjuk, hogy ez a szakasz a poliéder egy **nemél**e.

5.1.1. Lemma. *Ha létezik $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$, $i \neq j$, melyekre q_iq_j neméle a $P = conv\,(q_1, \ldots, q_5)$ poliéderünknek, akkor $q_1, \ldots, q_5$ nem 2-rangúan antipodális halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy q_1q_2 nem éle a poliédernek. Belátjuk, hogy ekkor tetszőleges harmadik pontot választva (q_3), hárman együtt olyan háromszöget alkotnak, melyhez nem létezik olyan vetítés, amely a maradék pontokat (q_4-et és q_5-öt) a $conv\,(q_1, q_2, q_3)$ háromszög belsejébe képzi. Itt természetesen valódi belsejéről beszélünk a háromszögnek, mert ha a határát metszené a szakat, akkor négy pont lenne egy síkban, de ezt a lehetőséget már korábban kizártuk.

Belátjuk, hogy pontosan akkor van megfelelő vetítés, ha a q_1, q_2, q_3 által kifeszített sík (Σ_0) metszéspontja a q_4q_5 egyenessel a $conv\,(q_1, q_2, q_3)$ háromszögbe esik, azaz $q_4q_5 \cap \Sigma_0 = p \in conv\,(q_1, q_2, q_3)$.

Valóban, ha $p \notin conv\,(q_1, q_2, q_3)$, akkor vegyük észre a következőt:

Legyen a $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \Sigma_0$ vetítésben $\Pi(q_4) = q_4'$ és $\Pi(q_5) = q_5'$. Ekkor mivel Π egy vetítés, ezért $q_4q_4' || q_5q_5'$-vel és a két egyenes egyértelműen meghatároz egy Σ_1 síkot. Tudjuk, hogy q_4', q_5' és p egy egyenesen helyezkednek el, $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$-en. De ha $q_4' \in conv\,(q_1, q_2, q_3)$, akkor q_5' biztosan nincs benne, mert p a

$\overline{q_4'q_5'}$ szakasz felező pontja, és már p sem volt $conv\,(q_1, q_2, q_3)$ háromszögben. Ugyanez az érvelés alkalmazható a $q_5' \in conv\,(q_1, q_2, q_3)$ esetre.

Ha $q_4q_5 \cap \Sigma_0 = p \in conv\,(q_1, q_2, q_3)$, akkor a nekünk megfelelő vetítés: $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \Sigma_0$, ahol $\Pi(q_4) = \Pi(q_5) = p$.

Tehát szükséges és elégséges feltétele egy megfelelő vetítés létezésének, hogy p a $conv\,(q_1q_2q_3)$ háromszögben legyen. De ez nem teljesül a következők miatt:

Σ_0 két oldalán helyezkedik el q_4 és q_5, mert ha azonos oldalán lennének, akkor P-nek az egyik lapja lenne a $conv\,(q_1q_2q_3)$ háromszög, ami ellent mond annak, hogy q_1q_2 nem él. A p nem eshet a $conv\,(q_1q_2q_3)$ háromszögbe, mert ha oda esne, akkor q_4q_5 megszűnne él lenni, és ezzel együtt q_1q_2 pedig a konvex test határára kerülne, ami ellentmond a kezdeti feltevésünknek. Tehát p valóban nincs a háromszögben, azaz valóban nincs megfelelő vetítés, ha létezik neméle P-nek. □

5.1.2. Lemma. *Ha egy ötcsúcsú* 3*-dimenziós konvex poliéder minden lapja háromszög, akkor létezik neméle.*

Bizonyítás. Vegyünk fel egy tetraédert $\mathbb{R}^3$-ban, azaz a 3-dimenziós szimplexet. Legyenek a csúcsai a q_1, q_2, q_3, q_4 pontok. A tetraéder lapsíkjai a teret 3 különböző típusú részre osztják: csúcs feletti, él feletti és lap feletti részek, az alábbi módon:

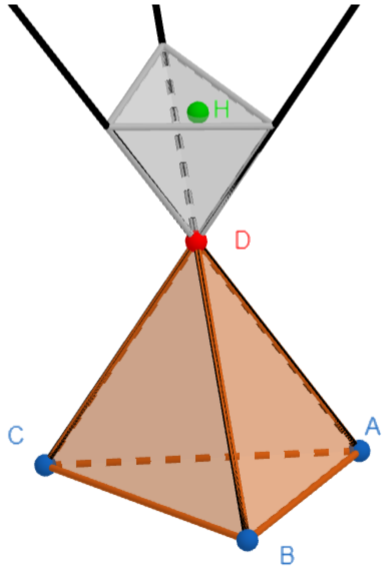
$\mathbb{R}^3$ teret 3-dimenziós szimplex lapjai felbontják. Számozzuk meg 3-dimenziós szimplex lapsíkjait 1-től 4-ig. $(+, +, +, +)$ jelölés i-edik koordinátájában szereplő " $+$ " azon félteret jelöli, melyet a 3-dimenziós szimplex i-edik lapsíkja határol és tartalmazza 3-dimenziós szimplexet. " $-$ " jel az i-edik koordinátában pedig azt a félteret jelöli, amelyet 3-dimenziós szimplex i-edik lapsíkja határol és nem tartalmazza 3-dimenziós szimplexet ($i = 1, 2, 3, 4$). Világos, hogy a térnek nem létezik $(-, -, -, -)$, azaz csupa minusszal jelölt része, de minden más "$+, -$" sorozatnak megfeleltethető egy térrész.

Csúcs feletti térrésznek $\mathbb{R}^3$ azon részét nevezzük, melynek koordinátái között egy darab " $+$ " van.

Él feletti térrésznek $\mathbb{R}^3$ azon részét nevezzük, melynek koordinátái között két darab " $+$ " van.

Lap feletti $\mathbb{R}^3$ azon részét nevezzük, melynek koordinátái között három darab " $+$ " van.

Az elnevezés onnan ered, hogy az adott térrésznek és 3-dimenziós szimplexnek a közös metszete éppen egy csúcs, él vagy oldal.



4. ábra. A zöld H pont a piros D-csúcs feletti térrészben helyezkedik el

Most pedig visszatérünk a bizonyításhoz, és az ott használt jelölésekhez. Ha q_5 csúcs feletti részbe esik, akkor az "ötcsúcsú" konvex poliéder belsejébe kerül azon csúcs, amely felett van. Így ekkor a poliéder nem ötcsúcsú, csak négy.

Ha q_5 él feletti részbe esik, akkor az ötcsúcsú konvex poliéderben azon él, amely felett q_5 van egy neméł. Így megintcsak találunk nemélt.

Ha q_5 lap felé esik, akkor pedig q_5 és azon csúcs fog nemélt alkotni, mely nem volt csúcsa a lapnak.

Mivel más eset nincs, ezért a lemma és a tétel bizonyítását is befejeztük. □

Az 5.1.1. és az 5.1.2. Lemma együtt kiadják az 5.1.1. Tétel bizonyítását.

5.2. d-dimenziós eset

5.2.1. Tétel. $A(d, d-1) = d + 1$.

A következőkben ezt a tételt bizonyítjuk.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^d$-ben létezik $d+2$ pontú $(d-1)$-rangúan antipodális halmaz, és legyenek ezek a pontok $q_1, \ldots, q_{d+1}, q_{d+2}$. Jelöljük $conv\,(q_1, \ldots, q_{d+1}, q_{d+2})$-t K-val.

5.2.1. Lemma. *Minden i-re, ahol $1 \leq i \leq d+2$, q_i csúcsa a politópnak.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik j, amire q_j nem csúcs, azaz $q_j \in conv\,(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, q_{d+2})$.

Ha $q_j \in conv\,(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l})$, ahol $1 \leq \ell < d+1$, akkor az ellentmondás onnan jön, hogy a 4.0.1. monotonitási lemma miatt $(\ell - 1)$-rangúan is antipodális a halmaz, és a 4.0.3. kiszorítási lemma miatt az $aff\,(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l})$-ben nem lehet további pontja a halmaznak.

Ha pedig $q_j \in conv\,(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, q_{d+2})$ úgy teljesül, hogy q_j-nek a többi csúcsból konvex kombinációként való előállásakor egyetlen együttható sem 0, akkor q_j az egyedüli olyan pontja a $(d-1)$-rangúan antipodális halmaznak, amely nem csúcsa a pontok konvex burkának, mert különben a halmaz nem feszítené a d-dimenziós teret. A $d+1$ csúcsú a d-dimenziós teret kifeszítő politóp a d-dimenziós szimplex. Válasszunk q_j mellé tetszőlegesen még $d-1$ pontot a halmazunkból, például: $q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_d$ pontokat.

Mivel $conv\,(q_1, \ldots, q_d)$ nem lapja a szimplexnek, hisz

$$aff\,(q_1, \ldots, q_d) \cap int(conv\,(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, q_{d+2})) \neq \emptyset,$$

így az $aff\,(q_1, \ldots, q_d)$ hipersík által határolt két különböző nyílt féltérben helyezkedik el q_{d+1} és q_{d+2}.

Három eset lehetséges aszerint, hogy hol helyezkedik el $B = aff\,(q_1, \ldots, q_d) \cap q_{d+1}q_{d+2}$ halmaz, ami jelen esetben egyetlen pont:

1. eset: ha $B \in relint\,conv\,(q_1, \ldots, q_d)$. Ekkor az ellentmondás abból származik, hogy $conv\,(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, q_{d+2})$ a d-dimenziós szimplex, mert ekkor bár a $q_{d+1}q_{d+2}$ éle kellene hogy legyen, $int\,conv\,(q_1, \ldots, q_d) \cap q_{d+1}q_{d+2} \neq \emptyset$.

2. eset: ha $B \in relbd\,conv\,(q_1, \ldots, q_d)$. Ekkor $B \in conv\,(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l})$, azaz benne van $conv\,(q_1, \ldots, q_d)$ $(\ell - 1)$-dimenziós lapjában, ahol $0 < \ell < d-1$. A 4.0.1. monotonitási lemma miatt a ponthalmazunk ℓ-rangúan is antipodális. Viszont ekkor $aff\,(q_{i_1}, \ldots, q_{i_l}, q_{d+1})$ tartalmazza q_{d+2}-t, ami ellent mond a 4.0.3. kiszorítási lemmának.

3. eset: ha $B \notin conv\,(q_1, \ldots, q_d)$. Legyen $\Pi : \mathbb{R}^d \to aff\,(q_1, \ldots, q_d)$ egy vetítés, és legyen $\Pi(q_{d+1}) = q'_{d+1}$ illetve $\Pi(q_{d+2}) = q'_{d+2}$. Ekkor $q_{d+1}q'_{d+1} || q_{d+2}q'_{d+2}$, így a két egyenes egyértelműen meghatároz egy Σ 2-dimenziós síkot. $\Sigma \cap aff\,(q_1, \ldots, q_d) = e$ egyenes. Az e-t a B pont két félegyenesre bontja, amik közül az egyiknek egészen biztosan nincs közös metszete $conv\,(q_1, \ldots, q_d)$-val annak konvex mivolta miatt. B a felező pontja a $q'_{d+1}q'_{d+2}$ szakasznak, így minden esetben a képpontok különböző félegyeneseken lesznek. Az ellentmondás abból fakad, hogy a halmazunkról kiderül,

hogy nem lesz $(d-1)$-rangúan antipodális, hisz nem létezik olyan Π vetítés, amely $conv\,(q_1,\dots,q_d)$-ba képezné q_{d+1} és q_{d+2} pontot. $\square$

5.2.2. Lemma. *Ha egy $P \subset \mathbb{R}^d$ konvex politóp minden csúcs d-ese a P egy $(d-1)$-dimenziós lapja, akkor P a d-dimenziós szimplex.*

Bizonyítás. Ha P a d-dimenziós szimplex és csúcsai $\{q_1,\dots,q_{d+1}\}$, akkor valóban igaz, hogy minden csúcs d-ese egy $(d-1)$-dimenziós lapja.

Másodikként megmutatjuk, hogy ha nem létezik $d+1<r$ csúcsú P politóp, melyre igaz lenne, hogy minden csúcs d-ese P egy $(d-1)$-dimenziós lapja, akkor $r+1$ csúcsú $P^{'}$ politóp sincs.

Indirekt tegyük fel ennek az ellentétét. Ekkor az $r+1$ csúcsú $P^{'}$-nek minden csúcs d-ese $(d-1)$-dimenziós lap. Hagyjuk el az egyik csúcsot. Az így megmaradó r csúcs konvex burka egy olyan $P^{''}$ politóp, melynek szintén minden csúcs d-ese egy $(d-1)$-dimenziós lapja lesz, mert a csúcs elhagyás után nem keletkezhetett olyan új csúcs d-es, mely nem $(d-1)$-dimenziós lapja $P^{''}$-nek és nem volt $P^{'}$-nek a lapja. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Ezért tehát elég lesz megmutatnunk, hogy nem létezik $d+2$ csúcsú P politóp, amely $(d-1)$-rangúan antipodális. Tehát $d+2$ csúcsú P esetén van olyan csúcs d-ese P-nek, amely nem a határán helyezkedik el, azaz nem lehet lapja.

A $conv\,(q_1,\dots,q_{d+1})$ $(d-1)$-dimenziós laphipersíkjai felbontják $\mathbb{R}^d$-t. Számozzuk meg a $(d-1)$-dimenziós laphipersíkokat 1-től $d+1$-ig. A $(+,+,\dots,+)$ jelölés i-edik koordinátájában lévő " $+$ " azon félteret jelöli, melyet az i-edik $(d-1)$-dimenziós lap határol és tartalmazza $conv\,(q_1,\dots,q_{d+1})$-t, illetve az i-edik koordinátában " $-$ "-szal jelöljük azt a félteret, melyet az i-edik $(d-1)$-dimenziós lap határol, és nem tartalmazza $conv\,(q_1,\dots,q_{d+1})$-t. Maga a $(+,+,-,-,+,\dots,-)$ jelölés pedig koordinátáiban egyértelműen leírt félterek metszetét jelenti. Könnyen látható az is, hogy $\mathbb{R}^d$-ben nem létezik olyan térrész melyet a $(-,-,\dots,-)$ (csupa " $-$ ") ír le.

Azt mondjuk, hogy q_{d+2} egy *ℓ-dimenziós lap felett van*, ha azon térrészben helyezkedik el, melynek a fenti felírásban vett koordinátái között $\ell+1$ darab " $+$ " van. Az elnevezés onnan származi, hogy az adott térrésznek és $conv\,(q_1,\dots,q_{d+1})$-nek a metszete egy egyértelmű ℓ-dimenziós oldal lesz.

Be kell látnunk, hogy bármilyen típusú lap felett van q_{d+2}, létezik olyan $\{q_{i_1},\dots,q_{i_d}\}$ csúcs d-es, amely nem lapját határozza meg P-nek, azaz $int(P)\cap conv\,(q_{i_1},\dots,q_{i_d})\neq\emptyset$.

Tegyük fel, hogy q_{d+2} az ℓ-dimenziós L lap felett van, ahol $0 \leq \ell \leq d-1$. Válasszuk ki $conv\,(q_1, \ldots, q_{d+1})$ azon csúcsait, melyek nincsenek rajta az L lapon, legyenek ezek: $q_{\ell+2}, \ldots, q_{d+1}$ és vegyük hozzájuk q_{d+2}-t illetve tetszőleges $\ell - 1$ darab csúcsát L-nek, ezek legyenek $q_1, \ldots, q_\ell$. Az így kapott $D = \{q_1, \ldots, q_\ell, q_{\ell+2}, \ldots, q_{d+1}, q_{d+2}\}$ csúcs d-es nem lehet lapja P-nek, mert $int(P) \cap conv\,(D) = int\,conv\,(q_{\ell+2}, \ldots, q_{d+1}, q_{d+2})$, ami nem az üreshalmaz.

$\square$

Visszatérünk az 5.2.1.Tétel bizonyításához. Mivel K nem a d-dimenziós szimplex, így feltehetjük, hogy $conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ nem lapja K-nak.

Ekkor három eset állhat fenn aszerint, hogy $q_1q_2 \cap aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2}) = T$ hány dimenziós.

Ha q_1 és q_2 pontok az $aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ hiprsík azonos oldalán helyezkednek el, akkor $q_1, q_2 \cap aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2}) = \emptyset$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ nem volt lapja K-nak.

Ha $q_1q_2 \cap aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ 1-dimenziós, akkor q_1 és q_2 is benne van a $aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ hiprsíkban, ami ellent mond a 4.0.3. kiszorítási lemmának.

Ha $q_1q_2 \cap aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ 0-dimenziós, azaz $T = \{x\}$, akkor három eset állhat fenn: lehet $x \in relint\,conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$, lehet hogy, $x \in relbd\,conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ és lehet, hogy $x \notin conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$.

Ha $x \notin conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$. Legyen $\Pi : \mathbb{R}^d \to aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$ egy vetítés, és legyen $\Pi(q_1) = q_1'$ illetve $\Pi(q_2) = q_2'$. Ekkor $q_1q_1' || q_2q_2'$, így a két egyenes egyértelműen meghatároz egy Σ 2-dimenziós síkot. $\Sigma \cap aff\,(q_3, \ldots, q_{d+2}) = e$ egyenes. e-t a x pont két félegyenesre bontja, amik közül az egyiknek egészen biztosan nincs közös metszete $conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$-val annak konvex mivolta miatt. x a felező pontja a $q_1'q_2'$ szakasznak, így minden esetben a képpontok különböző félegyeneseken lesznek. Az ellentmondás abból fakad, hogy a halmazunkról kiderül, hogy nem lesz $(d-1)$-rangúan antipodális, hisz nem létezik olyan Π vetítés, amely $conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$-ba képezné q_1 és q_2 pontot.

Ha $x \in relbd\,conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$, akkor x benne van egy ℓ csúcs által alkotott $(\ell - 1)$-dimenziós lapban. Ehhez hozzávéve q_1-et és q_2-őt azt kapjuk, hogy van $\ell + 2$ csúcsunk egy ℓ-dimenziós affin alteret feszítenek, de ez ellent mond a 4.0.3. kiszorítási lemmának.

Ha $x \in relint\,conv\,(q_3, \ldots, q_{d+2})$, akkor nézzük meg a q_1, q_2, q_3 pontok által alkotott háromszöget. Az ellentmondás onnan jön, hogy $aff\,(q_1, q_2, q_3) \cap K \supset$

conv (q_1, q_2, q_3), mert bármely pontja *aff* (q_1, q_2, q_3) síknak ami nincs benne a *conv* (q_1, q_2, q_3)-ban bármely ezen síkra vett vetítésnél helyben marad, így a halmazunk nem 2-rangúan antipodális. Ez ellentmond a 4.0.1. monotonitási lemmának.

Ezzel az 5.2.1. Tétel bizonyítását befejeztük.

5.3. A fő eredmény

A fő eredményünk a 5.3.2.tétel, amelynek közvetlen következménye az 5.1.1. és az 5.2.1. tétel. Ehhez szükségünk lesz a [Grü03] könyvben ismertetett szomszédságiság fogalomra. A szomszédsági politópok jobban ismertek számunkra, mint a k-rangúan antipodális politópok, ígyaz egyik célunk a kettő téma között összefüggést találni, amit meg is teszünk az 5.3.3. tételben.

5.3.1. Definíció. *Legyen k egy pozitív egész. Egy $P \subseteq \mathbb{R}^d$ politópot* ***k-szomszédságinak*** *nevezünk, ha $vert(P)$-nek minden k-elemű A részhalmaza F egy lapját határozza meg P-nek úgy, hogy $F = conv\,(A)$ és $A = vert(F)$.*

A k-szomszédsági politópokról kimondott tételek közül a következőt fogjuk használni.

5.3.1. Tétel. *Ha $P \subseteq \mathbb{R}^d$ egy k-szomszédsági politóp és $k > \lfloor \frac{1}{2}d \rfloor$, akkor P-nek $d+1$ csúcsa van, azaz P a d-dimenziós szimplex.*

Kimondjuk a legjobb általunk adott becslést $A(d, k)$-ra, amelyről már alakja miatt megmondható, hogy nagyban múlik az 5.3.1. tételen.

5.3.2. Tétel. *$A(d, k) = d+1$ minden k-ra, ahol $k > \lfloor \frac{1}{2}d \rfloor$, azaz a ponthalmaz a szimplex.*

Az előző tétel lelke a következő tétel, amely összeköti a k-szomszédsági politópokat a k-rangúan antipodális politópokkal.

5.3.3. Tétel. *(Fő eredmény) Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^d$ egy k-rangúan antipodális politóp. Ekkor P k-szomszédsági is.*

Bizonyítás. Legyen P k-rangúan antipodális és legyen $vert(P) = V$, illetve legyen $A \subset V$ és $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

A célunk, hogy találjunk olyan H hipersíkot melyre $H \cap P = conv\,(A)$ vagy másképp fogalmazva $H \cap V = A$, és H támaszhipersíkja V-nek.

Legyen q tetszőleges nem A-beli eleme V-nek. Ekkor a 4.0.3. kiszorítási lemma miatt nincs olyan további $r \in (V \backslash (A \cup q))$ elem, amely $aff\,(A \cup q)$-ban lenne.

Mivel P k-rangúan antipodális, ezért létezik egy $\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow aff\,(p_1, \dots, p_k, q)$ projekció, amelyre $\Pi(V) \subseteq conv\,(p_1, \dots, p_k, q)$. Ekkor tekintsük $aff\,(A)$ ősképét a Π vetítésnél. Mivel $aff\,(A)$ egy hipersík $aff\,(p_1, \dots, p_k, q)$-ban, ezért $\Pi^{-1}(aff\,(A))$ egy H hipersík $\mathbb{R}^d$-ben, úgy, hogy a következők igazak rá:

1. V elemei csak H-ban illetve a H által meghatározott két nyílt féltér egyikében lehetnek.
2. $A \subseteq (H \cap V)$.

A 2 állítás H konstrukciója miatt lesz igaz, az 1 állítás pedig abból a tényből következik, hogy Π a $conv\,(p_1, \dots, p_k, q)$-ba képzett, hiszen ha a H által ketté osztott tér mindkét felében lettek volna V beli pontok, akkor a konvex burkon kívülre is estek volna Π által vett képek.

A d-dimenzióra vonatkozó indukciót használunk, és adott d-dimenzión belül pedig a k-rangra vonatkozót. Meg kell mutatnunk, hogy az $\mathbb{R}^{dim(P)}$ térben, tetszőleges k-ra, ahol $1 \leq k \leq dim(P)$, teljesül, hogy tetszőleges k elemű részhalmaza $vert(P)$-nek egy valódi lapon van, azaz található olyan H $(dim(P)-1)$-dimenziós támaszhipersíkja $vert(P)$-nek, amelynek $vert(P)$-vel vett metszete a kívánt k elemű ponthalmaz. A H konstrukcióját bemutattuk az előbb, most pedig az indukcióval megmutatjuk, hogy valóban betölti feladatát, és megmutatja az adott csúcs k-asról, hogy azok konvex burka valódi lapja P-nek.

Legyen $dim(P) = 2$. Ekkor a $k = 1$ esetet kell megvizsgálni. Bármilyen ilyen halmazra triviálisan teljesül az 1-szomszédságiság, hiszen minden csúcs valódi 0-dimenziós lap.

Tegyük fel, hogy tetszőleges k-ra $(1 \leq k \leq dim(P) - 1)$ létezik megfelelő L $(dim(P) - 1)$-dimenziós affin altér az $\mathbb{R}^{dim(P)}$-ben, ahol $1 < dim(P) < d$, amire teljesül, hogy $L \cap V$ éppen az adott csúcs k-as szigorúan, feltéve, hogy P egy tetszőleges k-rangúan antipodális politóp.

Legyen P k-rangúan antipodális politóp, $dim(P) = d$. Legyen továbbá adott a bizonyítás elején definiált A halmaz, q pont és H hipersík, ahol H eleget tesz a 1. és a 2. tulajdonságoknak. A 4.0.2. lemma szerint szorítsuk meg a k-rangúan antipodális ponthalmazunkat H-ra, azaz vizsgáljuk a $H \cap V$ k-rangúan antipodális ponthalmaz elemeit. Ha $A = (H \cap V)$, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $dim(H \cap V) = d - 1$. Ha ennél kisebb dimenziós volna, akkor is teljesül, hogy $dim(H \cap V) > (k - 1)$, de az indukciós feltevés ezekben az esetekben is igaz marad.

Tegyük fel, hogy $A \subsetneq (H \cap V)$ így H nem megfelelő hipersík számunkra $\mathbb{R}^d$-

ben. Az indukciós feltevés miatt viszont $(d-1)$-dimenzióban, tehát ahová a H-ra való megszorítás után kerültünk, minden csúcs k-ashoz létezik olyan $(d-2)$-dimenziós hipersík, amely megmutatja az adott csúcs k-asról, hogy valóban szomszédok. Legyen L az a $(d-2)$-dimenziós hipersík, amelyik megmutatja A ponthalmazról, hogy szomszédok. Ekkor tehát teljesül L-re, hogy $H \cap V$ pontjai vagy L-ben vannak, (ezek pontosan A elemei), vagy pedig az L által ketté bontott tér egyik nyílt felében. Ekkor viszont legyen H' olyan $(d-1)$-dimenziós hipersík mely tartalmazza L-et, és H-nak egy kicsi szögű elforgatottja L körül, úgy hogy $(H' \cap V) = A$. És ezzel a bizonyításunkat befejeztük, mert találtunk megfelelő hipersíkot, amely megmutatja, hogy A elemei szomszédosak.

$\square$

Második bizonyítás az 5.3.3. tételre. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan P k-rangú antipodális politóp, amelyik nem k-szomszédsági.

Legyen $A = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset vert(P)$, azaz $|A| = k$. Indirekt tegyük fel, hogy A nem egy lap csúcshalmaza. Ekkor $aff\,(A)$-ban nincs olyan $q \in vert(P)$, amire ne lenne igaz, hogy $q = p_i$ valamilyen $1 \leq i \leq k$-ra, hisz P a 4.0.1. lemma miatt $(k-1)$-rangúan is antipodális, és ezért a 4.0.3. kiszorítási lemma teljesül $aff\,(A)$-ra.

Legyen F a 2.3.1. lemma szerint vett minimális lapja P-nek, amire igaz, hogy $A \subset F$. Az előző bekezdés miatt $dim(F) > k-1$, sőt az is igaz, hogy $conv\,(p_1, \ldots, p_k)$ nem lapja F-nek, mert ha az lenne, akkor P-nek is lapja lenne 2.3.2. állítás 3. része miatt.

Legyen a t pont a $p_1, \ldots, p_k$ pontok tömegközéppontja, így természetesen $t \in relint\,conv\,(p_1, \ldots, p_k)$. Megmutatjuk, hogy $t \in relint(F)$.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $t \notin relint(F)$. Ekkor $t \in relbd(F)$ állhat fent csak. Ekkor van az $aff\,(F)$-ben egy Z támaszhipersíkja F-nek, ami F-et t-ben támasztja. De ha t-ben érinti F-et Z, akkor $p_1, \ldots, p_k$ pontok a Z által határolt egyik zárt féltérben helyezkednek el, mert az egész F is az egyik ilyen féltérben helyezkedik el. Mivel viszont $t \in relint\,conv\,(p_1, \ldots, p_k)$, így $A \subset Z$. Ez ellent mond annak, hogy F minimális volt, mert $F \cap Z$-vel kaptunk egy legalább egy dimenzióval kisebb lapot, amely tartalmazza a $p_1, \ldots, p_k$ pontokat.

Legyen $q \notin A$ az F lapnak egy tetszőleges csúcsa. Tudjuk, hogy $q \notin aff\,(p_1, \ldots, p_k)$, így $conv\,(p_1, \ldots, p_k, q)$ egy k-dimenziós szimplex. Ekkor $aff\,(p_1, \ldots, p_k, q)$ tartalmaz olyan F-beli pontot, amely nincs benne

$conv\,(p_1, \ldots, p_k, q)$-ban. Ilyen pont van például a $\mathcal{B}(t, \varepsilon)$-ban, azaz a t középpontú ε sugarú $dim(F)$-dimenziós nyílt gömbben, legyen $s \in \mathcal{B}(t, \varepsilon)$ egy ilyen pont. Az ellentmondás onnan származik, hogy nem létezik olyan vetítés az $aff\,(p_1, \ldots, p_k, q)$-ra, amely s-et ne hagyná helyben, ami így nem lesz a $conv\,(p_1, \ldots, p_k, q)$-ba képezhető, így az eredeti halmazunk nem k-rangúan antipodális. $\square$

A 5.3.3.tételhez még megjegyzésként hozzáfűzhető, hogy a k-szomszédság, mint következmény éles, azaz ennél jobbat általában nem tudunk k-rangúan antipodális halmazokról elmondani. Példa k-rangúan antipodális halmazra amely nem $(k+1)$-szomszédsági: $k = 1$-re 3-dimenzióban a kocka csúcsai a Klee féle antipodálisnak eleget tesznek, de nem minden csúcsot köt össze él, azaz nem 2-szomszédsági.

A 5.3.3.tétel és a 5.3.1.tétel együtt igazolják a 5.3.2.tételt.

Hivatkozások

[ABZ09] Eyal Ackerman and Oren Ben-Zwi, *On sets of points that determine only acute angles*, European Journal of Combinatorics **30** (2009), no. 4, 908–910.

[DG62] Ludwig Danzer and Branko Grünbaum, *Über zwei probleme bezüglich konvexer körper von p. erdös und von v. l. klee*, Mathematische Zeitschrift **79** (1962), 95–99.

[EF83] P. Erdös and Z. Füredi, *The greatest angle among n points in the d-dimensional euclidean space*, Combinatorial Mathematics (C. Berge, D. Bresson, P. Camion, J.F. Maurras, and F. Sterboul, eds.), North-Holland Mathematics Studies, vol. 75, North-Holland, 1983, pp. 275–283.

[Erd48] Paul Erdős, *Advanced problems and solutions*, The American Mathematical Monthly **55** (1948), no. 7, 431–436.

[Erd57] Paul Erdos, *Some unsolved problems.*, Michigan Mathematical Journal **4** (1957), 291–300.

[GH19] Balázs Gerencsér and Viktor Harangi, *Acute sets of exponentially optimal size*, Discrete & Computational Geometry **62** (2019), no. 4, 775–780.

[Grü63] Branko Grünbaum, *Strictly antipodal sets*, Israel Journal of Mathematics **1** (1963), no. 1, 5–10.

[Grü03] ______, *Neighborly polytopes*, pp. 136–145, Springer New York, New York, NY, 2003.

[Gá14] Moussong Gábor, *Geometria*, ch. 1,2, pp. 31–114, Typotex Kiadó, 2014.

[Kle60] Victor Klee, Unsolved Problems in Intuitive Geometry, 1960.

[NSW23] Márton Naszódi, Zsombor Szilágyi, and Mihály Weiner, *Higher rank antipodality*, 2023.

[Zie95] Günter M. Ziegler, *Faces of polytopes*, pp. 51–76, Springer New York, New York, NY, 1995.