

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Szekeres Ágnes

**SZERELMI KAPCSOLATOK**  
**MATEMATIKÁJA**

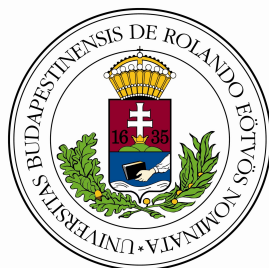
BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2024.

# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom mindenkinek, aki békén hagyott, amikor arra volt szükségem - vagyis majdnem mindig. Köszönöm páromnak, hogy elviselte a kirohanásaimat és idegösszeomlás közeli állapotaimat, és támogatott lelkileg. Köszönöm a segítséget a témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak.

Budapest, 2024. tavasz

*Szekeres Ágnes*

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Lineáris modellek</b>	<b>3</b>
2.1. A legegyszerűbb modell . . . . .	3
2.2. Rinaldi-féle lineáris modell . . . . .	5
<b>3. Nemlineáris modellek</b>	<b>8</b>
3.1. Biztonságos kötődésű és elfogulatlan felek kapcsolati modellje . . . . .	8
3.2. Bizonytalan kötődésű és elfogulatlan felek kapcsolati modellje . . . . .	12
3.2.1. Felek megegyező paraméterekkel . . . . .	13
3.2.2. Az általános eset . . . . .	14
3.3. Szerelmi ciklusok . . . . .	17
3.3.1. Határciklus létezése . . . . .	19
3.4. Időkésleltetés vizsgálata . . . . .	21
3.5. Házasságok sikeressége . . . . .	27
<b>Források</b>	<b>33</b>

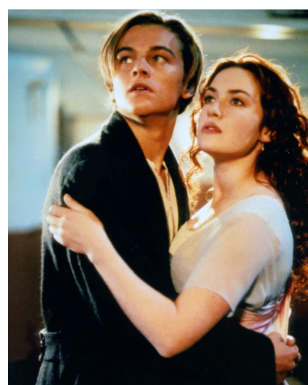


# 1. Bevezetés

Az emberi viselkedés egyik legelemibb mozgatórugója, minden érzés közt a legszélsebb és legelsőpróbb erejű a szerelem, mely ugyanakkor bonyolult és látszólag kiszámíthatatlan. A szerelmi kapcsolatok ezért ősidők óta foglalkoztatják az emberiséget. Az idillikus, boldog, vagy még inkább a beteljesületlen, tragikus szerelmek sok művészt ihlettek meg, legyen szó a művészet bármely területéről. Megszámlálhatatlan alkotás központi témája a szerelem, akár festészetről, szobrászatról, zenéről, irodalomról, táncművészetéről, vagy bármely művészeti ágról is beszélünk. Lehetetlenség olyan területet keresni, ahol nem bukkan fel -s leginkább főszereplőként- a szerelem. Sok film központi témája is egy-egy szerelmi kapcsolat.



*Jul.—“WILT THOU BE GONE? IT IS NOT YET NEAR DAY.”—Act III, SCENE 5.*



1. ábra. Bal oldalt Shakespeare: Rómeó és Júlia ábrázolás; jobb oldalt jelenet a Titanic című 1997-es filmből.

Matematika és szerelem. Létezik köztük kapcsolat? Mit keres az egzakt és racionális világot alkotó, konzekvenciákhoz és törvényszerűségekhez kötött matematika a szerelem szabad és látszólag logikátlan világában? A matematika egy olyan tudomány, aminek az érzésekhez alapvetően nincs köze. Viszont a matematika a valóságtól leválasztható külön világot alkot, ebben hasonlít a szerelmi kapcsolatokra (szokták mondani, hogy a szerelmesek "rózsaszín ködben" élnek, tehát az ő világuk is egy külön világnak nevezhető). Nyilvánvaló, hogy a matematikusok is szoktak szerelembe esni, így az érzések komplikáltsága és nehezen érthetősége foglalkoztatja őket, és néhányan közülük megpróbálták valamilyen módon összekötni a szerelmet és a matematikát. Kísérletet tettek a kapcsolatok modellezésére, hogy ezáltal jobban megértsék azokat. A szerelem nyilván összetett érzés, lehet egyszerre imádni a másik ember egyik tulajdonságát, ám ezzel párhuzamosan más viselkedésformáit egyazon időben nem szeretni, vagy akár gyűlölni. A matematikai modellek leegyszerűsítettek, nincs lehetőség a szerelem és az azt befolyásoló külső tényezők és körülmények tökéletes leképezésére, de attól még egyes modellek fő következtetései egybecsengenek a valósággal, így egyáltalán nem nevezhetők haszontalannak.

Rinaldi, Gragnani és szerzőtársaik *Modeling Love Dynamics* című könyvükben [4] több közismert szerelmi történettel alátámasztják a modelljüket, meglehetősen lenyűgöző

módon. Ezekről a példákról részletesen itt a szakdolgozatban nem lesz szó, csak magukról a modellekről.

Egy másik tartalmas könyvet a témában John M. Gottman, James D. Murray és tanítványaik írtak: *The Mathematics of Marriage* [2] egyik legfőbb célja, hogy meg lehessen jósolni már egy kapcsolat elején, hogy válással végződik-e egy házasság. Mivel korunkban a házasságok legalább fele válással végződik [1], ez fontos és hasznos tudás (lenne). Pszichológusok, szociológusok és egyéb szakemberek sokféle eszközzel próbálták már megfejteni, hogy mi a szerelem titka, és mi az, ami a hosszútávú fenntartásában fontos. Létezik-e a párkapcsolatokra egyértelmű modell, mint ahogy sok minden másra az életben?

Kapcsolatok és érzések *változásáról* van szó, így adódik, hogy a modellezéshez a legkézenfekvőbb differenciálegyenlet(ek)et használni. Több különböző megközelítés keletkezett a modellezésre, a függvényekre és a paraméterekre. Továbbá nem mindegy, hogy hosszú- vagy rövidtávban gondolkodunk. Valamelyest különböző célokat szolgálnak a különböző modellek: míg valamelyik csak pár hónapra előre szeretné megjósolni a kapcsolat állapotát, van olyan, ami pedig inkább egy évtizedre, vagy akár egy életre előre keresi a biztos megoldást, a tökéletes párt.

Így a modellezésen keresztül válik a matematika az élet (és a szerelem) szerves részévé. A világegyetem rendszerében szükségszerűen a matematikai törvényszerűség uralkodik.

## 2. Lineáris modellek

### 2.1. A legegyszerűbb modell

A legegyszerűbb kapcsolati modellt Steven Strogatz alkotta meg, szimplán pedagógiai céllal (vagyis a modell pontossága másodlagos volt) [6]:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}\tag{1}$$

A szerelem minőségét egy-egy szám jellemzi a két fél részéről -  $R(t)$  (Rómeó szerelme) és  $J(t)$  (Júlia szerelme). Rómeó kapcsolódási stílusát  $a$  és  $b$ , Júlia kapcsolódási stílusát  $c$  és  $d$  határozza meg.

Ez a modell nem veszi számításba, hogy a szerelem egy értékkel nehezen határozható meg, és hogy a szerelmet nem csak az egyén saját érzése és partnere érzése befolyásolja. A modell kizárja a tanulás és adaptáció lehetőségét is. Azonban így is érdemes megvizsgálni. Sprott *Dynamical Models of Love* című publikációja [6] alapján írtam ezt a fejezetet.

Tehát egy állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert vizsgálunk. Az együttható mátrix sajátértékei:

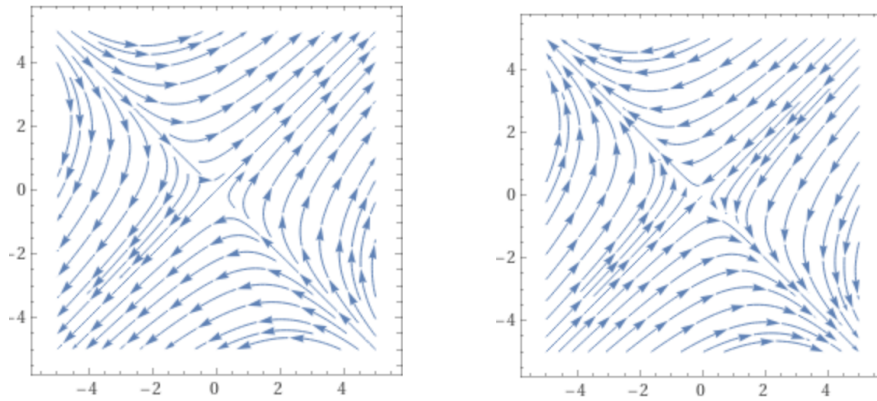
$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

A fáziskép lehet bármi: fókusz, csomó vagy nyereg is. Az origó az egyensúlyi pont mindegyik esetben. Nézzük meg azt a speciális esetet, ahol  $c = b$  és  $d = a$  [6] (azaz Rómeó és Júlia kapcsolódási stílusa megegyezik). Ekkor

$$\lambda_{1,2} = a \pm b$$

Legyen  $|a| < |b|$ . Ha óvatos párról van szó, azaz  $a < 0$  és  $b > 0$ , vagy ha buzgó párról van szó, azaz  $a > 0$  és  $b > 0$ , akkor nyereg a fáziskép, mégpedig olyan, hogy vagy az I. vagy a III. síknegyedben tartunk végtelenbe (2. ábra bal oldal), azaz vagy nagyon szeretni vagy nagyon utálni fogja egymást Rómeó és Júlia, a kezdeti feltételektől függően. Ha remete párról van szó, azaz  $a < 0$  és  $b < 0$ , vagy ha nárcisztikus párról van szó, azaz  $a > 0$  és  $b < 0$ , akkor szintén nyereg a fáziskép, viszont a végeredmény az, hogy a pár egyike imádni fogja a másikat, a másik viszont gyűlölni az egyiket (2. ábra jobb oldal).

Most legyen  $|a| > |b|$ . Ekkor  $a < 0$  és  $b > 0$  (óvatos pár) esetén a fáziskép stabil fókusz vagy stabil csomó.  $a < 0$  és  $b < 0$  (remete pár) esetén szintén. Viszont  $a > 0$  (buzgó vagy nárcisztikus pár) esetén a fáziskép instabil fókusz vagy instabil csomó.



2. ábra. Nyereg fázisképek.

Megvizsgálom még azt az esetet, amikor Rómeó és Júlia pont ellenkező módon működnek, azaz  $c = -b$  és  $d = -a$ . Ekkor

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

Ha  $|a| < |b|$ , akkor a sajátértékek komplexek. Ekkor a differenciálegyenlet együttható mátrixának nyoma 0, determinánsa pozitív, így a fáziskép centrum. Azaz ilyen esetben a párok egy örök körforgásban vannak az érzéseik tekintetében. Ha  $|a| > |b|$ , akkor is az együttható mátrix nyoma 0, viszont determinánsa negatív. Ekkor a fáziskép nyereg, mégpedig olyan, hogy  $ab > 0$  (egyik fél buzgó, másik remete) esetén ellentétes érzések felé tart a két fél (2. ábra jobb oldal),  $ab < 0$  (egyik fél nárcisztikus, másik óvatos) esetén pedig vagy kölcsönösen pozitív vagy kölcsönösen negatív érzések felé tartanak (2. ábra bal oldal).



## 2.2. Rinaldi-féle lineáris modell

A következő modell és elemzése a Modeling Love Dynamics [4] című könyvben szerepel.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -O_1(x_1) + R_1^L(x_1, x_2) + R_1^A(A_2, x_1) \\ \dot{x}_2 &= -O_2(x_2) + R_2^L(x_2, x_1) + R_2^A(A_1, x_2)\end{aligned}\quad (2)$$

$x_1$  és  $x_2$  a vizsgált kapcsolatban lévő két fél érzéseit jelenti. Pozitív szeretetet, a 0 apátiát, negatív utálatot jelent, és minél nagyobb az abszolútértéke, annál erősebb az érzés.  $O_1$  és  $O_2$  a felekhez tartozó feledés függvény,  $R_1^L$  és  $R_2^L$  a másik érzésére történő reagálás, míg  $R_1^A$  és  $R_2^A$  a másik vonzerejére reagálás. A vonzerőbe nemcsak a külső megjelenés vonzósága, hanem például az intelligencia és a társadalmi státusz is beletartozik. Azaz a személy minden vonása számít, amit vonzónak tarthat a másik.

Minden pár az  $x = (0, 0)$  pontból indul az ismerkedéskor. Ekkor  $\dot{x}_1 = \gamma_1 A_2$  és  $\dot{x}_2 = \gamma_2 A_1$ , azaz kezdetben csak a vonzerő számít az érzelmek alakulásában. Amikor valamelyik fél vonzereje negatív, akkor általában nem bonyolódik kapcsolatba a két fél, ezért ebben a fejezetben csak azok az esetek vannak, amikor mindkét fél vonzereje pozitív ( $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ ).

A feledés függvényéről feltehető, hogy lineáris és szigorúan monoton csökkenő. Legyen  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Tegyük fel, hogy az érzésre reagálás csak a másik fél érzésétől függ, és annak függvényében lineáris. Legyen  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Továbbá tegyük fel, hogy a vonzerőre reagálás csak a másik vonzerejétől függ, és  $\gamma_i > 0$  együttható jelenti, hogy az adott személyre mennyire hat mások vonzereje. Ekkor a modell az alábbi:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1\end{aligned}\quad (3)$$

Ez egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{x} = Ax + b$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \gamma_1 A_2 \\ \gamma_2 A_1 \end{pmatrix}$$

Tudjuk, hogy ez akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha  $\det(A) > 0$  és  $\text{Tr}(A) < 0$ . Ami azt jelenti, hogy  $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 > 0$ . Ezt az esetet vizsgáljuk a továbbiakban.

**2.2.1. Állítás** ([4]). *Ha adott  $x$  megoldásra és  $t_1$  időpontra  $x(t_1) > 0$ , akkor minden  $t > t_1$ -re  $x(t) > 0$ . (Azaz ha valamikor az érzések pozitívak, azok is maradnak.)*

*Bizonyítás.* Ha  $x_1 = 0$  és  $x_2 > 0$ , akkor  $\dot{x}_1 > 0$ . Hasonlóan ha  $x_2 = 0$  és  $x_1 > 0$ , akkor  $\dot{x}_2 > 0$ . Ebből következik, hogy az első síknegyedből nem léphetnek ki a megoldások.  $\square$

**2.2.2. Állítás** ([4]). *Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, a rendszer  $\bar{x}$  egyensúlyi pontja szigorúan pozitív.*

*Bizonyítás.* A rendszer egyensúlyi pontja rövid számolás alapján:

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha_2 \gamma_1 A_2 + \beta_1 \gamma_2 A_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\alpha_1 \gamma_2 A_1 + \beta_2 \gamma_1 A_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \quad (4)$$

Ha aszimptotikusan stabilis a rendszer, akkor  $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 > 0$ , ezért

$$\bar{x}_1 > 0, \quad \bar{x}_2 > 0$$

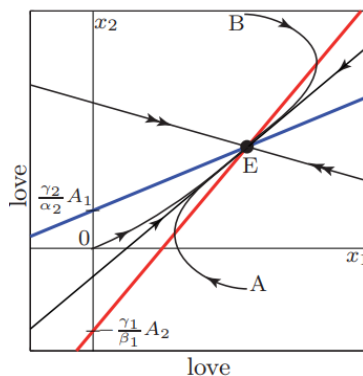
$\square$

**2.2.3. Állítás** ([4]). *A  $(0, 0)$  pontból a megoldás folyamatos növekedéssel az egyensúlyi pontba visz. (Azaz két ember kapcsolata -a korábban felsorolt feltételek mellett- az ismerkedéstől elindulva egyre jobb lesz, míg végül elér egy pozitív egyensúlyi helyzetet.)*

*Bizonyítás.* A nullklínák:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} x_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} A_2 & (\dot{x}_1 = 0) \\ x_1 &= \frac{\alpha_2}{\beta_2} x_2 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} A_1 & (\dot{x}_2 = 0) \end{aligned}$$

Az első nullklína az  $x$  tengelyt  $x > 0$ -ban metszi, és monoton növekvő, a második nullklína pedig az  $y$  tengelyt  $y > 0$ -ban metszi, és monoton növekvő, ezért 3. ábrán fáziskép alapján látszik, hogy a  $(0, 0)$  pontból a megoldás az egyensúlyi pontba visz.  $\square$



3. ábra. [4] Trajektóriák és nullklínák

**2.2.4. Állítás** ([4]). *Ha  $\beta_i$ -t  $[\gamma_i$ -t] megnöveljük,  $\bar{x}_1$  és  $\bar{x}_2$  is növekszik.*

*Bizonyítás.* Egyensúlyi pont koordinátáiból (4) könnyen látszik.  $\square$

**2.2.5. Állítás** ([4]). *Ha  $A_i$ -t megnöveljük,  $\bar{x}_1$  és  $\bar{x}_2$  is növekszik.*

Van egy közösség, ami  $N$  párból:  $N$  férfiből és  $N$  nőből áll. Tegyük fel, hogy nincs két nő (se két férfi) ugyanolyan vonzerővel:  $A_i^h \neq A_i^k \quad h \neq k$ . Egy ilyen közösséget instabillnak nevezünk, ha van olyan férfi és nő, akik különböző pár tagjai, de úgy gondolják, hogy nekik egy párként jobb lenne. Ellenkező esetben pedig stabilisnak nevezük a közösséget. A következő definíció ez pontosítva:

**2.2.1. Definíció** ([4]). *Egy  $N$  párból álló közösség*

$$[A_1^n, \alpha_1^n, \beta_1^n, \gamma_1^n; A_2^n, \alpha_2^n, \beta_2^n, \gamma_2^n] \quad n = 1, 2, \dots, N$$

*instabil, ha létezik legalább egy  $(h, k)$  pár úgy, hogy*

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(A_1^h, \alpha_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^k, \alpha_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k) &> \bar{x}_1(A_1^h, \alpha_1^h, \beta_1^h, \gamma_1^h; A_2^h, \alpha_2^h, \beta_2^h, \gamma_2^h) \\ \bar{x}_2(A_1^h, \alpha_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k; A_2^k, \alpha_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k) &> \bar{x}_2(A_1^k, \alpha_1^k, \beta_1^k, \gamma_1^k; A_2^k, \alpha_2^k, \beta_2^k, \gamma_2^k) \end{aligned} \quad (5)$$

*Ellenkező esetben pedig stabilisnak nevezük a közösséget.*

**2.2.6. Állítás** ([4]). *Egy közösség akkor és csak akkor stabilis, ha az  $n$ . legvonzóbb nő az  $n$ . legvonzóbb férfival van ( $n = 1, 2, \dots, N$ )*

*Bizonyítás.* A (5)-es feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$A_2^k > A_2^h, \quad A_1^k < A_1^h$$

Tehát ha egy közösség instabil, akkor létezik  $(h, k)$  pár, hogy  $A_2^k > A_2^h$ ,  $A_1^k < A_1^h$ . Ekkor az  $n$ . legvonzóbb nő nem az  $n$ . legvonzóbb férfival van, mert az azt jelentené, hogy minden  $(h, k)$  párra ha  $A_2^k > A_2^h$ , akkor  $A_1^k > A_1^h$ .

Fordítva, ha nem igaz minden  $n$ -re, hogy az  $n$ . legvonzóbb nő az  $n$ . legvonzóbb férfival van, akkor ha  $A_1^1 < A_1^2 < \dots < A_1^N$ , akkor létezik  $k < h$ , hogy  $A_2^k > A_2^h$ , és ekkor a közösség instabil.  $\square$

### 3. Nemlineáris modellek

#### 3.1. Biztonságos kötődésű és elfogulatlan felek kapcsolati modellje

Ez és a következő kettő fejezet is a Modeling Love Dynamics [4] című könyv egy fejezetének feldolgozása.

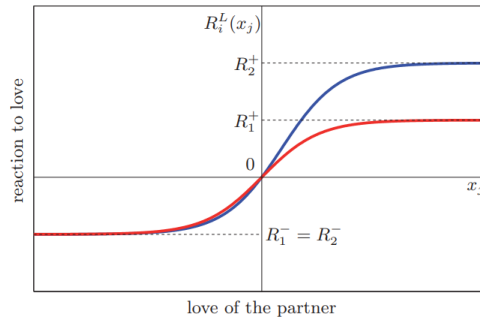
**3.1.1. Definíció** ([4]). *Ha a (2)-es modellben lévő  $R_i^L$  függvényre  $\frac{dR_i^L}{dx_j} > 0$ , akkor az  $i$  személy biztonságos kötődésű.*

**3.1.2. Definíció** ([4]). *Ha a (2)-es modellben lévő  $R_i^L$  és  $R_i^A$  függvények nem függenek  $x_i$ -től, akkor az  $i$  személy elfogulatlan.*

Az előző fejezetben lévő (3)-ös modellben biztonságos kötődésű, elfogulatlan párok szerepeltek. Most is ilyen párokról lesz szó, viszont most az (3)-ös modellhez képest élünk azzal a módosítással, hogy  $A_i$  lehet negatív is, és a nem korlátos (és ezért irreális)  $R_i^L$  függvény helyett most legyen:

$$R_i^L(x_j) := \frac{\exp(x_j) - \exp(-x_j)}{\frac{\exp(x_j)}{R_i^+} - \frac{\exp(-x_j)}{R_i^-}}$$

ahol  $R_i^+ > 0$  és  $R_i^- < 0$ ,  $i = 1, 2$  konstansok. Két lehetséges  $R_i^L$  függvény grafikon a 4. ábrán látható.



4. ábra. [4] Érzésre reagálás ( $R_i^L$ ) függvény biztonságos kötődésű személyekre.

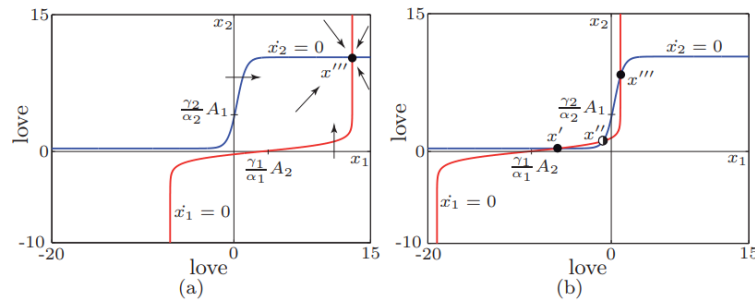
Így a vizsgálandó modell a következő:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1\end{aligned}$$

A modell nullklínái:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\alpha_1} (R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2) & (\dot{x}_1 = 0) \\ x_2 &= \frac{1}{\alpha_2} (R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1) & (\dot{x}_2 = 0)\end{aligned}$$

3 egyensúlyi pont lehetséges (növekvő sorrendben  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ ) - ezt a 5. ábra is mutatja. Ha



5. ábra. [4] Nullklínák lehetséges helyzetei és egyensúlyi pontok biztonságos kötődésű párokra.

$A_1$  és  $A_2$  elég nagyok, akkor csak 1 egyensúlyi pont van, és ez aszimptotikusan stabilis.

**3.1.1. Állítás** ([4]). *Ha egyetlen egyensúlyi pont létezik, és  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , akkor az előző fejezet (2.2.1)-(2.2.5) állításai itt is érvényesek.*

*Bizonyítás.* 1. A (2.2.1) állítást ugyanazzal az érveléssel lehet bizonyítani mint az előző fejezetben.

2. A rendszer  $\bar{x}$  egyensúlyi pontja szigorúan pozitív. Ez látszik  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  esetén a nullklínák helyzetéből.
3. A  $(0, 0)$  pontból a megoldás folyamatos növekedéssel az egyensúlyi pontba visz. Ez fázisképből látszik.
4.  $\gamma_i$ , illetve  $A_i$  növelésével a nullklínákat toljuk jobbra illetve felfelé, így a nullklínák szigorúan monoton növekedése miatt  $\bar{x}_1$  és  $\bar{x}_2$  is növekszik.

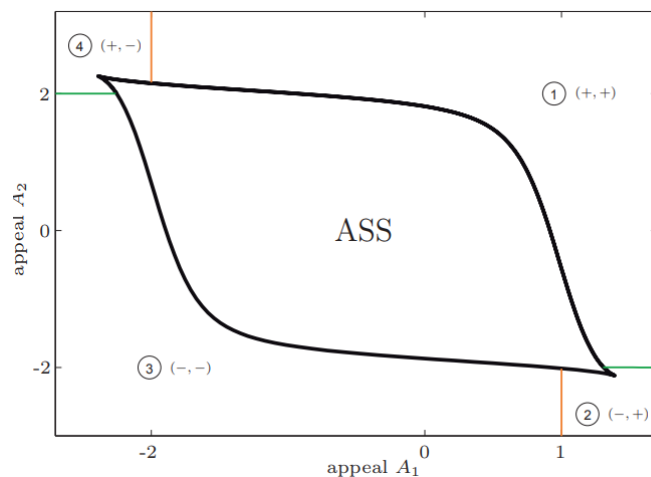
□

Vizsgáljunk bifurkációt  $A_1$  és  $A_2$  változtatására. A nullklínák eltolásával  $x'$  és  $x''$  [valamint  $x''$  és  $x'''$ ] ütközhetnek, és eltűnhetnek, ez a nyereg-csomópont bifurkáció. Egy konkrét példa arra, hogy mikor hány egyensúlyi pont létezik, a 6. ábrán látható. Mivel kezdetben a  $(0, 0)$  a megoldások kiindulópontja, több egyensúlyi pont esetén az a fő kérdés, hogy melyik egyensúlyi pont vonzásában van a  $(0, 0)$  (7. ábra).

Érdekes jelenség az **átmeneti blöffölés**. Ez például úgy valósulhat meg, hogy az egyik fél rövidebb-hosszabb ideig magasabbnak tünteti fel a vonzerejét:

$$A_i^* := A_i + B_i$$

ahol  $B_i > 0$  az  $i$  személy blöffölésének intenzitása. Ezzel átmenetileg a nullklína eltolódik, a fáziskép előnyösebbre változik. Akkor van értelme a blöffölésnek, ha anélkül a  $(0, 0)$  a negatív  $x'$  egyensúlyi pont vonzásában van, viszont  $A_i^*$  esetén már a pozitív  $x'''$



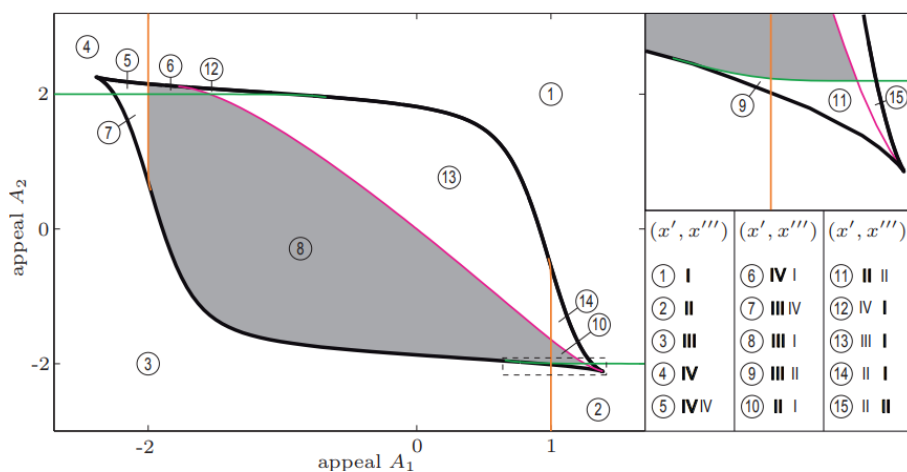
6. ábra. [4] Adott  $\alpha_i, \gamma_i, R_i^+, R_i^-$  paraméterek esetében  $A_1$  és  $A_2$  függvényében hány egyensúlyi pont létezik. ASS (alternative stable states) jelenti azt a részt, ahol több (jelen esetben 3) egyensúlyi pont létezik. ASS területén kívül az érzések előjelei vannak jelölve az ábrán.

vonzásába kerül. Ekkor amíg tart a blöffölés, közelednek az érzések  $x'''$  felé, és ha eléggé közel kerülnek hozzá, onnan már a blöffölés nélkül is pozitív egyensúlyi helyzet felé tart a kapcsolat.

Úgy is lehet blöffölni, hogy pozitívabbnak tüntetjük fel az érzéseinket, mint amilyenek:

$$x_i^* := x_i + B_i$$

ahol  $B_i > 0$  szintén az  $i$  személy blöffölésének intenzitását fejezi ki. Így  $R_j^l(x_i)$  helyett  $R_j^l(x_i + B_i)$  kerül a modellbe. Így vagy az  $\dot{x}_1 = 0$  nullklína toródik lefele, vagy az  $\dot{x}_2 = 0$  nullklína toródik balra, és a végeredmény hasonló mint az előző esetben.



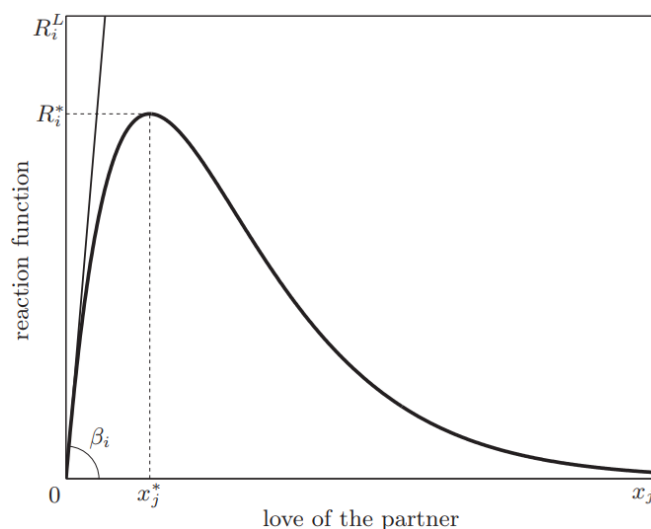
7. ábra. [4] ASS felosztása  $A_1$  és  $A_2$  függvényében. Adott alterületen  $x'$  és  $x'''$  a jelmagyarázat szerinti síknegyedben vannak, és az origóból induló megoldások a vastagbetűs síknegyedben lévő egyensúlyi pont felé tartanak. A szürke régió az, ahol van értelme átmeneti blöffölésnek.

## 3.2. Bizonytalan kötődésű és elfogulatlan felek kapcsolati modellje

**3.2.1. Definíció** ([4]). Legyen  $x_j^* > 0$  konstans. Ha az (2)-es modellben lévő  $R_i^L$  függvényre  $0 < x_j < x_j^*$  esetén  $\frac{dR_i^L}{dx_j} > 0$ , és  $x_j > x_j^*$  esetén  $\frac{dR_i^L}{dx_j} < 0$  akkor az  $i$  személy bizonytalan kötődésű.

Tehát most bizonytalan kötődésű párokat tanulmányozunk, olyanokat, ahol  $R_1^L$  és  $R_2^L$  a csökkenés ellenére pozitív marad (lásd 8. ábra):

$$R_i^L(x_j) := \beta_i x_j \exp(-k_i x_j) \quad (6)$$



8. ábra. [4]  $R_i^L$  függvény (a másik érzésére reagálás függvénye) bizonytalan kötődésű személyre.

**3.2.1. Állítás** ([4]). *Legerősebb a másik érzésére reagálás*

$$x_j^* = \frac{1}{k_i}$$

esetén, a maximum értéke pedig

$$R_i^* = R_i^L(x_j^*) = \frac{1}{e} \frac{\beta_i}{k_i}.$$

*Bizonyítás.*

$$\frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} = \beta_i (1 - k_i x_j) \exp(-k_i x_j)$$

□

Látható ezen állítás alapján, hogy  $k_i$  az  $i$  személy bizonytalanságának mértékét fejezi.  $\beta_i$  pedig azt jelzi, mennyire befolyásolja  $i$  személyt a másik szerelme.



Tehát egy bizonytalan kötődésű párt  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, k_i, A_i, i = 1, 2$  pozitív paraméterek határoznak meg. Ezt a modellt vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1\end{aligned}\quad (7)$$

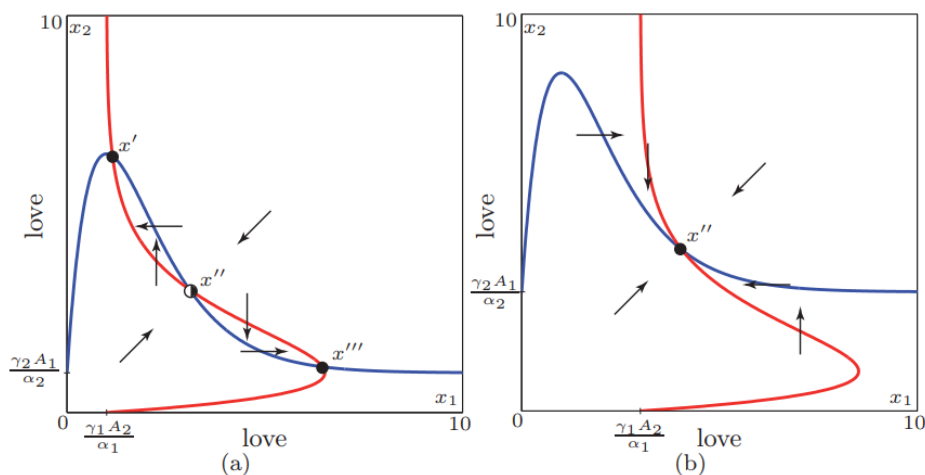
Az első síknegyedből nem lépnek ki a megoldások, ezért a fázisképeket is csak az első síknegyedben vizsgáljuk ebben a fejezetben.

### 3.2.1. Felek megegyező paraméterekkel

Ha a két félnek minden paramétere megegyezik, vagyis  $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha, \beta_1 = \beta_2 =: \beta, \gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma, k_1 = k_2 =: k, A_1 = A_2 =: A$ , akkor a nullklínák egyenletei így néznek ki:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\beta}{\alpha} x_2 \exp(-kx_2) + \frac{\gamma}{\alpha} A & (\dot{x}_1 = 0) \\ x_2 &= \frac{\beta}{\alpha} x_1 \exp(-kx_1) + \frac{\gamma}{\alpha} A & (\dot{x}_2 = 0)\end{aligned}$$

A nullklínáknak 1 vagy 3 metszéspontjuk lehet. Az 9(a) ábrán  $x'$  és  $x'''$  stabil csomók, és



9. ábra. [4] Nullklínák (bizonytalan kötődésű pároknál).  $\alpha = 1, \beta = 15, \gamma = 1, k = 1$ , és (a) ábrán  $A = 1$ , (b) ábrán  $A = 3$ .

$x''$  nyereg.

Legyen most a 9(b) ábrának megfelelően  $\alpha = 1, \beta = 15, \gamma = 1, k = 1, A = 3$ . Megvizsgálom az  $x'' := (x_1'', x_2'')$  egyensúlyi pont stabilitását. A Jacobi mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta(1 - kx_2) \exp(-kx_2) \\ \beta(1 - kx_1) \exp(-kx_1) & -\alpha \end{pmatrix}\quad (8)$$

Behelyettesítem  $x''$  koordinátáit. Ezután, figyelembe véve, hogy  $x_1'' = x_2''$ , és végül a paraméterek értékeit behelyettesítve, a Jacobi mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \frac{\beta|1 - kx_1''| \exp(-kx_1'')}{2} = -1 \pm \frac{15|1 - x_1''| \exp(-x_1'')}{2}$$

$\lambda_2 < 0$  nyilván, de  $\lambda_1$  előjele milyen?  $4 < x_1'' < 5$ , mert az  $\dot{x}_2 = 0$  nullklína  $x_1 = 4$  behelyettesítésre a következő értéket veszi fel:

$$x_2 = 15x_1 \exp(-x_1) + 3 \approx 4,1 > 4,$$

és  $x_1 = 5$  behelyettesítésre a következő értéket veszi fel:

$$x_2 = 15x_1 \exp(-x_1) + 3 \approx 3,5 < 4.$$

Ezért

$$\begin{aligned} |1 - x_1''| < 4 \quad \text{és} \quad \exp(-x_1'') < \exp(-4) \\ \text{így} \quad \frac{15|1 - x_1''| \exp(-x_1'')}{2} < \frac{15 \cdot 4 \exp(-4)}{2} \approx 0,54 \end{aligned}$$

Tehát  $\lambda_1 < 0$ . Azaz azt kaptam, hogy mindkét sajátérték valós és negatív, ami azt jelenti, hogy  $x''$  egyensúlyi pont stabilis csomó.

**3.2.2. Állítás** ([4]). *Nincs ciklikus megoldása (7)-es modellnek ( $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha, \beta_1 = \beta_2 =: \beta, \gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma, k_1 = k_2 =: k, A_1 = A_2 =: A$  esetén).*

*Bizonyítás.* A rendszer Jacobi mátrixa (8). Ennek divergenciája  $-2\alpha$ . Ez konstans, így nem vált előjelet. A Bendixon kritériumot alkalmazva tehát nincs ciklikus megoldás.  $\square$

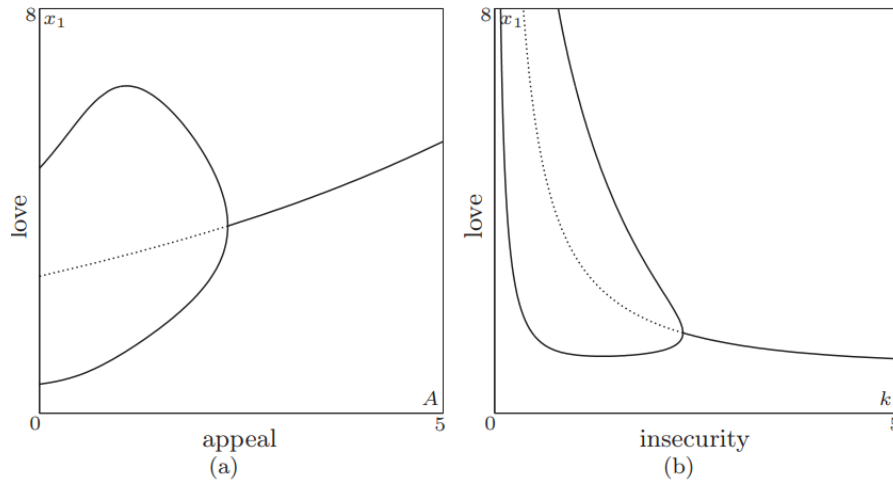
**3.2.3. Állítás** ([4]). *A rendszer szimmetriája miatt az origóból indulva az  $x''$  egyensúlyi pont felé tart a megoldás.*

Kis  $A$  értékekre 3, nagy  $A$  értékekre 1 metszéspontja van a nullklínáknak (9. ábra), és adott  $A$  értékre bekövetkezik a katasztrofális bifurkáció. Ugyanez érvényes  $k$  értékének változtatására is. Ezt villa bifurkációnak hívják, aminek az elnevezése a 10. ábra alapján érthető.

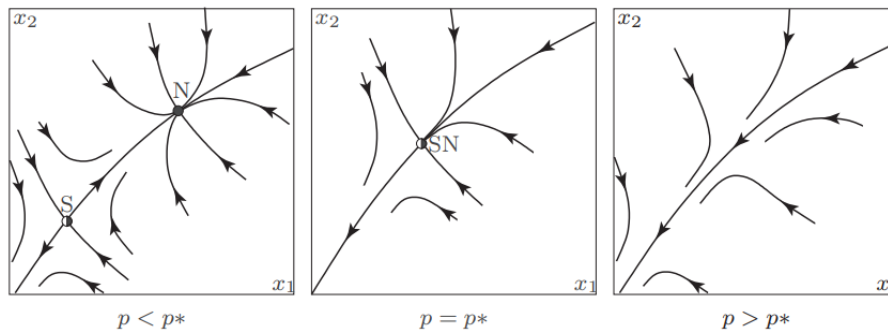
Hasonlóan  $\alpha, \beta, \gamma$  változtatására is villa bifurkációt kapunk.

### 3.2.2. Az általános eset

Induljunk ki az előző esetből. Ha  $A_1$ -et növelem a 9.(a) ábrához képest, akkor az  $x_2$ -nullklína felfele tolódik, és a  $x''$  és  $x'''$  elkezd közeledni egymáshoz, míg végül eltűnnek egy nyereg-csomó bifurkációban. Ennek működését szemlélteti a 11. ábra. Ha  $A_1$ -et csökkentem a 9.(a) ábrához képest, akkor az  $x_2$ -nullklína lefele tolódik, és  $x'$  és  $x''$  közelednek egymáshoz, majd végül eltűnnek. Ugyanez igaz  $A_2$  változtatására is. Ha  $A_1 >$



10. ábra. [4] Villa bifurkáció. Az  $x$  tengelyen a  $p$  paraméter értéke van. Az (a) ábrán  $A$  változtatására látjuk, hogyan változik az egyensúlyi pont - pontosabban annak  $x_1$  koordinátája. A (b) ábrán pedig  $k$ -ra látjuk ugyanezt.  $\alpha, \beta, \gamma$  értékei mint korábban. (a)  $k = 1$ , (b)  $A = 1$ . A folytonos vonal stabil egyensúlyi pont, a szaggatott pedig instabil egyensúlyi pont jelenlétét mutatja.



11. ábra. [4] Nyereg-csomópont bifurkáció. S: nyereg [saddle], N: csomópont [node].

$A_2$ , akkor az origóból az  $x'$  felé tart a megoldás, ha pedig  $A_1 < A_2$ , akkor az origóból az  $x'''$  felé tart a megoldás. Tehát ha az  $i$  személy vonzóbb, akkor a kapcsolat olyan állapot felé tart, amiben  $i$  társa elégedettebb.

Induljunk ki újból az azonos paraméterekkel rendelkező párok esetéből.  $k_2$  növelésével megváltozik az  $x_2$ -nullklína,  $x''$  és  $x'''$  lejjebb kerül. Ha  $k_1 < k_2$ , akkor az origóból az  $x'''$  felé tart a megoldás, ha pedig  $k_1 > k_2$ , akkor az origóból az  $x'$  felé tart a megoldás. Aki bizonytalanabb, az lesz elégedetlenebb a kapcsolatával. Végeredményben tehát  $k$  (bizonytalanság) változtatásával hasonlót érünk el, mint  $A$  változtatásával.

$\alpha_2$  növekedésével az  $x_2$ -nullklína lejjebb tolódik, és  $x'''$  felé tart az origóból induló megoldás.  $\alpha_i$  növelése, vagyis  $i$  egyén felejtésének gyorsulása a párjának kedvezőbb egyensúlyi helyzetet teremt.  $\beta_2$  növekedésével feljebb tolódik az  $x_2$ -nullklína. Ekkor az origóból az  $x'$  felé tart a megoldás. Emiatt magasabb  $\beta_i$  az  $i$  személynek kedvezőbb.  $\gamma_2$  növekedése  $x_2$ -nullklína feljebb tolódását eredményezi. Ekkor az origóból az  $x'$  felé tart a megoldás. Emiatt magasabb  $\gamma_i$  az  $i$  személynek kedvezőbb.

Általában igaz, hogy a bizonytalan kötődésű kapcsolatokban két egyensúlyi pont lehetséges, azonban ezek sokszor kiegyensúlyozatlanok,  $x_1$  jóval nagyobb mint  $x_2$ , vagy fordítva. Ez a való életben sokszor súrlódási pontot jelent.

### 3.3. Szerelmi ciklusok

**3.3.1. Állítás** ([4]). *Elfogulatlan párok kapcsolataira nem létezik periodikus megoldás.*

*Bizonyítás.* Elfogulatlan párok differenciálegyenlet-rendszere a következőképp néz ki:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1$$

ahol most  $R_i^L$  tetszőleges folytonosan differenciálható függvény.  $f$  divergenciája

$$\operatorname{div}(f) = -(\alpha_1 + \alpha_2),$$

ami konstans. Tehát a Bendixon kritériumot alkalmazva, nem létezik ciklikus megoldás.  $\square$

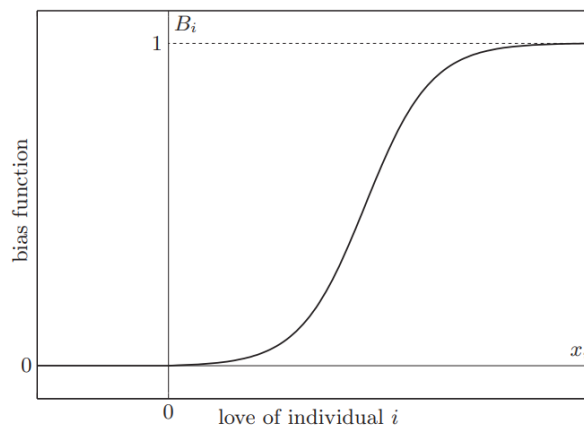
Ha  $i$  személy elfogult, az azt jelenti, hogy  $R_i^L$  vagy  $R_i^A$  függvényt befolyásolja  $x_i$  (lásd 3.1.2 definíció). A vonzerőre vonatkozó elfogultságot a következőképp fejezhetjük ki a modellben:

$$R_i^A(x_i) := (1 + b_i^A B_i^A(x_i)) \gamma_i A_i$$

ahol  $B_i^A(x_i) = 0$  ha  $x_i \leq 0$ , és utána 1-ig növekszik. Először konvex, majd konkáv. Lásd 12. ábra.  $b_i^A$  pedig az vonzerőre vonatkozó elfogultság együtthatója. A szerelemre reagálásban való elfogultságot a következőképp fejezhetjük ki a modellben:

$$R_i^L(x_i, x_j) := (1 + b_i^L B_i^L(x_i)) R_i^L(0, x_j)$$

ahol  $B_i^L(x_i)$  ugyanolyan mint  $B_i^A(x_i)$ , és  $b_i^L$  pedig a szerelemre vonatkozó elfogultság együtthatója. Elfogulatlan párokra  $b_i^A = 0$  és  $b_i^L = 0$ .



12. ábra. [4]  $B_i(x_i)$  függvény grafikonja

**3.3.1. Definíció** ([4]). *Azon elfogult személyek, akikre  $b_i > 0$ , szinergikusak.*

**3.3.2. Definíció** ([4]). *Azon elfogult személyek, akikre  $b_i < 0$ , plátóiak.*

**3.3.2. Állítás** ([4]). *Ha a kapcsolatban mindkét fél biztonságos kötődésű, akkor kapcsolatuknak alakulásában nem létezik periódus.*

*Bizonyítás.* Csak azt bizonyítom, hogy Hopf bifurkációval nem jelenhet meg határciklus. Most az általános modelltől kell kiindulnunk, ami a következő:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_1, x_2) + R_1^A(x_1, A_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1, x_2) + R_2^A(x_2, A_1)\end{aligned}\tag{9}$$

A modell divergenciája:

$$\operatorname{div}(f) = -\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{dR_1^L}{dx_1} + \frac{dR_1^A}{dx_1} + \frac{dR_2^L}{dx_2} + \frac{dR_2^A}{dx_2}$$

Ha  $i$  személy szinergikus, akkor

$$\frac{dR_i^L}{dx_i} \geq 0 \quad \frac{dR_i^A}{dx_i} \geq 0$$

és legalább az egyik egyenlőtlenségre szigorúan nagyobb igaz. Ha  $i$  személy plátói, akkor fordított egyenlőtlenségek igazak. Két plátói személy esetén tehát a divergencia mindig negatív, így Bendixon kritérium alapján ilyenkor nincs periodikus pálya.

Egyéb esetben a Bendixon kritérium nem segít. Viszont bizonyítható, hogyha a két személy biztonságos kötődésű,

$$\frac{dR_1^L}{dx_2} > 0 \quad \frac{dR_2^L}{dx_1} > 0$$

akkor periodikus megoldás nem állhat elő Hopf bifurkáció során. Indirekt tegyük fel, hogy előállhat. Ekkor a Jacobi mátrixnak

$$J := \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{pmatrix}$$

az egyensúlyi pontban kiértékelve ki kell elégítenie a következőket:

$$\operatorname{Tr}(J) = 0 \quad \det(J) > 0$$

Ezért  $\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2} = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $\frac{df_1}{dx_1} \cdot \frac{df_2}{dx_2} \leq 0$ . Ugyanakkor

$$\det(J) = \frac{df_1}{dx_1} \cdot \frac{df_2}{dx_2} - \frac{df_1}{dx_2} \cdot \frac{df_2}{dx_1},$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = \frac{dR_1^L}{dx_2}, \quad \frac{df_2}{dx_1} = \frac{dR_2^L}{dx_1},$$

$$\text{így } \det(J) < 0$$

Így a Hopf bifurkációt kizártuk. □

### 3.3.1. Határciklus létezése

Most már csak az hiányzik, hogy mutassunk olyan modellt, ahol létezik periódus. Legyen a pár mindkét tagja vonzerőre reagálásában szinergikus, bizonytalan kötődésű. A modell

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1)) \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_2) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2)) \gamma_2 A_1\end{aligned}\tag{10}$$

ahol  $b_1^A, b_2^A$  pozitív, és

$$R_i^L(x_j) := \beta_i k_i x_j \exp(-(k_i x_j)^{n_i}) \quad \beta_i > 0, k_i > 0 \text{ és } n_i \text{ pozitív egész}$$

$$B_i^A(x_i) := x_i^{2m_i} / (x_i^{2m_i} + \sigma_i^{2m_i}) \quad \sigma_i > 0 \text{ és } m_i \text{ pozitív egész}$$

Ezek megfelelnek a korábbi követelményeinknek  $B_i^A$ -ra, illetve bizonytalan kötődésű  $R_i^L$  függvényre (még ha ez nem is egyezik meg a (6) függvénnyel). Keressük meg  $R_i^L$  maximum helyét:

$$\begin{aligned}\frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} &= \beta_i k_i \exp(-(k_i x_j)^{n_i}) + \beta_i k_i x_j \exp(-(k_i x_j)^{n_i}) (-n_i (k_i x_j)^{n_i-1} k_i) \\ &= \beta_i k_i \exp(-(k_i x_j)^{n_i}) (1 - x_j n_i k_i^{n_i} x_j^{n_i-1})\end{aligned}$$

$$\frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} = 0, \quad \text{ha } 1 - x_j n_i k_i^{n_i} x_j^{n_i-1} = 0$$

Így  $R_i^L$  maximum helye:

$$x_j = \frac{1}{k_i} \sqrt[n_i]{\frac{1}{n_i}}$$

Ebből látszik, hogy  $k_i$  az  $i$  személy bizonytalanságának mértékét fejezi ki. Rögzítsük le a paramétereket az alább meghatározott értékekre:

$\alpha_1 = 0.36$	$k_1 = 0.08$	$n_1 = 1$	$\beta_1 = 0.75$
$A_1 = 0.1$	$\sigma_1 = 1$	$m_1 = 4$	$\gamma_1 = 1$
$\alpha_2 = 0.2$	$k_2 = 1.5$	$n_2 = 4$	$\beta_2 = 10.66$
$A_2 = 0.1$	$\sigma_2 = 1$	$m_2 = 4$	$\gamma_2 = 1$

Továbbá először legyen  $b_1^A := 0$  és  $b_2^A := 0$ . Tudjuk, hogy ekkor nem létezik periodikus megoldás (3.3.1. állítás), és meg lehet határozni a stabil egyensúlyi pontot. Ezután  $b_1^A$  és

$b_2^A$  értékeit növelve észrevehető, hogy  $b_1^A = 2.93$  és  $b_2^A = 0$  értékre keletkezik ciklus, ami nagyon kicsi, de tovább növelve  $b_1^A$ -t nagyobb lesz. Tehát találtunk példát arra, hogy kapcsolat dinamikája ciklikus tud lenni Rinaldi kapcsolati modellje alapján.



### 3.4. Időkésleltetés vizsgálata

Késleltetett lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n A_j x(t - \tau_j) \quad (11)$$

ahol  $\tau_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) jelenti a késleltetéseket. Keressük a megoldásait  $x(t) = e^{\lambda t} \xi$  alakban, ahol  $\xi$  konstans vektor. Ekkor

$$\dot{x}(t) = e^{\lambda t} \lambda \xi = \sum_{j=1}^n A_j e^{\lambda(t-\tau_j)} \xi, \quad \text{így} \quad \lambda \xi = \sum_{j=1}^n A_j e^{-\lambda \tau_j} \xi$$

$$\left( \lambda I - \sum_{j=1}^n A_j e^{-\lambda \tau_j} \right) \xi = 0$$

Ez  $\xi \neq 0$ -ra akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\det\left(\lambda I - \sum_{j=1}^n A_j e^{-\lambda \tau_j}\right) = 0 \quad (12)$$

Ez a **karakterisztikus egyenlet** késleltetett lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszer esetén.

Késleltetett nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) \quad (13)$$

stabilitásvizsgálatához linearizálni kell a rendszert. Legyen  $x^*$  egyensúlyi pont, és  $x(t)$  megoldás. Ekkor ha  $y(t) = x(t) - x^*$ , akkor

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = \dot{x}(t) &= f(x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) = f(y(t - \tau_1) + x^*, \dots, y(t - \tau_n) + x^*) \\ &\approx f(x^*, \dots, x^*) + f'(x^*, \dots, x^*) [y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)]^T \\ &= f'(x^*, \dots, x^*) [y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)]^T \end{aligned}$$

Az eredeti rendszer stabilitása  $x^*$  egyensúlyi pontban megegyezik az új közelített rendszer stabilitásával a  $(0, 0)$  pontban. Ez a kapott **linearizált rendszer** szebb alakban így írható:

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^n A_j y(t - \tau_j)$$

ahol  $A_j$  a  $\tau_j$ -hez tartozó Jacobi mátrix az egyensúlyi pontban kiértékelve.

Hogy jön az időkéseleltetés a kapcsolatok modelljéhez? Amíg egyik fél megbizonyosodik a másik szerelméről (vagy bármilyen érzéséről), az időbe telik. Sőt az is időt igényelhet,

hogy valaki ki merje mutatni vagy el merje mondani az érzéseit. Ezért Liao és Ran [3], illetve Son és Park [5] azt vizsgálták, hogy az időkésltetésnek milyen hatása van a kapcsolatok Rinaldi-féle modelljére.

Liaoék csak elfogulatlan párokat vizsgáltak, és nem tértek ki arra, hogy az érzésekre reagálás függvényének típusaitól hogyan függhet a stabilitás és a Hopf bifurkáció, ezért az ő eredményeikkel rövidebben foglalkozom. Modelljük a következő:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\alpha_1 x_1(t) + b_1 f(x_2(t - \tau_2)) + \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha_2 x_2(t) + b_2 f(x_1(t - \tau_1)) + \gamma_2 A_1\end{aligned}\tag{14}$$

ahol  $\tau_1, \tau_2$  az időkésltetések. Legyen  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pont.

$$y_1(t) = x_1(t) - x_1^*, \quad y_2(t) = x_2(t) - x_2^*,$$

így

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) = \dot{x}_1(t) &= -\alpha_1 x_1(t) + b_1 f(x_2(t - \tau)) + \gamma_1 A_2 = -\alpha_1 y_1(t) + b_1 f(y_2(t - \tau) + x_2^*) \\ &\quad + \gamma_1 A_2 - \alpha_1 x_1^* = -\alpha_1 y_1(t) + b_1 f(y_2(t - \tau) + x_2^*) - b_1 f(x_2^*),\end{aligned}$$

és  $\dot{y}_2(t)$  hasonlóan számolható, ezért

$$\text{ha } g(y_j(t)) = f(y_j(t) + x_j^*) - f(x_j^*), \quad \text{akkor}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -\alpha_1 y_1(t) + b_1 g(y_2(t - \tau_2)) \\ \dot{y}_2(t) &= -\alpha_2 y_2(t) + b_2 g(y_1(t - \tau_1))\end{aligned}$$

Az egyensúlyi pont ebben a rendszerben a  $(0, 0)$  pont. Linearizálva a rendszert, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= -\alpha_1 V_1(t) + b_1 d V_2(t - \tau_2) \\ \dot{V}_2(t) &= -\alpha_2 V_2(t) + b_2 d V_1(t - \tau_1)\end{aligned}$$

ahol  $d = g'(0)$ . Ennek karakterisztikus egyenlete  $\tau := \tau_1 + \tau_2$  esetén:

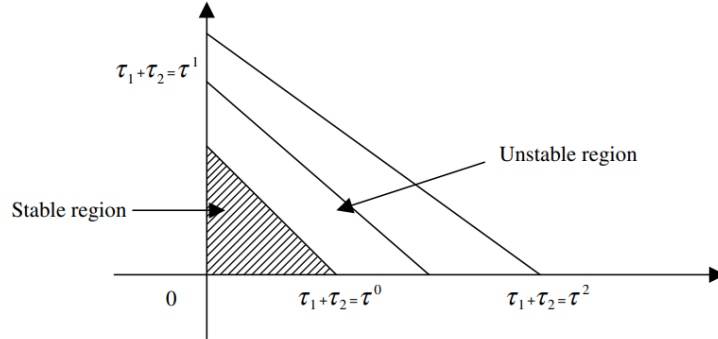
$$\begin{vmatrix} \lambda + \alpha_1 & -b_1 d \exp(-\lambda \tau_2) \\ -b_2 d \exp(-\lambda \tau_1) & \lambda + \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

Legyen  $\omega_0$  az a szám, amire a karakterisztikus egyenlet gyökei  $\pm i\omega_0$ .

### 3.4.1. Állítás ([3]).

$$\tau^j := \frac{1}{\omega_0} \left[ \arcsin\left(-\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\omega_0}{b_1 b_2 d^2}\right) + 2j\pi \right] \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ha a (14) rendszerre  $0 \leq \tau \leq \tau^0$ , akkor az egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil. Ha  $\tau > \tau^0$ , akkor az egyensúlyi pont instabil.  $\tau^j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) értékeire Hopf-bifurkáció történik.



13. ábra. [3] Stabilitás  $\tau_1$  és  $\tau_2$  függvényében. A sátozott rész stabil, az üres instabil. Hopf bifurkáció történik az egyenesek mentén (vagyis ahol  $\tau_1 + \tau_2 = \tau^j$ ).

Áttérek Son és Park tanulmányára. Először az elfogulatlan párok modelljét vizsgálták:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha_1 x_1(t) + R_1(x_2(t - \tau)) + \gamma_1 A_2 \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha_2 x_2(t) + R_2(x_1(t - \tau)) + \gamma_2 A_1 \end{aligned} \quad (15)$$

ahol  $\tau \geq 0$  a késleltetés ideje,  $R_i$  bármilyen lehet, és korábbiakhoz hűen  $\alpha_i, \gamma_i > 0$ .

**3.4.2. Állítás** ([5]). Legyen  $(x_1^*, x_2^*)$  a (15) rendszer egyensúlyi pontja. Ha a rendszer paramétereire

$$(F_1) \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \alpha_1 \alpha_2 - c_1 c_2 > 0,$$

$$(F_2) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 - c_1^2 c_2^2 > 0,$$

akkor az  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis minden  $\tau \geq 0$ -ra.

*Bizonyítás.* A modell linearizáltja:

$$\dot{y}_1(t) = -\alpha_1 y_1(t) + c_1 y_2(t - \tau)$$

$$\dot{y}_2(t) = -\alpha_2 y_2(t) + c_2 y_1(t - \tau)$$

ahol  $c_1 = dR_1/dx_2|_{x_2^*}$  és  $c_2 = dR_2/dx_1|_{x_1^*}$ . Ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 - \lambda & c_1 \exp(-\tau\lambda) \\ c_1 \exp(-\tau\lambda) & -\alpha_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda + \alpha_1 \alpha_2 - c_1 c_2 \exp(-2\tau\lambda) = 0$$

( $F_1$ ) miatt  $\tau = 0$ -ra a sajátértékek valós része negatív.

Tegyük fel, hogy  $i\omega$  sajátérték. Ekkor Euler-képlet felhasználásával

$$\omega^2 - \alpha_1\alpha_2 = -c_1c_2 \cos(2\omega\tau),$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\omega = -c_1c_2 \sin(2\omega\tau).$$

Mindkét egyenletet négyzetre emeljük, és  $p := \omega^2$ :

$$p^2 - 2\alpha_1\alpha_2p + \alpha_1^2\alpha_2^2 = c_1^2c_2^2 \cos^2(2\omega\tau)$$

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2)p = c_1^2c_2^2 \sin^2(2\omega\tau)$$

Majd összeadjuk a két egyenletet:

$$p^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p + \alpha_1^2\alpha_2^2 - c_1^2c_2^2 = 0. \quad (16)$$

( $F_2$ ) teljesülése esetén ennek az egyenletnek nincs pozitív gyöke. Így nem létezhet  $i\omega$  sajátérték. Következésképp  $\tau$  növelése esetén nem válnak a sajátértékek valós részei nem-negatívvá. Tehát  $(x_1^*, x_2^*)$  aszimptotikusan stabilis minden  $\tau \geq 0$ -ra.  $\square$

### 3.4.3. Állítás ([5]). Ha a (15) rendszer paramétereire

$$(F_1) \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \alpha_1\alpha_2 - c_1c_2 > 0,$$

$$(F_2) \quad \alpha_1^2\alpha_2^2 - c_1^2c_2^2 < 0$$

akkor az  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis  $\tau < \tau_0$ -ra, és instabil  $\tau > \tau_0$ -ra. Továbbá,  $\tau = \tau_0$  esetén a rendszer az  $(x_1^*, x_2^*)$  pontban Hopf-bifurkáción megy keresztül.

*Bizonyítás.* Ennek bizonyítása a (16) egyenletig ugyanaz mint az előző állításnak. ( $F_2$ ) miatt itt egy pozitív gyöke van (16)-nak,

$$p_0 = \frac{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - 4(\alpha_1^2\alpha_2^2 - c_1^2c_2^2)}}{2}, \quad p_0 = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 + 4c_1^2c_2^2} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right)^{1/2}$$

$$2\tau_n\omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 - \omega_0^2}{c_1c_2}\right) + 2n\pi$$

$$\tau_n = \frac{1}{2\omega_0} \cos^{-1}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 - \omega_0^2}{c_1c_2}\right) + \frac{n\pi}{\omega_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Vizsgáljuk meg  $\operatorname{Re}(d\lambda/d\tau)$  előjelét. A karakterisztikus polinom deriválásával, majd  $\tau = \tau_0$  és  $\lambda = i\omega_0$  behelyettesítésével látszik, hogy

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0} > 0$$

□

**3.4.4. Állítás ([5]).** *Lineáris  $R_i$ -vel rendelkező és biztonságos kötődésű párok esetén az időképletetés nem tud egyensúlyi pontot instabillá tenni.*

*Bizonyítás.* Lineáris esetben és biztonságos kötődés esetén is

$$\frac{dR_i}{dx_j} > 0, \quad \text{ezért} \quad c_i > 0.$$

$\alpha_1, \alpha_2$  pozitívak. Tudjuk, hogy  $\tau = 0$ -ra stabil az egyensúlyi pont. Így a 3.4.2 állítás ( $F_1$ ) feltétele teljesül. Előbbieket miatt ( $F_2$ ) is teljesül, így minden  $\tau \geq 0$ -ra aszimptotikusan stabil az egyensúlyi pont. □

Szinergikus párok esetén az időképletetett modell:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha_1 x_1(t) + R_1(x_2(t-\tau)) + [1 + S_1(x_1(t))] \gamma_1 A_2, \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha_2 x_2(t) + R_2(x_1(t-\tau)) + [1 + S_2(x_2(t))] \gamma_2 A_1 \end{aligned} \quad (17)$$

ahol

$$S_i(x_i) := \begin{cases} \sigma_i x_i^s / (1 + x_i^s) & \text{ha } x_i \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x_i < 0, \end{cases}$$

$\sigma_i > 0$  adott paraméter,  $\tau \geq 0$  a késleltetés,  $R_i(x_j)$  tetszőleges. A rendszer linearizáltja  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pontban:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\alpha_1 y_1(t) + c_1 y_2(t-\tau) + d_1 y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\alpha_2 y_2(t) + c_2 y_1(t-\tau) + d_2 y_2(t) \end{aligned}$$

ahol  $c_1 = dR_1/dx_2|_{x_2^*}$ ,  $c_2 = dR_2/dx_1|_{x_1^*}$  és  $d_1 = dS_1/dx_1|_{x_1^*}$ ,  $d_2 = dS_2/dx_2|_{x_2^*}$ . Legyen  $\alpha_i^s := \alpha_i - d_i$ .

**3.4.5. Állítás ([5]).** *Legyen  $(x_1^*, x_2^*)$  a (17) rendszer egyensúlyi pontja. Ha a rendszer paramétereire*

$$(F_1) \quad \alpha_1^s + \alpha_2^s > 0, \alpha_1^s \alpha_2^s - c_1 c_2 > 0,$$

$$(F_2) \quad (\alpha_1^s)^2 + (\alpha_2^s)^2 > 0, (\alpha_1^s)^2 (\alpha_2^s)^2 - c_1^2 c_2^2 > 0,$$

*akkor az  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis minden  $\tau \geq 0$ -ra.*

Ennek bizonyítása ugyanolyan módon lehetséges mint 3.4.2 állításé.

**3.4.6. Állítás** ([5]). *Legyen  $(x_1^*, x_2^*)$  a (17) rendszer egyensúlyi pontja. Ha a rendszer paramétereire*

$$(F_1) \quad \alpha_1^s + \alpha_2^s > 0, \alpha_1^s \alpha_2^s - c_1 c_2 > 0,$$

$$(F_2) \quad (\alpha_1^s)^2 (\alpha_2^s)^2 - c_1^2 c_2^2 < 0,$$

*akkor az  $(x_1^*, x_2^*)$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis  $\tau < \tau_0$ -ra, és instabil  $\tau > \tau_0$ -ra. Továbbá,  $\tau = \tau_0$  esetén a rendszer az  $(x_1^*, x_2^*)$  pontban Hopf-bifurkáción megy keresztül.*

Ennek bizonyítása ugyanolyan módon lehetséges mint 3.4.3 állításé.

**3.4.7. Állítás** ([5]). *Lineáris  $R_i$ -vel rendelkező és biztonságos kötődésű párok esetén az időképletelés nem tud egy stabil egyensúlyi pontot instabillá tenni.*

*Bizonyítás.* Lineáris esetben és biztonságos kötődés esetén is

$$\frac{dR_i}{dx_j} > 0, \quad \text{ezért} \quad c_i > 0.$$

A 3.4.6 állítás  $(F_1)$  és  $(F_2)$  feltételeinek következménye, hogy

$$c_1 c_2 < \alpha_1^s \alpha_2^s,$$

$$\text{és} \quad \alpha_1^s \alpha_2^s + c_1 c_2 < 0, \quad c_1 c_2 < -\alpha_1^s \alpha_2^s,$$

$$\text{így} \quad c_1 c_2 < -|\alpha_1^s \alpha_2^s| < 0.$$

Ez nem teljesül  $c_1, c_2 > 0$  esetén, ezért nem válhat instabillá az egyensúlyi pont.  $\square$

### 3.5. Házasságok sikeressége

Gottman, Murray és tanítványaik több éven át kutatták, hogyan lehetne a párkapcsolatokat -pontosabban házasságokat- modellezni, különös tekintettel arra, hogy felmérjék, egy házasság ki fog-e tartani, vagy válással fog végződni, és ha kitart, akkor boldog vagy boldogtalan lesz a kapcsolat. Kutatásuk menetét, eredményeit a *The Mathematics of Marriage* [2] című könyvben foglalták össze.

Modelljüket már létező párokra állították fel. Megfigyelték a kísérletbe bevont párok kommunikációját konfliktus esetén, és a Gottman által kidolgozott RCISS (Rapid Couples Interaction Scoring System, vagyis párok interakciójának gyors pontozó rendszere) rendszerben pontozták azokat. Ha a nő  $t$  időpontban kapott pontszáma  $W_t$ , és a férfié  $H_t$ , akkor a párbeszéd alakulása a következőképp írható le:

$$\begin{aligned}W_{t+1} &= f(W_t, H_t) \\H_{t+1} &= g(W_{t+1}, H_t)\end{aligned}$$

ahol  $f$  és  $g$  függvények még pontosításra várnak. Az aszimmetria abból adódik, hogy feltételezzük, a nő beszél előbb.

A párbeszéd alakulását két tényező befolyásolja: az egyén tulajdonságai (érzelmi állapota) - ezt adott  $t$  pillanatban jelöljük  $P_t$ -vel, és a társ hatása - ezt pedig jelöljük  $I_{HW}$ -vel, ha a férj feleségre való hatásáról van szó, és  $I_{WH}$ -vel, ha a feleség férjre való hatásáról van szó.

$$P_{t+1} = r_i P_t + \alpha \tag{18}$$

ahol  $\alpha$  egy konstans, és  $r_i$  az  $i$  személy tehetetlensége (mint (1) egyenletrendszerben  $\alpha$ ,  $d$ ). Ez az egyenlet ugyan nem differenciálegyenlet, de analóg módon, ahogy egy differenciálegyenlet esetén, úgy most is kereshetünk egyensúlyi pontot. Derivált helyett  $P_t = P_{t+1}$  egyenletet kell megoldani, amiből a befolyásolatlan egyensúlyi pont:

$$P := \frac{\alpha}{1 - r_i}$$

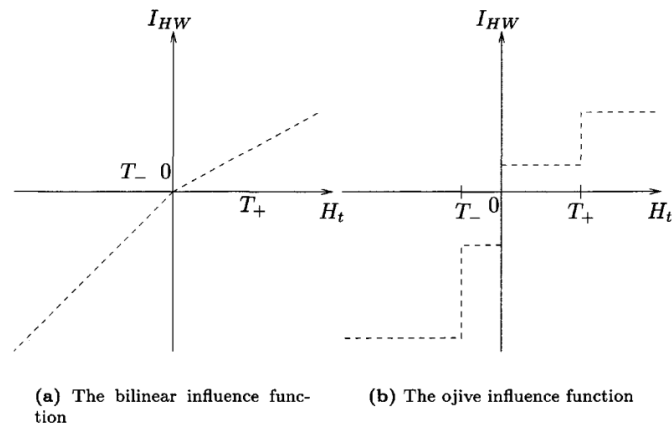
A (18) egyenlet zárt alakban:

$$P_t = r_i^t P_0 + \frac{\alpha(1 - r_i^t)}{1 - r_i}$$

Ha  $|r_i| > 1$ , akkor  $|P_t|$  tart végtelenhez. Ekkor instabil  $P_t$ -re a megoldás, ezért ezzel az esettel nem foglalkozik a könyv. Ha  $|r_i| < 1$ , akkor  $P_t$  tart  $\alpha/(1 - r_i)$ -hez, ez a stabil állapot ( $P_0$ -tól nem függ).

Az pár egyik tagjának a másikra ható  $I_{HW}(H_t)$  (illetve  $I_{WH}(W_t)$ ) függvényére két lehetőséget vázol fel a könyv:

- Ha  $H_t < 0$ , ha  $H_t > 0$ , lineáris a függvény, de a meredekség nagyobb negatív  $H_t$ -re. 0-ban "összeérnek". Bilineáris függvény.
- Lépcsősfüggvény. Olyan, hogy  $H_t > 0$  esetén  $|I_{HW}(-H_t)| > |I_{HW}(H_t)|$ .



14. ábra. [2]  $I_{HW}$  függvény lehetséges grafikonjai

A két függvény grafikonja a 14. ábrán látható.

Tehát most már  $f$  és  $g$  függvények összetevőit meghatároztuk, így a modell:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a \\ H_{t+1} &= I_{WH}(W_{t+1}) + r_2 H_t + b \end{aligned} \quad (19)$$

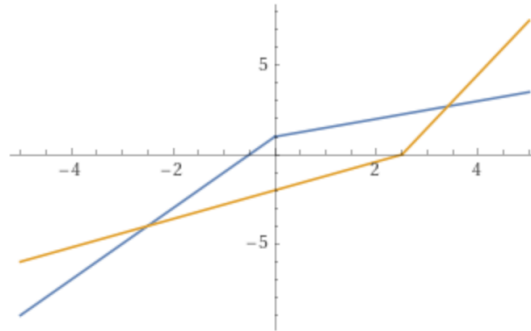
Adott házasságra ismerjük a beszélgetés során minden  $t$  időpontban  $W_t$  és  $H_t$  értékeit. Vannak ezek közül olyan időpontok, amikor azt feltételezhetjük, hogy  $I_{WH} = 0$  és  $I_{HW} = 0$ , így  $r_1$ ,  $r_2$  és  $a$ ,  $b$  értékeit megkaphatjuk. Ezután aránylag könnyen  $I_{WH}$  és  $I_{HW}$  függvényeket is meg lehet becsülni. Tehát egy beszélgetés során gyűjtött adatokból meg lehet határozni az adott pár paramétereit, és a modell alapján megnézni, merre tart a házasságuk.

Határozzuk meg az úgynevezett befolyásolt egyensúlyi pontot. Derivált helyett  $W_{t+1} = W_t =: W$  és  $H_{t+1} = H_t =: H$  megoldása kell. A következők a nullklínák:

$$\begin{aligned} W &= \frac{I_{HW}(H) + a}{1 - r_1} \\ H &= \frac{I_{WH}(W) + b}{1 - r_2} \end{aligned}$$

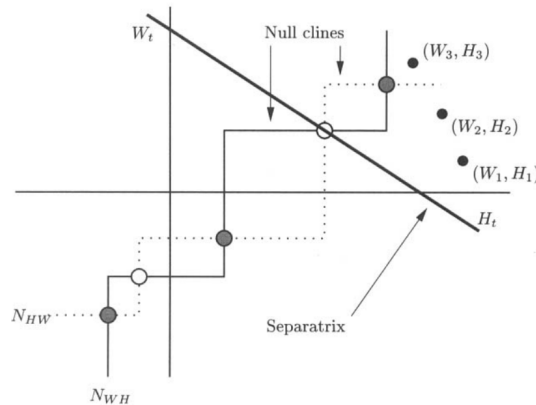
Bilineáris  $I_{HW}$  és  $I_{WH}$  függvények esetén a nullklínák lehetséges helyzetét szemlélteti a 15. ábra. A nullklínák metszéspontjai a befolyásolt egyensúlyi pontok. Ha a párok egymásra hatása lépcsősfüggvény típusú, akkor a nullklínák lehetséges helyzete a 16. ábrán látható. Megjegyzem, hogy a lépcsősfüggvény nem folytonos, ezért az ábra nem pontos, és emiatt a felfedezett egyensúlyi pontok egy része nem megalapozott. Sőt az egész nullklína fogalma így nehezen értelmezhető, mert jelen esetben a nullklínák nem választják ketté a síkot, és





15. ábra. Nullklínákra példa párok bilineáris függvényű egymásra hatása esetén.

ezért nem egyértelmű az sem, hogy melyik "oldalukon" milyen irányba változik  $W_t$  és  $H_t$ .



16. ábra. [2] Ha  $I_{HW}$  és  $I_{WH}$  lépcsősfüggvény, akkor a nullklínák bizonyos paraméterekre így néznek ki. Az üres körrel megjelölt egyensúlyi pontok instabilak, a sátrózott körrel megjelöltek stabilak.

**3.5.1. Állítás.** Az  $(H_S, W_S)$  egyensúlyi pont stabilitására szükséges és elégséges feltétel:

$$I'_{WH}(W_S)I'_{HW}(H_S) < (1 - r_1)(1 - r_2)$$

Ennek bizonyítása hosszú, kezdő ötlete, hogy az egyensúlyi pont körül Taylor-sort fejtünk.

A kísérletük során szerzett tapasztalatok és eredmények azt mutatták Gottmanéknak, hogy még nem elég jó a modelljük. Felmerült bennük, hogy a kapcsolat/párbeszéd alakulásában lehetséges, hogy nem ennyire kettéválasztható az egyén érzelmi állapotának hatása és a társ hatása, bár ezen nem módosítottak. Viszont az RCISS pontozó rendszerüket lecserélték SPAFF nevezetű pontozó rendszerre, és hozzávettek a modelljükhöz R és D (javítás és csillapítás) függvényeket, melyek a következőképp néznek ki:

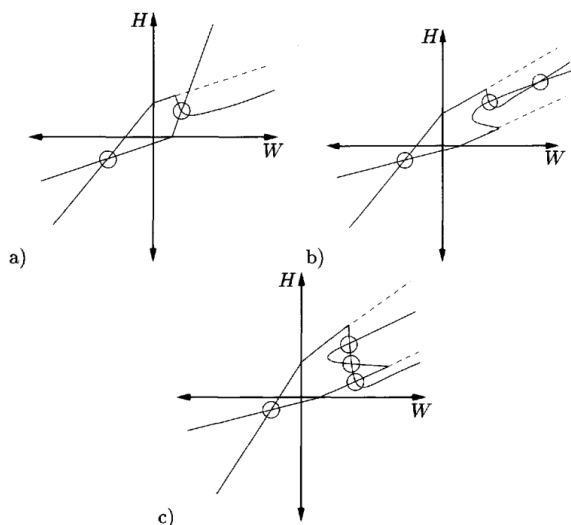
$$R_i(x) = B_i \frac{|x - K_i| - (x - K_i)}{1 - (x - K_i)}$$

$$D_i(x) = C_i \frac{|x - L_i| + (x - L_i)}{1 + (x - L_i)}$$

ahol  $K_i < 0$ ,  $L_i > 0$  és  $B_i, C_i > 0$  paraméterek. Így a teljes modell:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= I_{HW}(H_t) + R_W(H_t) + D_w(H_t) + r_1 W_t + a \\ H_{t+1} &= I_{WH}(W_{t+1}) + R_H(W_{t+1}) + D_H(W_{t+1}) + r_2 H_t + b \end{aligned}$$

Bilineáris I függvények esetén lehetséges nullklínák és egyensúlyi pontok a 17. ábrán láthatóak.



17. ábra. [2] Nullklínák és egyensúlyi pontok javítással és csillapítással együtt.

**3.5.2. Állítás** ([2]). *Az egyensúlyi pont stabilitására szükséges és elégséges feltétel:*

$$|r_1 + r_2| < 1 + r_1 r_2 - (\alpha_1 + \epsilon_1)(\alpha_2 + \epsilon_2) < 2$$

ahol  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  a társ bilineáris hatás függvényének (azaz  $I_{WH}$ -nek és  $I_{HW}$ -nek) a meredeksége az egyensúlyi pontban; és  $\epsilon_1, \epsilon_2$  a javítás/csillapítás függvény meredeksége az egyensúlyi pontban.

A könyvben még hosszú fejezet foglalkozik azzal, hogy hogyan lehet beavatkozni egy házasságba, hogy az boldog legyen. Viszont itt statisztikákra és pszichológiára alapoznak, és nem arra, hogy a modell paramétereinek változtatása hogyan hat a modell egyensúlyi pontjaira és azok stabilitására, úgyhogy csak néhány mondatban foglalom össze a tartalmát.  $r_i$  (érzelmi tehetetlenség) csökkentése, a befolyásolatlan egyensúlyi pont nagyobbá tétele, és az, ha a befolyásolt egyensúlyi pont koordinátái nagyobbak mint a befolyásolatlané, hatnak kedvezően a házasságok kimenetelére.

Valóban, ha  $|r_i| < 1$ , akkor  $0 < 1 - r_i < 2$ , így  $r_i$  kisebb értéke esetén a hozzá tartozó nullklína közelebb kerül az  $x$  tengelyhez, így a pozitív és negatív egyensúlyi pontok

között kisebb a különbség, ami a házasság kiegyensúlyozottságára utal. A befolyásolatlan egyensúlyi pont értékének ( $a/(1 - r_1)$  illetve  $b/(1 - r_2)$ ) növelése a nullklínák felfele tolását eredményezi, és így az egyensúlyi pontok koordinátái nagyobbak lesznek.



## Források

- [1] J.D. Christy Bieber. *Revealing Divorce Statistics In 2024*. 2024. URL: <https://www.forbes.com/advisor/legal/divorce/divorce-statistics/>.
- [2] John M. Gottman és tsai. *The Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Models*. Massachusetts Institute of Technology, 2002. ISBN: 0-262-07226-2.
- [3] Xiaofeng Liao és Jiuhong Ran. “Hopf bifurcation in love dynamical models with nonlinear couples and time delays”. *ScienceDirect* (2005).
- [4] S. Rinaldi és tsai. *Modeling Love Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. ISBN: 9789814696319.
- [5] Woo-Sik Son és Young-Jai Park. “Time Delay Effect on the Love Dynamical Model”. *Korean Physical Society* (2011).
- [6] J. C. Sprott. “Dynamical Models of Love”. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences* (2004).