Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Sárvári Krisztina Éva

Súlyozott szavazási játékok

Szakdolgozat

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Tamási Tímea

Operációkutatási tanszék

Budapest, 2024

NYILATKOZAT

Név: SÁRVÁRI KRISZTINA ÉVA

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: XMAWNG

Szakdolgozat címe: SÚLYOZOTT SZAVAZÁSI JÁTÉKOK

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.06.01.

Sárvári Krisztina Éva

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

A szakdolgozatom elkészítésében sok segítséget kaptam témavezetőmtől, Tamási Tímeától, amiért nagyon hálás vagyok. A rendszeres, jó hangulatú konzultációink során elsajátíthattam a témám részleteit, valamint hasznos útmutatásokat kaptam.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Parlamenti választások során két pártnak mikor kell egyesülnie mindenképp ahhoz, hogy győzelemre jussanak? Ezt követően a nyereségen hogyan osztozzanak meg? Vagy éppen egy piaci adás-vételi helyzet során az eladónak melyik vevővel éri meg leginkább együttműködnie?

A hétköznapi élet sok területén, például gazdaságban, politikában gyakran szükséges annak reális felmérése, hogy a többi szereplővel érdemes-e egyezkedni, közös megállapodásra jutni, és ha igen, akkor ez az úgynevezett kooperáció mennyire hasznos. A kooperatív játékelmélet az ilyen helyzetek matematikai leírását adja meg, a résztvevőket játékosoknak, a lehetségesen kialakuló, egymással együttműködő csoportosulásokat pedig koalíciónak nevezi, és ezekhez értékeket rendel, attól függően hogy mennyi hasznot képesek együtt elérni. Foglalkozik továbbá azzal, hogy az elért hasznot a koalíciók tagjai hogyan oszthatják fel egymás közt, ez mikor lesz igazságos, vagy éppen minden koalíció számára megfelelő, és mikor nem.

Feltesszük, hogy a résztvevők racionálisan gondolkodnak, tehát nem hoznak olyan döntéseket amikkel csökkentenék a hasznukat, valamint, hogy a fizetőeszköz mindenki számára ugyanazt jelenti. Természetesen ez nem mindig következik be a való életben, például két politikai párt sok esetben nem egyesül személyes ellentétek miatt akkor sem, ha megérné nekik, de a modellezést jelentősen megkönnyíti a feltételezés.

A szakdolgozat első felében általánosan vizsgáljuk az ilyen játékokat példákon keresztül; kategóriákba oszthatjuk a játékokat aszerint, hogy általánosan megéri-e két koalíciónak egyesülnie, vagy a koalíciós függvény tulajdonságai szerint. Foglalkozunk kifizetésekkel, ezek jellegzetességeivel, bevezetjük a mag, és az általánosabb CS-mag definícióját. Továbbá az úgynevezett Shapley-érték és Bahnzaf-index segítségével igazságos kifizetéseket keresünk.

A második nagy részben a megismert fogalmakat súlyozott szavazási játékokban elemezzük. A szavazási játékok a kooperatív játékok egy csoportját alkotják, ilyenkor a szereplőknek ahhoz, hogy csoportosan egy adott javaslat elfogadásáról vagy elutasításáról hozzanak döntést, egy bizonyos limitet kell elérniük. Súlyozott szavazási játékoknál a szereplők különböző fontosságúak (súlyúak) lehetnek, ezért többféle helyzet is modellezhető velük, például egy parlamenti választás során egy párt súlyát megadhatjuk az általa birtokolt mandátumok számával, és ez alapján vizsgálhatjuk mely pártoknak érdemes egyesülnie.

2. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben Solymosi Tamás játékelmélet jegyzetét [4] alapul véve bemutatjuk a kooperatív játékelmélet tárgyalásához szükséges alapvető fogalmakat, formalizáljuk a játékok egyes fajtáit, a nyereség felosztásának módjait, vagyis a kifizetéseket, és vizsgáljuk ezek jellemzőit. Később szó esik a magról, amely kulcsfontosságú fogalom, valamint az igazságos kifizetések kapcsán a Shapley-értékről és Bahnzaf-indexről.

1. Definíció. *Legyen $n \geq 2$ és N a játékosok halmaza. Az $S \subseteq N$ halmazt* ***koalíciónak*** *nevezzük, $\mathcal{N}$ -t pedig a* ***koalíciók halmazának****. Az üres halmaz mint koalíció az* ***üres koalíció****, N pedig mint a teljes halmaz a* ***nagykoalíció****.*

2. Definíció. *A* ***koalíciós függvény*** *egy, a koalíciók halmazán értelmezett valósértékű függvény; $v : \mathcal{N} \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0$.*

3. Definíció. *Egy n-személyes* ***kifizetéses kooperatív játék*** *két összetevője:*

- *a játékosok halmaza: $N = \{1, ..., n\}$;*
- *a koalíciós függvény: $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$, amire $v(\emptyset) = 0$;*

Egy kooperatív játékot az (N, v) páros egyértelműen meghatároz.

Tekintsünk meg néhány nevezetes kooperatív játékot:

1. Példa. Kesztyűjáték: A játék szereplői aranyásók egy kocsmában, akik közül mindenkinek van egy darab kesztyűje, ami jobb- vagy balkezes, értéke viszont csak egy pár kesztyűnek van, egy üveg whisky. A játékot tehát a következőképpen formalizálhatjuk: $N = J \cup B$, ahol J és B értelemszerűen a jobb- illetve a balkezes kesztyűt birtoklók halmaza, a koalíciós függvény pedig a következő:

$$v(S) = \min\{|J \cap S|, |B \cap S|\}.$$

$v(S)$-et az S csoportosulás által elérhető összhaszonnak, nyereségnek nevezzük.

2. Példa. Lóvásár: A helyzetleírás szerint 3 szereplőnk van: A,B és C. A-nak van egy lova, amit el szeretne adni, legalább 200 pengőért. B és C is megvásárolná a lovat, B

280, míg C 300 pengőt hajlandó adni érte, de ezeket az információkat az alkudozás során nem osztják meg egymással. A fizetőeszköz, vagyis 1 pengő mindegyiküknek ugyanakkor értéket képvisel, haszon csak abból származhat, hogy a ló értéke mindhárom vevő számára más.

Kezdeti állapotban $v(A) = 200; v(B) = 280; v(C) = 300$; mivel feltételezhető, hogy B-nél és C-nél nincs több pénz mint amennyit elköltenének. Ha A és B meg tud egyezni, hogy a ló gazdát cserél valamilyen $200 \leq p \leq 280$ összeg fejében, akkor az együttműködésük eredménye: $v(AB) = p+(280-p)+280 = 560$ pengő, mivel A megkapja a p pénzösszeget, B számára a ló 280 pengőt ér, ezen kívül marad $280 - p$ pengője. Ugyanígy A és C kooperációjából $v(AC) = p + (300 - p) + 300 = 600$ nyereség származhat. A és B egymás közt csak pénz adhatnak át, amiből mérhető előny nem származik, ezért $v(BC) = 280 + 300 = 580$. A nagykoalíció létrejöttével az összes nyereség $v(ABC) = 880$ lesz, ilyenkor a ló A és C közt cserélt gazdát, B közreműködni csak a saját 280 pengőjével tud.

Egyszerűsítsük le a játék modelljét, minden játékos és koalíció esetén vegyük a kezdeti vagyoni helyzetüket kiindulási pontnak, az együttműködések nyereségét pedig ehhez mérve számoljuk. Így a lóvásár játék koalíciós függvénye a következőképpen adható meg:

S	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
$v(S)$	0	0	0	80	100	0	100

Például AB nyerségét a következőképpen számoltuk: 280+280-(200+280)=80.

3. Példa. Jégkrémjáték: [2] A szereplők három gyerek, akik a zsebpénzükön jégkrémet szeretnének venni: Charlie(C), Marcie(M), és Pattie(P). Vagyonuk legyen rendre c, m és p dollár, és a jégkrém három különböző méretben kapható: $500g$, ennek ára 7 dollár, $750g$ ami 9 dollárba kerül és $1000g$, ami 11 dollárba. A gyermekek valutája a fagylalt legyen, a pénz ne képviseljen számukra értéket. Tehát egy koalíció nyereségét az határozza meg, hogy mennyi fagylaltot tudnak együtt vásárolni.

Ez a szituáció meghatároz egy kooperatív játékot, ha c-nek, m-nek és p-nek konkrét értéket adunk.

Legyen például $c = 3, m = 4$, és $p = 5$. Ilyenkor a karakterisztikus függvény a következőképpen alakul:

S	C	M	P	CM	CP	MP	CMP
$v(S)$	0	0	0	500	500	750	1000

Vagy ha $c = 8, m = 8, p = 1$, akkor:

S	C	M	P	CM	CP	MP	CMP
$v(S)$	500	500	0	1250	750	750	1250

4. Példa. Egyszerű többségi szavazási játék:

A szavazók (játékosok) N halmazának egy adott javaslatot el kell fogadnia vagy el kell utasítania. Az elfogadáshoz a szavazatok több mint felének elfogadónak kell lennie, ezt egyszerű többségi elvnek nevezzük. Jelöljük 1-gyel a javaslat elfogadását, 0-val az elutasítását. Értelemszerűen így egy koalíció „értéke”:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| > |N|/2, \\ 0, & \text{ha } |S| \leq |N|/2. \end{cases}$$

1. Megjegyzés. A továbbiakban a fenti játékot egyszerű többségi játéknak fogjuk nevezni.

Ha a szavazást nem az egyszerű többségi elv alapján bíráljuk el, illetve a szavazók nem azonos súllyal rendelkeznek, akkor szükség van egy módosított, általánosabb modellre:

5. Példa. Súlyozott szavazási játék: Az előzőhöz hasonlóan itt is egy elfogadjuk/elutasítjuk jellegű döntést kell hozni egy javaslatról. Legyen az $i \in N$ játékos súlya w_i. A javaslat elfogadásához legalább q összsúlyú elfogadó szavazatnak kell összegyűlnie, ahol $0 < q \leq \sum_{i \in N} w_i$ az elfogadási kvóta. Jelöljük 1-gyel a javaslat elfogadását és 0-val az el nem fogadását. Így a koalíciós függvény a következőképpen adható meg:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q, \\ 0, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i < q. \end{cases}$$

A v függvény egyértelműen meghatározza a súlyozott többségi szavazási játékot. Értelemszerűen a súlyozott szavazási játék általános esete az egyszerű többségi szavazási játék, ilyenkor $q = |N|/2$ és $w_i = 1$ minden $i \in N$.

A fenti két játékot a szakdolgozat második fejezetében még részletesen tárgyalni fogjuk.

2.1. Szuperadditív játékok

Alapvető kérdés, hogy egy adott játékban két koalíciónak mikor éri meg egyesülni, illetve, hogy a nagykoalíció létrejön-e. Ennek vizsgálatához szükségesek az alábbi definíciók:

4. Definíció. *Egy adott (N, v) játék:*

- ***additív**, ha $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$,*
- ***szubadditív**, ha $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$ tetszőleges $S, T \in 2^N$-re amelyre $S \cap T = \emptyset$,*
- ***szuperadditív**, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ tetszőleges $S, T \in \mathcal{N}$-re amelyre $S \cap T = \emptyset$. szigorúan szuperadditív, ha szigorú egyenlőtlenség teljesül.*

Additív játékokkal olyan helyzetek modellezhetők, amelyekben a szereplők semmiféle együttműködéséből sem származik mérhető előny. Ilyenkor a koalíciós függvényt egyértelműen meghatározza az egyszemélyes koalíciókon felvett értéke, azaz a $(v(\{1\}), ..., v(\{n\})) \in \mathbb{R}^N$ vektor. Fordítva, tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ vektor generál egy additív játékot: az $S \in \mathcal{N}$ koalíció értéke $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, és persze $x(\emptyset) = 0$.

[4]A szubadditív játékok a legkevésbé realisztikusak, ilyenkor a szereplők bármilyen csoportosulásából csak veszteség származhat. Ebből következik, hogy minden résztvevőnek a legjobban egyedül maradni éri meg.

A szuperadditív játékokkal modellezhető döntési helyzetekben bármely két, közös játékost nem tartalmazó koalíció egyesüléséből csak előny származhat.

Később a súlyozott szavazási játékoknál látni fogjuk, hogy tipikusan nem szuperadditívek.

2.2. Monoton, szimmetrikus, egyszerű játékok

Bizonyos esetekben előfordul, hogy egy koalíció értékét csak a tagjainak száma befolyásolja, kilétük nem, tehát a játékosok felcserélhetők egymással. Ezt a tulajdonságot ragadja meg a szimmetria fogalma:

5. Definíció. *Egy (N, v) játék* ***szimmetrikus****, ha $|S| = |T| \Rightarrow v(S) = v(T)$ minden $S, T \in \mathcal{N}$.*

6. Példa. Legyen (N, v) a következő játék: $|N| \geq 3$, és:

$$v(S) = \begin{cases} 10, & \text{ha} \;\; |S| = 3; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez a játék természetesen szimmetrikus.

Néhány további fontos tulajdonság:

6. Definíció. *Egy (N, v) játék :*

- ***0-normalizált****, ha $v(i) = 0$ minden $i \in N$;*
- *$(0, 1)$**-normalizált**, ha 0-normalizált, és $v(N) = 1$;*
- ***lényeges****, ha $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.*
- ***egyszerű,** ha $v(N) = 1$ és $v(S) \in \{0, 1\}$ minden $S \subset N$,*
- ***monoton,** ha minden $S, T : S \subset T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$,*
- ***0-monoton****, ha 0-normalizált és monoton.*

Egy játék 0-normalizált, ha a szereplők egyedül nem képesek hasznot elérni, és $(0, 1)$-normalizált, ha emellett a nagykoalíció nyeresége 1. A szavazási játékok tipikusan ilyenek, ha nem létezik egyszemélyes nyertes koalíció. Lényegesség esetén a nagykoalíciónak jobban megéri megalakulni, mint a szereplőknek egyedül maradni. A kesztyűjáték például lényeges, és 0-normalizált, de nem feltétlen $(0, 1)$-normalizált.

Az egyszerűség fogalma egyértelmű, a monotonitás azt fejezi ki, hogy egy koalíció értéke új tag csatlakozása esetén nem csökkenhet. A 6. Példában definiált játék se nem monoton, se nem egyszerű, viszont lényeges. Szimmetrikus, egyszerű, monoton játékra példa az egyszerű többségi játék, ilyenkor a játékosok egyenlő szavazati joggal rendelkeznek, csak az a fontos, hogy minél több résztvevő támogasson egy adott döntést.

Egyszerű játékok esetén néhány fontos fogalmat vezethetünk be [2] alapján:

7. Definíció. *Nevezzünk egy egyszerű játékban egy koalíciót **nyerő**nek, ha értéke 1, **vesztő**nek, ha értéke 0.*

1. Állítás. *Az egyszerű többségi játék 0-monoton (tehét monotonak is), egyszerű és szimmetrikus.*

Bizonyítás. Az egyszerűség nyilvánvaló, még a súlyozott esetben is.

A monotonitás is könnyen látható, nagyobb koalíciónak mindig legalább akkora az értéke mint a kisebbnek (ha a definíció szerint a nagyobb tartalmazza a kisebbet) Olyan eset nem fordulhat elő, hogy a kisebb koalíció nyerő, a nagyobb pedig vesztő. Ez súlyozott szavazási játékoknál akkor igaz, ha megköveteljük a w_i súlyok nemnegativitását (amit általában megteszünk). $n \geq 2$ esetben az egyszerű szavazási játék 0-normalizált (vagyis $v(\{i\}) = 0$, ezért 0-monoton is.

A szimmetria egyszerű esetben szintén nyilvánvaló, a játékosok „kiléte" nem fontos, hiszen mindannyian azonos súllyal rendelkeznek. □

Megyjegyezzük, hogy súlyozott esetben a szimmetria nem feltétlenül teljesül:

7. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $w = (2, 1, 1, 1)$, és $q = 2$.

Ha $S = \{1, 2\}$ és $T = \{3, 4\}$, akkor $|S| = |T|$ igaz, viszont $v(S) = 1$ és $v(T) = 0$, így a szimmetria definíciója nem teljesül.

Fontos kiemelni két játékostípust, akik meghatározó szerepet játszanak egyszerű játékokban:

8. Definíció. *Az $i \in N$ **vétó-játékos**, ha minden nyerő koalícióban benne van, vagyis :*

minden $S \subset N \setminus \{i\}$: ha $v(S \cup i) = 1$ akkor $v(S) = 0$.

9. Definíció. *Az $i \in N$ **dummy-játékos**, ha minden $S \subseteq N \setminus \{i\}$ koalícióra teljesül, hogy $v(S \cup i) = v(S)$.*

2. Megjegyzés. A két típus elnevezése beszédes: a „vétójog" vagy a „megvétóz" kifejezések utalnak az illető fontosságára, nyeréshez nélkülözhetetlen szerepére. Az angol „dummy" jelzőt használjuk magyarul is, szokás még „sallang" vagy „lényegtelen" játékosként hivatkozni rá, mivel egyik koalíció értékét sem képes növelni a jelenléte.

8. Példa. Az egyszerű többségi játékban nincsen sem vétó- sem dummy-játékos. Egy súlyozott többségi játékban, ha létezik olyan $i \in N$ szereplő, akire: $w_i > q$, akkor i vétó-, az összes többi játékos pedig dummy-játékos. Ebből következik, hogy a vétó- és dummyjátékosok halmaza nem komplementerei egymásnak (előfordul, hogy igen, de tipikusan nem), viszont természetesen egymást kizáró fogalmak.

2.3. Kifizetések

[4] A kifizetések definiálásához elsőként tegyük fel, hogy az adott (N, v) játékban a nagykoalíció létrejön. Ennek értéke értelemszerűen $v(N)$. Felmerül a kérdés, hogy ezt az összeget a koalíció tagjai (vagyis a játékosok) egymás közt hogyan osztják fel. Az az elsődleges cél, hogy a nagykoalíció egyáltalán meg tudjon alakulni, ez azt jelenti, hogy a játékosoknak legalább annyira megérje az N-hez csatlakozni, mint egyedül maradni, vagy kisebb koalíciókba tömörülni. Másodlagosan mindenki a saját hasznát szeretné maximalizálni.

10. Definíció. *Az $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektort **kifizetés-vektor**nak nevezzük az (N, v) játékban, ha az x_i koordináta az i. játékosnak kifizetett összeget adja meg. Egyszerűség kedvéért az x_i-t az i. játékos kifizetésének nevezzük. Egy **koalíció kifizetés**én a benne szereplő játékok kifizetéseinek összegét értjük, azaz $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$-t jelöli egy adott $S \subseteq N$-re.*

11. Definíció. *Az x kifizetés-vektor **érvényes/hatékony** kifizetés, ha $x(N) = v(N)$ teljesül.*

3. Megjegyzés. A fenti definíciónál feltételeztük, hogy megalakul a nagykoalíció. Amennyiben ez nem történik meg, a kifizetés-vektor mellett megadjuk a koalíció-struktúrát is. Ez egy partíciója az N-nek, vagyis diszjunkt játékoshalmazok, amik összességében lefedik az N-et. Ilyen esetben a kifizetésvektornak nem kell hatékonynak lennie a nagykoalícióra nézve

9. Példa. A Lóvásár játékban az $x = (80, 0, 20)$ kifizetés egy hatékony kifizetés.

További vizsgálódásokhoz szükséges megadni egy kifizetés-vektor lehetséges tulajdonságait.

12. Definíció. *Egy (N, v) játékban az $x = (x_1, ..., x_n)$ kifizetés-vektor:*

- ***elérhető** az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$;*
- ***elfogadható** az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$;*

Az elérhetőség definíciójának megértéséhez fel kell idézni, hogy $v(S)$ az a legnagyobb összeg, amit az S koalíció a többiek viselkedésétől függetlenül meg tud szerezni. Ha $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$, akkor a koalíció ki tudja fizetni a tagjait ebből az értékből.

Az x kifizetés akkor elfogadható S számára, ha a tagjainak összesen kifizetett összeg legalább akkora, mint amennyit önálló koalícióként is meg tudnának szerezni, azaz a nagykoalícióhoz csatlakozni nem veszteséges számukra.

13. Definíció. *Egy (N, v) játékban az $x = (x_1, ..., x_n)$ kifizetés-vektor **elosztás**, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in N$ -re, azaz olyan hatékony kifizetés, amelyik minden egyszemélyes koalíció (vagyis játékos) számára elfogadható;*

2. Állítás.

1. *Tetszőleges (N, v) játékban a hatékony kifizetések halmaza egy hipersík, tehát sosem üres.*

2. *Az elosztások halmaza pontosan akkor nemüres, ha* $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

3. *Az elosztások poliedrikus halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. **1.** A hipersík definíció szerint $\alpha x = b$ alakban írható fel, ahol $\alpha \neq 0$ vektor és b konstans. $\alpha = \mathbf{1}$ és $b = v(N)$ esetben hatékony kifizetést kapunk. Az, hogy a hatékony kifizetések halmaza nemüres, triviális, hiszen például az $x = (1/v(N), ..., 1/v(N))$ vagy az $x = (v(N), 0, .., 0)$ kifizetések mindig szétosztások.

2. Tegyük fel, hogy az elosztások halmaza nemüres, azaz létezik x elosztás. Ekkor: $v(N) = \sum_{i \in N} x_i \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$. Legyen $x = (v(\{1\}), ..., v(\{n\})$. Ilyenkor $\sum_{i \in n} x_i = \sum_{i \in N} v(\{i\}) \leq v(N)$, és $v(\{i\}) \leq x_i$ is teljesül minden $i \in N$ esetén.

3. Az elosztások halmaza egyenlőtlenség-rendszer alakú, ahol minden egyenlőtlenség egy félteret definál, a rendszer megoldásai ezeknek a féltereknek a metszetében vannak, ami definíció szerint egy poliéder. □

10. Példa. Az előbb megadott $x = (80, 0, 20)$ kifizetés a Lóvásár játékban szétosztás és elosztás is.

2.4. A mag

Az elfogadhatóság definíciójánál érintettük, hogy egy adott x kifizetésnél felmerülhet az a probléma, hogy létezik olyan S koalíció, melynek jobban megéri különválnia a nagykoalíciótól, mert így nagyobb haszonra tehet szert. A játékosokat úgy kellene kifizetni, hogy ilyen kiválások ne fordulhassanak elő. A fogalmat Solymosi Tamás jegyzete [4] valamint Edith Elkind [3] cikke, és Chalkiadakis [2] könyve alapján értelmezzük.

14. Definíció. *Egy* (N, v) *játék* ***mag****ja azoknak az* x *kifizetéseknek a halmaza, amelyekre, teljesül, hogy:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \text{ és}$$
$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ minden } S \subseteq N - re.$$

A mag-beli eloszlások az első feltétel szerint hatékonyak/érvényesek a nagykoalícióra nézve, a második feltétel pedig azt jelenti, hogy elfogadhatóak minden koalíció számára.

3. Állítás. *Tetszőleges* (N, v) *játékban a mag-elosztások poliedrikus halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. A mag-elosztások halmaza szintén egyenlőtlenség-rendszer alakban van felírva (az elosztások poliéderén belül), ezért poliedrikus. □

A mag nemürességének eldöntése bonyolultabb feladat. Nézzük meg a mag definícióját a 3-személyes egyszerű szavazási játék esetében.

11. Példa. 3-személyes egyszerű többségi játék:

$N = \{1, 2, 3\}$, és a koalíciós fügvény:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| \geq 2, \\ 0, & \text{ha } |S| \leq 1. \end{cases}$$

Legyen $x = (x_1, x_2, x_3)$ egy kifizetés. Ez a kifizetés a definíció szerint akkor lesz a magban, ha az összes koalíció számára elfogadható. Az egyszemélyes koalíciók egyenként 0 hasznot képesek elérni, tehát érdemben nem kell vizsgálni őket.

A kétszemélyes koalíciók az $S_{12} = \{1, 2\}, S_{13} = \{1, 3\}$, és az $S_{23} = \{2, 3\}$ csoportosulások, ezekre a következő feltételeket írhatjuk fel:

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_3 \geq 1$$
$$x_2 + x_3 \geq 1$$

kell, hogy teljesüljön. Ezeket összeadva és 2-vel leosztva a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}$$

összefüggést kapjuk, azaz a három játékos által elérni szükséges kifizetés nagyobb mint a nagykoalíció által elérhető legnagyobb haszon. Itt tehát nem létezik mag-elosztás. Ennek az az oka, hogy a nagykoalíció értéke nem elég nagy a többi koalícióéhoz képest.

12. Példa. Módosítsuk az előző példát súlyozással, legyen $w = (1, 1, 2)$ és $q = 3$. Ilyenkor az S_{13} és az S_{23} koalíciók nyerők, valamint a nagykoalíció.Ilyenkor már létezik mag-elosztás, például a $(0, 0, 1)$ kifizetés. Később látni fogjuk, hogy ez azért lehetséges mert létezik vétó-játékos.

2.4.1. Egyszerű játék magja

A következő három fejezetet [2] alapján tárgyaljuk.

A mag definiálásához szükséges a feltételezés, hogy a nagykoalíció megalakul. Ezért most egyszerű játékoknál is tegyük meg ezt, akkor is ha a játék nem szuperadditív. Így könnyen karakterizálhatjuk a magba tartozó kimeneteleket, és adhatunk egy könnyen ellenőrizhető feltételt annak eldöntésére, hogy a játék magja üres-e. Legyen egy x vektor a játék kifizetés-vektora, feltételezve, hogy N megalakult. A következő tétellel megmutatjuk, hogy egyedül úgy érhetjk el a stabilitást egyszerű játékok esetén ha az egész nyereséget, valamilyen módon a vétójátékosok közt osztjuk fel (már ha léteznek).

1. Tétel. *Egy egyszerű játék magja akkor és csak akkor nem üres, ha létezik legalább egy vétó-játékos.*

Bizonyítás. Az oda irányhoz feltételeztük, hogy a játékban megalakul a nagykoalíció, amire $v(N) = 1$, tehát ha veszünk egy x kifizetést, amire $x_i = 1$ és $x_j = 0$ minden $i \neq j$ esetben, akkor x a magban van, mivel a következő feltételeket teljesíti: egyrészt, $1 = v(N) = x(N)$ a definícióból, másrészt $x(S) \geq v(S)$ minden S koalícióra, mert ha:

- $i \in S$, akkor $x(S) = 1 \geq v(S)$, mert $v(S) = 0$, vagy $v(S) = 0$,
- $i \notin S$, akkor $v(S) = x(S) = 0$.

A másik irányhoz legyen egy $x \neq 0$ vektor a magban. Ilyenkor létezik $i \in N$, hogy $x_i \neq 0$. $x(N) = 1$ miatt $x(N \setminus \{i\}) < 1$ tehát $N \setminus \{i\}$ vesztő, míg N nyerő csoportosulás, következésképpen i vétó-játékos. □

13. Példa. A 3-személyes egyszerű többségi játékban korábban beláttuk, hogy a mag üres. A tétel szerint ilyenkor nincs vétó-játékos. Ez valóban igaz, mivel bármely kétszemélyes koalíció nyertes, tehát egyik szereplő tagsága sem okvetlenül szükséges a győzelemhez.

Az első játékos értékét növeljük 2-re, a kvótát pedig 3-ra. Ilyenkor látható, hogy az első játékos vétó-játékos, tehát a mag nem lehet üres. Az $(1, 0, 0)$ kifizetés eleget tesz a feltételeknek, eleme a magnak.

2.4.2. CS-mag

Mint azt korábban is említettük, általában, sőt, még szuperadditív játékoknál sem feltételezhetjük, hogy megalakult a nagykoalíció, így a mag definiálása is problémákba ütközik. Ennek kivédésére bevezetjük a magnál gyengébb, általánosabb konstrukciót, a CS-magot. A nevében a „CS'' mint 'Coalition-strukture' utal arra, hogy itt ebben esetben koalíciók rendszere fog megalakulni. Az elemzéshez Edith Elkin [3] cikkét használjuk, melyet Chalkiadakis és társai is feldolgoztak [2]-ben.

15. Definíció. *A $CS = \{C_1, .., C_k\}$ halmazt **koalíció-struktúrának** nevezzük, ha CS az N egy partíciója diszjunkt halmazokra, vagyis $C_i \cap C_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ és $C_1 \cup ... \cup C_k = N$.*

Használjuk a következő jelöléseket:

- $v(CS) = \sum_{C \in CS} v(C)$, a koalíció-struktúra által elérhető összes haszon.
- $x(C)$: A C koalíció teljes kifizetése x szerint.

16. Definíció. (CS, x) *egy játék **kimenetel**e, a koalíció-struktúra és a kifizetés-vektor együtt. Az x kifizetés **megengedett** a CS koalíció-struktúrára nézve, ha:*

$$x(C_i) \leq v(C_i) \text{ minden } C_i \in CS \text{ koalícióra}$$

*és **hatékony**, ha ez egyenlőséggel teljesül.*

17. Definíció. *Legyen adott egy (N, v) játék, mely rendelkezik CS koalíció-struktúrával. Az olyan egyénileg elfogadható, a koalíció-struktúra számára hatékony kifizetések halmazát, amik minden $T \subseteq N$ koalíció számára elfogadhatóak, az (N, v) játék CS-**mag**jának nevezzük. Formálisan, a CS-mag azokat az x vektorokat tartalmazza, amelyekre:*

$$x(C_i) = v(C_i) \text{ minden } C_i \in CS \text{ koalícióra,}$$
$$x(T) \geq v(T) \text{ minden } T \subseteq N \text{koalícióra.}$$

4. Megjegyzés. A definícióból kiolvasható, hogy amennyiben a koalíció-struktúra a nagykoalícióból áll, akkor a játék CS-magja egyenlő a magjával.

5. Megjegyzés. A „való életben” sok szituációban nem alakul meg a nagykoalíció, még akkor sem ha a játék szuperadditív. Például egy egyszerű többségi szavazást tekintve lehetséges, hogy a szavazók 3/4-e igennel szavaz, a maradék nemmel, ilyenkor van egy nyerő és egy vesztő csoportosulás. Azonban nem téves ilyenkor az a feltételezés, hogy N mégis megalakul, és ha kifizetést is meg akarunk adni, akkor a vesztes koalíció tagjai 0-t kapnak.

14. Példa. Tekintsük a következő (N, v) játékot: $|N| = 4$, és

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| < 2 \\ 2, & \text{különben.} \end{cases}$$

(N, v) nem szuperadditív: ha például az $\{1, 2\}$ és a $\{3, 4\}$ koalíciók megalakultak, akkor nekik nem éri meg egyesülni, hiszen úgy azonos hasznot kétszer annyi személy közt kellene felosztaniuk.

Könnyen látható, hogy $(\{N\}, x)$ alakú kimenetelek nem lehetnek a magban, mert ha az x hatékony az N-re nézve, akkor legalább egy kétszemélyes koalíciónak érdeke lenne kiválni a nagykoalícióból, mivel a kifizetésük nem lenne elfogadható. Tehát a játék magja üres.

A CS-magban ugyanakkor szerepelnek olyan (CS, x) alakú kimenetelek, ahol CS olyan koalíció-struktúra, ami két kétszemélyes csoportosulást tartalmaz, és $x = (1, 1, 1, 1)$.

2.4.3. A szuperadditív játék magja

A mag definíciójában feltételeztük, hogy a nagykoalíció megalakul. Ugyanakkor, érdemes megvizsgálnunk, hogy szuperadditív játékok esetén előfordulhat-e, hogy egy ilyen játék magja tartalmaz olyan kimenetelt, ahol a nagykoalíció nem alakul meg.

Ha egy játék szigorúan szuperadditív, azaz $v(N) > v(CS)$, bármely olyan CS-re amely legalább két koalícióból áll, akkor a válasz nyilvánvalóan nem lesz. Ha $v(N) = v(CS)$, akkor valamilyen CS koalíció-struktúrára, akkor a mag tartalmazhat (CS, x) alakú kimeneteleket, azonban az ilyen x-ekre érvényes, hogy:

$$x(N) = \sum_{C \in CS} \sum_{i \in C} x_i = \sum_{C \in CS} v(C) = v(N),$$

azaz $(\{N\}, x)$ is a magban van. Ez azt jelenti, hogy nem veszítünk az általánosságból, ha feltételezzük a nagykoalíció megalakulását, mivel minden (CS, x) alakú kimenetelhez létezik egy lényegében egyenértékű kimenetel, aminél megalakul.

15. Példa. Tekintsük a következő 0-normalizált játékot:

$|N| = 4$, a koalíciós függvény pedig a következő:

$v(S) = 0$, ha $|S| = 1$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$, $v(\{1, 4\}) = v(\{2, 4\}) = v(\{3, 4\}) = 0$, $v(S) = 1$, ha $|S| = 3$, és $v(N) = 2$.

Könnyen látható, hogy a játék szuperadditív, hiszen bármely két koalíció egyesüléséből csak előny származhat. A mag-beli x kifizetések a következőképpen írhatóak fel:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \text{ minden } i; \\ x_i + x_j &\geq 1 \text{ minden } i \neq j \neq 4; \\ x_i + x_j &\geq 0 \text{ minden } i \neq j = 4; \\ x_i + x_j + x_k &\geq 1 \text{ minden } i, j, k; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Ennek a játéknak a magja nem üres, például a következő kifizetés-vektorok megoldásai a fenti egyenlőtlenség-rendszernek: $(1, 1, 0, 0); (1, 0, 1, 0); (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

2.4.4. Mag és kiegyensúlyozottság

[4] Mivel a mag egy poliedrikus halmaz(tehát megadható extrementális pontjainak konvex burkaként), poliéderes eszközökkel megmutatható, hogy üres-e. Ehhez felírjuk a magot LP feladatként.

18. Definíció. *Az $e^S \in \{0; 1\}^N$ vektort az $S \subset N$ koalíció **tagsági vektor**ának nevezzük, ha $e_i^S = 1$, minden $i \in S$-re, és 0 különben.*

19. Definíció. *Egy adott (N, v) játékban **mag-LP**-nek hívjuk a következő lineáris programozási feladatot:*

$$\begin{aligned} &\min \ e^N x \\ &e^S x \geq v(S) \ \textit{minden } S \subseteq N, S \neq \emptyset, \\ &x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

A mag-LP-ben a feltételek száma exponenciális $|N|$-ben. A nagykoalícióra vonatkozó feltétel szerint $e^N x \geq v(N)$, tehát a célfüggvény láthatóan korlátos alulról. Az LP-nek nyilván van megoldása, és a korlátozás miatt optimális megoldása is. Fontos megjegyezni, hogy a mag-LP megoldhatósága nem ekvivalens a mag nemürességével. A mag-LP-ben ugyanis a nagykoalícióra az $e^N x \geq v(N)$ feltételt kötöttük ki, amely átírva $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$, a mag definíciója pedig itt egyenlőséget követel meg. Következésképpen ha az optimum értéke $v(N)$, akkor a mag nem üres.

20. Definíció. *A mag-LP duálisa a **duál-magLP**, azaz a következő egyenlőtlenség-rendszer:*

$$\begin{aligned} &\max \sum_{S \in N} \lambda_S \ v(S) \\ &\sum_{S \in N} \lambda_S e^S = e^N, \\ &\lambda_S \geq 0 \ \textit{minden } S \in N. \end{aligned}$$

Látható, hogy a duál-magLP csak a játékosok számától függ (v-től nem). Itt λ_S egy súlyprofil, mely minden S koalícióhoz egy 0 és 1 közti számot rendel.

21. Definíció. *Jelölje $\Lambda(N)$ az $|N|$ személyes játékban a duál-magLP lehetséges megoldásainak halmazát. Legyen egy $R \in 2^N$ egy koalíciórendszer. Azt mondjuk hogy R egy* ***kiegyensúlyozott koalíciórendszer*** *az N alaphalmazon, ha létezik olyan $\lambda_S \in \Lambda(N)$ súlyprofil (azaz megoldása a duál-magLP-nek), aminek pont R a tartója, azaz $R = \{S \in 2^N | \lambda_S > 0\}$. Egy* ***minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer*** *egy olyan koalíciórendszer, aminek semelyik valódi része nem kiegyensúlyozott.*

4. Állítás.

1. *Az N halmazon kiegyensúlyozott minimális koalíciórendszerek pontosan a $\Lambda(N)$ poliéder extremális pontjainak tartói; ezek között vannak az N partíciói, amiknek a súly-profiljai pontosan a $\Lambda(N)$ poliéder $0-1$ koordinátájú (csúcs)pontjai.*
2. *Minden kiegyensúlyozott koalíciórendszer a benne lévő minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek uniója, mivel $\Lambda(N)$ minden eleme az extremális pontjainak konvex kombinációja.*

16. Példa. Egyszerű 3-személyes többségi játék:

Korábban már láttuk, hogy a (primál) magLP-nek $v(N) = 1$ esetén nincs megoldása.

A duálist tekintve az extrementális súlyvektorok ismeretében meghatározható az egyetlen optimális megoldás, ez az egyetlen nem partícióhoz tartozó súlyprofil: a kétfős koalíciókat $1/2$ súllyal számoljuk (a többit 0-val). Így az optimumérték $3/2$, ami nagyobb mint $v(N)$, tehát ilyenkor a mag üres.

6. Megjegyzés. Ebből sejthető, hogy a mag akkor lesz nem üres az (N, v) játékban, ha nem létezik olyan (extremális) súlyprofil, amivel a koalíciók értékét kombinálva $v(N)$-nél nagyobb értéket kapunk.

A következő definíció formalizálja ezt a tulajdonságot:

22. Definíció. *Az (N, v) játék* ***kiegyensúlyozott****, ha a duál-magLP optimumértéke legfeljebb a nagykoalíció értéke. Ez természetesen felvétetik az $\{N\}$ koalícióhoz tartozó $\lambda_N = 1, \lambda_S = 0$ minden $S \neq N$ súlyprofillal.*

Az eddigiekből és az erős dualitás tételből következik:

2. Tétel. *Bondareva-Shapley-tétel: Egy kooperatív játék magja pontosan akkor nem üres ha a játék kiegyensúlyozott.*

2.5. Shapley-érték

Most tekintsünk egy másféle megközelítést, mint a mag-beli kifizetések esetében. Míg korábban az volt a cél, hogy egy játékos se akarjon más koalícióhoz csatlakozni a jelenlegi helyett, most az igazságosságra helyezzük a hangsúlyt. Az összes lehetséges n-személyes játékra szeretnénk érvényes kifizetést találni, amely bizonyos, jogosan elvárható tulajdonságokat teljesít. Nevezzünk egy ilyen érvényes kifizetést sémának. Megmutatjuk, hogy ilyen sémából pontosan egy létezik, és ez az úgynevezett Shapley érték. A leírás Végh és társai játékelmélet jegyzete alapján készült [5].

Legyen $\varphi_v(i)$ a v játékhoz tartozó kifizetés-vektor. Azt várjuk el egy igazságos kifizetés esetén, hogy teljesítse a következő axiómákat:

- **szimmetria:** ha (N, v) játékban i, j-re teljesül, hogy $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ minden $S \subset N \setminus \{i, j\}$.
- **lényegtelenek elhanyagolása/sallangmentesség:** ha adott i játékosra $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ minden $S \subset N \setminus \{i\}$, akkor $\varphi_v(i) = v(\{i\})$.
- **additivitás:** tetszőleges v_1 és v_2 érték-függvényre és tetszőleges i játékosra $\varphi_{v_1+v_2}(i) = \varphi_{v_1}(i) + \varphi_{v_2}(i)$.

A szimmetria és a lényegtelenek elhanyagolása természetes tulajdonságok, azt jelentik, hogyha két játékos bármely koalíció nyereségéhez ugyanannyival járulna hozzá (tehát a játék szempontjából ugyanúgy viselkednek), akkor a kifizetésük is egyezzen meg, valamint ha az i. játékos mindegyik koalíció hasznát csak a saját $v(\{i\})$ hasznosságával tudja növelni, akkor ő lényegtelen (sallang) játékos, így a kifizetése $v(\{i\})$ kell legyen.

Az additivitás ebben az esetben azt a tulajdonságot fejezi ki, hogy mindegy, hogy kettő játékot egymás után játszunk le vagy egy játéknak tekintjük.

3. Tétel. *A fenti axiómákat kizárólag egy kifizetési séma elégíti ki, mégpedig a következőképpen definiált **Shapley-érték**:*

$$\varphi_v(i) = \sum_{S \subset 2^N/\{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)}{n!} (v(S \cup i) - v(S)).$$

7. Megjegyzés. A Shapley-érték pontosabb megnevezése Shapley-értékvektor, mivel egy kifizetés-vektort ad meg.

Bizonyítás. Elsőnek tekintsük át a Shapley-érték szemléletes jelentését. Legyen adott egy (N, v) n-szereplős játék. A játékosok egy véletlen sorrendben érkeznek egy szobába. Ha az i. játékos a szobába lép, akkor a szobában lévő játékosok összértéke valamennyivel megváltozik. A játékos Shapley-értéke ennek a változásnak a várható értéke.

Ahogy a képletből is kiolvasható, egy játékos Shapley-értéke a határhozzájárulásainak konvex kombinációja. Tehát annak a valószínűségét, hogy az i. játékos j.-nek érkezik, szorozzuk a megfelelő határhozzájárulással, és minden j-re összegezzük.

Elsőnek bizonyítsuk be, hogy a tétel teljesül karakterisztikus/egyetértési játékokra.

23. Definíció. *Adott a játékosok N halmaza, és $U \subset 2^N$. Az alábbi koalíciós függvénnyel megadott játékot **egyetértési játék**nak nevezzük:*

$$v(S) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } U \subset S, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát egy koalíció nyerő, ha tartalmazza az U játékoshalmazt, és α az értéke, és vesztő minden más esetben.

Ilyenkor az U-beli játékosok egymással felcserélhetőek, a többi játékos pedig lényegtelen, tehát az egyetlen érvényes kifizetés ami teljesíti az axiómákat, a következő:

$$\varphi_v(i) = \begin{cases} \alpha/|U|, & \text{ha } i \in U, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és ez tényleg a Shapley-érték.

Most megmutatjuk, hogy tetszőleges v koalíciós függvény előáll karakterisztikus értékfüggvények lineáris kombinációjaként. Definiáljuk rekurzívan az $\alpha(S)$ értéket a következőképpen:

$$\alpha(\{i\}) = v(\{i\}) \text{ minden } i \in N,$$
$$\alpha(S) = v(S) - \sum_{T \subsetneq S} \alpha(T).$$

A képletből látható, hogy v-t megkaphatjuk úgy, ha összegezzük minden S-re az S-hez és $\alpha(S)$-hez tartozó karakterisztikus értékfüggvényeket. Így az additivitás axiómából következik, hogy a Shapley-érték csak a karakterisztikus játékokhoz tartozó kifizetés-vektorok összege lehet, tehát tényleg egyértelmű. □

8. Megjegyzés. A Shapley-értéknél az összegben exponenciálisan sok tag szerepel, ezért nem számolható ki hatékonyan (nem létezik rá polinomiális futásidejű algoritmus). Súlyozott szavazási játékok esetén dinamikus programozással azonban pszeudopolinomiális algoritmus adható rá, ezt a későbbiekben megmutatjuk.

17. Példa. Vegyük a jégkrémjáték azon esetét, amikor $c = 3, m = 4$ és $p = 5$. Számoljuk ki Marcie Shapley-értékét! Ha a játékosok szobába érkezési sorrendje szerint gondolkodunk, akkor 6-féle permutáció lehetséges: $MPC, MCP, CMP, PMC, PCM, CPM$.

Marcie 1/3 valószínűséggel érkezik első, második vagy harmadikként a szobába. Ha elsőnek jön, akkor mindkét esetben 0-t tesz hozzá az addigi haszonhoz. Ha másodiknak, akkor ha Charlie után érkezett, akkor 0-ról 500-ra, ha Pattie után akkor 0-ról 750-re növelte a koalíció addigi értékét. Ha harmadik helyen van, akkor mindkét esetben 500-ról 1000-re változik a nyereség.

Tehát: $\varphi_v(M) = \frac{1}{6}(0 + 0 + 500 + 750 + 500 + 500) = \frac{2250}{6} = 375$.

2.6. Bahnzaf-index

Ezúttal ismét Chalkiadakis és társainak könyvét vesszük alapul [2]. A Bahnzaf-index egy, a Shapley-értékhez hasonló konstrukció, amely egy igazságos kifizetést ad meg, szintén határhozzájárulás-vektorok kombinációjaként. Pontosabban, a Bahnzaf-index annak a valószínűségét adja meg, hogy az i játékos egy vesztes koalíciót győztessé tesz, vagyis hogy sarkalatos-e egy csoportosulás számára.

24. Definíció. *Legyen adott egy (N, v) kooperatív játék, ahol $|N| = n$ és tetszőleges $i \in N$ játékos. Az i **Bahnzaf-indexét** $\beta(i)$-vel jelöljük, és a következő képlettel adjuk meg:*

$$\beta_v(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N/\{i\}} (v(S \cup i) - v(S)).$$

Ahogy a definícióból látható, a Bahnzaf-index átlagot számol, vagyis a Shapley-értékkel ellentétben a koalíciók méretével nem foglalkozik.

Könnyen látható, hogy ez a kifizetés szintén teljesíti a szimmetria, additivitás tulajdonságát, valamint a dummy-játékosok kifizetését ugyanúgy 0-ra állítja be. Ugyanakkor az nem igaz, hogy a nagykoalíció számára elfogadható és elérhető is lenne.

18. Példa. Egyhangú játék: Legyen (N, v) egy kooperatív játék, ahol:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S = N, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $i \in N$ egy rögzített játékos. Ekkor $v(S \cup i) - v(S) = 1$, ha $S = N/\{i\}$ és $v(S \cup i) - v(S) = 0$, az $N/\{i\}$ minden valódi S részhalmazára. Ilyenkor minden $i \in N$ játékosra igaz a következő: $\beta_v(i) = 1/2^{n-1}$. Eszerint a kifizetés szerint $\sum \beta_v(i) = n/2^{n-1}$, ami természetesen nem egyenlő $v(N) = 1$-gyel.

25. Definíció. *Adott (N, v) játék esetén az $i \in N$ játékos **normalizált Bahnzaf-index**e a következő:*

$$\eta(i) = \frac{\beta(i)}{\sum_{i \in N} \beta(i)}.$$

A hatékonysági tulajdonság a Bahnzaf-index normalizálásával visszanyerhető, viszont ebben az esetben az additivitás fog sérülni. Ugyanis két különböző (N, v_1) és (N, v_2) játékra a normalizált Bahnzaf-indexek a következők:

$$\eta_1(i) = \frac{\beta_1(i)}{\sum_{i \in N} \beta_1(i)} \text{ és } \eta_2(i) = \frac{\beta_2(i)}{\sum_{i \in N} \beta_2(i)}.$$

Ezek összege adott i-re nem egyenlő

$$\frac{\beta_1(i) + \beta_2(i)}{\sum_{i \in N} \beta_1(i) + \sum_{i \in N} \beta_2(i)}\text{-vel.}$$

3. fejezet

Súlyozott szavazási játékok

A korábban is megemlített szavazási játékok egy fontos részhalmazát képezik a kooperatív játékelméletnek, az alapfogalmakat ezeken keresztül fogjuk szemléltetni, ismét Chalkiadakis könyvét [2] és Elkind cikkét [3] használva.

Ezeknek a játékoknak számos gyakorlati alkalmazásuk van gazdaságban, közéletben, gondoljunk csak egy általános országgyűlési szavazásra. Sok esetben az egyszerű többség elve érvényesül, vagyis a kvóta értéke $w(N)/2$, máskor a $q = 2w(N)/3$, vagy éppen az egész testület (játékoshalmaz) egyetértésére szükség van, vagyis $q = w(N)$.

Egy másik példát tekintve egy munkahelyen N számú alkalmazott van, akiknek egy projektet meg kell oldaniuk. A w_i súlyok jelentsék azoknak a munkaóráknak a számát, amelyeket bele tudnak fektetni a munkába. A kvóta jelöli, hogy a projekt elkészítése hány órát vesz igénybe. Ilyenkor az alkalmazottak egy C csoportosulása nyerő, ha együtt el tudják végezni az összes munkát a projekten, vesztő, hogyha nem.

Tekintsük a következő jelöléseket:

$$w(C) = \sum_{i \in C} w_i \text{ egy adott } C \text{ koalícióra,}$$
$$w_{\max} = \max_{i \in N} \; w_i.$$

Tegyük fel, hogy a w_i súlyok és a q nemnegatívak, valamint, hogy $q \leq w(N)$. Ez implikálja azokat a természetes feltételeket, hogy az üres koalíció vesztő, a nagykoalíció pedig nyerő.

A súlyozott szavazási játékok természetesen egyszerű játékok, ezért itt is beszélhetünk a korábban definiált vétó- és dummy-játékos fogalmáról. Természetesen adódik a kérdés, hogy egy játékosról hogyan dönthető el hogy vétó-, vagy dummy-játékos, valamint, hogy minden esetben eldönthető-e polinom időben. Ehhez formalizáljuk a két problémát:

NÉV: Vétó
INPUT: egy (N, v) súlyozott szavazási játék és egy $i \in N$ játékos.
KÉRDÉS: i vétó-játékos?

NÉV: Dummy
INPUT: egy (N, v) játék és egy $i \in N$ játékos.
KÉRDÉS: i dummy-játékos?

5. Állítás. *A* VÉTÓ *eldönthető polinom időben.*

Bizonyítás. Elég megvizsgálni, hogy az $v(N \setminus \{i\})$ értéke 0 vagy 1. Ha a válasz 1, akkor i nem vétó-játékos, mert létezik olyan koalíció, ami a jelenléte nélkül is nyerő. Ha 0 akkor a szavazási játékok monotonitása miatt vétójátékos. A $v(N \setminus \{i\})$ kiszámolható $|N|$-ben polinomiális időben, hiszen $|N| - 1$ tagot összegzünk, majd hasonlítunk össze a kvótával. □

A dummy-játékosok azonosítása jóval nehezebb feladat. Ezzel kapcsolatban idézzük fel a jól ismert NP-teljes PARTITION problémát:

NÉV: PARTITION
INPUT: $a_1, ..., a_k, K$ pozitív egészek, amikre $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2K$.
KÉRDÉS: Létezik-e olyan J indexhalmaz, amikre $\sum_{i \in J} a_i = K$?

4. Tétel. *A* DUMMY *coNP-teljes.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz meg kell mutatnunk, hogy a probléma coNP-ben van, valamint a visszavezetését egy NP-teljes problémára.

Ahhoz, hogy megmutassuk egy adott $i \in N$-ről, hogy nem vétójátékos, mutatni kell egy $S \subset N \setminus \{i\}$ koalíciót, amire igaz, hogy $w(S) < q$, de $w(S \cup i) \geq q$. Tehát a DUMMY tényleg coNP-ben van, mert arra létezik hatékony tanú, hogy mikor nem lényegtelen az adott játékos.

Ezután PARTITION problémát vissza fogjuk vezetni a DUMMY problémára, olyan módon, hogy a DUMMY-ra egy „IGEN" válasz a PARTITION-ra adott „NEM" válasznak feleljen meg, és fordítva.

A megfeleltetés a következő legyen: az $(a_1, \ldots, a_k, K)$ PARTITION problémához legyen $G = (N, w, q)$ a következő súlyozott szavazási játék: $N = \{1, \ldots, k, k+1\}$, $w_i = 2a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, $w_{k+1} = 1$, és $q = 2K + 1$.

Látható, hogy ezekkel a feltételekkel ha adott egy I halmaz, amire teljesül, hogy $\sum_{i \in I} w_i = 2K + 1$, akkor a $k+1$. játékos nem dummy, mivel létezik olyan koalíció, ami a tagságával nyerő, anélkül viszont vesztő lenne.

Másik irány szerint, ha a $k+1$. játékos dummy, akkor nem létezhet olyan J indexhalmaz, amire $w(J) = 2K$, hiszen ekkor a $k+1$. játékos a J-hez csatlakozva nyerővé tenné a koalíciót. Ekkor a J halmazra teljesülne, hogy $\sum_{i \in J} w_i = 2K$, azaz $\sum_{i \in J} a_i = K$, ami az eredeti PARTITION probléma. Tehát egy „IGEN" válasz a DUMMY-ra megfelel egy „NEM" válasznak a PARTITION-ra. □

9. Megjegyzés. Természetesen a dummy- és a vétó-játékosok egy adott játékban nem komplementer-halmazai egymásnak. Vagyis lehet olyan játékos amely se nem dummy, se nem vétó.

19. Példa. Példa: vegyük a 3-személyes egyszerű többségi játékot. Ilyenkor bármely játékosra igaz, hogy létezik olyan csoportosulás, amely az ő tagsága nélkül is nyerő, viszont egy másik egyszemélyes koalícióhoz csatlakozva képes magukat nyerésre vinni.

3.1. Szuperadditivitás

A szavazási játékok tipikusan nem szuperadditívek már egyszerű esetben sem, mivel lehetséges több diszjunkt nyerő koalíció is, melyeknek nem éri meg összecsatlakozni, tehát a nagykoalíció sem jön létre a legtöbb esetben. Ezt következő állítás formalizálja:

6. Állítás. *Egy (N, w, q) súlyozott szavazási játék akkor és csak akkor szuperadditív, ha $q > w(N)/2$.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ ha (N, w, q) szuperadditív, akkor $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül minden S, T diszjunkt csoportosulásra. Ez egyszerű játékoknál azt jelenti, hogy nem fordulhat elő, hogy S, T és $S \cup T$ is nyerő. Ez pontosan akkor nem fordulhat elő semmilyen w_i-k esetén, ha $q > w(N)/2$.

$\Leftarrow$ ha $q > w(N)/2$ akkor csak az olyan S koalíciók lehetnek nyerőek, amelyekre $w(S) > w(N)/2$ tehát ilyenkor a N/S-en belül már nem létezhet másik nyerő csoportosulás. Tehát bármely koalíció-struktúrában csak egy nyerő koalíció lehet, így a szuperadditivitás definíciója valóban teljesül. □

3.2. Erő

Az erő témakört Chalkiadakis [2] könyvének 4.2.1. fejezete alapján tárgyaljuk. Egy súlyozott szavazási játékban egy játékos erejét a Shapley-értékével, vagy Bahnzaf-indexével mérjük.

7. Állítás. *Súlyozott szavazási játékok esetén a Shapley-érték monoton a súly szerint. Vagyis minden (N, w, q) súlyozott szavazási játékra és bármely $i, j \in N$-ra $\varphi(i) \leq \varphi(j)$ akkor és csak akkor, ha $w_i \leq w_j$.*

Ebből látható, hogy egy játékos Shapley-értéke szorosan összefügg a súlyával.

Bizonyítás. Az állítás egyből következik a Shapley érték definíciójából. A szummában minden tagban a $v(S \cup i) \setminus v(S)$ értéke nagyobb valószínűséggel 1, ha az adott játékos súlya nagyobb. □

10. Megjegyzés. Bár a fenti állítás helytálló, olyan eset létezhet, hogy két résztvevő azonos erővel rendelkezik egy játékban, holott súlyuk jelentősen eltér. Ezt szemlélteti a következő, való életből vett példa:

20. Példa. [2] Az Egyesült Királyságban a 2010. májusi választások után a Konzervatív Párt 307 mandátummal rendelkezett, a Munkáspárt 258 mandátummal, a Liberális Demokraták (LibDem) 57 mandátummal, az összes többi párt pedig a fennmaradó 28 mandátumon osztozott (a legerősebb párt 8 mandátumot kapott). Könnyen belátható hogy ebben a súlyozott szavazási játékban két kétpárti koalíció van (Konzervatívok+Munkáspárt és Konzervatívok+LibDem), amely a mandátumok többségét megszerezheti. Ráadásul, ha a Munkáspárt vagy a LibDem-ek akarnak olyan szövetséget akarnak kötni, amelyben nem vesznek részt a konzervatívok, akkor szükségük van egymásra (valamint néhány kisebb pártra). Így a Munkáspárt és a LibDems ugyanolyan Shapley-értékkel rendelkezik, annak ellenére, hogy jelentősen különbözik a méretük, mivel a játékban azonos szerepet töltöttek be (felcserélhetőek).

8. Állítás. *Egy (N, w, q) játékban az $i \in N$ játékos akkor és csak akkor dummy, ha a Shapley-értéke 0.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ Ha az i dummy, akkor minden S koalícióra $v(S \cup i) - v(S) = 0$, tehát az összeg csak 0-kat tartalmaz.

$\Leftarrow$ Ha $\varphi(i) = 0$, akkor minden tag 0. Egy adott tag esetén az $\frac{|S|!(n-|S|-1)}{n!}$ értéke sosem lehet 0, így a határhozzájárulás lenne 0, ami viszont ha minden koalícióra teljesül, akkor a játékos dummy. $\square$

3.2.1. A kvóta szerepe

Nyilvánvalóan egy (N, w, q) játékban az egyes Shapley-értékek jelentősen függnek a kvótától (is), ahogy azt Chalkiadakis jegyzetének [2] 4.2.fejezete alapján vizsgáljuk. Nézzünk egy példát:

Legyen (N, w, q) egy játék, ahol $N = 4$, $w = (1, 1, 4, 4)$ és $q = 10$. Itt az egyetlen nyerő kolíció a nagykoalíció, tehát minden játékos szerepe egyforma (mindenki vétójátékos).

Módosítsunk a játékon, legyen $q = 8$. Ilyenkor az első két játákos dummy, a második kettő vétó. Az egyetlen nyerő koalíció az $\{3, 4\}$, az ő Shapley-értékük $1/2$, a másik két játékosé 0.

Még egy eset, $q = 5$-re. Ebben az esetben a nyerő koalíciók: $\{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\}$. Látható, hogy nincs sem dummy, sem vétó-játékos, így egyik Shapley-érték sem 0. Mivel az $1, 2$ valamint a 3,4 játékosok súlya megegyezik, ezért a Shapley értékeik is, amik: $1/6; 1/6; 1/3; 1/3$.

Tehát például $i = 1$-re:

$$\varphi(1) = \begin{cases} 6, \text{ ha } q = 5, \\ 0, \text{ ha } q = 8, \\ \frac{1}{4}, \text{ ha } q = 10. \end{cases}$$

Úgy látszik, hogy egy játékos Shapley-értékeit a kvóta függvényében vizsgálva nem fedezhetünk fel lineáris vagy egyéb egyszerűbb összefüggést. Ugyanakkor egy általános tulajdonság, az úgynevezett szelf-dualitás igazolható a kvótával kapcsolatban:

5. Tétel. *Legyen (N, w, q) egy súlyozott szavazási játék, és $(N, w, w(N)+1-q)$ egy másik. Ekkor az i. játékos Shapley-értéke a két játékban megegyezik.*

Bizonyítás. Először szükségünk van a következő definícióra:

26. Definíció. *Az (N, w, q) játékban az i* ***döntő*** *vagy* ***sarkalatos*** *egy S koalíció számára, ha $w(S) < q$, de $w(S \cup \{i\}) > q$. i döntő egy π permutáció számára, ha a π-ben i előtt álló játékosok által alkotott koalíció vesztes, de i csatlakozásával győztessé válik,* *azaz $w(S_\pi(i)) < q$ és $w(S_\pi(i) \cup \{i\}) \geq q$, ahol $S_\pi(i)$ a π permutáció szerint i előtt álló játékosokból álló koalíciót jelöli.*

Tegyük fel, hogy i az első játékban sarkalatos a π permutáció számára, azaz $w(S_\pi(i)) < q$ és $w(S_\pi(i) \cup \{i\} \geq q$. Legyen π' az első játékban a π megfordításával kapott permutáció. Ekkor:

$$\begin{aligned} w(S_\pi(i)) &= w(N) - w(S_\pi(i)) - w_i \leq w(N) - q < w(N) - q + 1, \\ w(S_{\pi'}(i) \cup i) &= w(N) - w(S_\pi(i)) > w(N) - q \geq w(N) - q + 1. \end{aligned}$$

Következik, hogy i a második játékban a π' számára döntő, ezért a szimmetria miatt az első játékban i a π számára döntő. Ez alapján létrehozható egy bijekció a két játékban, azon permutációk közt, amelyekre i az első játékban sarkalatos, és azok közt, amelyekre pedig a második játékban. Következik, hogy i Shapley értéke a két játékban megegyezik. □

11. Megjegyzés. További érdekes tulajdonság, hogy adott játékosra a Shapley-érték oszcillálóan változik a kvóta függvényében. Sőt, az is belátható, hogy az i játékos Shapley-értékének maximuma a $q = w_i$, illetve a szimmetria miatt a $q = w(N) + 1 - w_i$ kvóta esetén vétetik fel. Ezt Zick és társai tárgyalják részletesen [6]-ban, a bizonyításuk az előző tételhez hasonló elven alapszik.

3.2.2. Súlyozott szavazási játék Shapley-értéke és Bahnzaf-indexe

6. Tétel. *Egy (N, w, q) játék és egy $i \in N$ esetén a $\varphi^v(i)$ Shapley-értéke és Bahnzaf-indexe kiszámítható $O(n^3 w_{max})$ valamint $O(n^2 w_{max})$ időben.*

Bizonyítás. Ha szükséges, a játékosok újraszámozásával tegyük fel, hogy $i = n$. A legutolsó szereplő Shapley-értékét szeretnénk megállapítani. Feltehetjük, hogy $w_n > 0$, mert ha $w_n = 0$ teljesülne, akkor $\varphi_v(i) = 0$ lenne (a $w_n < 0$ eset pedig nem realisztikus).

Elsőként vezessük be a következő jelölést minden $s = 0, .., n-1$-re: N_s legyen az $N \setminus \{n\}$ s-elemű részhalmazainak a száma, amelyek súlya: $W \in \{q - w_n, \ldots, q - 1\}$. Valóban, ha i döntő a C koalíció számára, amire $|C| = s + 1$, akkor i döntő minden olyan permutáció számára, amiben az első s helyen $C \setminus \{i\}$ tagjai állnak, i pedig az $s + 1$. pozícióban. Ilyen permutációból pontosan $s!(n-s-1)!$ van (a $0!=1$ definíciót használva), így a Shapley-érték felírható a következő formában:

$$\varphi_v(i) = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{n-1} s!(n-s-1)! N_s$$

Az N_s kiszámításához dinamikus programozást használunk. Ehhez definiáljuk $X[j, W, s]$-t: legyen a $\{1, ..., j\}$ W súlyú, s-elemű részhalmazainak száma, ahol $j = 1, \ldots, n-1$, $s = 0, \ldots, n-1$ és $W = 0, \ldots, w(N)$.

Az inicializáció a következő: ha $s = 0$, és $j = 1, \ldots, n-1$, akkor:

$$X[j, W, 0] = \begin{cases} 1 & \text{ha } W = 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezenkívül, ha $j = 1; s = 1, \dots, n-1$, akkor:

$$X[1, W, s] = \begin{cases} 1 & \text{ha } W = w_1 \text{ és } s = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Most, hogy az $X[j', W', s']$ érték ismert minden $j' < j$, minden $W' = 0, ..., w(N)$, és minden $s' = 0, \dots, s-1$ esetén, kiszámolhatjuk az $X[j, W, s]$ értéket $W = 0, .., w(N)$ és $s = 1, \dots, n-1$ esetekben a következőképpen:

$$X[j, W, s] = X[j-1, W, s] + X[j-1, W - w_j, s-1].$$

Az egyenlőség jobb oldalán az első tag azoknak az s-méretű részhalmazoknak a számát adja meg, amelyek súlya W, és nem tartalmazzák j-t, a második pedig az ugyanilyen súlyú és méretű részhalmazok számát, amelyek tartalmazzák j-t. Ezzel az esetszétválasztással az összeg egyenlő az összes ilyen részhalmazok számával.

Így meghatározható $X[n-1, W, s]$ minden $W = 0, ..., w(N)$ és az összes $s = 0, \dots, n-1$ esetre. Az X értékek segítségével N_s a következőképp számolható $s = 0, \dots, n-1$-re:

$$N_s = X[n-1, q - w_n, s] + \dots + X[n-1, q-1, s].$$

Ezt az eredményt visszahelyettesítve megkapjuk az n. játékos Shapley-értékét.

A futási idő szempontjából az $X[j, W, s]$ táblázat kitöltésére fordított idő a lényeges. Ennek a táblának a mérete felülről becsülhető n x nw_{max} x n-nel, és minden érték konstans időben számolható, így a futási idő ténylegesen megfelel a tételben megadottnak.

A Bahnzaf-index esetében a táblázatból kihagyható az s érték, így a dinamikus program leegyszerűsödik, a számításhoz csak annyi infromációra van szükség, hogy $N \setminus \{n\}$-nek hány olyan részhalmaza van, aminek súlya legalább $q - w_n$ és legfeljebb $q-1$. Ez lehetővé teszi, hogy a futási időt $O(n^2 w_{max})$-ra csökkentsük. □

3.3. Súlyozott szavazási játék CS-magja

Szavazási játékok esetében különösen fontos azzal a problémával foglalkozni, hogy egy játékban nem feltétlenül alakul meg a a nagykoalíció, mivel általánosságban ezek a játékok nem szuperadditívek, a mag eredeti definíciójánál azonban a nagykoalíció létrejöttét feltételeztük.

Mivel a súlyozott szavazási játékok speciálisak, és jellemzően nem szuperadditívek, az általános definíció alapján felírhatjuk a CS-mag meghatározását az ilyen játékokra:

27. Definíció. *Legyen (N, w, q) egy súlyozott szavazási játék CS koalíció-struktúrával. A* ***súlyozott szavazási játék CS-magja*** *az olyan (CS, x) kimenetelek halmaza, amelyekre x hatékony CS-re nézve, és*

$$\textit{minden } S \subseteq N : w(S) \geq q \Rightarrow x(S) \geq 1.$$

Intuitívan a CS-mag olyan kimenetelek (koalíció-struktúra és kifizetés-vektor) halmazát jelenti, ahol egy koalíciónak sem érdeke, hogy a koalíció-struktúrát megtörje, módosítsa.

Ahogy azt korábban beláttuk, egy súlyozott szavazási játék magja pontosan akkor nemüres, ha létezik legalább egy vétó-játékos, és egy hatékony kifizetés akkor és csak akkor van a magban, ha a hasznot valamilyen módon a vétó-játékosok közt osztja fel. Ennek segítségével egy példával bizonyítjuk, hogy létezhet olyan súlyozott szavazási játék, amelynek a magja üres, de a CS-magja nem.

21. Példa. Legyen (N, w, q) egy súlyozott szavazási játék, ahol $|N| = 3$, $w = (2, 1, 1)$ és $q = 2$. Könnyen látható, hogy nincs vétójátékos, ezért a mag üres.

Két diszjunkt nyerő szövetség is létezik: $S_1 = \{1\}$ és $S_{23} = \{2, 3\}$, azaz $CS = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Az $(1, 1/2, 1/2)$ CS-re nézve hatékony kifizetéssel egy olyan kimenetelt kapunk, amely a CS-magban van, tehát az nem üres. Valóban, az 1-es szereplő megkapja az 1 nyereségét, ennél többet nem tudna szerezni más módon sem. A 2 és 3 játékosoknak nem érdeke sem együtt sem külön más csoportosuláshoz csatlakozni, mivel minden más esetben dummy-k lennének.

A következő tétel általánosan igaz tetszőleges játékra, de a súlyozott szavazási játékokkal kapcsolatos relevanciája miatt ebbe a fejezetbe került.

9. Állítás. *A mag a CS-mag része minden játék esetén.*

Bizonyítás. Legyen (N, v) tetszőleges játék. x legyen egy olyan kifizetés mely a magban van, vagyis igaz rá, hogy $x(N) = v(N)$ és minden $S \subseteq N$ csoportosulásra $x(S) \geq v(S)$. A hozzá tartozó koalíció-struktúra csak a nagykoalícióból áll, és erre nézve ténylegesen hatékony az x, valamint a minden részhalmazra való elfogadhatóság is teljesül, tehát az $(\{N\}, x)$ kimenetel a CS-magban van. Ezzel az állítást beláttuk. □

A maghoz hasonlóan, a CS-magnál is fontos kérdés az üresség eldöntése. A következőkben ezzel kapcsolatban fogalmazunk meg tételeket, illetve adunk algoritmust különböző felmerülő problémákra.

7. Tétel. *Legyen (N, w, q) egy súlyozott szavazási játék, amiben $q > w(N)/2$. Ekkor egy (CS, x) kimenetel a játék CS-magjában van, akkor és csak akkor, ha x a magban van. Tehát ha a kvóta ilyen értéket vesz fel, akkor a mag és a CS-mag megegyezik.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy egy (CS, x) kimenetel a CS-magban van. Mivel a kvóta nagyobb, mint $w(N)/2$, ezért a CS csak egy nyerő koalíciót tartalmazhat, legyen ez C. Ennél fogva $x(N) = 1$. Vegyünk egy $i \in C$ játékost, akinek x szerinti kifizetése nagyobb mint 0.

Ha i nem vétójátékos, akkor $w(N \setminus \{i\}) \geq q$ és $x(N \setminus \{i\}) < 1$. Így (CS, x) nem lenne a játék CS-magjában, ez ellentmondás. Tehát az x kifizetés szerint csak a vétójátékosok kapnak akármennyi nyereséget, ami implikálja, hogy x a magban van.

Az $\Leftarrow$ irányt az előző állításban láttuk. □

Egy további tétel a CS-mag nemürességéről:

8. Tétel. (N, w, q) *egy súlyozott szavazási játék. Ha létezik olyan $CS = (C_1, \ldots, C_k)$ koalíció-struktúra, hogy minden $j \in \{1, \ldots, k\}$-ra $w(C_j) = q$, akkor a játék CS-magja nemüres.*

Bizonyítás. Legyen CS olyan koalíció-struktúra, amely rendelkezik a fent leírt tulajdonsággal. Legyen x olyan hatékony kifizetés, mely a következőképpen van definiálva: $x_i = w_i/q$. Legyen S egy nyerő csoportosulás, erre $w(S) \geq q \Rightarrow x(S) \geq 1$, tehát S nem akarja megtörni a struktúrát. Ez fennáll minden nyerő koalícióra, CS-ben ilyenek vannak, tehát (CS, x) kimenetel a CS-magban van. □

A nemüresség kérdésével kapcsolatban, tudjuk, hogy a mag és a CS-mag megegyezik, ha $q \geq w(N)/2$ teljesül, és így persze a CS-mag lehet üres. Egy példán keresztül megmutatjuk, hogy $q < w(N)/2$ esetén is lehet az:

22. Példa. Legyen (N, w, q) egy súlyozott szavazási játék, amelyben $|N| = 5$, $w = (1; 1; 1; 1; 1)$ és $q = 2$. Azt állítjuk, hogy ennek a játéknak üres a CS-magja, és $q < w(N)/2$ fennáll.

Legyen CS egy koalíció-struktúra, és x egy kifizetés, ezért $x(N) \leq 2$. Ha létezik olyan $C \in CS$ csoportosulás, amire $|C| \geq 3$ és minden $i \in C$ résztvevőre $x_i > 0$, akkor bármely $i, j \in C$-nek érdeke lenne kiválni C-ből, ezzel megtörve a koalíció-struktúrát, és felosztani maguk közt az $x(C \setminus \{i, j\})$ összeget, tehát ilyen koalíció-struktúrájú kimenetel nem lehet a CS-magban.

Ha minden koalíció mérete legfeljebb 2, akkor létezik olyan i játékos, amely egyedül alkot egy koalíciót, és x szerinti kifizetése 0. Ezenkívül létezik olyan j résztvevő is, akire: $x_j < 1$, máskülönben $x(N) \geq 4$ lenne. Ebben az esetben $S = \{i, j\}$ egy sikeres megtörése lenne a struktúrának. Következtetésképpen nem létezhet olyan struktúra amely megfelelne a CS-mag feltételeinek.

A témakörben foglalkozunk még a számítási problémákkal is, ami nyilvánvalóan fontos a gyakorlati alkalmazásokban. Az egyszerűség és általánosság kedvéért tegyük fel, hogy az összes súly és a kvóta is természetes szám bináris alakban megadva (ez nem jelent problémát, mivel megfelelő értékkel beszorozva minden racionális szám egésszé tehető).

Korábban ismertetve lett, hogy a mag milyen esetekben üres, és egy adott kifizetés mikor van a magban. A nemüresség nyilvánvalóan polinomiális időben ellenőrizhető, mivel elég minden $i \in N$ indexre ellenőrizni, hogy $w(N \setminus \{i\}) \geq q$ teljesül-e.

Súlyozott szavazási játékok CS-magja esetén a szituáció sokkal bonyolultabb. Megmutatjuk, hogy az a probléma, hogy egy adott játék CS-magja üres-e, NP-teljes, az pedig, hogy egy kifizetés benne van-e a CS-magban, coNP-teljes. A feladatokat formalizálva:

NÉV: NonEmptyCsCore
INPUT: (N, w, q) súlyozott szavazási játék.
KÉRDÉS: (N, w, q)-nak üres a CS-magja?

NÉV: InCsCore
INPUT: (N, w, q) súlyozott szavazási játék és egy x kifizetés.
KÉRDÉS: x a játék CS-magjában van-e?

10. Állítás. *A NonEmptyCsCore probléma NP-teljes.*

Bizonyítás. Az, hogy a probléma NP-ben van természetesen igaz, mivel egy (CS, x) kimenetelről polinomidőben eldönthető, hogy teljesíti-e a szükséges feltételeket.

A nehézség bizonyításához visszavezetést adunk a PARTITION feladatról. Egy adott $(\{a_1, \ldots, a_n\}, K)$ input esetén a PARTITION-ra adott „IGEN” válasz legyen ekvivalens egy „IGEN”-nel a NONEMPTYCSCORE egy példányára (és „NEM” esetén ugyanígy).

A PARTITION egy ($\{a_1, \ldots, a_n\}, K$) példányából konstruáljunk egy (N, w, q) játékot a következőképp: $|N| = n, w_i = a_i$ minden $i \in N$, és $q = K$.

Tegyük fel, hogy a PARTITION példányra „IGEN” a válasz. Ilyenkor nincs vétó-játékos, mert minden $i \in N$ esetén $v(N \setminus \{i\}) > q$ teljesül, hiszen ha létezne olyan i, amire $a_i > K$, akkor a PARTITION problémára „NEM” lenne a válasz. Tehát létezik egy J indexhalmaz, amire: $\sum_{j \in J} a_j = K$. Ez azt jelenti, hogy a megfelelő súlyozott játékban $\sum_{j \in J} w_j = q$, tehát J egy nyerő csoportosulás. A koalíció-struktúra álljon a J és az $N \setminus J$ halmazokból, és egy x kifizetés legyen: $x_i = w_i/q$ minden $i = 1, \ldots, n$.

Ilyenkor $w(J) = w(N \setminus J) = K$, következik, hogy $x(J) = x(N \setminus J) = 1$, tehát x hatékony CS-re nézve. Így (CS, x) a CS-magban van. S nyertes csoportosulás: $w(S) \geq K$, tehát $x(S) \geq 1$, azaz S tagjai nem akarnak kitörni a koalíció-struktúrából.

Másrészről, feltélelezzük, hogy egy „NEM” példányunk van a PARTITION feladatból. Legyen (CS, x) egy kimenetele az eredeti játéknak. Egyértelmű, hogy CS csak egy nyerő koalíciót tartalmazhat, mert ha legalább 2 lenne, akkor egy „IGEN” példány lenne, hiszen ilyenkor pontosan kettő lenne, és a két csoportosulás megadna egy jó partíciót. Az, hogy CS ne tartalmazzon nyerő koalíciót, lehetetlen, mert $w(N) \geq K$ és $x(N) = 0$ ellentmondás.

Tehát most tegyük fel, hogy CS csak egy nyerő koalíciót tartalmaz, ez legyen C. Ebben az esetben $x(C) = x(N) = 1$ és $x_i = 0$ minden $i \notin C$ esetén. Szükségszerűen létezik olyan $i \in C$ amire $x_i > 0$, tehát $x(N \setminus \{i\}) < 1$. Ilyenkor $w(N \setminus \{i\}) > q$, azaz $(N \setminus \{i\})$ kitörhetne a koalíció-struktúrából, tehát (CS, x) nincs a CS-magban. $\square$

9. Tétel. *Az INCSCORE probléma coNP-teljes.*

A tétel bizonyítása hosszadalmas, Elkind és társai cikkében [3] megtalálható. Szintén a PARTITION problémáta vezeti vissza az INCSCORE feladatra: ha a PARTITION-ból „IGEN” példányunk van, akkor a neki megfeleltetett INCSCORE-ra „NEM” a válasz, és fordítva.

3.3.1. Algoritmusok a súlyozott szavazási játékok CS-magjára

Az imént beláttuk, hogy a CS-maggal kapcsolatos problémák NP-teljesek, tehát polinomiális időben futó algoritmus létezésében nem reménykedhetünk (ha P=NP nem teljesül), ennek ellenére szeretnénk aránylag gyors megoldási módszert találni. Szerencsére létezik a problémára úgynevezett pszeudopolinomiális algoritmus, amely ugyan nem polinomiális, de gyakorlati alkalmazásokban jól használható.

28. Definíció. *Legyen A egy probléma $\{a_1, \ldots, a_n\}$ inputtal. Egy A-t megoldó algoritmus* ***pszeudopolinomiális idejű****, ha futásideje: $O((\sum_{1 \leq i \leq m} a_i)^k)$.*

12. Megjegyzés. A pszeudopolinomiális időben futó algoritmus nem polinomiális, mivel adott $\{a_1, \ldots, a_n\}$ esetén egy polinomiális algoritmus n polinomjának idejében futna, a pszeudopolinomiális algoritmus viszont függ a konkrét a_i értékek nagyságától. Elképzelhető úgy is, hogy az $(a_1, \ldots, a_n)$ input unárisan van megadva, és az egész input így vett hosszában tekintve polinomiális az algoritmus, ugyanakkor ha az értékek binárisan vannak megadva, már látható, hogy ez nem azonos nagyságrendű az n szerint polinomiális algoritmussal. Az ilyen futásidejű algoritmus azonban gyakorlatban sok esetben jól használható olyan input esetén, ahol az a_i értékek nem túl nagyok.

10. Tétel. *Létezik olyan A_{InCsCore} algoritmus, amely pszeudopolinomiáis időben megoldja az InCsCore problémát, azaz egy adott (N, w, q) súlyozott szavazási játék, és egy (CS, x) esetében helyesen eldönti, hogy a kimenetel a a játék CS-magjában van-e, vagy nincs.*

Bizonyítás. Az algoritmus inputja egy InCsCore feladat, azaz egy (N, w, q) súlyozott játék, és egy CS koalíció-struktúra egy x kifizetéssel. A (CS, x) kimenetel akkor és csak akkor nincs a magban, ha létezik olyan $S \in CS$ koalíció, amelynek összsúlya eléri a kvótát, de a kifizetése kevesebb, mint 1.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a problémánk tulajdonképpen egy Hátizsák feladat, amire köztudottan létezik dinamikus programozáson alapuló pszeudopolinomiális algoritmus. A dinamikus programot az alábbiak szerint építjük fel:

Legyen $W = w(N)$, és jelölje $P(j, w)$ a legkisebb olyan $x(S)$ értéket, amire teljesül, hogy S tagjai az $\{1, \dots, j\}$ halmazból kerülnek ki, és $w(S) = w$. Formálisan:

$$P(j, w) = \min\{x(S) : S \subseteq \{1, \dots, j\},\ w(S) = w\}.$$

Tehát ha $\min_{w \in \{T,\dots,W\}} P(n, w) < 1$ valamelyik esetben, akkor létezik egy nyerő koalíció, aminek a kifizetése kevesebb mint 1. Ennek a koalíciónak érdekében állna megtörni a struktúrát, következtetésképp (CS, x) nincs a CS-magban.

Már csak azt kell megmutatni, hogy hogyan tudjuk a korábbi értékek alapján rekurzívan számolni a többi adatot. Az inicializáció legyen a következő: $j = 1$ esetén $P(1, w) = x_1$, ha $w = w_1$ mivel értelemszerűen az egyetlen szóba jövő koalíció az $S = \{1\}$, és legyen $P(1, w) = \infty$ minden más esetben. Tehát a táblázat első sorában lévő számok ismertek, ez alapján keressük $P(j, w)$-t minden $j = 1, ..., n$ és minden $w = \{1, \dots, W\}$-re. Tegyük fel, hogy $P(j, w)$-t már kiszámítottuk minden w-re, ez alapján határozzuk meg a $P(j+1, w)$-ket, vagyis a táblázat következő sorát, esetszétválasztással:

$$P(j + 1, w) = \min\{P(j, w), P(j, w - w_j) + x_{j+1}\}$$

Az első tag az az érték, amikor a $j + 1$. játékos nem szerepel a koalícióban, a másik pedig az amikor igen.

Egy adott (CS, x) kimenetel akkor nem része a CS-magnak, ha a rá így felépített táblázatban létezik olyan elem, ami ellentmond a CS-mag definíciójának, vagyis léteznek olyan j, w értékek, amire $w \geq q$, de $P(w, j) < 1$.

A dinamikus program futási ideje tényleg polinomiális n-ben és W-ben (egy nW méretű táblázatot kell kitölteni), így az algoritmusunk pszeudopolinomiális. □

11. Tétel. *Egy adott (N, w, q) súlyozott szavazási játék és CS koalíció-struktúra esetén létezik pszeudopolinomiális időben futó algoritmus, amely helyesen eldönti, létezik-e olyan x kifizetés, amelyre a (CS, x) kimenetel a CS-magban van.*

Bizonyítás. Legyen $CS = \{C_1, \ldots, C_k\}$ a koalíció-struktúra. Tekintsük a következő lineáris programot az $x_1, ..., x_n$ változókkal:

$$
\begin{aligned}
x_i &\geq 0 \text{ minden } i \in N,\\
\sum_{i \in C_j} x_i &= 1 \text{ minden } C_j \in CS \text{ nyerő koalícióra},\\
\sum_{i \in C_j} x_i &= 0 \text{ minden } C_j \in CS \text{ vesztes koalícióra},\\
\sum_{i \in J} x_i &\geq 1 \text{ minden } J \subseteq I\text{-re, amire } w(J) \geq T.
\end{aligned}
$$

Az első három egyenlőtlenség-csoport biztosítja, hogy x érvényes kifizetés legyen a CS-re nézve, az utolsók pedig azt, hogy minden nyerő (nem feltétlenül CS-beli) koalíció megkapja a jogosan követelt 1 kifizetését. Megmutatjuk, hogy a korábbi pszeudopolinomiális algoritmus használható ennek megoldására.

Az LP mérete lehet n-ben exponenciális is, az összes lehetséges koalíció-struktúra száma miatt. Az ilyen formájú programok megoldhatóak az úgynevezett ellipszoid-módszer segítségével (lásd [1]), feltéve, hogy rendelkeznek polinomiális idejű szeparációs orákulummal. Ez definíció szerint egy olyan szubrutin, amely egy elvileg jó megoldásról ellenőrzi hogy tényleg jó-e, ha pedig nem az, akkor visszaad egy feltételt amit sért. A mi esetünkben az orákulumnak azt kell ellenőriznie, hogy az x megoldás teljesíti-e a fenti négy egyenlőtlenség-típus mindegyikét.

Ha ezek akármelyike sérül, akkor a szeparációs szubrutin kiadja a sértő feltételt, amit hozzáveszünk az eddigi feltételek által alkotott poliéderhez, és egy másik megoldással próbálkozunk. Ha nem ez a helyzet, és minden feltétel teljesül, akkor az előbbi $A_{\textsc{InCsCore}}$ algoritmust használhatjuk, amely eldönti, hogy létezik-e olyan nyertes koalíció, aminek súlya meghaladja a kvótát, de x szerinti kifizetése kevesebb, mint 1.

Az algoritmus könnyen átírható úgy, hogy vissza is adja ezt a nyertes koalíciót, ha létezik ilyen. Ha $A_{\textsc{InCsCore}}$ egy ilyen csoportosulást állít ki, akkor a szeparációs orákulum a megfelelő megsértett feltételt adja vissza. Ha nincs ennek megfelelő koalíció, akkor (CS, x) a CS-magban van, tehát x-et visszaadhatjuk mint jó megoldást. Mivel a szétválasztó orákumulhoz használt algoritmus pszeudopolinomiális idejű, az ezt használó ellipszioid módszeres megoldás is ebben az időben fut. □

Adott koalíció-struktúra esetén láttuk, hogy lehet eldönteni egy x kifizetésről, hogy CS-vel együtt a CS-mag részét képezi-e, viszont koalíció-struktúrából exponenciálisan sok lehet, ezek mindegyikére pszeudopolinomiális idejű algoritmust futtatni egy adott x-el rendkívül drága lenne. Ennek gyorsítására megadhatunk heurisztikákat, amik alapján ki lehet zárni lehetőségeket. Ezek a következők:

- Nem szükséges vizsgálni az olyan koalíció-struktúrákat, amik több, mint egy vesztes koalíciót tartalmaznak, mivel több vesztes csoportosulást összevonva a kapott struktúra szintén stabil lesz, ha az eredeti az volt.

- Elég azokat a koalíció-struktúrákat figyelembe venni, ahol minden $C \in CS$ nyerő koalíció minimális, azaz akármelyik tagját eltávolítva a koalícióból, már nem maradna nyerő. Ezt azért tehetjük meg, mert ha egy nem-minimális nyerő csoportosulásból az ilyen tulajdonságú játékost egy (egyszemélyes) vesztő koalícióba helyezzük át, akkor a kapott partíció is stabil marad.

Tegyük fel, hogy van egy $CS = \{C_0, C_1, \ldots, C_k\}$ koalíció struktúránk, amire $v(C_0) = 0$ (lehet üres is), $v(C_i) = 1$ minden $i = 1, .., k$ esetén, és minden $i > 0$ esetén C_i minimáls. Vegyünk egy $j \in C_i$ játékost, ahol $i > 1$. Ha $x_j > 0$ és $w(C_0) \geq w_j$, akkor a CS nem stabil: a $C_0 \cup C_1 \setminus \{j\}$ megtörheti a koalíció-struktúrát egy nyerő csoportosulást hozva létre, és így az x_j összeget is feloszthatják maguk közt. Legyen $C_i' = \{j \in C_i : w_j \leq w(C_0)\}$. Látható, hogy a C_i' tagjai minden olyan x kifizetés szerint 0-t kapnak, ami alapján (CS, x) stabil. Legyen $C' = \cup_{0<i} C_i'$. Ha $w(C') + w(C_0) \geq q$, akkor nem létezik olyan x, amire a (CS, x) stabil lenne. Minden x szerint a a C_0 és a C' tagjainak is 0 kifizetést kellene kapniuk, így viszont egyesülhetnének egy nyerő koalícióvá, megtörve a koalíció-struktúrát.

Így felgyorsíthtjuk a korábbi algoritmust a következő módon: legyen $CS = \{C_1, \ldots, C_k\}$, határozzuk meg C_i' halmazokat $i = 1, \ldots, k$ értékekre, és ellenőrizzük, hogy $w(C') + w(C_0) \geq q$ teljesül-e. Ha igen, akkor nem létezik a CS-hez megfelelő x amivel a kimenetel stabil lenne. Ellenkező esetben futtassuk a megadott algoritmust. Természetesen ennek az előfeldolgozása gyorsan lefut (polinomiálisan, akkor is ha a súlyok nagyon nagyok), így könnyen kizárhatunk sok rossz lehetőséget, anélkül, hogy meg kellene oldanunk a lineáris programozási feladatot.

4. fejezet

Végszó

Szakdolgozatomban elsőként áttekintettem a téma általános jellemzőit, nagyrészt a Lóvásár, Kesztyűjáték és Jégkrémjáték játékokat használva példákként. Az első részben foglalkoztam a játékok additivitásának kérdésével, speciális tulajdonságokkal, mint a lényegesség, monotonitás, szimmetria, vagy egyszerűség. Ezután a kifizetéseket tárgyaltam részletesen, bevezetve két különösen fontos fogalmat: a magot és az erőt, ami a Shapley-értékkel és a Bahnzaf-indexszel mérthető. A magról például kiderült, hogy megadható poliedrikus halmazként, valamint vizsgáltam a nemürességének kérdését is. Bevezettem az ennél általánosabb CS-mag definícióját, ami az irodalomban is ritkábban lelhető fel. Ismertettem a Shapley-érték alapvető tulajdonságait, bizonyítottam létezését és egyértelműségét. Röviden bemutattam egy másik, hozzá hasonló mértékegységet, a Bahnzaf-indexet is.

A második részben a bevezetett fogalmakat, tételeket a súlyozott szavazási játékok témakörén mutattam be. Definiáltam két speciális játékostípust, a vétó- és dummy-játékosokat, foglalkoztam a beazonosításukkal valamint egyéb velük kapcsolatos problémákkal. Ki kell emelni, hogy a szavazási játékok tipikusan nem szuperadditívek, csak ha a kvóta meghaladja a nagykoalíció súlyának felét. A Shapley-értéket és a Bahnzaf-indexet ebben a témakörben, erőnek hívjuk, megállapítható például, hogy egy súlyozott játékban a Shapley-érték monoton a súly szerint, vagy hogy egy játékos akkor és csak akkor dummy, ha a Shapley-értéke 0. Ezentúl ismertettem a Shapley-értékre egy pszeudopolinomiális időben futó, dinamikus programozáson alapuló algoritmust. A CS-mag kimondottan fontos konstrukció a témában, mivel a súlyozott szavazási játékoknál nem realisztikus feltételezni a nagykoalíció megalakulását, ezért a mag nem feltétlenül hasznos fogalom. Ezzel kapcsolatosan bevezettem a NonEmptyCsCore NP-teljes és az InCsCore coNP-teljes problémákat, az utóbbira adtam pszeudopolinomiális időben futó algoritmust is, előbbire pedig egy heurisztikus módszert mutattam be.

Irodalomjegyzék

[1] Dimitris Bertsimas and John N Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, volume 6. Athena Scientific Belmont, MA, 1997.

[2] Georgios Chalkiadakis, Edith Elkind, and Michael Wooldridge. *Computational aspects of cooperative game theory*. Springer Nature, 2022.

[3] Edith Elkind, Georgios Chalkiadakis, and Nicholas R Jennings. Coalition structures in weighted voting games. In *ECAI*, volume 8, pages 393–397, 2008.

[4] Forgó Ferenc, Pintér Miklós, Simonovits András, and Solymosi Tamás. Kooperatív játékelmélet. elektronikus jegyzet, 2006.

[5] Végh László, Király Tamás, and Pap Júlia. Játékelmélet jegyzet, 2023.

[6] Yair Zick, Alexander Skopalik, and Edith Elkind. The shapley value as a function of the quota in weighted voting games. In *IJCAI*, volume 11, pages 490–495, 2011.