

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

GÁL NOÉMI

SÍKGRÁFOK LERAJZOLÁSAI

SZAKDOLGOZAT

MATEMATIKA BSC

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS SZAKIRÁNY

TÉMAVEZETŐ: GEHÉR PANNA

ELTE OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK



**ELTE**  
EÖTVÖS LORÁND  
TUDOMÁNYEGYETEM

2024.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Gehér Pannának a rengeteg segítségért a szakdolgozat elkészítésének minden lépésében. Köszönöm a számos hasznos tanácsot, magyarázatot, a rendszeres konzultációkat, a sok időt és energiát, amit rám és a dolgozatomra áldozott.

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Síkgráfok néhány tulajdonsága	5
3. Síkgráfok lerajzolása egyenes szakaszokkal	7
4. Síkgráfok lerajzolása rácsra	10
4.1. Fraysseix-Pach-Pollac algoritmus . . . . .	13
4.2. Schnyder algoritmus . . . . .	21
5. Outerplanar gráfok lerajzolása	31
6. Összegzés	34
5. Hivatkozások	35

# 1. Bevezetés

A síkba lerajzolt gráfok geometriai tulajdonságaival a geometriai gráfelmélet foglalkozik. A gráfok lerajzolására vonatkozó kérdésekre az utóbbi évtizedekben irányult nagyobb figyelem, számos konferencia került megrendezésre és sok új eredmény született a témában.

Vezessük be a geometriai gráfelmélet néhány alapvető fogalmát! Ha magunk elé képzelünk egy gráfot, nagy eséllyel egy *topologikus gráf* fog megjeleni előttünk. A topologikus gráf olyan síkba lerajzolt gráf, melynek csúcsai egymástól különböző pontok, élei Jordan-görbék. Általában a gráf lerajzolásához megkövetelünk néhány alapvető tulajdonságot: az élek egymást legfeljebb egyszer metszik és egy pontban legfeljebb két él keresztezheti egymást. Szomszédos élek egyszer sem metszhetik egymást, valamint a végpontjain kívül más csúcs nem illeszkedhet egy élre sem. Egy másik fontos fogalom a *geometriai gráf*, mely abban különbözik a topologikus gráftól, hogy az élek egyenes szakaszok. A dolgozatban egyszerű gráfokkal fogunk foglalkozni, tehát nem engedünk meg párhuzamos és hurokéleket sem.

Sok érdekes problémát rejt a témakör, például hogy hogyan lehet úgy lerajzolni adott gráfot, hogy az éleinek metszésszáma minimális legyen. Mi azzal az esettel foglalkozunk, amikor ez a metszésszám nulla. Ezek az úgynevezett *síkbarajzolható gráfok*, azaz olyan gráfok, amelyek lerajzolhatók a síkba úgy, hogy éleik nem metszik egymást. Nem minden gráf síkbarajzolható, ilyen például a  $K_5$ , azaz az öt csúcsú teljes gráf, és a  $2 \times 3$  csúcsú teljes páros gráf, a  $K_{3,3}$ . Kuratowski tétele [8] azt állítja, hogy egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz  $K_{3,3}$ -mal vagy  $K_5$ -tel topologikusan izomorf részgráfot, azaz egy részgráfja sem állítható elő  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$  éleinek további csúcsokkal való felosztásával.

Számos gyakorlati alkalmazása létezik a síkgráfoknak, például a számítógépes grafika területén. Továbbá mikrochipek tervezésénél is fontos, hogy az áramkörök minél

kevesebbszer keresztezzék egymást. Az autópályák és metróhálózatok tervezésénél a vonalak kereszteződése szintén problémás lehet.

A dolgozatban először megnézzük a síkgráfok néhány fontosabb tulajdonságát, amikre a későbbiben szükségünk lesz. Ezután Fáry István és Klaus Wagner tételével foglalkozunk és megmutatjuk, hogy a síkgráfok egyenes szakaszokkal történő lerajzolása nem is olyan bonyolult feladat. Majd egy nagyobb témába kezdünk, ami a síkgráfok rácsra való lerajzolása. Pontosabban a legkisebb méretű rácsot keressük, melyre tetszőleges, adott csúcsszámú gráf lerajzolható. Ilyen típusú kérdések 1992-ben, az első olyan konferencián merültek fel, aminek a témája a gráfrajzolások voltak. Később az ott megemlített témákban végzett kutatásokat szoros együttműködésben végezték vizualizációs szoftvert fejlesztő vállalatokkal.

A rácsméret felső korlátjára két tételt, a lerajzoláshoz pedig két algoritmust mutatunk, melyekhez szükségünk lesz új fogalmakra, mint például a kanonikus sorrend, valamint a Schnyder címkézés és a Schnyder-fa. Mindkét tétel 1990-ből származik és hasonló az eredményük, viszont teljesen más irányból közelítik meg a problémát. Az első, a Fraysseix-Pach-Pollack tételhez tartozó algoritmus minden lépésben először meghatározza a kanonikus sorrend szerint következő csúcs koordinátáit, majd ha szükséges, eltol a már lerajzolt csúcsok közül néhányat, így építi fel a gráf lerajzolását. Schnyder algoritmusával szemben egy lépésben határozza meg a csúcsok koordinátáit az úgynevezett súlyponti koordinátákból, amikhez a gráf Schnyder címkézését és a Schnyder-fáját használja.

Végül azt a problémát nézzük, amikor nem rácspontokra szeretnénk rajzolni, hanem a síkban szabálytalanul elhelyezett pontokra, és megismerkedünk a síkgráfok egy speciális családjával, az úgynevezett *outerplanar gráfokkal*.

## 2. Síkgráfok néhány tulajdonsága

Ebben a fejezetben bemutatjuk a síkgráfok néhány fontos tulajdonságát. A továbbiakban  $n$  a csúcsok,  $e$  az élek száma lesz. Síkgráfoknál egy adott lerajzolás esetén beszélhetünk a síkgráf tartományairól, ezek számát  $t$ -vel jelöljük. Ezen három paraméter közti összefüggést az Euler formula adja meg:

**2.1. Tétel** (Euler formula). *Véges, összefüggő síkbarajzolt gráf esetén*

$$n + t = e + 2.$$

Az Euler formula egy fontos következményeképp felső korlátot adhatunk egy síkgráf élszámára:

**2.1. Következmény.** *Egyszerű síkbarajzolható gráfra, ha  $n \geq 3$ , akkor*

$$e \leq 3n - 6.$$

Vegyük észre, hogy ez az élszám elérhető, ha minden tartomány háromszög.

**2.1. Definíció** (Háromszögelés). *Egy síkbarajzolt gráfot háromszögelésnek nevezünk, ha egyszerű és minden tartományát, a végtelent is, három él határolja.*

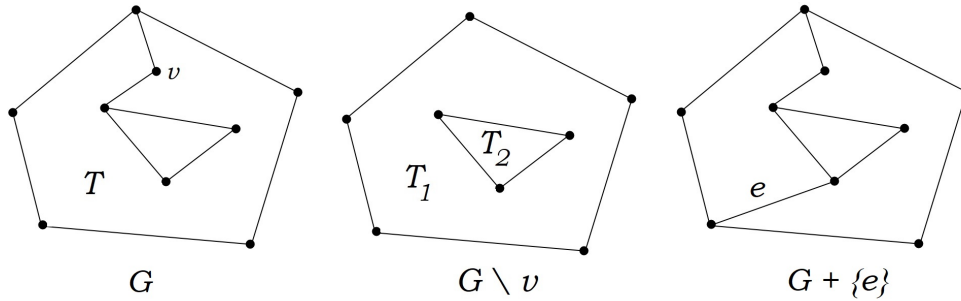
**2.2. Lemma.** *Minden síkbarajzolt egyszerű gráf háromszögelhető.*

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy minden olyan  $G$  síkbarajzolható egyszerű gráf, ami még nem háromszögelés, kiegészíthető élek behúzásával háromszögeléssé.

Ha tehát  $G$  még nem háromszögelés, akkor be tudunk húzni egy élt az alábbiak szerint: ha  $G$  nem összefüggő, akkor van olyan tartománya, amit két különböző komponens határol. A tartományban összeköthetjük egy éllel a két komponenst. Így feltehetjük, hogy  $G$  összefüggő.

Legyen  $T$  egy tartomány. Határa összefüggő, mivel  $G$  is összefüggő. A határ csúcsai sorban legyenek  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Ha van olyan  $v_i = v_j = v$  csúcs, ami többször szerepel a tartomány határán, akkor vegyünk két csúcsot, amik a  $v$  csúcs elhagyásával keletkezett

$G \setminus v$  gráfban különböző komponensekben vannak és kössük őket össze  $T$ -n belül, ezt mutatja az 1. ábra.



1. ábra. Ha  $v$  csúcs többször szerepel egy  $T$  tartomány határán, akkor a  $G \setminus v$  gráf két,  $T_1, T_2$  komponensét összekötjük egy új  $e$  éllel.

Így a továbbiakban feltehetjük, hogy  $v_1, v_2, \dots, v_k$  különbözőek, azaz minden tartomány határa egy kör. Válasszunk egy olyan tartományt, aminek legalább négy csúcsa van, ezek sorban legyenek  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Ilyen biztosan létezik, mert  $G$  nem háromszögelés. Abban az esetben, ha  $v_1$  és  $v_3$  között nem megy él a tartományon kívül, kössük őket össze a tartományon belül. Ha  $v_1$  és  $v_3$  között megy él a tartományon kívül, akkor  $v_2$  és  $v_4$  nincs összekötve a tartományon kívül, mivel az metszené a  $v_1v_3$  élt, így behúzható  $v_2v_4$  él a tartományon belül.

Tehát azt kaptuk, hogy ha  $G$  nem háromszögelés, akkor metszés létrehozása nélkül be tudunk húzni egy új élet. Addig húzunk be a gráfba egyesével új éleket, amíg háromszögelést nem kapunk.

□

**2.3. Megjegyzés.** *Egy síkgráfot akkor nevezünk maximálisnak, ha bármely további él berajzolásával már nem lenne síkbarajzolható. A fenti lemma alapján a maximális síkgráfok éppen a háromszögelések.*

A dolgozat további részében síkgráfok lerajzolását adó algoritmusokkal foglalkozunk. A 2.2 lemma értelmében elegendő háromszögelt síkgráfok lerajzolásával foglalkoznunk: első lépésben háromszögeljük a gráfot, erre futtatjuk az algoritmust, végül az extra éleket elhagyjuk.

### 3. Síkgráfok lerajzolása egyenes szakaszokkal

Az első feladat, amit megvizsgálunk, hogy mikor lehet a síkgráfokat egyenes szakaszokkal lerajzolni. Fáy István 1948-ban, Klaus Wagner 1936-ban egymástól függetlenül a következőt bizonyították:

**3.1. Tétel** (Fáy [3], Wagner [10]). *Minden síkbarajzolható gráf lerajzolható a síkra metszés nélkül úgy, hogy minden éle egyenes szakasz.*

*Bizonyítás.* A 2.2 lemma szerint a Fáy-Wagner tételt elég belátni háromszögelésekre. Technikai okokból az eredeti tételünk helyett az alábbi, erősebb tételt bizonyítjuk:

**3.2. Tétel.** *Legyen  $G$  egy háromszögelés, a külső háromszög csúcsai  $a, b, c$ . Ekkor  $G$  lerajzolható síkba egyenes szakaszokkal úgy, hogy a külső tartomány határa éppen az  $abc$  háromszög legyen.*

*Bizonyítás.* Bizonyítsunk indukcióval. Könnyű látni, hogy  $n = 3$  esetben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy  $G$  egy háromnál nagyobb csúcsszámú gráf, és  $n$ -nél kisebb csúcsszámú gráfokra teljesül az állítás.

**3.3. Lemma.** *Létezik olyan  $a, b, c$  csúcsoktól különböző  $v$  csúcs, amire  $d(v) < 6$ .*

*Bizonyítás.* Bizonyítsuk indirekten. Tegyük fel, hogy minden  $a, b, c$ -től különböző  $v$  csúcs fokszáma legalább hat. A  $G$  éleinek száma legyen  $e$ . Tudjuk, hogy  $d(a), d(b), d(c) \geq 3$ . Így

$$2e = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6(n - 3) + 9 = 6n - 9,$$

vagyis  $e \geq 3n - 4$ . Ellentmondásra jutottunk, mert egy síkbarajzolható gráf élszáma a 2.1 tétel következményeként legfeljebb  $3n - 6$ .

□

Térjünk vissza a 3.2 tétel bizonyítására.

Vegyünk egy tetszőleges  $a, b, c$ -től különböző  $v$  csúcsot, melyre  $d(v) < 6$ .



1. eset:  $d(v) = 3$

Hagyjuk el  $v$ -t. Az így kapott  $G'$  gráf háromszögelés, amire az indukciós feltevés alapján teljesül a tétel. Vegyük  $G'$ -nek egy egyenes szakaszokkal való lerajzolását, majd  $v$ -t helyezzük el a  $G$ -beli szomszédai alkotta háromszögbe és kössük össze a háromszög csúcaival egyenes szakaszokkal (lásd 2.a ábra).

2. eset:  $d(v) = 4$

Legyenek  $v$  szomszédai sorban  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Töröljük  $v$ -t, majd húzzunk be egy átlót a  $v$  törlésével keletkezett négyszög belsejébe úgy, hogy a gráf továbbra is egyszerű maradjon (ami megtehető a síkbarajzolhatóság alapján). Ez a gráf háromszögelés. Erre a gráfra teljesül az állítás az indukciós feltétel alapján, így tekinthetjük egy egyenes szakaszokkal való lerajzolását. Hagyjuk el a legutóbb behúzott élt,  $v$ -t helyezzük el az elhagyott él mentén, majd kössük össze mind a négy szomszédjával, egyenes szakaszokkal (lásd 2.b ábra).

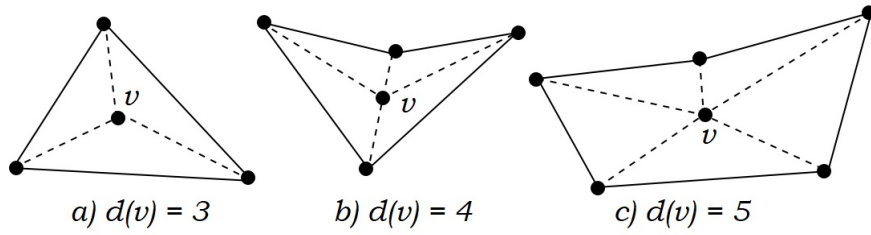
3. eset:  $d(v) = 5$

Legyenek  $v$  szomszédai  $v_1, v_2, \dots, v_5$ . Hagyjuk el a  $v$  csúcsot, így kapunk egy  $G'$  gráfot. Mivel  $G$  háromszögelés volt, ezért  $G'$  tartományait három él határolja, kivéve a  $v_1, v_2, \dots, v_5$  csúcsok alkotta kört. Ebbe a körbe húzzunk be két átlót úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon. Az így kapott  $G''$  háromszögelés, a külső háromszög csúcsai  $a, b, c$ .

Alkalmazzuk az indukciós feltevést, azaz az  $(n - 1)$  csúcsú  $G''$  gráfot rajzoljuk le egyenes szakaszokkal. Most töröljük ki a legutóbb behúzott két átlót. Helyezzük el  $v$  csúcsot a kitörölt átlók közös végpontjának közelében. Könnyen látható, hogy ekkor  $v$ -ből az ötszög összes csúcsa "látszódik", azaz összeköthetjük  $v$ -t az ötszög csúcaival úgy, hogy az új élek az ötszög belsejében legyenek (lásd 2.c ábra).

Tehát mindhárom esetben megkaptuk  $G$  a feltételeknek megfelelő lerajzolását.

□



2. ábra. A megfelelően visszahelyezett  $v$  csúcsot összeköthetjük a sokszög csúcsaival, egyenes szakaszokkal.

Bebizonyítottuk, hogy a háromszöghető gráfok lerajzolhatók egyenes éllel, így igazoltuk a Fáry-Wagner tételt is.

□

## 4. Síkgráfok lerajzolása rácsra

Az előző fejezetben láttuk, hogy tetszőleges síkgráf lerajzolható egyenes szakaszokkal a síkba, viszont a gráf lerajzolásához szükséges terület nagyságáról nem kaptunk információt. Ha azonban a gráfot rácsra rajzolni akarjuk, akkor jól tudnánk következtetni a méretére. Így felmerül a kérdés, mekkora rácsra tudjuk lerajzolni az adott síkgráfot egyenes szakaszokkal.

Egy  $n \times m$ -es rács rácspontjainak a sík azon  $(x, y)$  alakú pontjait nevezzük, ahol  $0 \leq x \leq n$ ,  $0 \leq y \leq m$  egész számok. Azt mondjuk, hogy egy gráf rácsra van rajzolva, ha minden csúcsa rácspontra esik.

A Fáry-Wagner tétel megalkotása után több mint ötven év telt el, amikor két algoritmus is született ebben a témában, szinte azonos időben.

**4.1. Tétel** (Frayssseix, Pach, Pollack [5]). *Minden  $n$  csúcsú síkgráf lerajzolható  $(2n - 4) \times (n - 2)$  méretű rácsra.*

**4.2. Tétel** (Schnyder [9]). *Minden  $n$  csúcsú síkgráf lerajzolható  $(n - 2) \times (n - 2)$  méretű rácsra.*

Ezután csak kisebb javításokat végeztek, a ma ismert legjobb eredmény 2008-ból, Brandenburgtól származik:

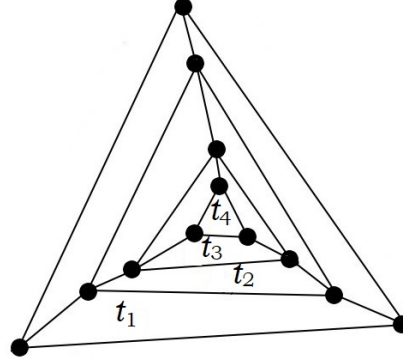
**4.3. Tétel** (Brandenburg [1]). *Minden  $n$  csúcsú síkgráf lerajzolható  $8/9n^2 + \mathcal{O}(n)$  méretű rácsra.*

Most másik irányból indulva megnézzük, milyen alsó korlátot tudunk adni a szükséges rács méretére.

**4.4. Lemma.** *Minden  $n \in \mathbb{N}$  -hez létezik egy olyan  $n$  csúcsú gráf, melynek lerajzolásához  $(n/3 - 1) \times (n/3 - 1)$  méretű rács szükséges.*

*Bizonyítás.* Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy  $n$  osztható 6-tal. Tekintsünk egy olyan  $n$  csúcsú  $G$  síkbarajzolt gráfot, amely  $n/3$  darab egymásba ágyazott háromszögből áll. A háromszögek sorban legyenek  $t_1, t_2, \dots, t_{n/3}$ , és a következőképpen

helyezkedjenek el:  $t_1 > t_2 > \dots > t_{n/3}$ , ahol  $t_i > t_j$  azt jelöli, hogy  $t_j$  háromszög a  $t_i$  háromszög belsejében helyezkedik el. Továbbá két egymást követő háromszög csúcsait páronként kössük össze, lásd 3. ábra.



3. ábra. Konstrukció  $n = 12$  esetén.

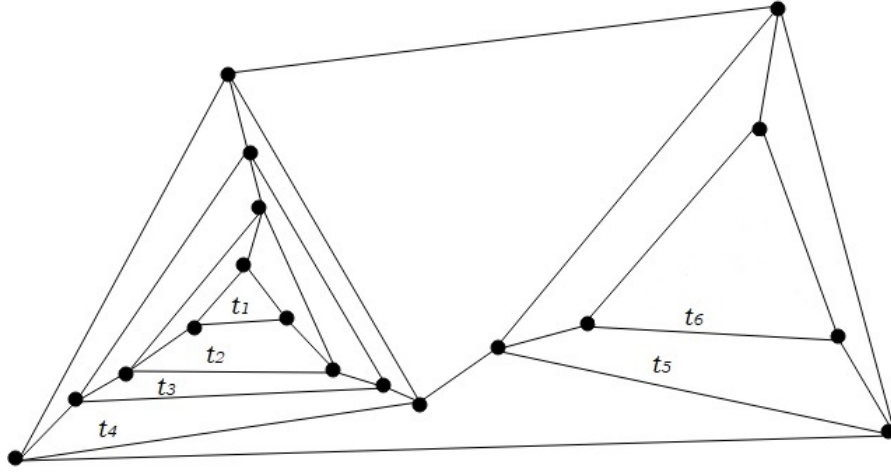
Először vizsgáljuk meg, hogy ezen lerajzoláshoz mekkora rácsméret szükséges. Feltehetjük, hogy  $t_{n/3}$  koordinátái a következők:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Vegyük észre, hogy ha  $t_{i+1} > t_i$ , akkor  $t_{i+1}$  legalább két egységgel magasabb és két egységgel szélesebb, mint  $t_i$ . Ez minden egymást követő háromszögre teljesül, így  $G$ -nek egy olyan lerajzolását kapjuk, ahol a rácsméret legalább  $(2/3n - 1) \times (2/3n - 1)$ , ez a rácsméret pedig el is érhető.

Felmerül az a kérdés, hogy nem lehet-e kisebb rácstra lerajzolni  $G$ -t. Válasszunk egy tetszőleges  $t$  háromszöget  $t_1, t_2, \dots, t_{n/3}$  közül. Három esetet különböztetünk meg:

- $t = t_1$ ,
- $t = t_{n/3}$ ,
- $t = t_k$ , ahol  $k \in \{2, \dots, n/3 - 1\}$ .

Vigyünk ki  $t$ -t a külső háromszögen kívülre. Az első esetben nem változik semmi. A második esetben csupán megfordul a reláció:  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n/3}$ . A harmadik esetben  $t_{k+1} > t_{k+2} > \dots > t_{n/3}$  és  $t_k > t_{k-1} > \dots > t_1$ . Megfigyelhető, hogy  $G$  egy

metszés nélküli lerajzolása sem tartalmazhat három páronként diszjunkt háromszöget, így  $G$  minden metszés nélküli lerajzolása a fenti három eset egyikébe sorolható.



4. ábra. Harmadik esetre példa. Itt  $n = 18$ ,  $k = 4$ .

Ahogy azt már megfigyeltük, az első két esetben a szükséges rácsméret legalább  $(2/3n - 1) \times (2/3n - 1)$ . Nézzük meg, mi a helyzet a harmadik esetben!  $G_k$  legyen a  $t_1, t_2, \dots, t_k$  háromszögek csúcsai által meghatározott részgráf, a  $t_{k+1}, \dots, t_{n/3}$  háromszögek csúcsiból alkotott részgráf pedig  $G'_k$ . Vegyük észre, hogy  $G_k$  és  $G'_k$  közül az egyik legalább  $n/2$  csúcsot, így legalább  $n/6$  háromszöget tartalmaz, ezért a lerajzolásához szükséges rácsméret az első megfigyelés alapján  $(n/3 - 1) \times (n/3 - 1)$ . Ezzel az állítást beláttuk.

□

A fenti tétel eredményén szintén csak kisebb javításokat végeztek, a ma ismert legjobb alsó korlátot Frati és Patrignani 2007-es eredménye adja:

**4.5. Tétel** (Frati-Patrignani [4]). *Minden  $n \in \mathbb{N}$ -hez létezik egy olyan  $n$  csúcsú gráf, melynek lerajzolásához  $4/9n^2 - \mathcal{O}(n)$  méretű rács szükséges.*

A 4.3 és a 4.5 tételt összevetve azt látjuk, hogy az algoritmusok által biztosított rácsméret optimális, javításokat már csak a konstans szorzón lehetne végezni.

## 4.1. Fraysseix-Pach-Pollac algoritmus

Ebben az alfejezetben a 4.1-es tételt bizonyítjuk, azaz azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges  $n$  csúcsú síkgráf lerajzolható  $(2n - 4) \times (n - 2)$  méretű rácsra. Ehhez először szükségünk van néhány definícióra.

**4.1. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy egy síkbarajzolt gráf belsőleg háromszögelt, ha egyszerű és minden belső tartománya egy háromszög.*

**4.2. Definíció** (Kanonikus sorrend). *Legyen  $G$  egy háromszögelt,  $n$  a csúcsok száma és tegyük fel, hogy  $n \geq 3$ . Azt mondjuk, hogy a csúcsok egy  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sorrendje kanonikus sorrend, ha következők teljesülnek:*

- (i) *a  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  csúcsok egy 2-összefüggő, belsőleg háromszögelt  $G_k$  részgráfot alkotnak minden  $k = 1, \dots, n$ -re,*
- (ii) *a  $(v_1, v_2)$  él a  $G_k$  határán van minden  $k = 2, \dots, n$ -re,*
- (iii) *ha  $k < n$ , akkor a  $v_{k+1}$  a  $G_k$  végtelen tartományában helyezkedik el úgy, hogy  $v_{k+1}$  összes  $G_k$ -beli szomszédja  $G_k$  határán van és egy utat határoznak meg.*

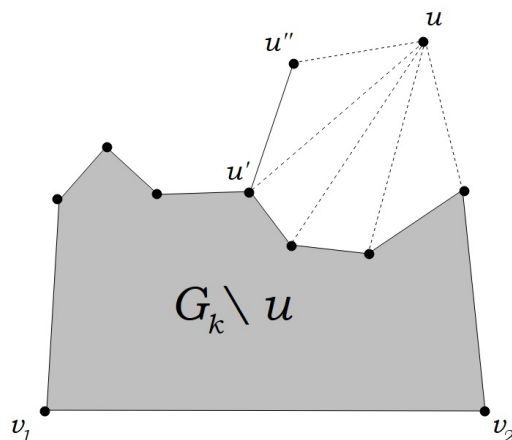
**4.6. Lemma.** *Minden háromszögeltnek létezik kanonikus sorrendje.*

*Bizonyítás.* Legyen  $G = G_n$  egy  $n$  csúcsú háromszögelt,  $v_1, v_2, v_n$  csúcsok  $G_n$  határán vannak. Ha  $k = n$ , akkor teljesül a 4.2 definíciójában szereplő (i) feltétel, mert  $G$  háromszögelt és (ii) is teljesül, mert  $v_1$  és  $v_2$  csúcsokat így definiáltuk. Mivel  $k = n$ , ezért (iii)-t nem kell vizsgálni.

Tegyük fel, hogy  $v_1, v_2, v_{k+1}, \dots, v_n$  csúcsokat már beválasztottuk a kanonikus sorrendbe úgy, hogy (i), (ii) és (iii) teljesülnek minden  $k + 1 \leq i \leq n$ -re.

Tekintsük a  $G_k$  gráfot, és keressük meg a kanonikus sorrend következő elemét,  $v_k$ -t. Azt tudjuk, hogy  $v_k$ -nak  $G_k$  határán kell elhelyezkednie, azonban nem választhatjuk akármelyik határon lévő csúcsot. Vegyük észre, hogy ha egy határon lévő  $u$  csúcs össze van kötve egy másik  $G_k$  határán lévő  $u'$  csúccsal, akkor  $u$  elhagyása után keletkező

gráf nem lesz 2-összefüggő. Nevezzük az ilyen típusú, azaz két határon lévő csúcsot összekötő élet *húrnak*. Az 5. ábrán látható példa húrra.



5. ábra. Legyen  $u$  és  $u'$  a  $G_k$  határán két nem egymást követő csúcs, melyek között fut él. Legyen továbbá  $u''$  az  $u'$  szomszédja  $G_k$  határán, az  $u$ -t és  $u'$ -t összekötő úton. Az  $u'u$  él egy húr  $G_k$  gráfban, így  $G_k \setminus u$ -ban  $u'$  elvágó csúcs.

Az alábbi két állításban belátjuk, hogy  $v_k$  választása során elegendő arra figyelni, hogy ne induljon ki belőle húr. Majd megmutatjuk, hogy mindig létezik ezen tulajdonságot teljesítő csúcs.

**4.7. Állítás.** *Legyen  $u$  a belsőleg háromszögelt  $G_k$  gráf egy határpontja. Ekkor  $G_k \setminus u$  pontosan akkor marad 2-összefüggő, ha  $u$ -ból nem indul ki húr.*

*Bizonyítás.* Az egyik irányt már láttuk, azaz ahhoz, hogy a gráf 2-összefüggő maradjon, szükséges, hogy  $u$ -ból ne induljon húr. Mutassuk meg, hogy ez elegendő, azaz, hogy ha  $u$ -ból nem indul ki húr,  $G_k \setminus u$  2-összefüggő marad.

Tegyük fel, hogy  $G_k$ -ban  $u$  nem végpontja húrnak és  $G_k \setminus u$ -beli szomszédai legyenek  $w_1, w_2, \dots, w_l$  egymás mellett a  $G_k \setminus u$  határán. Tekintsük a  $G_k \setminus u$  gráfot. Ez belsőleg háromszögelt, mivel  $G_k$  is az volt és  $u$  törlésével nem változtattunk semmit a belső tartományon. Be akarjuk látni, hogy  $G_k \setminus u$  is 2-összefüggő.

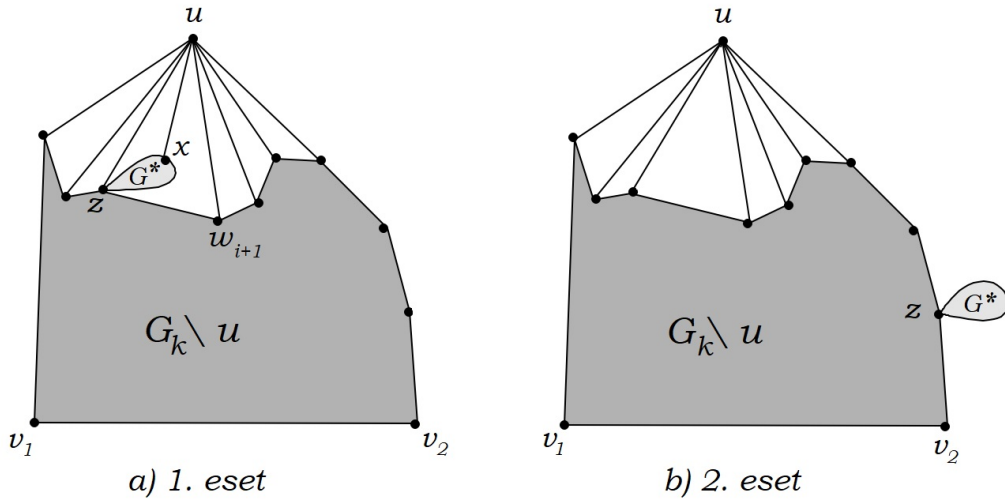
Nézzük meg, hogy  $G_k \setminus u$  mikor nem lesz 2-összefüggő. Ez akkor fordulhat elő, ha  $G_k \setminus u$ -ban van egy  $z$  elvágó csúcs.  $G_k$  2-összefüggősége miatt  $z$  a  $G_k \setminus u$  határán van. Két esetet különböztetünk meg:

1. a  $z$  csúcs a  $w_1, w_2, \dots, w_l$  csúcsok közül valamelyik,
2. vagy  $z$  a  $w_1, w_2, \dots, w_l$  csúcsoktól eltérő.

Legyen  $G^*$  a  $G_k \setminus \{u, z\}$  azon komponense, amely nem tartalmazza a  $v_1, v_2$  csúcsokat. Az 1. esetben ekkor lenne  $G^*$  határán legalább egy  $z = w_i$ -től eltérő  $x$  csúcs. A  $G^*$  határa,  $u$ , és  $w_{i+1}$  által meghatározott  $X$  tartomány nem háromszög, viszont  $G_k$  belsőleg háromszögelt, így kell lennie élnek  $x$  és  $u$  között. Viszont,  $x, z, w_{i+1}, u$  által határolt  $X'$  tartomány még így sem háromszög és nem tudunk úgy behúzni több élt, hogy háromszögelést kapjunk, lásd 6.a ábra. Ez pedig ellentmond annak, hogy  $G_k$  belsőleg háromszögelt.

A 2. esetben pedig  $G_k$  nem lenne 2-összefüggő, hiszen ebben az esetben  $z$  már  $G_k$ -ban is elvágó csúcs lett volna, lásd 6.b ábra.

Tehát mindkét esetben ellentmondásra jutottunk,  $G_k \setminus u$  2-összefüggő.



6. ábra. Az első, illetve a második esetben is látható, hogy ha  $G_k \setminus u$ -ban lenne  $z$  elvágó csúcs, akkor  $G_k \setminus u$  nem lenne 2-összefüggő.

□

Így ha  $u$  csúcs nem végpontja húnak, a kanonikus sorrend összes tulajdonsága teljesül, ezért választható a kanonikus sorrend következő elemének. Vagyis elegendő



megmutatnunk, hogy létezik ilyen  $u$  csúcs.

**4.8. Állítás.** *Legyenek egy belsőleg háromszögelt gráf külső tartományán szereplő csúcsok  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , ebben a sorrendben. Ekkor létezik olyan  $i$ , hogy  $u_i$  nem végpontja egy húrnak sem.*

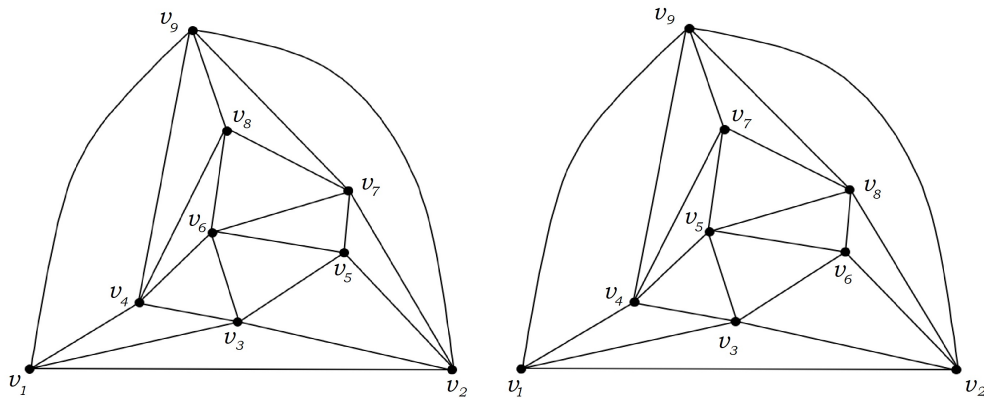
*Bizonyítás.* Legyenek  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sorban a  $G_k$  határán lévő csúcsok,  $u_1 = v_1, u_m = v_2$ . Ha egyikből se indul ki húr, készen vagyunk. Ellenkező esetben válasszunk egy  $u_i u_j$  húr, melyre  $|i - j|$  minimális. Tudjuk, hogy  $u_i$  és  $u_j$  nem szomszédosak, különben lenne egy párhuzamos élünk. Ekkor  $u_{i+1}$  nincs összekötve  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{j+1}, \dots, u_m$  csúcsok közül egyikkel sem, mert akkor lenne két metsző él, valamint  $u_{i+1}$  sincs összekötve  $u_{i+3}, \dots, u_j$  csúcsok közül senkivel, mert akkor nem teljesülne, hogy  $|i - j|$  minimális. Így  $u_{i+1}$  nem végpontja egy húrnak sem.

□

Tehát minden  $k$ -ra meg tudjuk találni a kanonikus sorrend  $k$ -adik elemét, így beláttuk a lemmát.

□

**4.9. Megjegyzés.** *A kanonikus sorrend nem egyértelmű. Erre példa a 7. ábrán szereplő gráf, melynek mindkét feltüntetett sorrendje teljesíti a kanonikus sorrend feltételeit.*



7. ábra. Egy gráfnak több kanonikus sorrendje lehet.

Készen állunk bemutatni a Fraysseix-Pach-Pollac algoritmust, ami a kanonikus sorrend alapján rajzolja meg a gráfot egy rácsra. Az algoritmus során a kanonikus sorrend szerint haladva egyenként vesszük a csúcsokat és határozzuk meg a koordinátáikat. Azonban 1-1 új csúcs koordinátáinak meghatározása során a korábbi csúcsok koordinátáit esetenként megváltoztatjuk. Fontos megjegyezni, hogy a gráf így is minden lépésben síkbarajzolt marad.

A  $G_{k-1}$  határán lévő csúcsok sorban legyenek  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , ahol  $u_1 = v_1$  és  $u_m = v_2$ . Minden  $k$ -ra  $G_{k-1}$  gráfot a következőképpen fogjuk megrajzolni:

1.  $v_1$  a  $(0, 0)$ ,  $v_2$  a  $(2k - 6, 0)$  rácsponton van,
2.  $G_{k-1}$  határán egymás mellett lévő csúcsok  $x$  koordinátái monoton nőnek, azaz  $x_{k-1}(u_1) < x_{k-1}(u_2) < \dots < x_{k-1}(u_m)$ ,
3.  $G_{k-1}$  végtelen tartományát határoló élek meredeksége  $\pm 1$  lehet ( $v_1 v_2$  él kivételével).

Tegyük fel, hogy adott  $G_{k-1}$ -nek egy olyan lerajzolása, mely teljesíti a fentieket. El szeretnénk helyezni a kanonikus sorrend szerint következő  $v_k$  csúcsot.

Tegyük fel, hogy  $v_k$  szomszédai  $G_k$ -ban  $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$  ( $1 \leq p < q \leq m$ ). Helyezzük el az  $u_p$  csúcsra illeszkedő 1 meredekségű egyenes és az  $u_q$  csúcsra illeszkedő -1 meredekségű egyenes  $P$  metszéspontjába  $v_k$ -t. Ez még nem biztos, hogy megfelelő, először be kell látnunk, hogy  $P$  egy rácspont. Ehhez definiáljuk két pont *Manhattan-távolságát*.

**4.3. Definíció** (Manhattan-távolság). *A  $p = (p_1, p_2)$  és  $q = (q_1, q_2)$  pontok Manhattan-távolsága a*

$$d(p, q) = |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|$$

*érték.*

**4.10. Lemma.** *Legyen  $(a, b)$  és  $(c, d)$  két rácspont, melyek Manhattan-távolsága páros. Legyen  $e$  egy  $1$  meredekségű,  $(a, b)$ -n átmenő egyenes,  $f$  egy  $-1$  meredekségű,  $(c, d)$ -n átmenő egyenes. Ekkor  $e$  és  $f$  metszéspontja rácspont.*

*Bizonyítás.* Az  $e$  egyenes egyenlete  $y = x - a + b$ , az  $f$  egyenes egyenlete  $y = -x + c - d$ . A metszéspontjuk  $(x_p, y_p)$ , ahol

$$x_p = \frac{a - b + c - d}{2} \text{ és } y_p = x - a + b.$$

Mivel  $(a, b)$  és  $(c, d)$  Manhattan-távolsága páros, így  $a - b + c - d$  is páros, ennek a fele,  $x_p$  pedig egész szám. Végül  $y_p$  is egész, mert  $x$ ,  $a$  és  $b$  is azok.

□

Vegyük észre, hogy az  $u_p$  és  $u_q$  csúcsok között Manhattan-távolsága páros, hisz van köztük  $\pm 1$  meredekségű szakaszokból álló út. Így az előző lemma alapján  $P$  egy rácspont.

Azonban lehetséges, hogy az így kapott lerajzolás nem megfelelő, lehet, hogy az  $u_p v_k$  élre már megrajzolt csúcs illeszkedik. Ezt a következőképpen oldjuk meg:  $v_k$  beillesztése előtt néhány csúcsot, köztük az  $u_1, u_2, \dots, u_p$  csúcsokat az  $x$  tengely mentén eggyel balra, néhány csúcsot pedig, köztük az  $u_q, u_{q+1}, \dots, u_m$  csúcsokat eggyel jobbra toljuk. Végül az egész gráfot toljuk el  $1$  egységgel jobbra, hogy továbbra is pozitív  $x$  koordinátákkal dolgozhassunk. Most elhelyezhetjük  $v_k$ -t az  $u_p$  csúcsból induló  $1$  meredekségű, és az  $u_q$  csúcsból induló  $-1$  meredekségű egyenesek metszéspontjába. Az  $u_p$  és  $u_q$  csúcsok Manhattan-távolsága  $2$ -vel nőtt, azaz páros maradt, így az előző lemma alapján a rajtuk átmenő  $+1$  és  $-1$  meredekségű egyenesek metszéspontja megint rácspont.

Az új  $u_p v_k, \dots, u_q v_k$  élek egyértelműen nem keresztezik egymást és a régi éleket.

Még definiálnunk kell a többi csúcsra is az eltolást, valamint meg kell győződnünk arról, hogy a gráf síkbarajzolt marad a csúcsok eltolása után is. Ehhez bevezetünk

néhány új fogalmat, majd egy lemmát használunk, ami technikai okokból erősebb, mint amire szükségünk van.

**4.4. Definíció.** *Ha  $v_k$  szomszédai  $G_k$ -ban  $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$ , akkor azt mondjuk, hogy  $u_{p+1}, \dots, u_{q-1}$  csúcsok fedve vannak  $v_k$  által.*

Vegyük észre, hogy minden belső csúcs csak egyszer lehet fedett és egy csúcs és általa fedett csúcsok közötti kapcsolatok egy fát,  $G_k$ -ban erdőt definiálnak minden  $1 \leq k \leq n - 1$ -re. Ebben az erdőben  $u_i$ -hez tartozó  $u_i$  gyökerű fa legyen  $L(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ .

**4.11. Lemma.** *Legyen  $G_k$  a fent definiált síkbarajzolt gráf, és legyenek  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \in \mathbb{N}$ . Ha minden  $i = 1, \dots, m - 1$ -re  $L(u_i)$ -t elmozgatjuk jobbra  $d_i$  egységgel, akkor a gráf síkbarajzolt marad.*

*Bizonyítás.* Bizonyítsuk  $k$ -ra vonatkozó indukcióval. Könnyű látni, hogy  $k = 4$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy  $G_{k-1}$ -re teljesül a lemma és megmutatjuk, hogy ekkor  $G_k$ -ra is igaz lesz. A  $G_k$  határán lévő csúcsok  $u_1, \dots, u_p, v_k, u_q, \dots, u_m$ . Az ezekhez tartozó  $L(u_1), \dots, L(u_p), L(v_k), L(u_q), \dots, L(u_m)$ -t szeretnénk elmozgatni  $d_{u_1} \leq \dots, d_{u_p} \leq d_{v_k} \leq d_{u_q} \leq \dots \leq d_{u_m}$  pozitív egész számokkal jobbra.

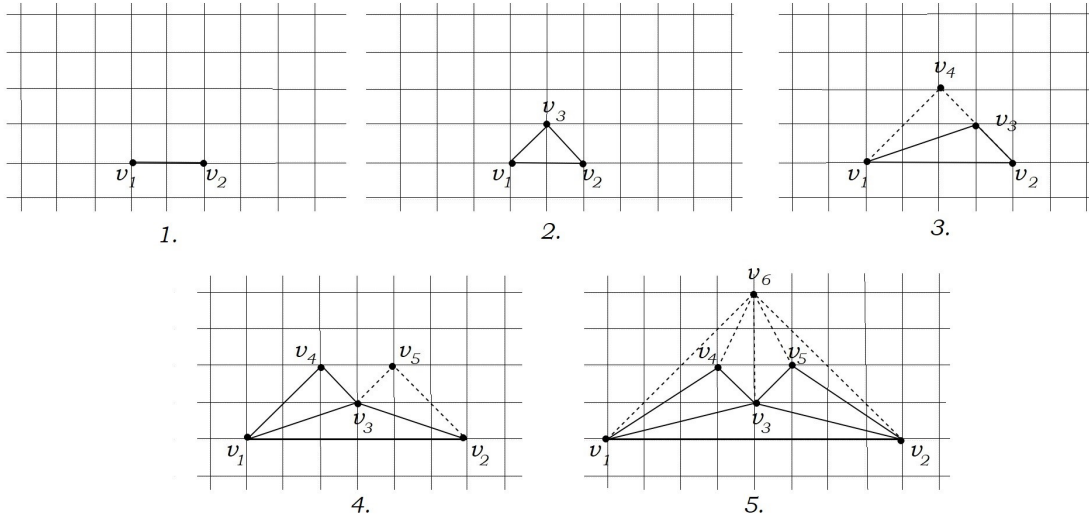
Először  $u_1, \dots, u_m$  csúcsokhoz tartozó  $L(u_1), \dots, L(u_m)$ -t toljuk el jobbra  $d_{u_1} \leq \dots \leq d_{u_m}$  számokkal úgy, hogy  $L(u_p), \dots, L(u_q)$  -t egységesen  $d_{v_k}$  egységgel mozdítjuk. Az indukciós feltevés szerint ekkor a  $G_k \setminus v_k$  gráf síkbarajzolt marad. Az  $u_{p+1}v_k, \dots, u_{q-1}v_k$  élek  $G_k$  külső tartományában vannak, így nem metszik egymást. Tehát  $G_k$  síkbarajzolt marad.

□

Az eddigiek alapján ha  $L(u_1), \dots, L(u_p)$  csúcsokat nem mozdítjuk el,  $L(u_{p+1}), \dots, L(u_{q-1})$  csúcsokat 1-gyel jobbra,  $L(u_q), \dots, L(u_{m-1})$  csúcsokat pedig 2-vel jobbra toljuk, akkor a lemma alapján a gráf síkbarajzolt marad. Így ezzel a módszerrel megrajzolhatjuk a gráfot.

Tehát ez a módszer lerajzol egy  $n$  csúcsú gráfot egy  $(2n - 4) \times (n - 2)$ -es rácsra  $\mathcal{O}(n)$  időben.

Végül egy példán szemléltetjük az algoritmus futását.



8. ábra. Példa az algoritmus futására.

1. A  $v_1v_2$  él elhelyezése.
2. A  $v_3$  csúcsot elhelyezzük a  $v_1$ -en átmenő  $+1$  és a  $v_2$ -n átmenő  $-1$  meredekségű egyenesek metszéspontjába.
3. Ahhoz, hogy  $v_4$ -et,  $v_1$  és  $v_3$  szomszédját el tudjuk helyezni a  $v_1$ -en átmenő  $+1$  és a  $v_3$ -on átmenő  $-1$  meredekségű egyenesek metszéspontjába,  $v_2$ -t és  $v_3$ -at 2-vel jobbra kell tolni.
4. A  $v_2$  csúcsot 2-vel jobbra toljuk, majd elhelyezzük  $v_5$ -öt.
5. A  $v_3$ -at,  $v_4$ -et,  $v_5$ -öt 1-gyel,  $v_2$ -t pedig 2-vel jobbra toljuk. Végül elhelyezzük  $v_6$ -ot.

## 4.2. Schnyder algoritmus

Schnyder tétele szerint (lásd 4.2) minden  $n$  csúcsú síkbarajzolható gráf lerajzolható egy  $(n - 2) \times (n - 2)$  méretű rácsra úgy, hogy az élei nem metszik egymást. Az egyszerűség kedvéért mi egy kicsit rosszabb felső korlátot adó tételt bizonyítunk: minden  $n$  csúcsú síkbarajzolható gráf lerajzolható egy  $(2n - 5) \times (2n - 5)$  méretű rácsra úgy, hogy az élei nem metszik egymást. Ebben az alfejezetben erre a lerajzolásra mutatunk egy algoritmust.

Mindenekelőtt szükségünk lesz néhány új definícióra.

**4.5. Definíció** (Súlyponti koordinátázás). *Legyen  $A, B, C$  három vektor a térben, a végpontjaik egy  $\triangle_{ABC}$  háromszöget alkotnak. Legyen  $x$  egy pont  $\triangle_{ABC}$ -ben. Azt mondjuk, hogy  $x$   $\triangle_{ABC}$ -re vonatkozó súlyponti koordinátázása az  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  hármas, melyre az alábbiak teljesülnek:*

$$(i) \quad x = \alpha A + \beta B + \gamma C, \text{ és}$$

$$(ii) \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

**4.6. Definíció** (Súlyponti reprezentáció). *A súlyponti reprezentációja egy  $G = (V, E)$  gráfnak a súlyponti koordináták hozzárendelése a  $G$  csúcsaihoz:*

$$f : V \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}^3, \quad v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$$

*a következő tulajdonságokkal:*

$$(a) \quad v_1 + v_2 + v_3 = 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra, és}$$

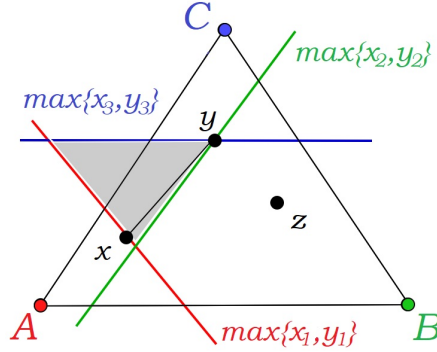
$$(b) \quad \text{minden } xy \in E \text{ élre és minden } z \in V \setminus \{x, y\} \text{ csúcsra létezik } k \in \{1, 2, 3\}, \text{ amire}$$
$$x_k < z_k \text{ és } y_k < z_k.$$

Vizsgáljuk meg közelebbről, hogy mit is jelent a (b) feltétel.

- Ha  $k = 1$ , akkor  $x_1 < z_1$  és  $y_1 < z_1$ , vagyis  $z$  csakis a  $\max\{x_1, y_1\}$  egyenestől balra helyezkedhet el.

- Ha  $k = 2$ , akkor  $z$  a  $\max\{x_2, y_2\}$  egyenestől jobbra helyezkedhet el.
- Ha  $k = 3$ , akkor  $z$  a  $\max\{x_3, y_3\}$  egyenestől felfelé lehet.

Tehát  $z$  semmilyen esetben sem lehet a három egyenes metszéspontjai által meghatározott háromszög belsejében. Nevezzük ezt a háromszöget *tiltott háromszögnek*.



9. ábra. Az ábrán szürkével jelöltük az  $xy$  élhez és  $z$  csúshoz tartozó tiltott háromszöget.

**4.12. Lemma.** Legyen  $f : v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$  egy súlyponti reprezentációja egy síkbarajzolható  $G$  gráfnak. Legyen  $A, B, C$  három pont a térben, melyek szabályos háromszöget alkotnak. Ekkor a gráf

$$\Phi : v \in V \mapsto v_1A + v_2B + v_3C$$

által meghatározott lerajzolása megadja  $G$ -nek egy síkba való lerajzolását az  $ABC$  háromszög által határolt tartományon belül.

*Bizonyítás.* Először is vegyük észre, hogy nincs olyan  $x$  csúcs, ami valamilyen  $uv$  élen helyezkedik, mivel az  $uv$  él a tiltott háromszögbe esik.

Másodszor be akarjuk látni, hogy nincs olyan  $uv$  és  $u'v'$  él, amelyek metszik egymást. A súlyponti reprezentáció tulajdonsága szerint létezik olyan  $i$ , melyre  $u'_i > u_i, v_i$ , olyan  $j$ , melyre  $v'_j > u_j, v_j$ , olyan  $k$ , melyre  $u_k > u'_k, v'_k$ , illetve olyan  $l$ , melyre  $v_l > u'_l, v'_l$ .

Látható, hogy  $i$  nem egyezhet meg  $k$ -val vagy  $l$ -l, és  $j$  sem egyezhet meg  $k$ -val vagy  $l$ -l, azaz  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ . Ez viszont csak akkor lehet, ha  $i = j$  vagy  $k = l$ .

Feltehetjük, hogy  $i = j = 2$ . Ekkor  $u'_2 v'_2 > u_2, v_2$ . Ez viszont azt jelenti, hogy az  $uv$  és az  $u'v'$  élek között létezik egy szeparáló egyenes, azaz a két él nem metszi egymást. Tehát semelyik két él nem metszi egymást, így beláttuk, hogy a  $\Phi G$  gráfnak egy síkbarajzolását adja meg.

□

A következőekben céluk megmutatni, hogy mindig létezik súlyponti reprezentáció. Ehhez definiáljuk a gráf szögeinek *Schnyder-címkézését*, illetve a gráf *Schnyder-fáját*.

**4.7. Definíció** (Schnyder címkézés). *Legyen  $G$  egy háromszögelt gráf. A  $G$  Schnyder címkézése a belső szögek felcímkézése az 1, 2, 3 számokkal úgy, hogy:*

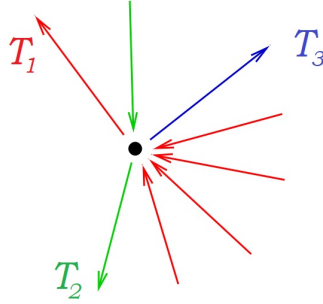
1. *minden belső tartomány három szögének címkéi 1, 2, 3 legyenek, az óramutató járásával ellentétes irányban,*
2. *minden belső csúcs körül a címkék egy nemüres intervallumot alkotnak 1-esekből, egy nemüres intervallumot 2-esekből, majd egy nemüres intervallumot 3-asokból, óramutató járásával ellentétes irányban.*

**4.8. Definíció** (Schnyder-fa). *Egy  $G = (V, E)$  háromszögelt gráfhoz tartozó Schnyder-fa a belső élek egy felosztása három csoportra a következőképpen: az irányított élek három csoportja  $T_1, T_2, T_3$ , valamint*

1. *minden  $v$  csúcsnak pontosan három kifelé mutató éle van, egy  $T_1$ -beli, egy  $T_2$ -beli és egy  $T_3$ -beli,*
2. *minden  $v$  csúcshoz tartozó élek sorrendje óramutató járásával ellentétes irányban: egy  $T_1$ -beli kimenő él,  $t_3 \geq 0$  db  $T_3$ -beli bemenő él, egy  $T_2$ -beli kimenő él,  $t_1 \geq 0$  db  $T_1$ -beli bemenő él, egy  $T_3$ -beli kimenő él,  $t_2 \geq 0$  db  $T_2$ -beli bemenő él.*

Azt szeretnénk belátni, hogy minden háromszögelt gráfhoz létezik Schnyder-fa, melynek bizonyításához szükségünk van egy új definícióra.





10. ábra. Példa egy Schnyder-fa adott csúcsába be- és kimenő élekre.

**4.9. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $G$  gráfnak egy  $uv$  éle összehúzható, ha  $u$ -nak és  $v$ -nek pontosan két közös szomszéda van.

Az  $uv$  él összehúzása azt jelenti, hogy az  $u$  és  $v$  csúcsot összeolvasztjuk egy  $w$  csúccsá. Az  $u$  és  $v$  szomszédai mind az új  $w$  csúcs szomszédai lesznek. Az így kapott gráfot  $G/\{uv\}$ -vel jelöljük. Vegyük észre, hogy egy háromszögelés összehúzható élének összehúzása után az újonnan létrejött gráf továbbra is háromszögelés. Kampen belátta, hogy mindig létezik ilyen él:

**4.13. Lemma** (Kampen [7]). Legyen  $G$  egy háromszögelés, a külső háromszög csúcsai legyenek  $a, b, c$ . Ekkor létezik egy összehúzható  $ax$  él, ahol  $x$  belső csúcs, azaz  $x \neq b, c$ .

Most már minden eszközünk megvan ahhoz, hogy a következő lemmát bizonyítsuk:

**4.14. Lemma.** Minden háromszögelt gráfnak van Schnyder-címkézése és létezik hozzá Schnyder-fa.

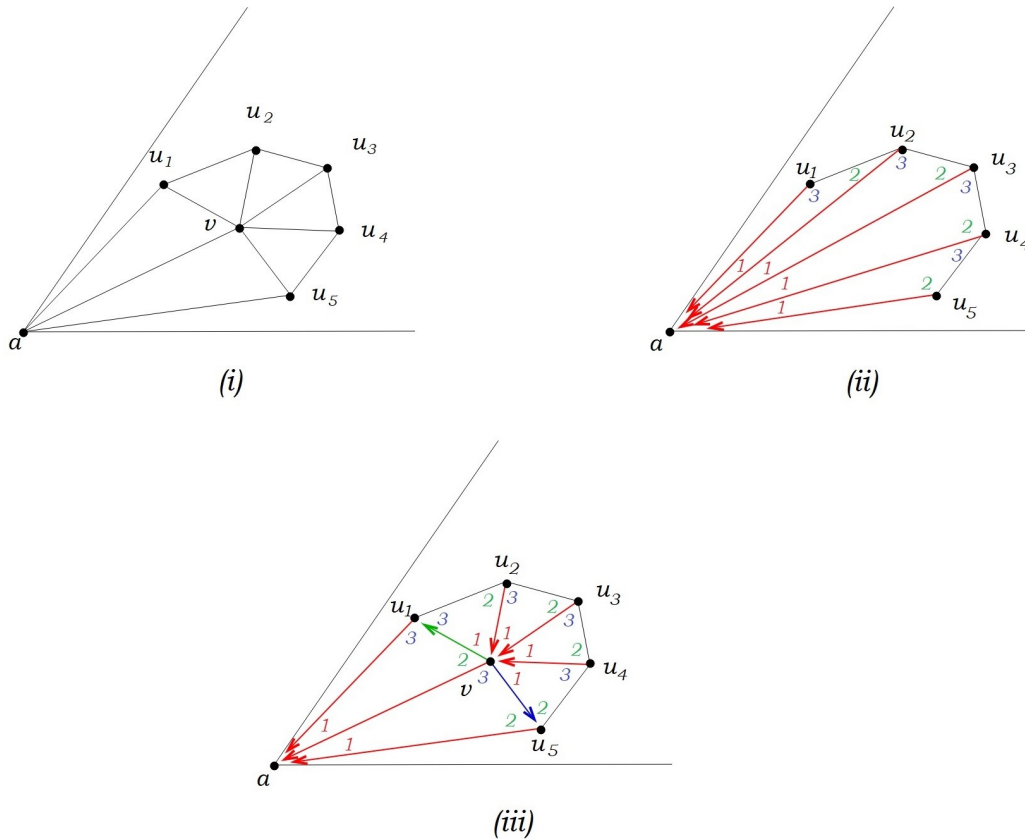
*Bizonyítás.* Csúcsok számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Az  $n = 3$  eset triviális, hiszen ha a gráfnak csak három csúcsa van, akkor a három belső szögét ellátjuk 1, 2, 3 címkékkel. Tegyük fel, hogy minden  $k$ -nál kevesebb csúcsú háromszögelt gráfnak van Schnyder-címkézése és hozzá tartozó Schnyder-fa.

Legyen  $G_k$  egy  $k$  csúcsú háromszögelt gráf, a külső háromszögének három csúcsa  $a, b, c$ , valamint  $v$  legyen az  $a$  csúcsnak egy szomszéda. Válasszuk  $v$ -t úgy, hogy az  $av$  él összehúzható legyen. Ezt a 4.13. tétel értelmében megtehetjük. Legyenek  $v$  további

szomszédai  $u_1, u_2, \dots, u_m$  óramutató járásával ellentétes irányban. Húzzuk össze az  $av$  élt. Az így kapott  $(k-1)$  csúcsú  $G_k/\{av\}$  gráf szintén háromszögelés, mivel az  $av$  él összehúzható volt. Így az indukciós feltevés alapján létezik Schnyder-címkézés, ahol az összes  $a$  csúcs melletti szögnek 1 a címkéje. Az ehhez tartozó Schnyder-fa tekintetében  $u_i a$  élek  $i = 1, \dots, m$ -re  $T_1$ -beliek és  $a$  felé mutatnak.

Most  $v$ -t vissza szeretnénk tenni a gráfba. Ezt megtehetjük úgy, hogy nem rontjuk el a címkézést:  $\angle(vu_i, vu_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , valamint  $\angle(au_1, av)$  és  $\angle(av, au_m)$  címkéje is legyen 1. A Schnyder-fa pedig a következőképpen néz ki:  $va$  él  $T_1$ -beli és  $a$ -ba mutat,  $vu_1$  él  $T_2$ -beli  $u_1$ -be,  $vu_m$  él  $T_3$ -beli  $u_m$ -be mutat. Az  $u_i v$  ( $i = 2, \dots, m-1$ ) élek mind  $v$ -be mutatnak és  $T_1$ -beliek. A többi él nem változik. Ezzel teljesülnek a Schnyder-címkézés és a Schnyder-fa definíciójában szereplő kritériumok.

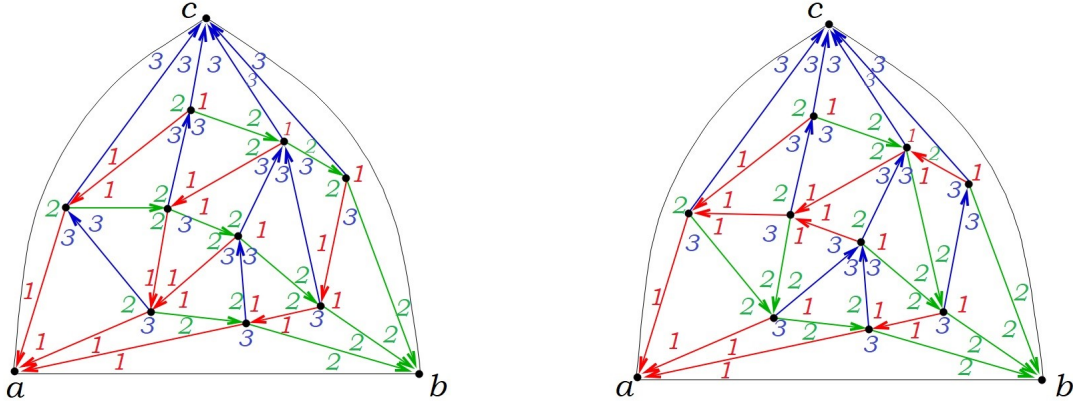
□



11. ábra. (i)  $G_k$  kezdetben, (ii) Schnyder címkézés és Schnyder-fa a  $G_k/\{av\}$  gráfban, (iii) Schnyder címkézés és Schnyder-fa kiterjesztése  $G_k$ -ra.

A fenti tétel bizonyítása  $\mathcal{O}(n)$  idejű algoritmust ad a Schnyder-címkezésre.

**4.15. Megjegyzés.** Adott gráfhoz tartozó Schnyder címkezés és Schnyder fa nem egyértelmű, erre példa a 12. ábrán szereplő példa.



12. ábra. Egy adott gráfnak többféle Schnyder címzése lehet, különböző címkézésekhez pedig más-más Schnyder-fa tartozik.

Idézzük fel a célunkat: meg szeretnénk mutatni, hogy minden gráfnak létezik súlyponti reprezentációja. Tehát most megnézzük, hogyan lehet Schnyder címkezésből és Schnyder-fából súlyponti reprezentációt kapni.

**4.16. Lemma.** Legyen  $G$  egy legalább négy csúcsú háromszögelt gráf és a hozzá tartozó Schnyder-fában az élek három csoportja legyen  $T_1, T_2, T_3$ . Ekkor minden  $T_i$  egy fa ami tartalmazza az összes belső csúcsot és pontosan egy külső csúcsot, valamint az összes éle a külső csúcs felé mutat. A külső csúcsok óramutató járásával ellentétes irányban  $T_1, T_2, T_3$ -hoz tartoznak.

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy négy csúcsú gráfra igaz a lemma. Tegyük fel, hogy minden  $k$  csúcsú gráfra is teljesül. Ekkor bármely  $(k + 1)$  csúcsú gráfra a 4.14-es lemma bizonyítása alapján az állításunk továbbra is igaz marad.

□

Legyenek a  $T_1$ -beli élek pirosak, a  $T_2$ -beli élek zöldek, a  $T_3$ -beli élek pedig kékek. A fenti lemmából következik, hogy  $G$ -nek minden  $v$  csúcsából létezik egy piros élekből

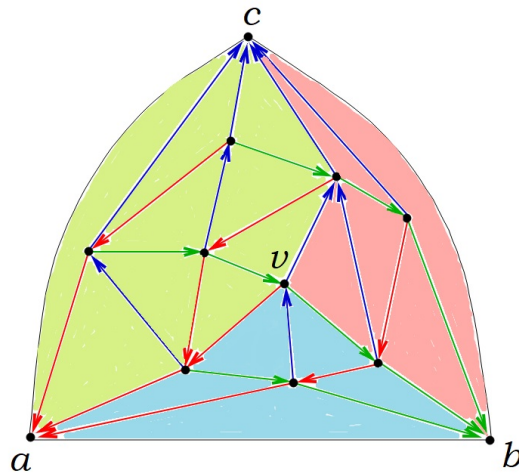
álló  $P_1(v)$  irányított út  $a$ -ba, egy zöld élekből álló  $P_2(v)$  irányított út  $b$ -be, és egy kék élekből álló  $P_3(v)$  irányított út  $c$ -be.

**4.17. Lemma.** *Tetszőleges  $v$  belső csúcsra a  $P_1(v)$ ,  $P_2(v)$ ,  $P_3(v)$  utak csak  $v$ -ben keresztezik egymást.*

*Bizonyítás.* Indirekten tegyük fel, hogy a  $P_2(v)$ -hez tartozó él egy  $w$  csúcsban is keresztezik a  $P_1(v)$ -hez tartozó éleket úgy, hogy  $w$  az útnak az első ilyen csúcsa. Ekkor  $w$ -be bemegy egy zöld él és ki is megy belőle egy zöld él. A Schnyder-fa definíciója alapján a kimenő zöld él jobb oldalán kimenő piros élnek kell lennie, viszont most a kimenő zöld jobb oldalán  $w$ -be bemenő piros él van. Tehát ellentmondásra jutottunk. Hasonló megfontolás alapján az állítás a többi színre is belátható.

□

Legyen  $R_1(v)$  a gráf  $P_2(v)$ ,  $bc$  és  $P_3(v)$  által meghatározott tartományainak uniója,  $R_2(v)$  a gráf  $P_3(v)$ ,  $ca$  és  $P_1(v)$  által meghatározott tartományainak uniója,  $R_3(v)$  pedig a gráf  $P_1(v)$ ,  $ab$  és  $P_2(v)$  által meghatározott tartományainak uniója. Erre láthatunk példát a 13. ábrán.



13. ábra. Az ábrán  $R_1(v)$  a rózsaszín,  $R_2(v)$  a világoszöld,  $R_3(v)$  pedig a világoskék tartományok.

**4.18. Lemma.** *Bármely két egymástól különböző  $u, v$  belső csúcsra teljesül, hogy ha  $u$  csúcs az  $R_i(v)$  tartományban van, akkor  $R_i(u)$  része  $R_i(v)$ -nek, de nem azonos vele ( $i = 1, 2, 3$ ).*

*Bizonyítás.* Elegendő a lemmát  $i = 1$ -re bizonyítani. Tekintsük  $P_2(u)$ -t és  $P_3(u)$ -t. A Schnyder-fa definíciója miatt  $P_2(u)$  és  $P_2(v)$  nem keresztezik egymást, mivel különben lenne egy csúcs, melyből két zöld él indul ki. Ugyanígy  $P_3(u)$  és  $P_3(v)$  sem keresztezik egymást. Tehát  $R_1(u) \subseteq R_1(v)$  és mivel  $u \neq v$ , ezért nem lehetnek azonosak, így bebizonyítottuk az állításunkat. □

**4.19. Lemma.** *Legyen  $G$  háromszögelt gráf adott  $v$  csúcsához  $R_i(v)$  a fentiek szerint definiálva és  $|R_i(v)|$  a benne lévő háromszögek száma,  $i = 1, 2, 3$ -re. Ekkor minden  $v$  csúcsra*

$$|R_1(v)| + |R_2(v)| + |R_3(v)| = 2n - 5.$$

*Bizonyítás.* A 2.1-es Euler-tételből indulunk ki:

$$n - e + t = 2.$$

Mivel minden tartományt három él határol, ezért az élek száma  $3t/2$ , ezt behelyettesítve a képletbe a következőt kapjuk:

$$2n - 4 = t.$$

Tehát összesen  $(2n - 4)$  háromszögünk van a külső háromszöggel együtt. Így megkaptuk, hogy  $(2n - 5)$  belső háromszög van. □

Készen állunk megmutatni, hogy minden háromszögelésnek létezik súlyponti koordinátázása. Tekintsük az

$$f : v \mapsto (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2n - 5} (|R_1(v)|, |R_2(v)|, |R_3(v)|)$$

hozzárendelést.

**4.20. Lemma.** *Az  $f$  függvény súlyponti reprezentációt határoz meg.*

*Bizonyítás.* Ellenőriznünk kell a súlyponti reprezentáció (4.6) definíciójában szereplő két kritériumot. Az első,  $v_1 + v_2 + v_3 = 1$  teljesül a 4.19-es lemma miatt.

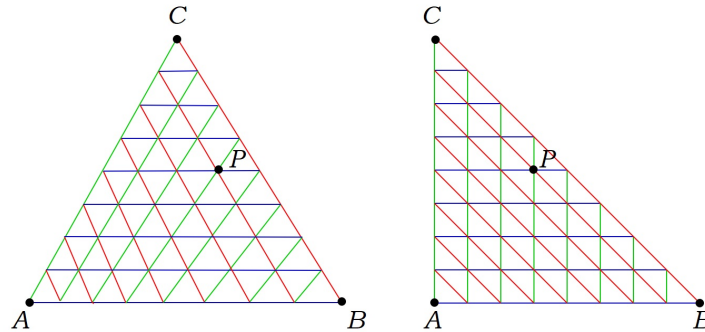
Be kell még látnunk, hogy minden  $xy \in E$  élre és minden  $z \in V \setminus \{x, y\}$  csúcsra létezik  $k \in \{1, 2, 3\}$ , amire  $x_k < z_k$  és  $y_k < z_k$ . Az  $xy$  él benne van valamelyik  $R_i(z)$ -ben  $i = 1, 2, 3$ , ugyanis ellenkező esetben  $xy$  keresztezné valamelyik  $P_j(z)$ -t. A 4.18-as lemma szerint ha  $x, y \in R_i(v)$ , akkor  $R_i(x), R_i(y) \subsetneq R_i(v)$ . Ebből következik, hogy  $x_i < z_i$  és  $y_i < z_i$  valamely  $i = 1, 2, 3$ -ra.

Tehát  $f$  tényleg egy súlyponti reprezentációt ad meg.

□

Láttuk, hogy Schnyder-címkézésből hogyan kapunk súlyponti koordinátákat. Tudjuk továbbá a 4.12-es lemma alapján, hogy a súlyponti koordináták a gráfot síkba rajzolják. Végül megadjuk, hogyan kell rácsra rajzolni mindezek után a gráfot.

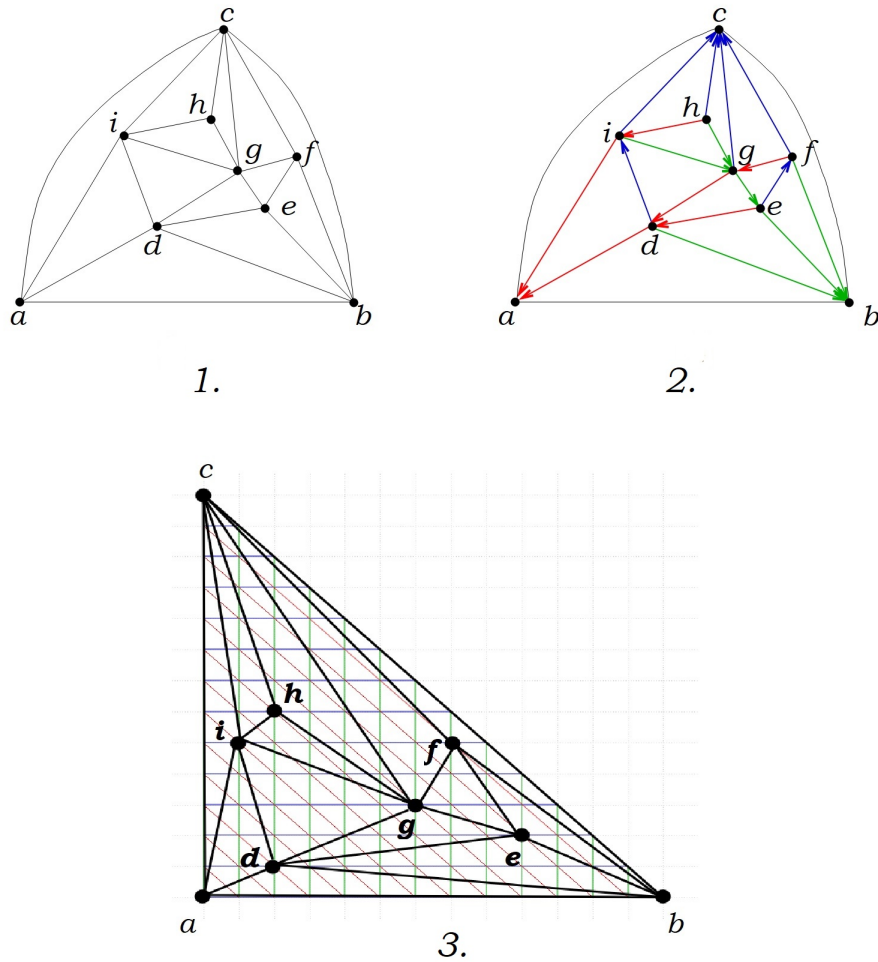
A külső háromszög három csúcsának súlyponti koordinátái  $(2n - 5, 0, 0)$ ,  $(0, 2n - 5, 0)$ ,  $(0, 0, 2n - 5)$ . A többi csúcs szintén a saját súlyponti koordinátái alapján a 14. ábrán látható egyenesek metszéspontjaiba kerülhet. Vegyük észre, hogy az így kapott lerajzolást könnyen áttranszformálhatjuk egy rácslerajzolássá úgy, hogy a külső háromszög három csúcsának koordinátái a  $(0, 0)$ ,  $(2n - 5, 0)$ ,  $(0, 2n - 5)$  legyenek a rácson, amik megegyeznek a második és harmadik súlyponti koordinátáikkal.



14. ábra. A súlyponti koordináták:  $A=(8,0,0)$ ,  $B=(0,8,0)$ ,  $C=(0,0,8)$ ,  $P=(1,3,4)$ . Ebből a koordináták a rácson:  $A=(0,0)$ ,  $B=(8,0)$ ,  $C=(0,8)$ ,  $P=(3,4)$ .

A többi csúcs koordinátáit is megkaphatjuk ezen rácson, ha elhagyjuk az első súlyponti koordinátáját. Az eredmény egy egyenes szakaszokkal való lerajzolása lesz a gráfunknak a  $(2n - 5) \times (2n - 5)$ -ös rács pontjaira.

Végül a 15. ábrán egy példát mutatunk a Schnyder algoritmusra.



15. ábra. Példa a Schnyder algoritmus futására.

1. A gráf kezdetben.

2. A gráfunkhoz tartozó Schnyder-fa, ami alapján a csúcsok súlyponti koordinátái:  
 $f(a) = (13, 0, 0)$ ,  $f(b) = (0, 13, 0)$ ,  $f(c) = (0, 0, 13)$ ,  $f(d) = (10, 2, 1)$ ,  $f(e) = (2, 9, 2)$ ,  
 $f(f) = (1, 7, 5)$ ,  $f(g) = (4, 6, 3)$ ,  $f(h) = (5, 2, 6)$ ,  $f(i) = (7, 1, 5)$ .

3. A gráf rácra rajzolva.

## 5. Outerplanar gráfok lerajzolása

Ebben a fejezetben a következő problémával foglalkozunk: adott a síkon néhány rögzített pont és erre szeretnénk lerajzolni a  $G$  síkgráfot egyenes szakaszokkal úgy, hogy a csúcsok a fix pontokra esnek és az élek továbbra sem metszik egymást. Természetesen feltesszük, hogy a pontok általános helyzetben vannak, azaz semelyik három pont sem esik egy egyenesre. Azonban még ezen feltétel mellett sem igaz, hogy minden síkbarajzolható gráf lerajzolható ilyen módon adott pontokra, lásd 16. ábra.



16. ábra. Az ábra bal oldalán látható síkbarajzolható gráf nem rajzolható le a jobboldalt lévő ponthalmazra.

Azonban azt fogjuk látni, hogy a síkgráfok egy speciális családja esetén a probléma mégis megoldható.

**5.1. Definíció** (Outerplanar gráf). *Az outerplanar gráf olyan síkgráf, melynek minden csúcsa a külső tartománya határán van.*

Gritzmann és társai belátták, hogy az outerplanar gráfok bármely általános helyzetű ponthalmazra lerajzolhatóak metszés nélkül, egyenes szakaszokkal. A lerajzoláshoz egy  $\mathcal{O}(n^2)$  idejű algoritmust is adtak.

Egyszerű észrevétel, hogy a maximális outerplanar gráfok, azaz azon outerplanar gráfok, melyek bármely további él behúzásával már nem lennének outerplanar gráfok belsőleg háromszögeltek. Ezen gráfoknak pontosan  $(2n - 3)$  élük van. Könnyű megmutatni, hogy tetszőleges outerplanar gráf élek hozzávételével kiegészíthető egy maximális outerplanar gráffá, így a továbbiakban elegendő ezekkel foglalkoznunk.

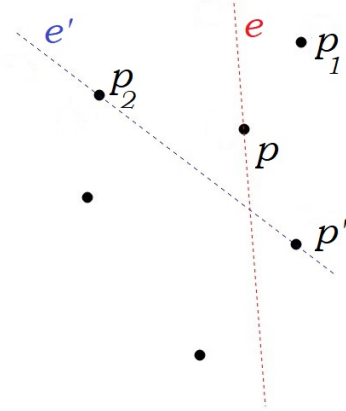


**5.1. Tétel.** (Gritzmann-Mohar-Pach-Pollack [6]) Legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú outerplanar gráf és vegyünk  $n$  darab pontot a síkon általános helyzetben, ezen pontok halmaza legyen  $P$ . Ekkor  $G$  lerajzolható  $P$  pontjaira egyenes szakaszokkal úgy, hogy élei továbbra sem keresztezik egymást.

*Bizonyítás.* Ahogy azt már említettük, elegendő maximális outerplanar gráfokat, azaz belsőleg háromszögelt síkgráfokat tekinteni. Technikai okokból egy erősebb állítást fogunk bizonyítani. Ha  $v_1$  és  $v_2$  két egymást követő csúcs a  $G$  konvex burkán és  $p_1$  és  $p_2$  két egymást követő csúcs a  $P$  konvex burkán, akkor  $G$ -t lerajzolhatjuk  $P$ -re úgy, hogy síkbarajzolt marad, élei egyenes szakaszokkal, és  $v_1$ -t  $p_1$ -re,  $v_2$ -t  $p_2$ -re rajzoljuk. Csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Könnyen látható, hogy  $n = 3$  esetben teljesül az állítás. Legyen  $G$  egy háromnál nagyobb csúcsszámú gráf, melynek csúcsai óramutató járásával ellentétes irányban legyenek  $v_1, v_2, \dots, v_n$  és legyen  $v_i$  a harmadik csúcsa a  $v_1, v_2$ -t tartalmazó háromszögnek. Azt állítjuk, hogy létezik egy  $p \in P$ ,  $p_1$  és  $p_2$ -től különböző pont a következő tulajdonságokkal:

- a) nincs  $P$ -beli pont a  $p_1, p_2, p$  által alkotott háromszög belsejében,
- b) van egy  $e$  egyenes, ami  $P$  pontjai közül csak  $p$  ponton megy át, elválasztja egymástól  $p_1$ -et és  $p_2$ -t és pontosan  $(i - 2)$   $P$ -beli pont van  $e$ -nek azon az oldalán, ami tartalmazza  $p_2$ -t.

Hogy megtaláljuk  $p$ -t, elforgatjuk  $p_1$  és  $p_2$  által meghatározott egyenest  $p_2$  körül, amíg nem találunk egy olyan  $p' \in P$  pontot, hogy a  $p_2p'$  egyenes által meghatározott,  $p_1$ -et nem tartalmazó félsík pontosan  $(i - 3)$  darab pontot tartalmaz, ez az egyenes legyen  $e'$ . Ha a  $p_1p_2p'$  háromszög nem tartalmaz  $P$ -beli pontot, akkor készen vagyunk a bizonyítással. Különben a sík  $p_1$ -et tartalmazó felén válasszuk ki azt a  $p$  pontot, ami minimalizálja a  $p_2p_1p$  szöveget, így automatikusan teljesül a). Azt is tudjuk, hogy maximum  $(i - 2)$  pont van a  $p_1p$  egyenes  $p_2$ -t tartalmazó felén. Ha elkezdjük  $p$  körül forgatni a  $p_1p$  egyenest, akkor mielőtt párhuzamos lenne  $e'$ -vel elér egy olyan pozíciót, amire teljesül b). Ez legyen az  $e$  egyenes (lásd 17. ábra).



17. ábra. Ha  $n = 6$  és  $i = 5$ , akkor a  $v_i$  csúcsot majd a  $p$  pontra kell rajzolni.

Legyen az  $e$  által meghatározott  $p_1$ -et tartalmazó félsík  $H_1$ , a  $p_2$ -t tartalmazó félsík pedig  $H_2$ . Az indukciós feltevés alapján a  $G$ -nek a  $\{v_2, v_3, \dots, v_i\}$  és a  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_1\}$  csúcsok által alkotott részgráfja lerajzolható egyenes szakaszokkal az élek metszése nélkül  $H_2 \cap P$  és  $H_1 \cap P$  ponthalmazokra úgy, hogy  $v_1, v_2$ , és  $v_i$  a  $p_1, p_2, p$  pontokon helyezkednek el. A két részgráfot összeillesztve megkapjuk  $G$ -nek a megfelelő lerajzolását, amivel a tételt beláttuk.

□

## 6. Összegzés

Szakedolgozatomban néhány gráflerajzadási kérdéskört jártunk körbe. Először bemutattuk a Fáry-Wagner tételt, mely tetszőleges síkgráf egyenes szakaszokkal való lerajzolását adja meg. Majd a gráfok rácsra rajzolásáról volt szó; foglalkoztunk mind a szükséges, mind az elégséges rácsmérettel. A rácsméret alsó korlátjáról szóló tétel bizonyításához egymásba ágyazott háromszögből felépített gráfokat használtunk. A rácsméret felső korlátjáról két tételt, Fraysseix-Pach-Pollack, valamint Schnyder tételét néztük meg és bizonyítottuk. Mindkét bizonyítás megadott egy-egy algoritmust a gráf optimális lerajzolásához.

A Fraysseix-Pach-Pollack algoritmus fokozatosan építette fel a gráfot, minden lépésben kiszámította a kanonikus sorrend szerint következő csúcs koordinátáit, és ha kellett, módosította a régi csúcs koordinátáit. A Schnyder-algoritmus először meghatározta a csúcsok súlyponti koordinátáit, azok alapján egy lépésben rajzolta le a gráfot.

Az utolsó fejezetben a síkgráfok egy érdekes családjával, az outerplanar gráfokkal ismerkedtünk meg. Végül bemutattuk Gritzmann és társainak tételét, mely szerint tetszőleges outerplanar gráf lerajzolható egyenes szakaszokkal adott általános helyzetű pontthalmazra.

## Hivatkozások

- [1] Brandenburg, F. J. (2008). *Drawing planar graphs on  $8/9n^2$  area*. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 31, 37-40.
- [2] Dolev, D., Leighton, F.T., Trickey, H. (1984). *Planar embedding of planar graphs*. *Advances in Computing Research - vol. 2. VLSI Theory*.
- [3] Fáry, I. (1948). *On straight-line representation of planar graphs*. *Acta scientiarum mathematicarum*, 11(229-233), 2.
- [4] Frati, F., Patrignani, M., (2007). *A note on minimum area straight-line drawings of planar graphs*, in *Graph Drawing (GD'07)*, ed. by S.H. Hong, T. Nishizeki. LNCS, Sydney, Australia, vol. 4875, pp. 339–344.
- [5] de Fraysseix, H., Pach, J., Pollack, R. (1990). *How to draw a planar graph on a grid*. *Combinatorica* 10(1), 41–51.
- [6] Gritzmann, P., Mohar, B., Pach, J., Pollack, R. (1991). *Embedding a planar triangulation with vertices at specified points (solution to problem e3341)*, *Amer. Math. Monthly* 98 165–166.
- [7] Kampen, G. R. (1976). *Orienting Planar Graphs*, *Discrete Mathematics* 14, 337-341.
- [8] Kuratowski, K. (1930). *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, *Fund. Math.*, 15: 271–283.
- [9] Schnyder, W. (1990). *Embedding planar graphs on the grid*. In: *Proc. SODA 1990*, pp. 138–148.
- [10] Wagner, K. (1936). *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 46:26-32.