Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Hende Csongor

PRIMITÍV HALMAZOK

BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:
Dr. Gyarmati Katalin, egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném kifejezni köszönetemet konzulensemnek, Dr. Gyarmati Katalin tanárnőnek, aki megismertetett a témával és szakértelmével iránymutatást adott szakdolgozatom elkészítéséhez. Köszönöm, hogy a kérdéseimmel mindig bizalommal fordulhattam Önhöz, és köszönöm a tanácsait, amelyek nagy segítségemre voltak munkám során!

Szeretném megköszönni az Eötvös Loránd Tudományegyetem és a Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium valamennyi oktatójának és pedagógusának, hogy lelkiismeretes munkájukkal segítették utamat és megtanítottak otthonosan mozogni a matematika világában.

Végül, de nem utolsó sorban, köszönettel tartozom édesanyámnak és édesapámnak, akik szeretetükkel és bizalmukkal mindig mellettem állnak.

Absztrakt

Erdős Pál a matematika számos területén maradandót alkotott, de az eredményeit tekintve talán kijelenthetjük, hogy a számelmélet állt a legközelebb hozzá. Szakdolgozatomban egy általa sokat vizsgált területről, a primitív halmazokról írok. Ezek olyan egész számokból álló halmazok, amelyekben nincs olyan elem, amely oszt egy másikat.

Az első fejezetben feladatokon keresztül bevezetem a témát és véges halmazok esetében vizsgálom azt. A második fejezetben mutatok néhány példát végtelen primitív halmazokra, bemutatom az aszimptotikus sűrűség fogalmát és ismertetem a primitív halmazok aszimptotikus sűrűségével kapcsolatos eredményeket. A harmadik fejezetben egy újabb sűrűségfogalom segítségével vizsgálom az ilyen halmazokat és bebizonyítom Behrend nevezetes tételét. A negyedik fejezetben Erdős tételét bizonyítom és megemlítek néhány további eredményt, sejtést. Végül az ötödik fejezetben néhány érdekes feladattal zárom szakdolgozatom.

Dolgozatom egy, az adott témában nem jártas olvasónak is könnyen érthető új információkat nyújt és talán motivációként hat a témában való mélyebb ismeretszerzéshez és kutatáshoz.

1. fejezet

Bevezetés

A számelméletnek talán az a legnagyobb szépsége, hogy gyakran olyan problémákkal foglalkozik, amelyek nagyon egyszerűen megfogalmazhatóak, egy matematikában nem jártas ember is azonnal megérti a probléma lényegét, mégis a megoldás végtelenül bonyolult is lehet. Gondoljunk például a Goldbach-sejtésre, az ikerprímsejtésre vagy akár egy szám partícióinak számára. Szakdolgozatomban is egy hasonló problémával foglalkozok, de először kezdjünk pár bevezető példafeladattal.

1. Feladat. Az $\{1, 2, ..., n\}$ halmazból legfeljebb hány elemet tudunk kiválasztani úgy, hogy bármely kettő relatív prím legyen?

Megoldás:
Jelöljük ezt a számot $r(n)$-nel. Vegyük észre, hogy az 1-et bármelyik ilyen halmazba belevehetjük, hiszen 1-gyel minden szám relatív prím. Legyen $\pi(n)$ 1-től n-ig a prímszámok száma. Ekkor mivel két különböző prímszám egymáshoz relatív prím, triviálisan adódik a következő:

$$\pi(n) + 1 \leq r(n). \tag{1.1}$$

Könnyen látszik, hogy az egyenlőség is teljesül. Belátjuk, hogy ha A egy maximális kiválasztás, akkor $\forall m \in A$ elemre, m prímszám vagy prímhatvány vagy $m = 1$. Indirekt tegyük fel ez nem teljesül, azaz $\exists m \in A$, hogy m-nek van két különböző prímosztója. Ekkor mivel m relatív prím bármely A halmazban lévő számmal, nyilván az osztói is és a két prímosztó is relatív prím egymással, hiszen különböző prímek. Így m-et két prímosztójával helyettesítve egy nagyobb halmazt kapunk, tehát A nem maximális.

A következő feladatot és annak megoldását Erdős Pál és Surányi János *Válogatott fejezetek a számelméletből* [1] című könyve szerint ismertetem.

2. Feladat. Az $\{1, 2, ..., n\}$ halmazból legfeljebb hány elemet tudunk kiválasztani úgy, hogy egyik elem se legyen többszöröse egy másiknak?

Megjegyzés. Láthatjuk, hogy ha a számok amiket kiválasztunk páronként relatív prímek és nem tartalmazzák az 1-et akkor ez az újabb feltétel is teljesül, tehát ez a feladat tekinthető az előző feladat egy általánosításának.

Megoldás:

Jelöljük ezt a számot $t(n)$-nel. Kezdjük mohón a kiválasztást n-től visszafelé, addig vegyük be a számokat amíg nem sértjük a feltételt. Vegyük észre, hogy az első szám amely sérti a feltételt az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lesz. Ebből tehát adódik, hogy

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq t(n). \tag{1.2}$$

1. Állítás. $t(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

Bizonyítás:

Elég belátni, hogy

$$t(n+2) \leq t(n) + 1. \tag{1.3}$$

Ugyanis $t(1) = t(2) = 1$, így (1.3)-ból következik, hogy

$$t(n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{1.4}$$

Legyen A egy megfelelő kiválasztás az $n+2$-nél nem nagyobb számokból. Ekkor ha az $n+1$ és $n+2$ számok közül legfeljebb csak az egyiket tartalmazza, akkor a többi eleme legfeljebb n, tehát $|A| \leq t(n) + 1$. Ha A mindkettőt tartalmazza, akkor a kettő közül az egyik páros, legyen ez $2k$. Ekkor $k \leq n$ és A-ban nem szerepelhet sem k, sem k valamelyik osztója, tehát A n-nél kisebb elemeihez, ha hozzávesszük k-t, továbbra sem sérül a feltétel. Ezért A n-nél kisebb elemeinek száma legfeljebb $t(n) - 1$, így $|A| \leq t(n) + 1$. Ezzel (1.3)-at beláttuk. □

A feladat megoldása után, természetesen adódó kérdés, hogy mit mondhatunk végtelen esetben. Az 1. feladatra itt is meglehetően könnyű a válasz. Mivel minden véges n-re az 1 és a prímszámok egy optimális választás, természetesnek hat, hogy végtelen esetben is ez lesz a megoldás.

De mit mondhatunk a második esetben? Az itt megadott optimumot nyilván nem ültethetjük át végtelen esetbe és elsőre nem is jut sokkal jobb eszünkbe, mint a prímek halmaza, vagy azoknak egy természtes számmal vett szorzata. Megadható ennél sűrűbb halmaz? Milyen korlátot tudunk adni ezen halmazok sűrűségére? Egyáltalán milyen értelemben vett sűrűségről érdemes beszélni? Szakdolgozatomban ezekre a kérdésekre keresem a választ.

2. fejezet

Primitív halmazok aszimptotikus sűrűsége

2.1. Végtelen primitív halmazok

1. Definíció. Egy $A \subseteq \mathbb{N}$ halmaz primitív, ha $\forall a, b \in A$ esetén, $a \mid b \Rightarrow a = b$.

Megjegyzés. Egy véges vagy végtelen sorozatot T-sorozatnak fogok hívni, ha mint halmaz primitív. Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ halmaz, legyen $A(n) = \{k : k \in A,\ k \leq n\}$ és legyen $t(n) = max\{|A(n)| : A \text{ primitív}\}$.

Mielőtt a végtelen primitív halmazokat vizsgálnánk, érdemes lehet néhány példát látni rájuk. A példákat, amelyeket bemutatok Jared Duker Lichtman [2] cikkében olvastam. Egy érdekesség, hogy Erdős a primitív halmazokkal azért kezdett foglalkozni, hogy ezek segítségével tanulmányozhassa a hiányos, bővelkedő, illetve tökéletes számokat. Könnyen látszik, hogy a tökéletes számok primitív halmazt alkotnak.
Indoklás:
Legyen n egy tökéletes szám, belátjuk, hogy n bármilyen $k \geq 2$ egésszel vett szórzata nem tökéletes. Legyenek n önmagától különböző osztói sorra $d_1, d_2, ..., d_l$. Ekkor tehát tudjuk a következőt:

$$n = \sum_{i=1}^{l} d_i.$$

Amiből:

$$kn = \sum_{i=1}^{l} kd_i. \tag{2.1}$$

Természetesen $\forall i$-re kd_i osztója kn-nek és mivel $k \geq 2$, a kd_i-k között nem szerepel az 1, ami szintén osztója kn-nek. Tehát (2.1)-ből látszik, hogy kn nem tökéletes, sőt bővelkedő szám. □

Egy másik példa a k-prímek. Egy számot k-prímnek hívunk, ha multiplicitással számolva pontosan k prímtényezője van. Könnyen látszik az is, hogy rögzített k-ra a k-prímek halmaza primitív halmaz, a bevezetésben ezt meg is említettem $k = 1$ esetben.

Indoklás:
Ennek belátásához az egész számokra tekintsünk úgy, mint a prímtényezőik halmazára (multiplikatívan). Ekkor $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha az a-nak megfeleltetett halmaz részhalmaza a b-nek megfeleltett halmaznak. Ha a és b k-prímszámok, akkor mindkettőjük halmaza k elemszámú, tehát $a \mid b$ csak akkor állhat fent, ha $a = b$. □

Megjegyzés. Rögzített k-ra a k-prímek nem bővíthető primitív halmazt alkotnak.

Indoklás:
Legyen n egy tetszőleges pozitív egész, amely nem k-prím. Ekkor vagy $n = 1$, ekkor nyilván nem vehetjük be a halmazba, vagy n összetett és multiplicitással számolva l darab prímosztója van. Ha $l < k$, akkor $2^{k-l}\, n$ egy olyan k-prím, amely n többszöröse. Ha $l > k$, akkor n-nek $l - k$ tetszőleges prímosztóját törölve olyan k-prímet kapunk, amely osztja n-et. □

Az előző fejezetben azt is megemlítettem, hogy $t(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. A kérdés az, tudunk-e megadni olyan A végtelen primitív halmazt, amelyre $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|A(n)| = t(n)$. Egyszerű leszámlálással látszik, hogy ilyet nem tudunk, hiszen ha $|A(3)| = t(3)$ akkor $|A(9)| < t(9)$, de ennél többet is mondhatunk. Semmilyen k-ra nem lehet igaz, hogy k-tól kezdve minden n-re $A(n)$ optimális. Ez a következő állításból látszik:

2. Állítás. *Ha A egy primitív halmaz és $|A(n)| = t(n)$ valamilyen $n \geq 11$ egész esetén, akkor $|A(2n)| < t(2n)$.*

Bizonyítás:
A bizonyítás alapötlete, hogy megmutatjuk, az $A(n)$ elemei túl sok számot "ütnek ki", azaz túl sok többszörösük van ahhoz, hogy így optimális választás lehessen $2n$-re. Először tegyük fel hogy $A(n)$ a következő:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2, ..., n-1, n. \tag{2.2}$$

A 2. feladatban beláttuk, hogy ez egy optimális választás. Ezek kétszeresei n és $2n$ között vannak és mivel $A(n)$ optimális, ezért az előzőektől különböző n-nél kisebb szám nyilvánvalóan nem lehet benne $A(2n)$-ben. Mivel $2n$ páros, $t(2n) = n$, tehát ha további egy számot ki tudunk ütni akkor meg is vagyunk. De, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ és $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ közül az egyik páratlan, így a háromszorosa is páratlan és mivel $n \geq 11$ ez a háromszoros n és $2n$ közt van. Eddig csak páros számokat ütöttünk ki, így ez az új biztosan nem egyezik meg az eddig kiütöttek egyikével sem.
Általános esetben, ha $A(n)$ nem tartalmazza (2.2) valamelyikét, akkor annak valamilyen osztóját tartalmazza hiszen $A(n)$ optimális. Ezért $A(n)$ elemei kiütik ugyanazokat a számokat, amelyeket (2.2) kiüt. □

2.2. Aszimptotikus sűrűség

2. Definíció. Egy $A \subseteq \mathbb{N}$ halmaz felső aszimptotikus sűrűsége $\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n}$, hasonlóan az alsó aszimptotikus sűrűsége $\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n}$. Ha a két érték megegyezik akkor a közös limeszt nevezzük az A halmaz aszimptotikus sűrűségének (ezt pedig jelöljük $d(A)$-val).

Azért, hogy lássunk erre egy egyszerűbb példát, visszatérünk a bevezetésben szereplő 1. feladathoz. Megmutatjuk, hogy ha B egy páronként relatív prímeket tartalmazó halmaz, akkor $d(B) = 0$. Az első fejezetben láttuk, hogy

$$|B(n)| \leq \pi(n) + 1. \tag{2.3}$$

Elegendő tehát bebizonyítani, hogy a prímszámok halmazának (jelöljük P-vel) aszimptotikus sűrűsége 0. Ezt könnyen levezethetjük a prímszámtételből, sőt elegendő felhasználnunk, hogy létezik c konstans, melyre

$$\pi(n) \leq c\,\frac{n}{\log n},$$

hiszen ebből:

$$\overline{d}(P) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c}{\log n} = 0.$$

Az alsó aszimptotikus sűrűség is legalább 0, tehát $d(P) = 0$. □

A (2.3)-ban alkalmazott ötletet, miszerint a véges n-re megadott optimummal becsülünk, alkalmazhatjuk a primitív halmazokra is. Legyen A egy végtelen primitív halmaz, ekkor a már bebizonyítottak miatt:

$$|A(n)| \leq t(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n+1}{2}$$
$$\frac{|A(n)|}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Tehát A felső aszimptotikus sűrűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$ lehet. Az is kiderült, hogy ez az elsőre nagyon durvának tűnő becslés valójában optimális. Besicovitch [3] már 1934-ben megmutatta, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan T-sorozat, melynek felső aszimptotikus sűrűsége nagyobb, mint $\frac{1}{2} - \varepsilon$. Besicovitch egy konstruktív bizonyítást adott, melynek alapötlete, hogy veszünk egy nagyon gyorsan növekedő $(x_n) \subseteq \mathbb{N}$ sorozatot, majd mohón $[x_1, 2\,x_1), [x_2, 2\,x_2)$... intervallumokból kiválasztjuk azokat a számokat amelyek az előzőleg kiválasztottak egyikének sem többszöröse. Minél gyorsabban növekszik a sorozatunk, annál közelebb lesz $\frac{1}{2}$-hez a primitív halmazunk felső aszimptotikus sűrűsége. A bizonyítás meglehetősen hosszú, azon múlik, hogy ha a sorozatunk elég nagy ütemben nő, akkor $[x_1, 2\,x_1)$, halmaz többszörösei ugyanazokat a számokat "ütik ki". Ezen túl Erdős [4] és egy másik módon Behrend [5] a következő tételt is bebizonyították:

1. Tétel (Erdős, Behrend)**.** *Legyen A egy primitív halmaz, ekkor* $\underline{d}(A) = 0$.

Megjegyzés. A tételt a következő fejezetben látjuk be.

3. fejezet

Primitív halmazok logaritmikus sűrűsége

3.1. Logaritmikus sűrűség

3. Definíció. Egy $A \subseteq \mathbb{N}$ alsó és felső logaritmikus sűrűsége a következőek:

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{a\in A(n)} \frac{1}{a}}{\log n}$$
$$\overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{a\in A(n)} \frac{1}{a}}{\log n}.$$

Megjegyzés. Ha a két érték megegyezik, akkor az aszimptotikus esethez analóg módon, a közös értéket A logaritmikus sűrűségének nevezzük és $\delta(A)$-val jelöljük.

Az aszimptotikussal ellentétben, itt elsőre talán nem látszik, miért is jó sűrűségfogalom ez. Ha a pozitív egészek halmazát tekintjük, akkor azért észrevesszük, hogy ennek logaritmikus sűrűsége 1, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n} = 1. \tag{3.1}$$

Ebből tehát nyilván 0 és 1 közötti értékeket vesz fel, így teljesíti a minimális követelményt. Ezen kívül azonban érdemes lehet néhány példát látni, hogy jobban megvizsgálhassuk ezt az új fogalmat. Számoljuk ki például a négyzetszámok logaritmikus sűrűségét. Minden matematikus által ismert nevezetes tétel, hogy a négyzetszámok reciprokösszege $\frac{\pi^2}{6}$, ezt felhasználva láthatjuk a következőt:

$$\frac{\sum_{k\leq\sqrt{n}}\frac{1}{k^2}}{\log n} < \frac{\pi^2/6}{\log n}.$$

Ebből könnyen adódik, hogy a négyzetszámok logaritmikus sűrűsége, az aszimptotikus sűrűségükhöz hasonlóan 0.

3. Állítás. *A prímszámok logaritmikus sűrűsége* 0.

Bizonyítás:
A bizonyításhoz felhasználunk egy később is fontos lemmát, amelyet Erdős Pál "Válogatott fejezetek a számelméletből" [1] című könyvében olvastam.

1. Lemma. *Létezik c konstans, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén,*

$$\left|\sum_{p\leq n}\frac{1}{p} - \log\log n\right| < c.$$

Legyen tehát c a lemmában szereplő konstans, ekkor:

$$\frac{\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}}{\log n} \leq \frac{\log\log n + c}{\log n}.$$

Ahol a jobboldali érték tart a 0-ba, ahogy n tart a végtelenbe, tehát a prímszámok logaritmikus sűrűsége 0. $\square$

A 2. fejezetben azt is beláttuk, hogy a prímszámok aszimptotikus sűrűsége 0, így az előző két példából kiindulva, következtethetünk a két sűrűségfogalom közötti valamilyen összefüggésre. Ez az összefüggés nem más, mint hogy az új definíció az aszimptotikusnál egy gyengébb sűrűség, pontosabban:

2. Tétel. *Minden $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazra*

$$\underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A) \leq \overline{d}(A). \tag{3.2}$$

Bizonyítás:
A következő bizonyítás [6]-ból való.
Az aszimptotikus sűrűség definíciójából következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ egészre:

$$\underline{d}(A) - \varepsilon \leq \frac{|A(n)|}{n} \leq \overline{d}(A) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

Az átláthatóság kedvéért vezessünk be két új jelölést:

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$D(n) := \sum_{k\in A(n)} \frac{1}{k}.$$

Ekkor:

$$D(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|A(k)| - |A(k-1)|}{k} = \frac{|A(n)|}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|A(k)|}{k(k+1)}. \tag{3.4}$$

Az első egyenlőség azért igaz, hiszen látható hogy azokra a k számokra, amelyek nincsenek benne A-ban, a szummában lévő kifejezés 0, hiszen ekkor $|A(k)| = |A(k-1)|$. És hasonlóan megnézve, ha $k \in A$ akkor $|A(k)| = |A(k-1)|+1$, tehát $\frac{1}{k}$ szerepel a szummában. A második egyenlőség pedig egy szimpla átrendezése az összegnek, a teleszkópikus tulajdonságot felhasználva. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra először (3.4)-et felhasználva,

$$D(n) \leq 1 + S(N) + \sum_{k=N}^{n} \frac{|A(k)|}{k} \cdot \frac{1}{k+1},$$

majd ezt tovább becsülve (3.3)-mal kapjuk, hogy

$$D(n) \leq 1 + S(N) + (\overline{d}(A) + \varepsilon) \cdot \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k+1},$$

ahol N a (3.3)-ban megadott küszöbindex. Ebből már (3.1)-et figyelembe véve látszik, hogy

$$\overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} \leq \overline{d}(A) + \varepsilon.$$

Ez teljesül minden $\varepsilon > 0$-ra, tehát $\overline{\delta}(A) \leq \overline{d}(A)$. A másik egyenlőtlenség is hasonló algebrai lépések segítségével látszik, először (3.3)-at felhasználva:

$$D(n) \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|A(k)|}{k(k+1)} + (\underline{d}(A) - \varepsilon) \cdot \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Majd a jobb oldalt átrendezve adódik, hogy

$$D(n) \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|A(k)|}{k(k+1)} - (\underline{d}(A) - \varepsilon) \cdot S(N) + (\underline{d}(A) - \varepsilon) \cdot S(n).$$

És ismét (3.1)-et alkamazva láthatjuk, hogy $\underline{\delta}(A) \geq \underline{d}(A)$. □

3.2. Behrend tétele

3. Tétel (Behrend)**.** *Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ primitív halmaz, ekkor létezik c konstans, hogy*

$$\sum_{a \in A(n)} \frac{1}{a} < c\,\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}. \tag{3.5}$$

Megjegyzés. A tételből következik, hogy minden primitív halmaz logaritmikus sűrűsége 0, sőt a (3.2)-es egyenlőtlenséget alkalmazva, egyben azt a korábban említett tételt is bebizonyítjuk, amely szerint a primitív halmazok alsó aszimptotikus sűrűsége mindig 0.

Bizonyítás:
A következő bizonyítás [7]-ből való. és felhasználja a Sperner-tételt [8].

4. Tétel (Sperner)**.** *Ha H egy véges elemszámú halmaz, és ennek részhalmazai a $H_1, H_2, ..., H_t$ halmazok és*

$$t > \binom{|H|}{\left\lfloor \frac{|H|}{2} \right\rfloor},$$

akkor az adott részhalmazok közül kiválasztható kettő különböző úgy, hogy az egyik részhalmaza legyen a másiknak.

Behrend tételét indirekten látjuk be. Feltesszük, hogy c elég nagy, illetve hogy $n > n_c$ és hogy $A \subseteq (1, 2, ..., n)$ halmazra igaz a következő:

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \geq c\,\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}. \tag{3.6}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor van $a, a' \in A$ hogy $a < a'$ és $a|a'$. Azaz A nem lehet primitív.

Első lépésként vezessük vissza a feladatot olyan halmazokra, amelyek csak négyzetmentes számokat tartalmaznak. Minden a egész felírható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzataként. Ezt a felbontást jelöljük a következőképpen:

$$a = m_a^2 q_a.$$

Ezen túl, adott m-re vezessük be a következő két halmazt:

$$A_m := \{a : a \in A, m_a = m\}$$
$$Q_m := \{q : m^2 q \in A_m\}.$$

Ezekkel a jelölésekkel ekkor:

$$\sum_{a\in A}\frac{1}{a}=\sum_{a\in A}\frac{1}{m_a^2 q_a}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{a\in A_m}\frac{1}{q_a}. \tag{3.7}$$

A belső szummára is vezessünk be egy új jelölést:

$$S(m):=\sum_{a\in A_m}\frac{1}{q_a}.$$

2. Lemma. *Létezik m egész, melyre*

$$S(m)>\frac{c}{2}\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}.$$

Lemma bizonyítása:

Indirekt tegyük fel, hogy $\forall m\in\mathbb{N}$-re

$$S(m)\le\frac{c}{2}\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}.$$

Így (3.6) és (3.7) alapján ellentmondásra jutunk:

$$c\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}S(m)\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\frac{c}{2}\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}=\frac{\pi^2}{6}\frac{c}{2}\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}<c\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}. \quad\square$$

Rögzítsünk egy m-et, amely teljesíti a lemmát. Vegyük észre, hogy a tétel bizonyításához elegendő találnunk q, q' számokat, melyekre:

$$q, q'\in Q_m,\ q<q',\ q|q',$$

hiszen ha ilyet találunk, akkor A nem lehet primitív, amit m^2q és m^2q' mutat:

$$m^2q, m^2q'\in A_m\subseteq A,\ m^2q<m^2q',\ m^2q|m^2q'.$$

Ezen túl, minden $q\in Q_m$ négyzetmentes és kisebb vagy egyenlő mint n. Elég tehát belátni, hogy ha adott Q halmaz teljesíti a következőket:

$$\begin{aligned} &Q \subseteq (1, 2, ..., n) \\ &\sum_{q \in Q} \frac{1}{q} > \frac{c}{2} \frac{\log n}{\sqrt{\log \log n}} \\ &\forall q \in Q \text{ négyzetmentes,} \end{aligned} \tag{3.8}$$

akkor van $q, q' \in Q$, $q < q'$, $q|q'$. Így a problémát visszavezettük négyzetmentes halmazokra.

A bizonyítás további részében az lesz a célunk, hogy próbálunk keresni egy olyan számot, amelynek Q-ban elég sok osztója van ahhoz, hogy alkalmazhassuk rá a Sperner-tételt. Ehhez lesz segítségünkre a következő lemma, de előbb vezessünk be két új jelölést. Adott $k \in \mathbb{N}$-re, $d(k)$ jelölje k osztóinak számát, és $d_Q(k)$ pedig a Q-ban szereplő osztóinak számát.

3. Lemma. *Minden $n > n_c$-re létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\begin{aligned} k &\leq n \\ d(k) &> \frac{\log n}{\log \log n} \\ d_Q(k) &> \frac{d(k)}{\sqrt{\log d(k)}}. \end{aligned}$$

Lemma bizonyítása:

Ezt a lemmát is indirekten fogjuk belátni. Tegyük fel, hogy minden $k \leq n$-re

$$d(k) \leq \frac{\log n}{\log \log n},$$

vagy

$$d(k) > \frac{\log n}{\log \log n},$$

de utóbbi esetben a harmadik feltétel nem teljesül, azaz

$$d_Q(k) \leq \frac{d(k)}{\sqrt{\log d(k)}} < \frac{d(k)}{\sqrt{\log \frac{\log n}{\log \log n}}} < 2\, \frac{d(k)}{\sqrt{\log \log n}}.$$

Ezekből kapjuk a következő becslést felhasználva, hogy nyilván $d_Q(k) \le d(k)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k\le n} d_Q(k) &\le \sum_{\substack{k\le n\\ d(k)\le \frac{\log n}{\log\log n}}} d_Q(k) + \sum_{\substack{k\le n\\ d_Q(k)<2\frac{d(k)}{\sqrt{\log\log n}}}} d_Q(k)\\ &< \sum_{k\le n} \frac{\log n}{\log\log n} + \frac{2}{\sqrt{\log\log n}} \sum_{k\le n} d(k). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Most tekintsük a második szummát:

$$\sum_{k\le n} d(k) = \sum_{k\le n}\sum_{d|k} 1 = \sum_{d\le n}\sum_{\substack{k\le n\\ d|k}} 1. \tag{3.10}$$

Az első egyenlőség triviálisan igaz, a második egyenlőség pedig abból az ötletből adódik, hogy a k számok helyett a lehetséges d osztók mentén számlálunk. Ezen az ötleten továbbhaladva gondoljuk meg, hogy egy adott d pontosan $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ darab n-nél kisebb szám osztója lehet. így adódik a következő becslés:

$$\sum_{k\le n} d(k) < \sum_{d\le n} \frac{n}{d} < 2n\log n.$$

Így, ezt felhasználva továbbbecsülhetjük (3.9)-et:

$$\sum_{k\le n} d_Q(k) < n\,\frac{\log n}{\log\log n} + \frac{2}{\sqrt{\log\log n}}\,2n\log n < 5n\,\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}.$$

Másrészt az összeget becsüljük alulról is, a (3.10)-ben alkalmazott gondolatmenet segítségével:

$$\sum_{k\le n} d_Q(k) = \sum_{k\le n}\sum_{\substack{q\in Q\\ q|k}} 1 = \sum_{q\in Q}\sum_{\substack{k\le n\\ q|k}} 1 = \sum_{q\in Q}\left\lfloor \frac{n}{q}\right\rfloor > \sum_{q\in Q}\frac{1}{2}\frac{n}{q}.$$

Itt kihasználhatjuk a (3.8)-as alapfeltevésünk, amivel kapjuk, hogy

$$\sum_{k\le n} d_Q(k) > \frac{n}{2}\sum_{q\in Q}\frac{1}{q} > \frac{cn}{4}\frac{\log n}{\sqrt{\log\log n}}.$$

Ez ellentmondás feltéve, hogy $c \ge 20$, így a lemmát beláttuk. $\square$

Rögzítsünk tehát egy olyan k számot, amely teljesíti a lemma feltételeit, majd bontsuk fel uv alakban, ahol v a legnagyobb négyzetmentes osztója, azaz a különböző prímosztóinak szorzata. Ekkor, ha $q|k$ és q négyzetmentes akkor nyilvánvalóan $q|v$ is teljesül. Ebből kiindulva becsüljük $d_Q(v)$-t:

$$d_Q(k) = d_Q(v) > \frac{d(k)}{\sqrt{\log d(k)}} > \frac{d(v)}{\sqrt{\log d(v)}}.$$

Itt az első egyenlőtlenség k tulajdonságai miatt igaz, a második pedig azért, mert az $\frac{x}{\sqrt{\log x}}$ függvény monoton nő. Tudjuk, hogy v négyzetmentes, ezért

$$v = p_1 p_2 ... p_r,$$

ahol p_i-k különböző prímek, tehát $d(v) = 2^r$. Ezt behelyettesítve, $d_Q(v)$-t tovább becsülhetjük a Stirling-formula segítségével:

$$d_Q(v) > \frac{2^r}{\sqrt{\log 2^r}} > \frac{2^r}{\sqrt{\log_2 2^r}} = \frac{2^r}{\sqrt{r}} > \binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}.$$

Most alkalmazzuk ismét a már második fejezetben használt gondolatot, miszerint a számokra tekintsünk úgy, mint a prímtényezőik halmazára. Mivel Q csak négyzetmentes számokat tartalmaz, ezért nem is kell a multiplicitással bajlódni. Egy $q \in Q$-ra legyen $P(q)$ a halmaz, amivel reprezentáljuk. Ekkor a Sperner-tételt alkalmazva láthatjuk, hogy v-nek Q-beli osztói között van kettő, hogy egyik osztja a másikat. Pontosabban, legyenek $q_1, q_2, ..., q_t$ az említett osztók, ekkor

$$t = d_Q(v) > \binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}.$$

Tehát létezik $i \neq j$ indexek, hogy $P(q_i) \subset P(q_j)$, azaz $q_i|q_j$. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

A primitív halmazok sűrűségének problémáját ezzel meg is oldottuk. Beláttuk, hogy a logaritmikus, illetve alsó aszimptotikus sűrűsége az ilyen halmazoknak mindig 0, ezen kívül éles felső becslést adtunk a felső aszimptotikus sűrűségükre. Egy határérték kiszámításánál azonban nem csak maga a limes, de a konvergencia sebessége is legalább ilyen érdekes lehet, ezért érdemes vizsgálni az $A(n)$ értékeket.

5. Tétel (Erdős). *Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ primitív halmaz, ekkor*

$$A(n) < \frac{n}{\log \log n \, \log \log \log n}.$$

A fenti állítás a következő fejezetben szereplő 7. tétel következménye, Erdős tehát ezen állítás megmutatásával látta be, hogy $\underline{d}(A) = 0$. Sárközy, Ahlswede és Khachatrian [9] azt is megmutatták, hogy a becslés valamilyen értelemben élesnek is mondható:

6. Tétel (Sárközy, Ahlswede, Khachatrian)**.** *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $A \subseteq \mathbb{N}$ primitív halmaz és $N \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy $n > N$ esetén:*

$$A(n) > \frac{n}{\log\log n\,(\log\log\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

4. fejezet

További eredmények

4.1. Erdős tétele

7. Tétel (Erdős)**.** *Legyen* (a_n) *egy* T*-sorozat, ekkor a következő szumma konvergens:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \log a_n}.$$

Bizonyítás:

A bizonyítás kis átdolgozással [4]-ből való.

Jelölje p_n az a_n legnagyobb prímosztóját. A következő lemma miatt, elegendő belátnunk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{p \leq p_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq 1.$$

4. Lemma. *Létezik c konstans, melyre*

$$\prod_{p \leq p_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{c}{\log a_n}.$$

Lemma bizonyítása:

Analízisből felhasználjuk, hogy

$$1 + x < e^x.$$

Most x helyére írjunk $\frac{1}{x-1}$-et:

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{x-1} &< e^{\frac{1}{x-1}} \\ \frac{x}{x-1} &< e^{\frac{1}{x-1}} \\ 1-\frac{1}{x} &> e^{-\frac{1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Ebből adódik, következő:

$$\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right) > e^{-\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p-1}} = e^{-\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p-1}+\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p}-\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p}} > e^{c_1-\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

ahol c_1 konstans. Az egyenlőtlenség abból adódik, hogy a

$$\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p}-\sum_{p\le p_n}\frac{1}{p-1}=\sum_{p\le p_n}\frac{-1}{p\,(p-1)}$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő és konvergens. Az 1. lemma miatt azt is, hogy létezik c_2 konstans, melyre

$$\left|\sum_{p\le x}\frac{1}{p}-\log\log x\right| < c_2.$$

Így (4.1)-et továbbbecsülve kapjuk, hogy

$$\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right) > e^{c_1-\log\log p_n-c_2} = \frac{e^{c_1-c_2}}{\log p_n} = \frac{c}{\log p_n} \ge \frac{c}{\log a_n},$$

ahol tehát c konstans, így a lemmát beláttuk. □

A tételt indirekten fogjuk belátni, azaz tegyük fel, hogy van egy $N \in \mathbb{N}$ index, melyre

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right) > 1.$$

Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat a legnagyobb prímosztók szerint van rendezve, azaz ha $i < j$, akkor $p_i \le p_j$. Vezessünk be két új halmazt is. Jelölje $n(a)$ azon egészek halmazát, melyek n-nél nem nagyobbak és oszthatóak a sorozatnak legalább egy tagjával, $n(a_k)$ pedig legyen azon n-nél nem nagyobb egészek halmaza, melyek oszthatóak a_k-val de a sorozat egy korábbi tagjával sem. Ekkor nyilvánvalóan

$$|n(a)| = \sum_{k=1}^{\infty} |n(a_k)| \geq \sum_{k=1}^{N} |n(a_k)|$$

$n(a_k)$ tartalmazza azokat az n-nél nem nagyobb számokat, melyek $x\, a_k$ alakúak, ahol x minden prímosztója nagyobb p_k-nál. $|n(a_k)|$ becsléséhez tehát elegendő megszámlálni azokat az egészeket, melyek $\frac{n}{a_k}$-nál nem nagyobbak és nem oszthatóak egyetlen p_k-nál nem nagyobb prímmel sem. Ehhez az $[1, n/a_k]$ intervallumot osszuk fel az $[1, \prod_{p \leq p_k} p]$, $[\prod_{p \leq p_k} p + 1, 2 \prod_{p \leq p_k} p]$... intervallumokra. Ekkor lesz $\left\lfloor \frac{\lfloor n/a_k \rfloor}{\prod_{p \leq p_k} p} \right\rfloor$ darab kis intervallumunk, és minden kis intervallumban a következő kongurenciarendszer lehetséges megoldásait keressük:

$$\begin{aligned}
&x \equiv 1 \pmod 2\\
&x \equiv 1, 2 \pmod 3\\
&\vdots\\
&x \equiv 1, 2, ..., p_k - 1 \pmod{p_k}.
\end{aligned}$$

Így a kínai maradéktétel miatt, minden kis intervallumban lesz $\prod_{p \leq p_k} (p-1)$ darab szám amely teljesíti a feltételt. Ebből tehát

$$|n(a_k)| \geq \left\lfloor \frac{\lfloor n/a_k \rfloor}{\prod_{p \leq p_k} p} \right\rfloor \prod_{p \leq p_k} (p-1).$$

Most legyen $n := \prod_{i=1}^{N} (a_i\, p_i)$. Ekkor minden $k \leq N$-re $\frac{n}{a_k}$ illetve $\frac{n/a_k}{\prod_{p \leq p_k} p}$ is egész, tehát

$$\begin{aligned}
|n(a_k)| &\geq \frac{n/a_k}{\prod_{p \leq p_k} p} \prod_{p \leq p_k} (p-1)\\
|n(a_k)| &\geq \frac{n}{a_k} \prod_{p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

Ezzel tehát az indirekt feltevésünket felhasználva ellentmondásra jutunk:

$$n > |n(a)| \geq \sum_{k=1}^{N} |n(a_k)| \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{n}{a_k} \prod_{p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > n. \ \square$$

Erdős ezen túl azt is sejtette, hogy minden primitív halmaz esetében a prímekre vett hasonló szumma felső becslést ad. A sejtést egészen 2022-ig nem sikerült megoldani, amikor is Jared Duker Lichtman [2] váratlanul bebizonyította:

8. Tétel (Lichtman)**.** *Legyen (a_n) egy T-sorozat, ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \log a_n} \leq \sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p \log p}.$$

4.2. Sejtések

Láttuk, hogy a fenti szumma minden primitív halmazra egy véges értéket vesz fel, ezért tekinthetünk rá úgy, mint egy függvényre:

4. Definíció. Legyen A primitív halmaz,

$$f(A) := \sum_{a \in A} \frac{1}{a \log a}.$$

Jelölje $P^{(k)}$ a k-prímek halmazát. Tudjuk, hogy f maximuma pontosan $f(P^{(1)})$, de mit mondhatunk, ha a primitív halmazunk csupa összetett számból áll? Tudunk ekkor alacsonyabb felső becslést?

1. Sejtés. *Legyen A egy összetett számokból álló primitív halmaz, ekkor*

$$f(A) \leq f(P^{(2)}).$$

A sejtést egy általánosabb formában is vizsgálják, miszerint ha A olyan primitív halmaz, amelyben minden számnak legalább k prímosztója van (multiplikatívan), akkor $f(A) \leq f(P^{(k)})$. A probléma megoldásához Wiliam Banks és Gaven Martin [10] került a legközelebb, mikor bebizonyították a következő tételt:

5. Definíció. Legyen Q prímek egy halmaza, ekkor tetszőleges $A \subseteq \mathbb{N}$ esetén, $A(Q)$ azon A-beli elemeket tartalmazza, melyek minden prímosztója Q-beli.

9. Tétel (Banks, Martin)**.** *Legyen Q prímek egy halmaza, melyre $\sum_{p \in Q} 1/p < 1,74$ és legyen A olyan primitív halmaz, amelyben minden számnak legalább k prímosztója van. Ekkor*

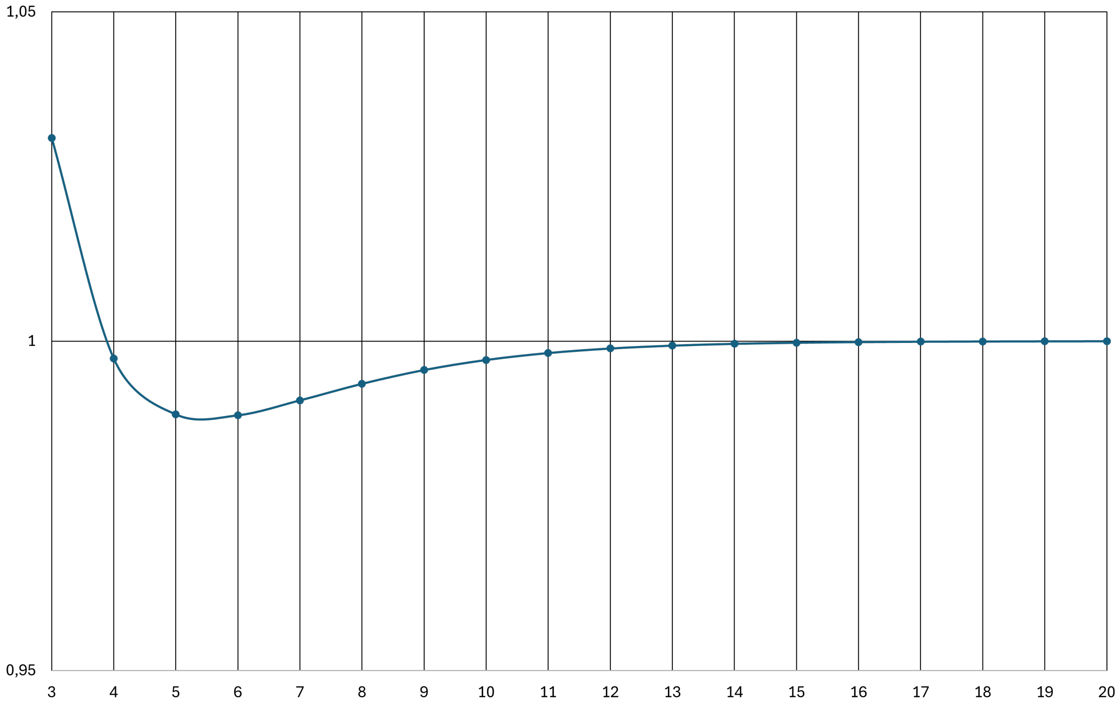
$$f(P^{(k)}(Q)) \geq f(A(Q)).$$

Banks és Martin azt is sejtette, hogy az $f(P^{(k)})$ értékek monoton csökkennek k növekedtével. Ezt a feltevést is végül Lichtmannak [11] sikerült megcáfolnia:

10. Tétel (Lichtman)**.** *Minden* $k \in \mathbb{N}$*-re* $f(P^{(6)}) \leq f(P^{(k)})$ *és*

$$\lim_{k\to\infty} f(P^{(k)}) = 1.$$

Megjegyzés. A következő diagramon láthatóak $f(P^{(k)})$ értékei $k \in (3, 4, ..., 20)$-ra.



4.1. ábra

5. fejezet

Kapcsolódó feladatok

A 3. feladat ötletét Erdős Pál és Surányi János *Válogatott fejezetek a számelméletből* [1] című könyvéből vettem át.

3. Feladat. Konstruáljunk minél nagyobb rimitív halmazt, amelyben bármelyik két elemnek van 1-nél nagyobb közös osztója, de nincs olyan 1-nél nagyobb egész szám, amelyik minden elemnek osztója!

Megoldás:
Egy példa ilyen primitív halmazra a $\{6, 10, 15\}$. Térjünk vissza a korábban már többször használt megközelítéshez, miszerint a számokra úgy tekintünk, mint a prímosztóik halmazára. Tekintsük az első n prímet:

$$\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}.$$

A Sperner-tétel ötletéhez hasonlóan, vegyük ennek az összes $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ elemszámú részhalmazát. Ekkor semelyik részhalmaz sem tartalmazza semelyik másikat, hiszen azonos elemszámúak, azonban bármely kettőnek van közös eleme és nincs olyan elem, amelyik mindegyik részhalmazban benne lenne. Most a részhalmazokból alkossuk meg a számainkat, azaz egy halmazból képezzük le az elemeinek szorzatát. Ezzel a módszerrel megadhatunk tetszőleges, véges elemszámú ilyen primitív halmazt. Ha végtelen elemszámút akarunk, legyen

$$A := \{n : n = 6p, \text{ vagy } n = 10p, \text{ vagy } n = 15p, \text{ ahol } p \text{ prím}\}.$$

Ekkor A primitív, hiszen $A \subset P^{(3)}$ és a 2. fejezetben beláttuk, hogy $P^{(3)}$ primitív. Ezen kívül A bármely két elemének van 1-nél nagyobb közös osztója, hiszen minden elemet osztja a $6, 10, 15$ számok egyike és ezeknek páronként közös osztója a 2, vagy a 3. Végül, nincs olyan 1-nél nagyobb szám amely mindegyik elemet osztja, hiszen már a $\{12, 20, 45\}$ halmazhoz sincs ilyen és $\{12, 20, 45\} \subset A$. □

A primitív halmazok vizsgálata során eszembe jutott egy hasonló probléma, amely kapcsán a következő egyszerű tételeket tudtam bebizonyítani.

1. Probléma. Hívjuk az $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazt c-primitívnek, ha minden $a, b \in A$ esetén $a \nmid b + c$. Próbáljunk becslést adni az ilyen halmazok sűrűségére!

Mindenekelőtt lássunk egy példát c-primitív halmazra. Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje A_k k többszöröseinek halmazát. Ekkor A_{c+1} c-primitív, hiszen minden $a, b \in A_{c+1}$ esetén,

$$a \equiv 0 \pmod{c+1}$$
$$b + c \equiv -1 \pmod{c+1}.$$

11. Tétel. *Legyen p prím, ekkor A_p nem bővíthető $(p-1)$-primitív halmaz.*

Bizonyítás:
Láttuk, hogy A_p $(p-1)$-primitív. Most legyen $a \notin A_p$, azaz a nem p többszöröse. De p prím, ezért a és p relatív prímek, így létezik egy $n \in \{1, 2, ..., p-1\}$, hogy

$$na \equiv -1 \pmod{p},$$

és ebből

$$na - (p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tehát $na - (p-1) \in A_p$ és $a | na$, így a nem vehető be A_p-be. □

12. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ c-primitív, ekkor $\overline{d}(A) \leq \frac{1}{2}$.*

Bizonyítás:
Ha $a \in A$, akkor $(a - c) \notin A$, ezért $n > c$ esetén,

$$|A(n)| \leq n - |A(n-c)|.$$

Így kapjuk, hogy

$$\frac{|A(n)|}{n} \leq 1 - \frac{|A(n-c)|}{n} \leq 1 - \frac{|A(n)|}{n},$$

majd n-nel tartva a végtelenbe:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} \leq \frac{1}{2}. \square$$

A bizonyításban az $a \nmid b+c$ feltétel helyett csupán azt használtuk, hogy $a \neq b+c$, ezért sejthető, hogy tudunk jobb felső becslést adni.

Összegzés

Szakdolgozatom során megismertettem az olvasót a primitív halmazokkal kapcsolatos legfontosabb eredményekkel. Kezdetben egyszerű formulát adtam az optimális véges primitív halmazok méretére, majd később ezt felhasználva becsültem a végtelen primitív halmazok sűrűségét. Eközben, az új definíciókhoz és észrevételekhez próbáltam minél több példát mutatni, hogy a téma érthetőbb, befogadásra alkalmasabb legyen. Szakdolgozatom második felében Behren és Erdős két nagy tételét láttam be, az eredeti bizonyításokat kissé átdolgozva, saját nyelvezetre formálva. Azt is fontosnak láttam, hogy megemlítsek híres sejtéseket, vagy felvessek új feladatokat, mint például a c-primitív halmazok problémája, hiszen ezek mutatják, mennyi érdekes kutatási lehetőség rejlik még a témában.

Irodalomjegyzék

[1] Erdős Pál, Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, 3. kiadás, SZTE Bólyai Intézet, 2004.

[2] Jared Duker Lichtman, *A proof of the Erdős primitive set conjecture*, 2023.

[3] Abram Besicovitch, *On the density of certain sequences of integers, Mathematische Annalen*, 1934.

[4] Erdős Pál, *Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, Journal of the London Mathematical Society*, 1935, 126–128. old.

[5] F. Behrend, *Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, Journal of the London Mathematical Society*, 1935, 42–45. old.

[6] Planetmath, *Inequality of logarithmic and asymptotic density*, URL: `https://planetmath.org/inequalityoflogarithmicandasymptoticdensity#bib.bib4`.

[7] Gyarmati Katalin és Sárközy András, *Elemi Módszerek a Kombinatorikus Számelméletben*, egyetemi jegyzet.

[8] Emanuel Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Mathematische Zeitschrift*, 1928, 265–272. old.

[9] Sárközy András, Rudolf Ahlswede, Levon H. Khachatrian, *On the Counting Function of Primitive Sets of Integers*, 1998.

[10] W. Banks, G. Martin, *Optimal primitive sets with restricted primes, Integers*, 2013.

[11] Jared Duker Lichtman, *Almost primes and the Banks-Martin conjecture, J. Number Theory*, 2020, 513–529.