Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Sike András

2-normált terek elmélete

BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor
György Szilvia
Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2024.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném kifejezni köszönetemet a témavezetőimnek, Dr. Kovács Sándornak és György Szilviának a témajavaslatért és hogy a szakdolgozat elkészülésében mindennemű segítséget biztosítottak.

Továbbá szeretném megköszönni családomnak a támogatásukat, illetve mindenkinek, aki akár csak egy érdekes kérdés felvetésével motivált a tanulmányaim során.

Budapest, 2024. tavasz

Sike András

1. fejezet

Bevezetés

A funkcionálanalízis területén igen hasznos eredményeknek bizonyultak a különböző fixponttételek, mivel azok algebrai egyenletrendszerek, ill. differenciálegyenletek megoldásának meghatározását, illetve a megoldás egyértelműségének bizonyítását nagyban egyszerűsítik. Továbbá erős eszközök bizonyításokhoz akár a matematika más területein is. Emellett a korlátos lineáris funkcionálok, duális terek és ezek kapcsolatának tanulmányozása is hasonlóan nagy jelentőséggel bír.

1964-ben S. Gähler bevezette a lineáris 2-normált terek fogalmát ([4]). Később a definíció általánosítva lett, és matematikusok n-normált terekre általánosítottak olyan fogalmakat, mint konvergencia, teljesség, és ezen terek topológiáját vizsgálták. T. K. Samantha és társszerzők tanulmányozták az egyenletes korlátosság tételét és a Hahn-Banach-tételt ([8]), J. Brzdek és K. Cieplinski n-Banach térbeli fixponttételeket bizonyítottak és a sajátértékek Ulam-stabilitását vizsgáltak, majd alkalmazták azokat differenciálegyenletekre ([1]). Továbbá az n-Hilbert terek elméletét (először 1973-ban az $n = 2$ esetre C. Diminnie, S. Gähler és A. While ([2])) is bemutatta 1989-ben A. Misiak ([14]), amelynek eredménye például egy általános Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség, polarizációs azonosságok és a Riesz-reprezentációs tétel, amely összeköti a korlátos lineáris funkcionálok és a duális terek elméletét.

Sok esetben az n-normált terek funkcionálanalízise sokkal általánosabban, vagy akár kizárólag változók rögzítésével lehetséges és pl. b-konvergencia ill. b-szeszkvilinearitás definiálásával.

Ezen dolgozat célja bemutatni megismertetni az olvasót a metrika, norma illetve skaláris szorzĂĄs álatlánosításaival, és ezek után bemutatásra kerül néhány fixponttétel n-Banach terekben és pár igen jelentős eredmény általánosítása n-Hilbert terekre.

NĂŠhĂĄny példa után a következő fejezetben összefoglaljuk az n-normához szükséges alapfogalmakat, és pár egyszerű következményt. Ezután három tétel általánosítása következik, az Edelstein-féle fixponttétel, Weissinger-féle fixponttétel és a Banach-féle fixponttételé. Az utolsó fejezetben a Lax-Milgram tétel n-Hilbert térbeli változata zárja le a dolgozatot, közben bebizonyítva a Zarantonello tétel általánosítását.

Az első fejezetben bevezetjük a 2-norma fogalmát és pár alapvető összefüggést levezetünk. A második fejezetben a 2-metrika fogalma is ismertetésre kerül, aminek segítségével példát adunk olyan nem metrikus térre, amelyen bevezethető 2-norma. A harmadik fejezetben az n-normált terek elméletéhez szükséges fogalmakat és alapvető tételeket fejtjük ki. Ezután három tétel általánosítása következik, az Edelstein-féle fixponttétel, Weissinger-féle fixponttétel és a Banach-féle fixponttételé. Az utolsó fejezetben a Lax-Milgram-tétel n-Hilbert-térbeli változata zárja le a dolgozatot, közben bebizonyítva a Zarantonello-tétel általánosítását.

Emlékeztetőül definiáljuk a norma fogalmát:

Emlékeztető. Legyen $\mathbb{V}$ egy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ feletti vektortér. Egy $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ függvényt **normának** hívunk, és a $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ párt **normált térnek** nevezzük, ha a következők teljesülnek minden $x, y \in \mathbb{V}$ vektorra, illetve minden $\alpha \in \mathbb{K}$ skalárra:

(1) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0;$

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|;$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Könnyen látható (vö. [10]), hogy **(1)** megfordítása is igaz: $\lambda = 0 \in \mathbb{K}$ (és tetszőleges $x \in \mathbb{V}$) választással

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = |0| \cdot \|x\| = 0.$$

Állítás. Tetszőleges vektor normája nemnegatív, azaz

$$\|x\| \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{V}).$$

Bizonyítás.

$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1| \cdot \|x\| = 2\,\|x\| \quad \blacksquare$$

Állítás. A **(3)**-al jelölt kifejezés egyenértékű az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{V}$$

Bizonyítás. Mivel

$$x = (x - y) + y,$$

(2)-t alkalmazva

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|, \quad \text{vagyis} \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

adódik. x és y szerepcseréjével

$$-(\|x\| - \|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|.$$

Amennyiben a második egyenlőség teljesül, x helyett $x+y$-t írva

$$\|x+y\| - \|y\| \leq \|x\| \qquad \blacksquare$$

AZ $\mathbb{R}^n$ (euklideszi) tér felett bevezetjük az alábbi normát: tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz hozzárendeljük a

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

számot. Könnyen látható, hogy ez teljesíti a norma axiómákat, és innentől alapértelmezett, kettes vagy euklideszi normaként hivatkozunk rá.

Definíció. Legyen $\mathbb{V}$ egy legalább 2 dimenziós, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ feletti vektortér. Egy $\|\cdot,\cdot\| : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt **2-normának** hívunk, és a $(\mathbb{V}, \|\cdot,\cdot\|)$ párt **2-normált térnek** nevezzük, ha a következők teljesülnek minden $x, y, z \in \mathbb{V}$ vektorra illetve minden $\alpha \in \mathbb{K}$ számra:

(N1) $\|x,y\| = 0 \quad \iff \quad x$ és y lineárisan összefüggőek;

(N2) $\|x,y\| = \|y,x\|$;

(N3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \, \|x,y\|$;

(N4) $\|x+z, y\| \leq \|x,y\| + \|z,y\|$ (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Állítás. A 2-norma pozitív szemidefinit, azaz

$$\|x,y\| \geq 0 \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{V}$$

Bizonyítás.

$$0 = \|0,y\| = \|x-x,y\| \leq \|x,y\| + |-1| \cdot \|x,y\| = 2\,\|x,y\| \quad \blacksquare$$

Emellett szintén helyettesíthető a háromszög-egyenlőtlenség az alábbi formulával:

Állítás. Az **(N4)**-beli háromszög-egyenlőtlenség ekvivalens átfogalmazasa az alábbi kifejezés:

$$|\|x,y\| - \|z,y\|| \leq \|x - z,y\| \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{V}$$

Bizonyítás. Továbbra is az

$$x = (x - z) + z$$

azonosságot használjuk fel.

$$\|x,y\| \leq \|x - z,y\| + \|z,y\| \quad \text{azaz} \quad \|x,y\| - \|z,y\| \leq \|x - z,y\|\,,$$

x és z szerepcseréjével

$$-\left(\|x,y\| - \|z,y\|\right) = \|z,y\| - \|x,y\| \leq \|z - x,y\| = \|x - z,y\|$$

Visszafele, x helyett $x + z$-vel felírva a második egyenlőtlenséget:

$$\|x + z,y\| - \|z,y\| \leq \|x,y\| \qquad \blacksquare$$

Állítás. ([4]) **(N4)** ekvivalens az alábbi **(N4')** egyenlőtlenséggel:

$$\|x + z,y + z\| \leq \|x,y\| + \|y,z\| + \|z,x\| \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{V}$$

Bizonyítás.

1. lépés. **(N1)**, **(N2)** és **(N4)** axiómákból

$$\|x + z,y + z\| \leq \|x + z,y\| + \|x + z,z\| \leq \|x,y\| + \|y,z\| + \|z,x\|$$

2. lépés. Legyen egy **(N1)**, **(N2)**, **(N3)** és **(N4')** tulajdonságokat teljesítő $\|\cdot,\cdot\|$ függvényünk. Ekkor bármely $x,y,z \in \mathbb{V}$ vektor és $\alpha \in \mathbb{K}$ szám mellett

$$\begin{aligned}
\|x,y + z\| &= \|(-\alpha z) + (x + \alpha z)\,,(y + z - x - \alpha z) + (x + \alpha z)\| \leq \\
&\leq \|-\alpha z,y + z - x - \alpha z\| + \|y + z - a - \alpha z,a + \alpha z\| + \|x + \alpha z, - \alpha z\| \leq \\
&\leq \|y + z - x,\alpha z\| + \|x + \alpha z,y + z\| + \|x,\alpha z\| \leq \\
&\leq \|x + \alpha z,y + z\| + |\alpha|\left(\|y - x,z\| + \|x,z\|\right).
\end{aligned}$$

Szintén tudjuk, hogy

$$\|x + \alpha z, \alpha y + \alpha z\| \leq \|x, \alpha y\| + \|\alpha y, \alpha z\| + \|\alpha z, x\|$$

és amennyiben $\alpha \neq 0$:

$$\|x + \alpha z, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| + |\alpha| \cdot \|y, z\| .$$

Vagyis minden nemnulla $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

$$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| + |\alpha| \left(\|y - x, z\| + \|x, z\| + \|y, z\| \right),$$

azaz

$$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| .$$

Az $\alpha = 0$ eset határátmenettel igazolható. ■

A legegyszerűbb példája egy 2-normált térnek az $\mathbb{R}^2$ vektortér az alábbi normával (vö. [15]):

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}\| := \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2).$$

Másik fontos példa 2-normára $\mathbb{R}^3$ (euklideszi) tér felett két vektor vektoriális szorzatának euklideszi normája:

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}\| := \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \sin(\alpha) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3),$$

ahol α az **u** és **v** vektorok által bezárt szög.

Természetes gondolat a két indexes sorozatokat 2-normával ellátni (vö [9]): $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ sorozatokra

$$\|x, y\| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}^2 & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} y_{ij} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} y_{ij} & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_{ij}^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_{ij} y_{kl} \begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} \\ x_{kl} & y_{kl} \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

2. fejezet

2-metrikus terek

A második fejezetben Gähler (vö. [3], [4]) cikkei alapján bevezetjük a 2-metrikus terek fogalmát. Ezek után össze fogjuk őket kapcsolni a 2-normált terekkel, majd mutatunk egy példát olyan térre, amelyen nem adható meg norma, ellenben 2-norma igen.

Definíció. 2-metrikusnak térnek nevezünk egy S halmazt, amelyen értelmezve van egy σ-val jelölt 2-metrika, amely $x,y,z \in S$ ponthármasokhoz rendel valós számokat, és a következőket teljesíti:

(1a) bármely $x \neq y \in S$ pontpárhoz létezik olyan $z \in S$, amelyre $\sigma(x,y,z) \neq 0$;

(1b) $\sigma(x,y,z) = 0$ pontosan akkor, ha mindhárom pont egybeesik;

(2) $\sigma(x,y,z) = \sigma(x,z,y) = \sigma(y,z,x)$ minden $x,y,z \in S$ ponthármasra;

(3) $\sigma(x,y,z) \leq \sigma(x,y,w) + \sigma(x,w,z) + \sigma(w,y,z)$ minden $x,y,z,w \in S$ pontnégyesre.

Állítás. **([4])** Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot,\cdot\|)$ egy legalább két dimenziós 2-normált tér. Ekkor a

$$\sigma(x,y,z) := \|y-x, z-x\|$$

módon definiált függvény 2-metrikát indukál.

Bizonyítás.

1. lépés. Mivel $\mathbb{V}$ legalább két dimenziós, bármely x és y ($\mathbb{V}$-beli) vektorokhoz létezik olyan $z \in \mathbb{V}$, hogy $y-x$ és $z-x$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek. Ebből

$$\sigma(x,y,z) = \|y-x, z-x\| \neq 0.$$

Továbbá

$$\sigma(x,y,z) = \|y-x, z-x\| = 0$$

pontosan akkor áll fenn, ha x,y,z egybeesnek.

2. lépés. Minden $x,y,z \in \mathbb{V}$ ponthármas teljesíti a

$$\|y-x,z-x\| = \|z-x,y-x\|$$

egyenlőséget. Továbbá egyrészt

$$\|z-x,y-x\| = \|(z-y)-(x-y),-(x-y)\| \leq \|z-y,x-y\|,$$

másrészt

$$\|z-y,x-y\| = \|(z-x)-(y-x),-(y-x)\| \leq \|z-x,y-x\|,$$

ebből következően

$$\|y-x,z-x\| = \|z-y,x-y\|,$$

ami pont a 2. axióma:

$$\sigma(x,y,z) = \sigma(x,z,y) = \sigma(y,z,x).$$

3. lépés. Végül tetszőleges $w \in \mathbb{V}$ negyedik pont választásával

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y,z) &= \|y-x,z-x\| = \\
&= \|(y-w)-(x-w),(z-w)-(x-w)\| \leq \\
&\leq \|y-w,z-w\| + \|z-w,x-w\| + \|x-w,y-w\| = \\
&= \sigma(x,y,w) + \sigma(x,w,z) + \sigma(w,y,z). \blacksquare
\end{aligned}$$

Legyen adott $(S,\sigma(\cdot,\cdot,\cdot))$ 2-metrikus tér. Jelölje $U_\alpha(a,b)$ azon c pontok halmazát, amelyekre $\sigma(a,b,c) < \alpha$, továbbá jelölje B a

$$\bigcap_i U_{\alpha_i}(a_i,b_i)$$

metszetek családját minden véges α_i-re. Tetszőleges B-beli halmazok unióit definiáljuk nyílt halmazoknak, és ezzel megadunk egy topológiát S-en.

Lemma. ([3]) Legyen a az S 2-metrikus tér tetszőleges pontja. A

$$W_\Sigma(a) := \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}(a,b_i)$$

halmazoknak bármely n természetes szám és minden

$$\Sigma = \{(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\ldots,(b_n,\alpha_n)\}$$

esetén létezik megszámlálható bázisa.

Bizonyítás. Legyen

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}(a_i,b_i)$$

tetszőleges, a-t tartalmazó B-beli halmaz, illetve $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$. Mivel

$$a \in U_{\alpha_j}(a_j,b_j) = \{c : \sigma(a_j,b_j,c) < \alpha_j\},$$

így létezik α_j', amely egyrészt teljesíti $0 < \alpha_j' < \alpha_j$-t, másrészt

$$a \in U_{\alpha_j'}(a_j,b_j) = \left\{c : \sigma(a_j,b_j,c) < \alpha_j'\right\}.$$

Legyen most

$$\varepsilon_j := \frac{\alpha_j - \alpha_j'}{2} \quad \text{és} \quad \Sigma_j := \{(a_j,\varepsilon_j),(b_j,\varepsilon_j)\}.$$

Minden

$$a^* \in W_{\Sigma_j}(a) = U_{\varepsilon_j}(a,a_j) \cap U_{\varepsilon_j}(a,b_j)$$

pontra teljesül, hogy

$$\sigma(a,a_j,a^*) < \varepsilon_j \quad \text{és} \quad \sigma(a,b_j,a*) < \varepsilon_j.$$

A **(2)**-es, ill. **(3)**-as 2-metrika axiómák alapján

$$\begin{aligned}
\sigma(a_j,b_j,a^*) &\leq \sigma(a_j,b_j,a) + \sigma(a_j,a,a^*) + \sigma(a,b_j,a^*) < \\
&< \alpha_j' + \varepsilon_j + \varepsilon_j = \\
&= \alpha_j' + 2 \cdot \frac{\alpha_j - \alpha_j'}{2} = \alpha_j,
\end{aligned}$$

azaz $a^* \in U_{\alpha_j}(a_j,b_j)$. Mivel a^* önkényesen lett választva $W_{\Sigma_j}(a)$-ból, így

$$W_{\Sigma_j}(a) \subseteq U_{\alpha_j}(a_j,b_j).$$

Ha ezt elvégezzük minden $j \leq n$ természetes számra, akkor a

$$\Sigma = \{(a_1,\varepsilon_1),(b_1,\varepsilon_1),\ldots,(a_n,\varepsilon_n),(b_n,\varepsilon_n)\}$$

halmazra

$$a \in W_\Sigma(a) = \bigcap_{i=1}^{n} W_{\Sigma_i}(a) \subseteq U_{\alpha_j}(a_j,b_j)$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

Ezen lemma felhasználásával mutatunk egy példát olyan 2-normált (és így egyben 2-metrikus) térre, amely nem metrikus tér (és így nem normált tér).

Legyen $I := (0,\infty) \times (0,\infty)$. Ekkor minden $i = (i_1,i_2) \in I$-hez legyen $e_i = e_{i_1,i_2} \in \mathbb{R}^I$ a Kronecker-delta:

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } i_1 = i_2, \\ 0, & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

Legyen ezen függvények lineáris burka $\mathbb{V}$, és lássuk el a

$$\|e_i,e_j\| = \|e_{i_1,i_2},e_{j_1,j_2}\| := \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j \iff i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_, \\ \sup(i_1,i_2) & \text{ha } i_1 = j_1 \wedge i_2 \neq j_2, \\ 1, & \text{ha } i \neq j \iff i_1 \neq j_1 \wedge i_2 \neq j_2 \end{cases}$$

kétváltozós függvénnyel. Legyen továbbá $I' \subset I$ véges, illetve

$$\Sigma = \left\{ \left(\sum_{i \in I'} \beta_i^{(1)} e_i, \varepsilon^{(1)} \right), \dots, \left(\sum_{i \in I'} \beta_i^{(n)} e_n, \varepsilon^{(n)} \right) \right\}$$

úgy, hogy

$$\sum_{i \in I'} \left| \beta_i^{(\nu)} \right| \neq 0 \qquad \forall\, \nu \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Ekkor minden j_1 valós számra, és tetszőleges $\nu \in \{1,2,\dots,n\}$ számra

$$\gamma(j_1,\nu) := \begin{cases} \sum\limits_{i \in I';\, i_1 \neq j_1} \left| \beta_i^{(\nu)} \right|, & \text{ha létezik } I'\text{-ben legalább egy } i, \text{ amire } i_1 \neq j_1 \\ 0 & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

Hasonlóan

$$\delta(j_1,\nu) := \begin{cases} \sum\limits_{i \in I';\, i_1 = j_1} |\beta_i^{\gamma}|, & \text{ha létezik } I'\text{-ben legalább egy } i, \text{ amire } i_1 = j_1 \\ 0 & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

Csak véges sok valós j_1-el lehet $\delta(j_1,\nu)$ értéke 0. Jelölje I^* az I'-beli elemek második komponenseinek halmazát, és j_2^* legyen olyan valós szám, amire egyrészt

$$j_2^* > \sup\{i_2 : i_2 \in I^*\},$$

másrészt minden $j_2 > j_2^*$ valós számra és tetszőleges $j_1 \in \mathbb{R}$ számmal minden $\nu \in \{1,2,\dots,n\}$ esetén

$$\gamma(j_1,\nu) + j_2 \delta(j_1,\nu) \neq 0.$$

Egy $\alpha_j e_j, j = (j_1,j_2)$ pont $j_2 > j_2^*$ feltétel mellett $\mathbb{V}$-beli, mert minden $\nu \in \{1,2,\dots,n\}$ mellett

$$\sigma\left(0, \sum_{i \in I'} \beta_i^{(\nu)} e_i, \alpha_j e_j\right) = \left\| \sum_{i \in I'} \beta_i^{(\nu)} e_i, \alpha_j e_j \right\| = |\alpha_j| \{\gamma(j_1,\nu) + j_2 \delta(j_1,\nu)\}$$

pontosan akkor a $W_\Sigma(0)$ halmaz, ha

$$|\alpha_j| < \inf\left\{\frac{\varepsilon^{(\nu)}}{\gamma(j_1,\nu)+j_2\delta(j_1,\nu)} : \nu \in \{1,2,\ldots,n\}\right\}$$

fennáll. $\delta(j_1\nu) = 0$ esetén az $|\alpha_j|$-re adott korlát független j_2-től, egyébként (azaz véges sok j_1 esetén) a korlát 0-hoz tart ahogy j_2 növekszik. Ez azt jelenti, hogy a $W_\Sigma(0)$ halmazokat tartalmazó rendszerhez nincsen megszámlálható bázis 0-ban. Viszont az előző állítás alapján az összes $W_\Sigma(0)$ halmaz rendszeréhez kell lennie bázisnak 0-ban, így $\mathbb{V}$-nek egyáltalán nem lehet megszámlálható bázisa 0-ban. Következtetésképp $\mathbb{V}$ nem metrizálható, így nem is adható meg felette norma.

3. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben felsoroljuk mindazon fogalmakat, amelyeket a dolgozat további részében felhasználunk.

Definíció. Legyen $\mathbb{V}$ egy legalább n dimenziós, $\mathbb{K} = \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ feletti vektortér. Egy $\|\cdot,\dots,\cdot\| : \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$ függvényt n**-normának** hívunk, és a $(\mathbb{V}, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ párt n**-normált térnek** nevezzük, ha a következők teljesülnek minden $x,y,x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}$ vektor illetve minden $\alpha \in \mathbb{K}$ skalár esetén:

(N1) $\|x_1,\dots,x_n\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_1,\dots,x_n\}$ lineárisan összefüggőek

(N2) $\|x_1,\dots,x_n\| = \left\|x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(n)}\right\|$ az $\{1,\dots,n\}$ minden ϕ permutációjára;

(N3) $\|\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\| = |\alpha|\,\|x_1,x_2,\dots,x_n\|$;

(N4) $\|x+y,x_2,\dots,x_n\| \leq \|x,x_2,\dots,x_n\| + \|y,x_2,\dots,x_n\|$ (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Láttuk, hogy $\mathbb{R}^3$ tér felett két vektor vektoriális szorzatának euklideszi normája 2-normát ad:

$$\|\mathbf{u},\mathbf{v}\| := \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \sin(\alpha) \qquad (\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3).$$

Ismeretes (vö. e.g. [11], [16]), hogy a vektoriális szorzat általánosítható $\mathbb{R}^{n+1}$-re a következőképpen:

Definíció. Ha $e_1, \dots e_{n+1}$ a $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egy kanonikus bázisa, akkor a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektorok vektoriális szorzata az alábbi módon definiálható:

$$x_1 \times \cdots \times x_n := \det \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_{n+1} \\ x_{1,1} & \dots & x_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

ahol $x_{i,j}$ jelöli x_i vektor j-edik koordinátáját.

Ezen keresztül természetes gondolat, hogy az $\mathbb{R}^3$ tér feletti 2-normát úgy általánosítsuk, hogy az abban szereplő vektoriális szorzatot lecseréljük az általánosabb verzióra:

Tétel. Legyenek $e_1, \dots e_{n+1}$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ kanonikus bázisvektorai. Ekkor

$$\|x_1, \dots, x_n\| := \|x_1 \times \cdots \times x_n\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \det(E_i)\, e_i \right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

n-normát ad meg, ahol $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az alábbi mátrix

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

az i-edik oszlopa nélkül.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az n-norma definíciójában szereplő négy feltétel mind teljesül.

(N2) Sorcserékkel a determináns értéke csak egy ± 1-es szorzóval változhat, ezáltal minden i-re tudjuk, hogy $\det(E_i)^2$ nem változik, amelyből következik, hogy ezek összege és az összeg gyöke is azonos marad.

(N3) **(N2)**-t felhasználva, elégséges, ha az első változóra teljesül az abszolút homogenitás. Ha E_i^α jelöli azon mátrixokat, amelyek minden tagja megegyezik E_i-vel, viszont minden $x_{1,j}$ helyett $\alpha x_{1,j}$-t írunk:

$$\begin{aligned} \|\alpha x_1, \dots, x_n\| &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i^\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} (\alpha \det(E_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\alpha^2 \sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x_1, \dots, x_n\| . \end{aligned}$$

(N4) Ha $x_i = y + z$, és a megfelelő mátrixok E_i, E_i^y, E_i^z, akkor a determináns linearitásából tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|x_1, \ldots, x_{i-1}, y + z, x_{i+1}, \ldots, x_n\| &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i^y + E_i^z)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i^y)^2 + \det(E_i^z)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i^y)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i^z)\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \|x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_n\| + \\
&\quad + \|x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1} \ldots, x_n\|
\end{aligned}$$

(N1) Ha $\{x_1, \ldots x_n\}$ lineárisan összefüggőek, akkor léteznek α_j-k amikre $\sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j = x_1$, és legalább egy j-re $\alpha_j \neq 0$. **(N3)** és **(N4)** tulajdonságokból

$$0 \leq \|x_1, \ldots, x_n\| = \left\|\sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j, x_2, \ldots, x_n\right\| \leq \sum_{j=2}^{n} |\alpha_j| \cdot \|x_j, x_2, \ldots, x_n\|.$$

Azaz elégséges megmutatni, hogy tetszőleges j-re $\|x_j, x_2, \ldots, x_n\| = 0$.

$$\|x_j, x_2, \ldots, x_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \det(E_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Mivel E_i-nek van két azonos sora, tehát minden i-re $\det(E_i) = 0$. Most tegyük fel, hogy $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0$, vagy ekvivalensen $\det(E_i) = 0$ minden i-re. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges i esetén az $\{\{x_{1,j} \ldots x_{n,j}\} : j \in \{1, \ldots n + 1\} \setminus \{i\}\}$ vektorok lineárisan összefüggenek. Azaz $n + 1$ vektorból bármely n lineárisan összefügg, vagyis mind az $n + 1$ vektor lineárisan összefüggő. ■

Az n-normát felhasználva adunk egy, az eddiginél egyszerűbb topológiát. Először speciálisan nyílt gömböket karakterizálunk:

Definíció.
$$B_{e_2,\ldots,e_n}(a,\delta) = \{x \in \mathbb{V} : \|x - a, e_2, \ldots, e_n\| < \delta\}$$
$\mathbb{V}$-beli nyílt gömbnek,
$$\overline{B_{e_2,\ldots,e_n}(a,\delta)} = \{x \in \mathbb{V} : \|x - a, e_2, \ldots, e_n\| \leq \delta\}$$
$\mathbb{V}$-beli zárt gömbnek hívjuk, ahol $\delta \in \mathbb{R}^+$ és $a, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{V}$.

És az Euklideszi-terekhez hasonlóan azon G halmazokat fogjuk nyílt halmaznak tekinteni, amelyeknet minden pont belső pontja, azaz van nyílt gömb, ami őt tartalmazza és a gömböt pedig G tartalmazza.

Definíció. $G \subseteq \mathbb{V}$ nyílt halmaz $\mathbb{V}$-ben, ha minden $a \in G$ ponthoz léteznek olyan $e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{V}$ vektorok és $\delta > 0$ skalár, hogy $B_{e_2,\ldots,e_n}(a,\delta) \subseteq G$.

Az általánosabb tárgyalás kedvéért kétfajta konvergenciafogalmat is definiálunk.

Definíció. $(x_k) \subseteq \mathbb{V}$ sorozat konvergens, és határértéke $x \in \mathbb{V}$, ha tetszőleges $e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{V}$ vektorokra
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, e_2, \ldots, e_n\| = 0$$
és Cauchy-sorozat, ha minden $e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{V}$-re
$$\lim_{l,k\to\infty} \|x_k - x_l, e_2, \ldots, e_n\| = 0.$$
A $\mathbb{V}$ tért teljesnek, vagy n-Banach térnek hívjuk, ha minden Cauchy-sorozat konvergens $\mathbb{V}$-ben.

A konvergenciafogalom segítségével értelmezhető, hogy egy halmaz mikor sorozatzárt, és eszerint definiáljuk a zárt halmazokat:

Definíció. Legyen $G \subseteq \mathbb{V}$ részhalmaz. Ekkor $\bar{G}$-t G lezártjának hívjuk, és a következőképp definiáljuk:
$$\bar{G} = \{x \in \mathbb{V} : \exists (x_k) \in G, \lim_{k\to\infty} x_k = x\}.$$
Egy $G \subseteq \mathbb{V}$ halmazt zártnak nevezünk, ha $G = \overline{G}$.

Ahhoz, hogy felhasználjuk a Weierstraß-tételt, be kell vezessük az új konvergencia szerinti kompaktság fogalmát.

Definíció. $G \subseteq \mathbb{V}$ halmazt kompaktnak hívunk, ha tetszőleges $(x_k) \subseteq \mathbb{V}$ sorozatnak létezik $(x_l) \subseteq (x_k)$ konvergens részsorozata.

Nagyon erős feltétel minden vektor $(n-1)$-estre megkövetelni, hogy a fenti határérték 0-hoz tartson, emiatt bizonyos tételek nem általánosíthatók. Ezért csak annyit fogunk elő irni, hogy valamilyen rögzített vektor $(n-1)$-esre legyen az n-normák határértéke 0. A dolgozat során, hacsak nem jelezzük külön, feltesszük, hogy $b_2, b_3, \ldots, b_n$ lineáeisan független vektorok.

Definíció. $(x_k) \subseteq \mathbb{V}$ sorozatot b-Cauchy-sorozatnak hívunk, ha minden $\epsilon > 0$-hoz válaszható $N > 0$ úgy, hogy minden $k, l \geq N$ párra $\|x_k - x_l, b_2, \ldots, b_n\| < \epsilon$.

Természetesen a Cauchy-sorozatokat, és a tér teljességét ilyenkor ugyanezekkel a rögzített vektorokkal vizsgáljuk:

Definíció. $(x_k) \subseteq \mathbb{V}$ sorozat b-konvergens és határértéke x, ha

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x, b_2, \ldots, b_n\| = 0.$$

A $\mathbb{V}$ tér b-teljes, ha minden b-Cauchy-sorozat egyben b-konvergens is.

Nyilvánvaló, hogy minden konvergens sorozat b-konvergens is, hiszen ha tetszőleges $e_2, e_3, \ldots, e_n$ vektorokra teljesül a konvergencia feltétele, akkor speciálisan a $b_2, b_3, \ldots, b_n$ vektorokra is.

A norma és a metrika fogalmak általánosítása után logikus lépés a skaláris szorzat általánosítását bevezetni:

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{H}$ legalább n dimenziós $\mathbb{K}$ feletti vektortér. Egy

$$\langle \cdot, \cdot \,|\, \cdot, \dots, \cdot \rangle : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{K}$$

függvény n-belső, vagy n-skaláris szorzat $\mathbb{H}$-n, ha tetszőleges $x, y, z, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{H}$ vektorokra és $\alpha \in \mathbb{K}$ skalárra az alábbiak teljesülnek:

1. $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle \geq 0$ és $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\{x_1, \dots, x_n\}$ lineárisan összefüggőek;
2. $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, y | x_{\phi(2)}, \dots, x_{\phi(n)} \rangle$ a $2, \dots, n$ számok minden ϕ permutációja mellett;
3. $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \overline{\langle y, x | x_2, \dots, x_n \rangle}$;
4. $\langle \alpha x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = |\alpha| \cdot \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$;
5. $\langle x + y, z | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, z | x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y, z | x_2, \dots, x_n \rangle$.
6. $\langle x, x | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x_2, x_2 | x_, \dots, x_n \rangle$

A $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \,|\, \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ párt n-euklideszi-térnek (vagy n-belső szorzattérnek) hívjuk.

A funkcionálanalízis egyik legfontosabb eszközét, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséget fogjuk először átvezetni n-skaláris szorzatokra.

Tétel. **[14]** Legyen $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \,|\, \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ n-euklideszi-tér. Ekkor tetszőleges $x, y, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{H}$ vektorok teljesítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x | x_2, \dots, x_n \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle}.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle$ nem nulla. Ekkor minden $\beta \in \mathbb{K}$ számra

$$\langle x + \beta \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \cdot y, x + \beta \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \cdot y | x_2, \dots, x_n \rangle \geq 0.$$

Ha most

$$\beta := -\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle^{-1}$$

választással élünk, akkor

$$\langle x, x | x_2, \dots, x_n \rangle - \frac{2\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle^2}{\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle} + \frac{\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle^2}{\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle} \geq 0,$$

vagyis

$$\langle x, x | x_2, \dots, x_N \rangle \geq \frac{\langle x, y | x_2 \dots, x_n \rangle^2}{\langle y, y | x_2, \dots, x_n \rangle}.$$

Innen átszorzással adódik a tétel. Nyilvánvaló, hogy a $\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle > 0$ esetre hasonló érvelés működik, így csak az az eset van hátra, amikor $\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle = \langle y,y|x_2,\dots,x_n\rangle = 0$. Ekkor egyrészt

$$0 \leq \langle x+y,x+y|x_2,\dots,x_n\rangle = 2\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle,$$

másrészt

$$0 \leq \langle x-y,x-y|x_2,\dots,x_n\rangle = -2\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle.$$

Együttesen

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle = 0 = \sqrt{\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y|x_2,\dots,x_n\rangle}. \quad \blacksquare$$

Bebizonyítható (vö. [14]), hogy az n-skaláris szorzat és az n-normák hasonló módon kapcsolhatók össze, mint a skaláris szorzat és a norma.

Tétel. Legyen $\mathbb{H}$ egy n-euklideszi-tér. Ekkor

$$\|x_1,x_2,\dots,x_n\| := \sqrt{\langle x_1,x_1|x_2,\dots,x_n\rangle}$$

mindig n-normát definiál $\mathbb{H}$-n, és ezt indukált n-normának hívjuk.

Bizonyítás. Be kell látni, hogy a fenti módon definiált függvény az n-norma axiómáit mind teljesíti.

(N1)

$$\|x_1,\dots,x_n\| = 0 \iff \sqrt{\langle x_1,x_1|x_2,\dots,x_n\rangle} = 0 \iff \{x_1,\dots,x_n\} \text{ lineárisan összefüggenek;}$$

(N2) Meg kell mutatni, hogy tetszőleges $\phi \in S_n$ permutáció mellett

$$\|x_1,\dots,x_n\| = \left\|x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(n)}\right\|.$$

Ha ϕ x_1-et fixen hagyja, akkor a kettes számú skaláris szorzat axióma miatt igaz az egyenlőség. Más esetben először megcserélhetjük x_2-t és $\phi(x_1)$-et (szintén 2. miatt), 6. axióma miatt az új első két változót megcserélhetjük. Ezek után (újra 2. axióma miatt) az utolsó $n-1$ változót beállíthatjuk ϕ szerint, és mivel a kifejezés értéke nem változott egyik lépés során sem, visszakapjuk a fenti egyenlőséget.

(N3) Minden $\alpha \in \mathbb{K}$ skalár mellett

$$\|\alpha x_1,\dots,x_n\| = \sqrt{\langle \alpha x_1,\alpha x_1|x_2,\dots,x_n\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle x_1,x_1|x_2,\dots,x_n\rangle} = |\alpha|\cdot\|x_1,\dots,x_n\|.$$

(N4) A háromszög egyenlőtlenséghez felhasználjuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\|x+y,x_2,\dots,x_n\| &= \sqrt{\langle x+y,x+y,x_2\dots,x_n\rangle} = \\ &= \sqrt{\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle + 2\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle + \langle y,y|x_2,\dots,x_n\rangle} \leq \\ &\leq \|x,x_2,\dots,x_n\| + \|y,x_2,\dots,x_n\|\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ha valós n-euklideszi térre szorítkozunk (azaz $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén), akkor a fenti módon definiált $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ n-normára igaz, hogy

$$\begin{aligned}\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2 &= \langle x+y,x+y|x_2,\dots,x_n\rangle - \langle x-y,x-y|x_2,\dots,x_n\rangle = \\ &= 4\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle\end{aligned}$$

másfelől

$$\begin{aligned}\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2 &= \langle x+y,x+y|x_2,\dots,x_n\rangle + \langle x-y,x-y|x_2,\dots,x_n\rangle = \\ &= 2\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle + 2\langle y,y|x_2,\dots,x_n\rangle = \\ &= 2\left(\|x,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\dots,x_n\|^2\right).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ez elégséges feltétele is annak, hogy egy n-norma n-skaláris szorzat által indukálható.

Tétel. **[14]** Legyen $\mathbb{H}$ egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ egy rajta értelmezett n-norma. Ekkor pontosan akkor létezik $\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot\,,\dots,\cdot\rangle$ n-skaláris szorzat, amelyre

$$\|x_1,x_2,\dots,x_n\| = \sqrt{\langle x_1,x_1|x_2,\dots,x_n\rangle}$$

minden $x,y,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{H}$ esetén, ha az n-norma teljesíti a következő feltételt (parallelogramma-szabály):

$$\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2 = 2\left(\|x,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\dots,x_n\|^2\right).$$

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy ha egy n-norma n-skaláris szorzat által indukált, akkor a parallelogramma-szabály teljesül. A másik irány belátásához definiálunk egy skalárszorzatot

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2\right)$$

alakban, és megmutatjuk, hogy ez tényleg az adott n-normát indukálja:

$$\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle = \frac{1}{4}\left(\|2x,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|0,x_2,\dots,x_n\|^2\right) = \|x,x_2,\dots,x_n\|^2$$

miatt

$$\|x,x_2,\dots,x_n\| = \sqrt{\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle}$$

minden $x,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{H}$ vektor mellett. Be kell még látni, hogy ez tényleg skaláris szorzat:

1.

$$0 = \langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle = \|x,x_2,\dots,x_n\|^2$$

Az n-norma első axiómájából következik, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha $\{x,x_2,\dots,x_n\}$ lineárisan összefüggnek, továbbá látható, hogy $\langle \cdot,\cdot\,|\,\cdot\,,\dots,\cdot\rangle \geq 0$.

6. Az n-norma második axiómájából látható, hogy

$$\langle x,x|x_2,\dots,x_n\rangle = \|x,x_2,\dots,x_n\|^2 = \|x_2,x,\dots,x_n\|^2 = \langle x_2,x_2|x,\dots,x_n\rangle.$$

2. Szintén az n-norma 2. axiómája szerint

$$\begin{aligned}
\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\|x+y,x_{\phi(2)},\dots,x_{\phi(n)}\right\|^2 - \left\|x-y,x_{\phi(2)},\dots,x_{\phi(n)}\right\|^2\right) = \\
&= \langle x,y|x_{\phi(2)},\dots,x_{\phi(n)}\rangle
\end{aligned}$$

3. Valós tér felett $\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle = \overline{\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle}$, így az első két változó szimmetriáját kell megmutatni.

$$\begin{aligned}
\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|y+x,x_2,\dots,x_n\|^2 - |-1|^2\cdot\|y-x,x_2,\dots,x_n\|^2\right) = \\
&= \langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle
\end{aligned}$$

5. Átírjuk a

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle + \langle z,y|x_2,\dots,x_n\rangle$$

kifejezést

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|z+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|z-y,x_2,\dots,x_n\|^2\right)$$

alakra a definíció alapján. Ezt tovább lehet írni

$$\frac{1}{8}\left(\|x+z+2y,x_2,\dots,x_n\|^2 + \|x-z,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x+z-2y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x-z,x_2,\dots,x_n\|\right)$$

alakra, ami egyenlő az alábbival:

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+z}{2}+y,x_2,\dots,x_n\right\|^2-\left\|\frac{x+z}{2}-y,x_2,\dots,x_n\right\|\right)=2\left\langle\frac{x+z}{2},y|x_2,\dots,x_n\right\rangle.$$

Ha $z=0$, akkor egyfelől $\langle z,y|x_2,\dots,x_n\rangle=0$, másfelől

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle=2\left\langle\frac{x}{2},y|x_2,\dots,x_n\right\rangle,$$

ezzel pedig azt kapjuk, hogy

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle+\langle z,y|x_2,\dots,x_n\rangle=2\left\langle\frac{x+z}{2},y|x_2,\dots,x_n\right\rangle=\langle x+z,y|x_2,\dots,x_n\rangle$$

ami pont az 5. axióma állítása.

4. A 6. axiómát és az előbb levezetett

$$\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle=\left\langle\frac{x+z}{2},y|x_2,\dots,x_n\right\rangle$$

azonosság felhasználásával minden k,l természetes szám mellett minden $\alpha:=\frac{k}{2^l}$ számra

$$\alpha\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle=\langle\alpha x,y|x_2,\dots,x_n\rangle.$$

Ha $k<0$ egész, akkor

$$0=\langle\alpha x-\alpha x,y|x_2,\dots,x_n\rangle=\langle\alpha x,y|x_2,\dots x_n\rangle-\alpha\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle,$$

azaz

$$\langle\alpha x,y|x_2,\dots x_n\rangle=\alpha\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle$$

minden $k\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{N}$ esetén érvényes. Most legyen $\alpha\in\mathbb{R}$ tetszőleges és legyen $(\alpha_n)\subset\mathbb{R}$ olyan sorozat, melynek határértéke α és $\alpha_i=\frac{k_i}{2^{l_i}}$. Ha $\gamma_i:=\alpha-\alpha_i$, akkor $(\gamma_n)\subset\mathbb{R}$ 0-hoz tartó sorozat. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|\gamma_i x\pm y,x_2,\dots,x_n\|\le\|\gamma_i x,x_2,\dots,x_n\|+\|y,x_2,\dots,x_n\|,$$

ill.

$$\|y,x_2,\dots,x_n\|\le\|\gamma_i x\pm y,x_2,\dots,x_n\|+\|\gamma_i x,x_2,\dots,x_n\|.$$

Ezeket összerakva

$$\|\gamma_i x\pm y,x_2,\dots,x_n\|-\|y,x_2,\dots,x_n\|\le|\gamma_i|\cdot\|x,x_2,\dots,x_n\|.$$

Ebből következően $\gamma_i\to 0$ mellett

$$\|\gamma_i x\pm y,x_2,\dots,x_n\|\to\|y,x_2,\dots,x_n\|.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x,y|x_2,\dots,x_n\rangle - \alpha_i\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle &= \langle(\alpha-\alpha_i)x,y|x_2,\dots,x_n\rangle = \\
&= \langle(\gamma_i x,y|x_2,\dots,x_n\rangle = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\gamma_i x+y,x_2,\dots,x_n\|^2 - \|\gamma_i x-y,x_2,\dots,x_n\|^2\right),
\end{aligned}$$

és így $i\to\infty$ mellett

$$\alpha_i\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle \to \langle \alpha x,y|x_2,\dots,x_n\rangle.$$

Ezzel megmutattuk az 5. tulajdonságot, vagyis hogy

$$\alpha\langle x,y|x_2,\dots,x_n\rangle = \langle \alpha x,y|x_2,\dots,x_n\rangle. \blacksquare$$

Definíció. Egy $\mathbb{H}$ n-euklideszi-teret n-Hilbert-térnek nevezünk, ha teljes n-normált tér az indukált n-normájával.

Az általánosított skaláris szorzat segítségével az ortogonalitást és operátorok adjungáltját is újra kell definiálni:

Definíció. Legyen $\mathbb{H}$ egy n-Hilbert-tér, $S\subseteq\mathbb{H}$ részhalmaz. $x,y\in\mathbb{H}$ b-ortogonálisak (jelölésben: $x\perp y$), ha $\langle x,y|b_2,\dots,b_n\rangle = 0$. Ha minden $s\in S$ vektorra $x\perp s$ igaz, akkor x b-ortogonális S-re ($x\perp S$). Azon $\mathbb{H}$-beli elemek halmazát, amelyek b-ortogonálisak S-re, S b-ortogonális komplemensének hívjuk és $S^\perp$-el jelöljük.

Definíció. Legyen $\mathbb{H}$ n-Hilbert-tér és $A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ operátor. A^*-t A adjungált operátorának nevezzük, ha minden $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}$ vektorokra teljesül, hogy

$$\langle Ax_1,x_2|x_3,\dots,x_{n+1}\rangle = \langle A^*x_1,x_2|x_3,\dots,x_{n+1}\rangle.$$

A Riesz reprezentációs tételhez az n-norma fogalomhoz illeszkedve kell lineáris funkcionálokat definiálni. Az ötlet, hogy n változós függvényt vezetünk be, amely az első változójában lineáris:

Definíció. Legyen $\mathbb{V}$ altere $\mathbb{H}$-nak és $b_2, \ldots, b_n$ rögzített vektorok $\mathbb{H}$-ból. Ha $\langle b_i \rangle$ jelöli $\mathbb{H}$ b_i vektorok által generált altereit, akkor a

$$T : \mathbb{V} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle \to \mathbb{K}$$

leképezést b-lineáris funkcionálnak hívjuk $\mathbb{V} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle$ altéren, ha minden $x, y \in \mathbb{V}$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra a következők teljesülnek:

- $T(x + y, b_2, \ldots, b_n) = T(x, b_2, \ldots, b_n) + T(y, b_2, \ldots, b_n)$;
- $T(\alpha x, b_2, \ldots, b_n) = \alpha T(x, b_2, \ldots, b_n)$.

Egy b-lineáris funkcionál b-korlátos, ha valamilyen $M > 0$-ra tetszőleges $x \in \mathbb{V}$-el

$$|T(x, b_2, \ldots, b_n)| \leq M \|x, b_2, \ldots, b_n\|$$

és az ilyen M-ek infimumát a funkcionál normájaként definiáljuk:

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : |T(x, b_2, \ldots, b_n)| \leq M \|x, b_2, \ldots, b_n\| \,\forall\, x \in \mathbb{V}\}.$$

Az utolsó fejezetben a Lax-Milgram-tétel általánosításával fogunk foglalkozni, ehhez a szeszkvilineáris formákat hasonló analógiával fogjuk deklarálni: első változóban legyenek lineárisak, második változóban pedig konjugáltan lineárisak.

Definíció. Legyen $\mathbb{H}$ egy $\mathbb{K}$ feletti vektortér. Egy b-szeszkvilineáris funkcionál (vagy b-szeszkvilineáris forma) egy

$$T : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle \to \mathbb{K}$$

leképezés, ahol minden $x,y,z \in \mathbb{H}$ vektorra és tetszőleges $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ skalárra a következők teljsülnek:

1. $T(x+y,z,b_2,\ldots,b_n) = T(x,z,b_2,\ldots,b_n) + T(y,z,b_2,\ldots,b_n)$;
2. $T(\alpha x,y,b_2,\ldots,b_n) = \alpha T(x,y,b_2,\ldots,b_n)$;
3. $T(x,y+z,b_2,\ldots,b_n)\ T(x,y,b_2,\ldots,b_n) + T(x,y,b_2,\ldots,b_n)$;
4. $T(x,\beta y,b_2,\ldots,b_n) = \bar{\beta} T(x,y,b_2,\ldots,b_n)$.

A T lekĂŠpezĂŠst b-korlátosnak hívjuk, ha valamilyen $M > 0$-ra tetszőleges $x,y \in \mathbb{H}$-vektorokkal

$$|T(x,y,b_2,\ldots,b_n)| \leq M \|x,b_2,\ldots,b_n\| \|y,b_2,\ldots,b_n\|$$

és az ilyen M-ek infimumát hívjuk T normájának (jelölésben: $\|T\|$).

A szeszkvilineáris formáknál egyfajta alulról korlátosság fontos szerepet játszott annak eldöntésében, hogy egy feladat korrekt kitűzésű-e. Az általánosításoknál így hasznos lesz a következő fogalom:

Definíció. A

$$T : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle \to \mathbb{K}$$

b-szeszkvilineáris funkcionál b-elliptikus (vagy b-koercív), ha létezik $\alpha > 0$, amellyel minden $x \in \mathbb{H}$-ra fennáll az alábbi:

$$\Re\left(T(x,x,b_2,\ldots,b_n)\right) \geq \alpha \|x,b_2,\ldots,b_n\|.$$

Végül közöljük Riesz-fĂŠle reprezentációs tételének n-Hilbert-térbeli verzióját a bizonyításával.

Tétel (általános Riesz-Fréchet-tétel). [6] Legyen $\mathbb{H}$ egy n-Hilbert-tér. Ekkor T pontosan akkor b-korlátos, b-lineáris funkcionál $\mathbb{H} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle$-n, ha létezik egyértelmű $z \in \mathbb{H}$ amelyre $\{z, b_2, \ldots, b_n\}$ lineárisan függetlenek és minden $x \in \mathbb{H}$-re:

$$T(x, b_2, \ldots, b_n) = \langle x, z | b_2, \ldots, b_2 \rangle$$

továbbá, $\|T\| = \|z, b_2, \ldots, b_n\|$.

Bizonyítás.

1. lépés Legyen $z \in \mathbb{H}$ tetszőleges vektor, és legyen T definíciója

$$T(x, b_2, \ldots, b_n) := \langle x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{H}.$$

Ekkor

i) T b-lineáris, mivel

$$\begin{aligned} T(x+y, b_2, \ldots, b_n) &= \langle x+y, z | b_2, \ldots, b_n \rangle = \\ &= \langle x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle + \langle y, z | b_2, \ldots, b_n \rangle = \\ &= T(x, b_2, \ldots, b_n) + T(y, b_2, \ldots, b_n), \end{aligned}$$

másrészről minden $x, y \in \mathbb{H}$-ra tetszőleges $\alpha \in \mathbb{K}$ skalár mellett

$$\begin{aligned} T(\alpha x, b_2, \ldots, b_n) &= \langle \alpha x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle = \\ &= \alpha \cdot \langle x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle = \\ &= \alpha \cdot T(x, b_2, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

ii) T korlátos $\{b_2, \ldots, b_n\}$ vektorokkal, ugyanis minden $x \in \mathbb{H}$ vektorra

$$\begin{aligned} |T(x, b_2, \ldots, b_n)| &= |\langle x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle| \leq \\ &\leq \|x, b_2, \ldots, b_n\| \cdot \|z, b_2, \ldots, b_n\|. \end{aligned}$$

Mivel z rögzített, a fentiekből tudjuk, hogy T b-korlátos és $\|T\| \leq \|z, b_2, \ldots, b_n\|$. Másfelől ha $z \neq 0$ olyan, hogy $\{z, b_2, \ldots, b_n\}$ lineárisan függetlenek, akkor

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|T(x, b_2, \ldots, b_n)| : x \in \mathbb{H}, \|x, b_2, \ldots, b_n\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{|\langle x, z | b_2, \ldots, b_n \rangle| : x \in \mathbb{H}, \|x, b_2, \ldots, b_n\| \leq 1\} \geq \\ &\geq \langle \frac{z}{\|z, b_2, \ldots, b_n\|}, z | b_2, \ldots, b_n \rangle = \|z, b_2, \ldots, b_n\|, \end{aligned}$$

azaz $\|T\| = \|z,b_2,\dots,b_n\|$. Amennyiben $z = 0$, akkor nyilván

$$\|z,b_2,\dots,b_n\| = 0 \implies \|T\| \geq \|z,b_2,\dots,b_n\|\,.$$

2. lépés. Most tegyük fel, hogy T b-korlátos és b-lineáris. Amennyiben $T \equiv 0$, akkor $z = 0$ megfelelő, így feltehető, hogy $T \not\equiv 0$. Mivel T b-korlátos, a magtere, $\ker(T)$, zárt altere $\mathbb{H}$-nak, és $T \not\equiv 0$ miatt ez valódi altér, és emiatt ortogonális komplemensében van egy nemnulla z_0 vektor. Tekintsük az

$$S := \{v = z_0 \cdot T(x,b_2,\dots,b_n) - x \cdot T(z_0,b_2,\dots,b_n) : x \in \mathbb{H}\}$$

halmazt. Ez részhalmaza $\ker(T)$-nek, mivel

$$\begin{aligned} T(v,b_2,\dots,b_n) &= T(z_0 \cdot T(x,b_2,\dots,b_n) - x \cdot T(z_0,b_2,\dots,b_n)) = \\ &= T(z_0,b_2,\dots,b_n) \cdot T(x,b_2,\dots,b_n) - \\ &\quad - T(x,b_2,\dots,b_n) \cdot T(z_0,b_2,\dots,b_n) = \\ &= 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{H}, \end{aligned}$$

azaz $z_0 \perp S$. Innen

$$\langle z_0 \cdot T(x,b_2,\dots,b_n) - x \cdot T(z_0,b_2,\dots,b_n), z_0 | b_2,\dots,b_n \rangle = 0,$$

amiből következik, hogy

$$T(x,b_2,\dots,b_n) \cdot \|z_0,b_2,\dots,b_n\|^2 = T(z_0,b_2,\dots,b_n)\,\langle x,z_0|b_2,\dots,b_n\rangle,$$

vagyis minden $x \in \mathbb{H}$-ra

$$T(x,b_2,\dots,b_n) = \frac{T(z_0,b_2,\dots,b_n)}{\|z_0,b_2,\dots,b_n\|^2} \cdot \langle x,z_0|b_2,\dots,b_n\rangle,$$

és így

$$z := \frac{\overline{T(z_0,b_2,\dots,b_n)} \cdot z_0}{\|z_0,b_2,\dots,b_n\|^2}$$

választással

$$T(x,b_2,\dots,b_n) = \langle x,z|b_2,\dots,b_n\rangle,$$

azaz konstruáltunk egy megfelelő z-t. Az unicitáshoz legyen $z_1,z_2 \in \mathbb{H}$ olyanok, hogy $\{z_1 - z_2,b_2,\dots,b_n\}$ lineárisan függetlenek és emellett minden $x \in \mathbb{H}$ vektorra

$$T(x,b_2,\dots,b_n) = \langle x,z_1|b_2,\dots,b_n\rangle = \langle x,z_2|b_2,\dots,b_n\rangle.$$

Ekkor minden x-re

$$T\langle x,z_1 - z_2|b_2,\ldots,b_n\rangle = 0,$$

és $x = z_1 - z_2$ helyettesítéssel

$$\langle z_1 - z_2,z_1 - z_2|b_2,\ldots,b_n\rangle = 0 \implies \|z_1 - z_2,b_2,\ldots,b_n\|^2 = 0,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $z_1 - z_2 = 0$ és így $z_1 = z_2$, azaz z egyértelműen létezik.

3. lépés. Ha a tételbeli egyenlőségbe $x = z$-t helyettesítünk, akkor

$$T(z,b_2,\ldots,b_n) = \langle z,z|b_2,\ldots,b_n\rangle = \|z,b_2,\ldots,b_n\|^2.$$

Mivel T b-korlátos

$$\|z,b_2,\ldots,b_n\|^2 = |T(z,b_2,\ldots,b_n)| \leq \|T\| \cdot \|z,b_2,\ldots,b_n\|,$$

ezáltal $\|T\| \geq \|z,b_2,\ldots,b_n\|$. Másfelől a Cauchy-Schwarz -egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} |T(x,b_2,\ldots,b_n)| &= |\langle x,z|b_2,\ldots,b_n\rangle| \leq \\ &\leq \|x,b_2,\ldots,b_n\| \cdot \|z,b_2,\ldots,b_n\|, \end{aligned}$$

aminek következménye, hogy

$$\|T\| = \sup_{\|x,b_2,\ldots,b_n\|=1} |x,z|b_2,\ldots,b_n| \leq \|z,b_2,\ldots,b_n\|,$$

és ezzel $\|T\| = \|z,b_2,\ldots,b_n\|$. ■

4. fejezet

Fixponttételek n-Banach-terekben

Ebben a fejezetben a következő három tétel n-Banach-térbeli általánosítását közöljük:

- Edelstein-féle fixponttétel,
- Weissinger-féle fixponttétel,
- Banach-féle fixponttétel.

4.1. Általánosított Edelstein-féle fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ n-Banach-tér, $\mathcal{H} \subset \mathbb{V}$ halmaz, $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ olyan leképezés, hogy valamilyen $b_2, \ldots b_n \in \mathbb{V}$ és $u, v \in \mathcal{H}, u \neq v$ vektorokra:

$$\|\phi(u) - \phi(v), b_2, \ldots, b_n\| < \|u - v, b_2, \ldots, b_n\|$$

teljesül. Ekkor ϕ-nek legfeljebb egy fixpontja van $\mathcal{H}$-ban, azaz

$$u, v \in \mathcal{H} : \qquad \phi(u) = \phi(v)$$

$u = v$-t implikálja. Továbbá, ha $\mathcal{H}$ kompakt, akkor ez a fixpont egyértelmű.

Bizonyítás.

1. lépés Tegyük fel, hogy léteznek $u, v \in \mathcal{H}$, $u \neq v$ vektorok úgy, hogy $\phi(u) = u$ és $\phi(v) = v$ fennáll. Ekkor következik, hogy

$$\|u - v, b_2, \ldots, b_n\| < \|\phi(u) - \phi(v), b_2, \ldots, b_n\| = \|u - v, b_2, \ldots b_n\|$$

ami ellentmondás, így ϕ-nek nem lehet egynél több fixpontja.

2. lépés Most definiáljuk f-et a következőképpen:

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{K}, \qquad f(x) := \|x - \phi(x), b_2, \ldots, b_n\|.$$

Mivel az n-norma folytonos, $\mathcal{H}$ kompakt, létezik $u \in \mathcal{H}$ amelyre

$$f(u) = \|u - \phi(u), b_2, \dots b_n\| = \inf\{f(u) : u \in \mathcal{H}\}$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $\phi(u) \neq u$. Ekkor

$$[f(\phi(u)) = \|\phi(u) - \phi(\phi(u)), b_2, \dots, b_n\| < \|u - \phi(u), b_2, \dots, b_n\| = f(u),$$

ellentmondás lenne, tehát $\phi(u) = u$ és ϕ egy fixpontját kaptuk.

4.2. Általánosított Weissinger-féle fixponttétel.

Eredeti célunk a Weissinger-féle fixponttétel általánosítása volt (vö. [17], [10]). Sikeresen kimondtuk és bebizonyítottuk a tételt, azonban később az eredeti említése nélkül megtalĺtuk [5]-ban. A tétel ezen verziójában viszont találtunk egy hibát. A teljesség kedvéért helyesen kimondjuk a tételt és közöljük a bizonyítását, továbbá megmutatjuk, a [5]-ben kimondott tétel miért nem helyes.

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ valamilyen $b_1, b_2, \dots, b_n$ lineárisan független vektorokkal b-teljes n-normált tér és T peidg $\mathbb{V}$-t önmagába képző leképezés. Tegyük fel, hogy

1. $(\alpha_n) \in l_1$ valamilyen $\alpha_n \in (0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozatra;
2. minden $m \in \mathbb{N}_0$ egészre

$$\left\|T^{[m]}(u) - T^{[m]}(v), b_2, \dots, b_n\right\| \le \alpha_m \|u - v, b_2, \dots, b_n\| \qquad (u, v \in \mathbb{V}).$$

Ekkor T-nek létezik fixpontja, amely egyértelmű.

Bizonyítás. Legyen tetszőleges $x_0 \in \mathbb{V}$ és definiáljuk (x_m) sorozatot a következőképpen: $x_m := T^{[m]}x_0$. A háromszög egyenlőtlenségből tudjuk, hogy minden $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$-ra:

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q, b_2, \dots, b_n\| &\le \sum_{m=q}^{p-1} \|x_j - x_{j+1}, b_2, \dots, b_n\| = \sum_{m=q}^{p-1} \left\|T^{[m]}x_0 - T^{[m]}x_1, b_2, \dots, b_n\right\| \le \\ &\le \sum_{m=q}^{p-1} \alpha_m \|x_0 - x_1, b_2, \dots, b_n\| \end{aligned}$$

Legyen $r \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\|x_0 - x_1, b_2, \dots, b_n\| < r$. Mivel $(\alpha_n) \in \ell_1$, minden $\epsilon > 0$-hoz létezik m_0 pozitív egész, hogy minden $p > q \ge m_0$-ra

$$\sum_{m=q}^{p-1} \alpha_m < \frac{\epsilon}{r}.$$

Innen következik, hogy

$$\|x_p - x_q, b_2, \ldots, b_n\| < \frac{\epsilon}{r} \|x_0 - x_1, b_2, \ldots, b_n\| < \epsilon,$$

azaz (x_m) b-Cauchy. Mivel $\mathbb{V}$ b-teljes, ezĂŠrt létezik olyan $x^* \in \mathbb{V}$ vektor, amelyre $\lim_{m\to\infty} x_m = x^*$ igaz.

$$\begin{aligned}
\|x^* - Tx^*, b_2, \ldots, b_n\| &\le \|x^* - x_{m+1}, b_2, \ldots, b_n\| + \|x_{m+1} - Tx^*, b_2, \ldots, b_n\| = \\
&= \|x^* - x_{m+1}, b_2, \ldots, b_n\| + \|Tx_m - Tx^*, b_2, \ldots, b_n\| \le \\
&\le \|x^* - x_{m+1}, b_2, \ldots, b_n\| + \alpha_1 \|x_m - x^*, b_2, \ldots, b_n\|
\end{aligned}$$

$\lim_{m\to\infty}(x_m) = x^*$ miatt tudjuk, hogy $\lim_{m\to\infty}(x_m - x^*) = 0$, vagyis az összeg mindkét tagja nullához tart. Ebből $\|x^* - Tx^*, b_2, \ldots, b_n\| = 0$ következik, és mivel $b_2, \ldots, b_n$ lineárisan függetlenek, ez $Tx^* = x^*$-t jelent. Ezzel megmutattuk, hogy létezik legalább egy fixpont. Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy x^*, y^* T fixpontjai. Kis számolással

$$\|x^* - y^*, b_2, \ldots, b_n\| = \left\|T^{[m]}x^* - T^{[m]}y^*, b_2, \ldots b_n\right\| \le \alpha_m \|x^* - y^*, b_2, \ldots, b_n\|.$$

Tudjuk, hogy $\|x^* - y^*, b_2, \ldots, b_n\|$ véges, illetve $(\alpha_m) \in \ell_1$ és $\lim_{m\to\infty}(\alpha_m) = 0$; innen következik, hogy $\|x^* - y^*, b_2, \ldots, b_n\| < \epsilon$ minden $\epsilon > 0$, azaz $x^* = y^*$. ■

Megjegyezzük, hogy a $b_2, \ldots, b_n$ vektorrendszer függetlensége szükséges feltétel: Tekintsük az $(\mathbb{R}^3, \|\cdot, \cdot, \cdot\|)$ 3-normált teret. amennyiben $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{b}_3 \in$ lineárisan összefüggőek, a normaaxiómákból következik, hogy tetszőleges $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektorra

$$\|\mathbf{r}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\| = 0 \qquad \big/\text{pl.} \quad \det[\mathbf{r}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = 0\big/$$

teljesül. Ennek következményeként tetszőleges sorozat b-Cauchy, egyúttal b-konvergens is, és így $\mathbb{R}^3$ b-teljes. Következésképp tetszőleges $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezésre és tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$ egészre a

$$\left\|T^{[m]}\mathbf{u} - T^{[m]}\mathbf{v}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right\| \le \alpha_m \|\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\|$$

feltétel tetszőleges $(a_k) \in l_1$ sorozattal igaz. Viszont a

$$T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{a}$$

leképezéseknek nyilvánvalóan nincs fixpontja $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ esetén, ugyanis $T_{\mathbf{a}}\mathbf{r} = \mathbf{r}$, azaz $\mathbf{r} + \mathbf{a} = \mathbf{r}$ amely implikálja $\mathbf{a} = \mathbf{0}$-t.

4.3. Általánosított Banach-féle fixponttétel.

Lemma. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ egy n-Banach-tér és $\emptyset \neq A_{n+1} \subset A_n \subset \mathbb{V}$ zárt halmazok antiton sorozata, úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{diam}(A_n)) = 0.$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden a_j tetszőleges eleme A_j $(j \in \mathbb{N})$-nek. Egyszerűen látható, hogy ez egy Cauchy-sorozat és a feltételek miatt $\mathbb{V}$ n-Banach-tér, azaz a sorozat konvergens is. Ebből következően létezik egy egyértelmű $\alpha \in \mathbb{V}$ úgy, hogy $\alpha = \lim(a_n)$. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ egészre $\alpha \in A_n$. Valóban, máskülönben lenne valamilyen $N \in \mathbb{N}$ egész, amelyre $\alpha \in A_N^C$. A_N^C nyílt halmaz, tehát létezik olyan $U(\alpha)$ környezet amely $U(\alpha) \subset A_N^C$-t teljesíti. Következésképp

$$U(\alpha) \subset A_n^C \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\alpha = \lim(a_n)$, létezik $M \in \mathbb{N}$ amire

$$a_n \in U(\alpha) \qquad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

Ha $n > \max\{M,N\}$ választással élünk, akkor $a_n \in A_n \cap A_n^C$ és ellentmondára jutottunk. Ezáltal az alábbi következtetés fennáll:

$$\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ n-Banach-tér, $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ b-kontrakció, másszóval létezik $q \in [0,1)$ úgy, hogy

$$\|\phi(u) - \phi(v), b_2, \dots, b_n\| \leq q \, \|u - v, b_2, \dots, b_n\| \qquad (u,v \in \mathbb{V}).$$

Ekkor ϕ-nek létezik egyértelmű fixpontja.

Bizonyítás.

1. lépés megmutatjuk, hogy a

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \qquad f(x) := \|x - \phi(x), b_2, \dots, b_n\|$$

leképezés egyenletesen folytonos. tetszőleges $x,y \in \mathbb{V}$ vektorokra

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \|x - \phi(x), b_2, \dots, b_n\| - \|y - \phi(y), b_2, \dots, b_n\| \leq \\ &\leq \|x - y, b_2, \dots b_n\| + \|y - \phi(y), b_2, \dots b_n\| + \\ &\quad + \|\phi(y) - \phi(x), b_2, \dots, b_n\| - \|y - \phi(y), b_2, \dots, b_n\| = \\ &= \|x - y, b_2, \dots, b_n\| + \|\phi(y) - \phi(x), b_2, \dots, b_n\| \leq \\ &\leq (1+q)\|x - y, b_2, \dots, b_n\| \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$f(y) - f(x) \leq (1+q)\|x - y, b_2, \dots, b_n\|.$$

Így tetszőleges $x,y \in \mathbb{V}$ vektorokra

$$\|f(x) - f(y)\| \leq (1+q)\|x - y, b_2, \dots, b_n\|$$

teljesül, amelyből f egyenletes folytonossága következik.

2. lépés Az előzőek nyomán a

$$A_n := \left\{ x \in \mathbb{V} : f(x) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

halmaz minden $n \in \mathbb{N}$-re zárt. Továbbá világos, hogy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}})$ antiton, illetve minden $x \in \mathbb{V}$-re

$$\begin{aligned} f\left(\phi^{[n]}(x)\right) &= \left\|\phi^{[n]}(x) - \phi^{[n+1]}(x), b_2, \dots b_n\right\| \\ &\leq q\left\|\phi^{[n-1]}(x) - \phi^{[n]}(x), b_2, \dots b_n\right\| \leq q^n \|x - \phi(x), b_2, \dots b_n\|. \end{aligned}$$

$n \to \infty$ mellett q^n nullához tart, így minden $x \in \mathbb{V}$ vektorra teljesül, hogy $\phi^{[n]}(x) \longrightarrow 0 \in \mathbb{V}$ $(n \to \infty)$. Ezáltal minden $n \in \mathbb{N}$ egészre A_n nemüres halmaz.

3. lépés A háromszög egyenlőtlenségből minden $n \in \mathbb{N}$ és $x,y \in A_n$-re a következő becslés adódik:

$$\begin{aligned} \|x - y, b_2, \dots, b_n\| &\leq \|x - \phi(x), b_2, \dots, b_n\| + \|\phi(x) - \phi(y), b_2, \dots, b_n\| + \\ &\quad + \|\phi(y) - y, b_2, \dots, b_n\| \leq f(x) + q\|x - y, b_2, \dots, b_n\| + f(y) = \\ &= \frac{1}{n} + q\|x - y, b_2, \dots, b_n\| + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\|x - y, b_2, \dots b_n\| \leq \frac{2}{n(1-q)},$$

azaz $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam}(A_n) = 0$. Mivel $\mathbb{V}$ n-Banach-tér,

$$\mathcal{A} := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Ha $\alpha,\beta \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq \beta$, akkor tudjuk, hogy

$$\|\alpha - \beta, b_2, \dots b_n\| \leq \text{diam}\,(\mathcal{A}) = \lim\,(diam\,(A_n)) = 0.$$

Emiatt $\alpha = \beta$, így létezik egyértelmű $\alpha \in \mathcal{A}$ amely teljesíti $f\,(\alpha) = 0$-t, másképpen: $\phi\,(\alpha) = \alpha$. ■

5. fejezet

n-Hilbert-terek

A következőekben a funkcionálanalízis további három fontos tételét általánosítjuk.

5.1. A lineáris Lax-Milgram-tétel

Tétel. Legyen T egy
$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle b_n \rangle \to \mathbb{K}$$
b-korlátos, b-elliptikus, b-szeszkvilineáris forma, és olyan $k,K \in \mathbb{R}$, $0 < k \leq K < \infty$ számok, amelyekkel az alábbiak igazak:

1. $|T(u,v,b_2,\dots b_n)| \leq K \|u,b_2,\dots,b_n\| \|v,b_2,\dots,b_n\|$;
2. $|T(u,u,b_2,\dots,b_n)| \geq k \|u,b_2,\dots,b_n\|^2$.

Ekkor pontosan egy bijektív $A \in L(\mathbb{H},\mathbb{H})$ operátor létezik, amelyre $\|A\| \leq K$ becslés teljesül és bármely $u,v \in \mathbb{H}$ vektorokra
$$T(u,v,b_2,\dots,b_n) = \langle Au,v|b_2,\dots,b_n\rangle.$$
Szintén igaz, hogy $A^{-1} \in L(\mathbb{H},\mathbb{H})$ és $\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{k}$ teljesül.

Bizonyítás.

1. lépés Definiáljuk Φ_v-t az alábbi módon:
$$\Phi_v : \mathbb{H} \times \langle b_2 \rangle \times \dots \langle b_n \rangle \to \mathbb{K}, \quad \Phi_v(u,b_2,\dots,b_n) := T(u,v,b_2,\dots,b_n).$$

Mivel T b-korlátos
$$\begin{aligned} |\Phi_v(u)| &= |T(u,v,b_2,\dots,b_n)| \leq K\|u,b_2,\dots,b_n\| \|v,b_2,\dots,b_n\| = \\ &= K_b \|v,b_2,\dots,b_n\|, \end{aligned}$$

ennélfogva $\Phi_v \in T^*$ és

$$\|\Phi_v\| = \|T(\cdot,v,b_2,\dots,b_n)\| \le K\|v,b_2,\dots,b_n\|.$$

A Riesz reprezentációs tétel általánosítását felhasználva, tudjuk hogy létezik egy egyértelmű $a \in \mathbb{H}$, $a,b_2,\dots,b_n$ lineárisan függetlenek és

$$\Phi_v(u,b_2,\dots,b_n) = \langle u,a|b_2,\dots b_n\rangle \qquad \text{ill.} \qquad \|\Phi_v\| = \|a,b_2,\dots,b_n\|.$$

2. lépés T b-szeszkvilineáris, így

$$C:\mathbb{H}\to\mathbb{H},\ C(v) = a$$

operátor lineáris. Valóban, tetszőleges $u,v_1,v_2 \in \mathbb{H}$ vektorokra és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra

$$\begin{aligned}\langle u,C(v_1+v_2)|b_2,\dots,b_n &= T(u,a_1+a_2,b_2,\dots,b_n) = \\ &= T(u,a_1,b_2,\dots,,b_n) + T(u,a_2,b_2,\dots,b_n) = \\ &= \langle u,Cv_1|b_2,\dots,b_n\rangle + \langle u,Cv_2|b_2,\dots,b_n\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u,C(\lambda v)|b_2,\dots,b_n\rangle &= T(u,\lambda a,b_2,\dots,b_n) = \bar\lambda T(u,a,b_2,\dots,b_n) = \\ &= \bar\lambda\langle u,Cv,b_2,\dots,b_n\rangle = \langle u,\lambda Cv,b_2,\dots,b_n\rangle\end{aligned}$$

Ezenfelül

$$\|Cv\| = \|a\| = \|\Phi_v\| = \|T(\cdot,v,b_2,\dots,b_n)\| \le K\|v,b_2,\dots,b_n\|,$$

amivel megkaptuk, hogy $C \in L(\mathbb{H},\mathbb{H})$, $\|C\| \le K$. $A = C^*$ operátorra:

$$T(u,v,b_2,\dots,b_n) = \langle Au,v|b_2,\dots,b_n\rangle \quad \forall\, u,v \in \mathbb{H}$$

3. lépés T b-elliptikus, amelyből

$$\begin{aligned}k\|u,b_2,\dots,b_n\|^2 &\le \Re(T(u,u,b_2,\dots,b_n)) = \Re(|\langle Au,u|b_2,\dots,b_n\rangle|) \le \\ &\le |\langle Au,u|b,\dots,b_n\rangle| \le \|Au,b_2\dots,b_n\|\,\|u,b_2,\dots,b_n\|\end{aligned}$$

4. lépés Minden

$$u \in \mathbb{H} : k\|u,b_2,\dots,b_n\| \le \|Au,b_2,\dots,,b_n\|,$$

amelyből tudjuk, hogy $R(A)$ zárt altér, A injektív, ráadásul $\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{k}$.

5. lépés Tegyük fel, hogy $R(A) \ne \mathbb{H}\times\langle b_2\rangle\times\dots\langle b_n\rangle$. A zártságból tudjuk, hogy létezik $\xi \in R(A)^\perp\setminus\{0\}$, és legyen $a := A\xi$.

$$k\|\xi,b_2,\dots,b_n\| \le \Re(T(\xi,\xi,b_2,\dots,b_n)) = \Re(\langle A\xi,\xi|b_2,\dots,b_n\rangle) = 0$$

következésképp $\xi = 0$, és ellentmondásra jutottunk. Ez azt jelenti, hogy A bijektív és éppen ezt kellett megmutatni. ■

5.2. A Zarantonello-tétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{H},\langle\cdot,\cdot\mid\cdot,\ldots,\cdot)$ valós n-Hilbert-tér a $\|\cdot,\ldots,\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\ldots,\cdot\rangle}$ n-normával és tegyük fel, hogy $A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ operátor olyan, hogy megfelelő $0<\alpha<1$ és $L>0$ konstansokkal tetszőleges $x,y\in\mathbb{H}$ vektorokra a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $\langle Ax-Ay,x-y|b_2,\ldots,b_n\rangle \geq \alpha\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|$;
2. $\|Ax-Ay,b_2,\ldots,b_n\| \leq L\,\|x-y,b_2,\ldots b_n\|$.

Ekkor minden $v\in\mathbb{H}$ vektorhoz pontosan egy $u\in\mathbb{H}$ vektor létezik, amelyekkel $Au=v$ teljesül (másképpen: az $Au=v$ feladat korrekt kitűzésű).

Bizonyítás. Létezik egyértelmű $u\in\mathbb{H}: Au=v$ pontosan akkor, ha valamilyen $\epsilon>0$-ra u fixpontja a

$$\Phi_v:\mathbb{H}\to\mathbb{H},\qquad \Phi_v(x)=x-\epsilon\,(Ax-v)\,.$$

leképezésnek. Minden $x,y\in\mathbb{H}$ vektorpárra

$$\begin{aligned}
\|\Phi_v(x)-\Phi_v(y),b_2,\ldots,b_n\|^2 &= \|x-y,b_2,\ldots,b_n\|^2-2\epsilon\langle Ax-Ay,x-y|b_2,\ldots,b_n\rangle+\\
&\quad +\epsilon^2\,\|Ax-Ay,b_2,\ldots b_n\|\leq\\
&\leq \|x-y,b_2,\ldots,b_n\|^2-2\epsilon\alpha\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|^2+\\
&\quad +\epsilon^2L^2\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|=\\
&= \left(1-2\epsilon\alpha+\epsilon^2L^2\right)\|x-y,b_2,\ldots b_n\|\,.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$k:=1-2\epsilon\alpha+\epsilon^2L^2\geq 0,$$

és $\epsilon:=\frac{2\alpha}{L^2}$ választással $k=1$. Ekkor minden $\epsilon\in\mathbb{R}$, $0<\epsilon<\frac{2\alpha}{L^2}$ számhoz $q:=\sqrt{k}$ eleme a $[0,1)$ intervallumnak és

$$\|\Phi_v(x)-\Phi_v(y),b_2,\ldots,b_n\|\leq q\,\|x-y,b_2,\ldots b_n\|\,,$$

ennélfogva minden $v\in\mathbb{H}$-re Φ_v b-kontrakció. Az általánosított Banach-féle fixponttétel nyomán minden $v\in\mathbb{H}$-hez létezik pontosan egy$u\in\mathbb{H}$ vektor, amely teljesíti a

$$\Phi_v(u)=u=u-\epsilon\,(Au-v)$$

feltételt, azaz: $Au=v$. ■

5.3. A nemlineáris Lax-Milgram-tétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{H},\langle\cdot,\ldots,\cdot\rangle)$ valós n-Hilbert-tér a $\|\cdot,\ldots,\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\ldots,\cdot\rangle}$ n-normával és legyen $T : \mathbb{H}\times\mathbb{H}\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_n\rangle \to \mathbb{R}$ ill. $S : \mathbb{H}\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_n\rangle \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionálok, amelyek kielégítik a következőeket:

1. minden $\alpha\in\mathbb{H}$ az

$$f_\alpha : \quad \mathbb{H}\to\mathbb{R}, \quad f_\alpha := T(\alpha,x,b_2,\ldots,b_n)$$

   funkcionál b-folytonos, lineáris;

2. létezik $\gamma > 0$, hogy minden $x,y\in\mathbb{H}$ vektorra

$$\gamma\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|^2 \le T(x,x-y,b_2,\ldots,b_n) - T(y,x-y,b_2,\ldots,b_n)\,;$$

3. létezik $L > 0$ úgy, hogy minden $x,y,z\in\mathbb{H}$ vektorra

$$|T(x,z,b_2,\ldots,b_n) - T(y,z,b_2,\ldots,b_n)| \le L\,\|x-y,b_2,\ldots b_n\|\,\|z,b_2,\ldots,b_n\|\,;$$

4. S lineáris, folytonos.

Ekkor minden $v\in\mathbb{H}$-hez létezik egyértelmű $u\in\mathbb{H}$ úgy, hogy $T(v,u,b_2,\ldots,b_n) = S(u,b_2,\ldots,b_n)$.

Bizonyítás. A lineáris Lax-Milgram-tételből tudjuk, hogy minden $z\in\mathbb{H}$ vektorhoz létezik egyértelmű $R\in L(\mathbb{H},\mathbb{H})$ operátor, amely minden $y\in\mathbb{H}$ vektorra kielégíti a

$$T(z,y,b_2,\ldots,b_n) = \langle Rz,y|b_2,\ldots,b_n\rangle$$

feltételt, azaz a második és a harmadik feltevésekből

1. $\gamma\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|^2 \le \langle Rx-Ry,x-y|b_2,\ldots,b_n\rangle$;
2. $|\langle Rx-Rx,z|b_2,\ldots b_n\rangle| \le L\,\|x-y\|\;\forall\, x,y\in\mathbb{H}$.

Mindezekből

$$\begin{aligned}\|Rx-Ry,b_2,\ldots b_n\| &= \sup\{\langle Rx-Ry,\alpha|b_2,\ldots,b_n\rangle : \alpha\in\mathbb{H}, \|\alpha,b_2,\ldots,b_n\| \le \\ &\le L\,\|x-y,b_2,\ldots,b_n\|\,.\end{aligned}$$

Még egyszer használva az általánosított Riesz reprezentációs tételt kapunk egy egyértelmű $v\in\mathbb{H}$ vektort, amely minden $u\in\mathbb{H}$ vektor esetén eleget tesz a $S(u,b_2,\ldots,b_n) = \langle v,u|b_2,\ldots,b_n\rangle$ feltételnek. Következésképp $T(u,v,b_2,\ldots,b_n) = S(u,b_2,\ldots b_n)$ pontosan akkor, ha $Ru = v$, amely feladat az általánosított Zarantonello-tétel következményeként korrekt kitűzésű, ezzel az állítást beláttuk. ■

Irodalomjegyzék

[1] Brzdęk, J. ; Ciepliński, K.: *A fixed point theorem in n-Banach spaces and Ulam stability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **470**(1) (2019), 632–646.

[2] Diminnie, C.; Gähler, S.; White, A.: *2-inner product spaces II*, Demonstratio Mathematica, **10**(1) (1977), 169–188.

[3] Gähler, S.: *2-metrische Räume und ihre topologische Struktur*, Math. Nachr, **26** (1963), 115–148.

[4] Gähler, S.: *Lineare* 2*-normierte Ráume*, Math. Nachr., **28** (1964), 1–43.

[5] Ghosh, P.; Samanta, T. K.: *A few fixed point theorems in linear n-normed space*, arXiv preprint arXiv:2210.07849.

[6] Ghosh, P.; Samanta, T. K.: *Generalized Riesz Representation Theorem in* n*-Hilbert space*, arXiv preprint arXiv:2203.04293.

[7] Ghosh, P.; Samanta, T. K.: *Reflexivity of linear* n*-normed space with respect to b-linear functional*, arXiv preprint arXiv:2101.09661.

[8] Ghosh, P.; Roy, S.; Samanta, T. K.: *Uniform Boundedness Principle and Hahn-Banach Theorem for b-linear functional related to linear 2-normed space*, arXiv preprint arXiv:2101.00653.

[9] Kavyasree, P. R. and Reddy, B. Surender (2019). *Some Results of Double Sequences in 2-Normed and* n*-Normed Spaces*, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 14, Iss. 4, Article 8.

[10] Kovács, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013. ISBN: 978-963-284-445-9
(http://numanal.inf.elte.hu/~alex/hu/anyag/PROGINF/FunkAnal/FunkAnalKS.pdf)

[11] Kovács, S.: *Analízis IV*, Budapest, 2021.
(https://numanal.inf.elte.hu/~alex/hu/anyag/anal4/kiadvanyok/Analizis4GyakorlatKS.pdf)

[12] Kreyszig, E.: *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[13] Simon, P.: *A funkcionálanalízis alapjai*, ELTE Eötvös Kiadó, 2017.

[14] Misiak, A.: n*-inner product spaces*, Math. Nachr., **140**(1) (1989), 299–319.

[15] Reddy, G. U.: *Some fixed point results in 2-normed spaces*, Nonlinear Studies, **30**(2) (2023), 387–391.

[16] Schipp, F.: *Analízis III*, Budapest, 2003. (https://numanal.inf.elte.hu/~schipp/Jegyzetek/Anal_3.pdf)

[17] Weissinger, J.: *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Math. Nachr. **8** (1952), 193–212.