Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Osztényi József

Erősen reguláris gráfok

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:
Csikvári Péter
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

2. Erősen reguláris gráfok **3**

2.1. Erősen reguláris gráfok tulajdonságai 3

2.2. Speciális családok 9

2.3. Egyéb feltételek 17

3. Teljes gráfok fedései erősen reguláris gráfokkal **22**

3.1. K_{10} fedése három Petersen-gráffal 22

3.2. K_{16} fedése három Clebsch-gráffal és következménye 24

3.3. Fedés két izomorf erősen reguláris gráffal 25

3.4. Három izomorf erősen reguláris gráf uniója 25

3.5. Ortogonális tömbök és Latin-négyzetek 27

4. Teljes gráfok fedései nem feltétlen azonos erősen reguláris gráfokkal **32**

4.1. Asszociációs séma 32

4.2. Két erősen reguláris gráf uniója 33

4.3. Három vagy négy erősen reguláris gráf uniója 36

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Csikvári Péternek a téma ajánlását, az egész éves közös munkát, a rendszeres konzultációkat és a rengeteg észrevételt a dolgozatommal kapcsolatban. Továbbá köszönöm neki, hogy bizonyításaimat figyelmesen átnézte, a hiányosságokra felhívta a figyelmemet és számos olyan ötlettel és tanáccsal látott el, amelyek nélkül ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Köszönöm a tanulmányaim alatt kapott sok támogatást barátaimnak. Hálával tartozom nekik a mindennapokban kapott rengeteg segítségért és felém irányúló türelmükért. Végül nem utolsó sorban szeretném megköszöni családomnak, hogy végig támogattak tanulmányaimban és már kiskoromban felkeltették érdeklődésem a matematika iránt.

1. fejezet

Bevezetés

Az erősen reguláris gráfok egy különleges struktúrával rendelkező csoportját alkotják a gráfoknak. A gráfelméletben használatos regularitás fogalmát egyes források Julius Petersenhez kötik, akinek a nevét egy gráf is viseli. Az erősen reguláris gráfokat Raj Chandra Bose vezette be az 1963-as [1] cikkében. Bose mellett jelentős eredményeket ért el a témában Alan Hoffman is, aki a gráfok sajátértékeinek tanulmányozásával foglalkozott. Napjainkban Andries Brouwer a terület egyik kiemelkedő alakja. Andries Brouwer és Hendrik Van Maldeghem könyve [2] minden bizonnyal a téma alapművének tekinthető. A könyv mellett Brouwer honlapján jelentős mennyiségű dokumentáció is található, mint például a legtöbb ismert erősen reguláris gráf konstrukciójának leírása.

Szakdolgozatom célja az erősen reguláris gráfok osztályának bemutatása. A második fejezetben definiálom a szomszédsági mátrixot és annak sajátértékeit. A gráf sajátértékei és további paraméterei közötti összefüggéseket bizonyítok be, valamint hozok pár példát különleges feltételekkel rendelkező családokra. Például megadom azon paraméterek halmazát, amik esetén az erősen reguláris gráf legkisebb sajátértéke -2-vel egyenlő.

A harmadik fejezetben azt az alapvető problémát tekintem, hogy miért nem lehetséges a K_{10} éldiszjunkt fedése három Petersen-gráffal. A tétel bizonyításának alapötlete lehetőséget teremt arra, hogy általában vizsgáljam egy teljes gráf három erősen reguláris gráffal való éldiszjunkt fedéseit. Fontos eszközként definiálom az ortogonális tömb és Latin négyzet fogalmát. A fedéshez kapcsolódóan érdekességképp megadom az $R(3, 3, 3)$ Ramsey-számot is.

Szakdolgozatom utolsó negyedik fejezetében is teljes gráfok erősen reguláris gráfokkal való fedését vizsgálom, de az előző fejezetekkel ellentétben itt már nem feltétel, hogy a gráfok izomorfak legyenek.

2. fejezet

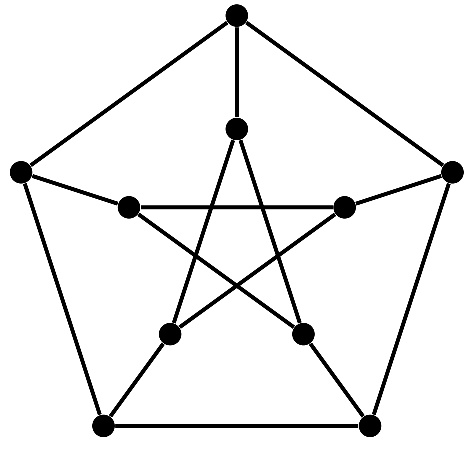
Erősen reguláris gráfok

Ebben a fejezetben definiálom az erősen reguláris gráfok fogalmát, majd pár tételben a téma alapvető összefüggéseit mutatom be. Pár példa család bemutatásra kerül tételeken keresztül, amik adott szempontból különlegesnek számítanak. A fejezet zárásaként belátom a Krein-feltételt és az abszolút korlátot, amik további feltételek az erősen reguláris gráfokra.

2.1. Erősen reguláris gráfok tulajdonságai

Elsőnek definiálom, hogy mit értünk erősen reguláris gráf alatt.

2.1.1. Definíció. *Egy G egyszerű gráf erősen reguláris (n, d, a, b) paraméterekkel, ha n csúcsa van, d-reguláris, két szomszédos csúcsnak pontosan a közös szomszédja van és két nem szomszédos csúcsnak pontosan b közös szomszédja van.*



A $(10, 3, 0, 1)$ paraméterekkel rendelkező Petersen-gráf.

A definíció és a példa gráf alapján látható, hogy egy szimmetrikus és eléggé egyedi gráf család.

2.1.2. Lemma. *Legyen G egy nem összefüggő erősen reguláris gráf. Ekkor G k darab K_n teljes gráf uniójaként áll elő.*

Bizonyítás. Mivel tudjuk a G gráfról, hogy nem összefüggő, emiatt két nem egy komponensben lévő csúcsának pontosan 0 közös szomszédja van. Minden csúcsnak ugyanannyi a foka és az egy komponensben lévő nem szomszédos csúcsoknak is 0 közös szomszédjuk van, emiatt egy csúcsnak a komponensbeli csúcsai vagy szomszédai vagy legalább 3 távolságra helyezkednek el. Ez természetesen nem lehet, mert ha van legalább 3 távolságra lévő csúcs, akkor kell lennie olyannak is, ami 2 távolságra helyezkedik el. Ez nem lehetséges, mert az azt jelentené, hogy van legalább egy közös szomszédjuk és nem szomszédosak.

Egy komponensben minden csúcs szomszédja minden más csúcsnak, vagyis az összes komponens teljes gráf és mivel az összes csúcsnak ugyanannyi a foka, emiatt minden teljes gráf azonos méretű. Ez alapján k darab K_n gráf uniójaként áll elő. □

Az alábbi részben paramétereinek kapcsolatát fogom ismertetni. Az első állításban a gráf 4 paramétere közötti kapcsolat kerül megadásra.

2.1.3. Tétel. *Legyen G erősen reguláris gráf (n, d, a, b) paraméterekkel, ekkor*

$$d(d - a - 1) = b(n - d - 1)$$

egyenlőség fennáll.

Bizonyítás. Ha nem összefüggő a G gráf, akkor a legutóbbi lemmából tudjuk, hogy K_{d+1} komponensekből áll a gráf. Ez alapján igaz $b = 0$ és $d = a + 1$ egyenlőségek, vagyis mindkét oldal nullával egyenlő.

Ha $G = K_n$, akkor a $(n, n - 1, n - 2, b)$ paraméterű G, ahol b bármi lehet, mert nincs olyan csúcspár, ami ne lenne szomszédos, de a másik három paraméter alapján fennáll az egyenlőség.

Ha G összefüggő és nem teljes gráf, akkor legyen v egy általunk választott csúcsa G-nek. Számoljuk meg, hogy hány olyan csúcs van a gráfban, ami nem szomszédja v-nek, legyen ezen csúcsok halmaza K. Ismert az összes csúcs száma, emiatt $|K| = n - d - 1$.

Számoljuk ki K elemeinek számát másképp is. Ezen csúcsok csak v szomszédainak a szomszédai lehetnek, mivel ezen erősen reguláris gráfok átmérője kettő. A v csúcsnak d szomszédja van és ezen csúcsoknak $d - a - 1$ ilyen szomszédja van, mert szomszédaiból nem számít v és azzal közös szomszédok. Másrészről egy K-beli csúcsnak és v-nek b közös szomszédja van, vagyis minden K-beli csúcsot b-szer számoltunk. Tehát $n-d-1=\frac{d(d-a-1)}{b}$ egyenletet kaptuk a kétféle számolás során. □

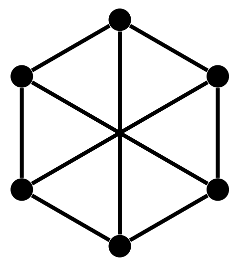
A következő tételekben az erősen reguláris gráfok további paramétereit definiálom és ezen értékekre vonatkozó feltételeket mutatok meg, ami elsősorban a gráf adjacencia mátrixa köré fog épülni. Ezt a mátrixot magyarosabb szóhasználattal szomszédsági mátrixnak hívjuk.

2.1.4. Definíció. *Legyen G egy n csúcsból álló egyszerű gráf, ekkor A_G-nek nevezzük a gráf adjacencia mátrixát. Ha gráf csúcsai $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ halmazt alkotják, akkor*

$$(A_G)_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{ha } v_i \text{ és } v_j \text{ csúcsok közt van él,}\\ 0 & \text{ha } v_i \text{ és } v_j \text{ csúcsok közt nincs él.}\end{cases}$$

2.1.5. Állítás. *Minden G egyszerű gráfhoz tartozó A_G adjacencia mátrix összes sajátértéke és sajátvektorának összes koordinátája valós szám.*

2.1.6. Megjegyzés. *Sajátérték és sajátvektor definíciója alapján egy vektor pontosan, akkor lesz sajátvektora egy gráfnak, ha a gráf csúcsainak értékeket adva azt kapjuk, hogy minden csúcson a szomszédainak összege pontosan λ-szorosa a csúcsra írt számnak.*



A $(6,3,0,3)$ paraméterekkel rendelkező gráf.

Az alábbi példa esetén jól látható, hogy az $(1,\ldots,1)$ sajátvektora a gráfnak, amihez a $d=3$ sajátérték tartozik.

A következő lemmában kihasználom a gráfról azt, hogy ismerjük két csúcs közös szomszédjainak számát, amely az adjacencia mátrix négyzetében jelenik meg.

2.1.7. Lemma. *A G erősen reguláris gráf adjacencia mátrixára fennáll, hogy*

$$A_G^2=bJ+(a-b)A_G+(d-b)I,$$

ahol J a csupa egyesből álló mátrix, míg I az identitás mátrix.

Bizonyítás. Az A_G mátrix egyes oszlopai vagy sorai konkrét csúcsokat jelölnek a gráfban, emiatt A_G^2-ben a $(A_G)_{ij}$ érték a v_i és v_j csúcsok közti 2 hosszú sétát adják meg. Ez alapján a következők ismertek A_G^2-ről. Az A_G^2 mátrix főátlójában rendre d áll és a mátrix többi eleme a vagy b attól függően, hogy az i és j csúcsok szomszédok vagy sem. Az A_G^2-t szeretnénk megkapni lineáris kombinációjaként A_G, J és I mátrixoknak. A mátrix főátlóját és azon elemeit, ahol A_G-ben 0 áll csak I és J mátrixokkal tudjuk megkapni, a főátlóban d áll, míg a többi helyen b-nek kell állnia. Ez $bJ + (d-b)I$ összegként állítható elő. A további értékeket pedig A_G-vel állítjuk megfelelő értékre, aminek szükségképpen $(a-b)A_G$-nek kell lennie. □

Ezen lemma alapján a következő tételben megadjuk az erősen reguláris gráfok sajátértékeit.

2.1.8. Tétel. *Legyen G összefüggő, erősen reguláris gráf (n, d, a, b) paraméterekkel, ekkor 3 sajátértéke van G-nek*

$$d, \quad \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2}$$

rendre az alábbi multiplicitásokkal

$$1, \quad \frac{1}{2}\left(n - 1 \mp \frac{2d + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}\right).$$

Bizonyítás. Legyen v, λ_v az A_G-hez tartozó sajátvektor és a hozzátartozó sajátérték. A legutóbbi lemmában található egyenletet megszorozva v-vel a következő egyenletet kapjuk:

$$A_G^2 v = bJv + (a-b)A_G v + (d-b)Iv,$$

amiben $bJv = (b\sum_{i=1}^{n} v_i)\mathbb{1}$. Tekintsük külön koordinátákra:

$$b\sum_{i=1}^{n} v_i = (\lambda_v^2 + (b-a)\lambda_v + (b-d))v_i.$$

Ha $\lambda_v^2 + (b-a)\lambda_v + (b-d) \neq 0$, akkor minden koordináta esetén megegyezik a bal oldal, de a jobb oldal függ, hogy melyik koordinátára nézzük, emiatt $v_i = v_j$ minden i és j-re. Ez alapján ebben az esetben megkaptuk a legnagyobb sajátértéket, ami a $\lambda = d$.

Különben $\lambda_v^2 + (b-a)\lambda_v + (b-d)$ összeg megegyezik 0-val, vagyis van egy másodfokú egyenlet λ_v-re, aminek megoldása a

$$\lambda_\pm = \frac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2}.$$

Meggondolható, hogy a d sajátérték multiplicitása 1, ha G összefüggő. Legyen továbbá a másik kettő sajátérték multiplicitása f és g. Mátrix sajátértékeinek száma n és azoknak összege megegyezik a mátrix nyomával, emiatt az alábbiakat tudjuk felírni:

$$1 + f + g = n,$$

$$d + f\frac{a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2} + g\frac{a - b - \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2} = 0.$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$f = \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{2d + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}\right),$$

és

$$g = \frac{1}{2}\left(n - 1 + \frac{2d + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}\right).$$

□

Az egyértelmű, hogy a multiplicitások nemnegatív egész számok, ami egy erős feltételt ad a paraméterekre, amelyre később még ki fogok térni a 2.2.3 tételben. A sajátértékek összefüggése alapján látható, hogy az egyik pozitív, míg a másik negatív lesz a legtöbb esetben, ezt fogalmazza meg a következő tétel.

Legyen a továbbiakban $\lambda_1 > \lambda_2$ a két sajátérték, ami nem egyezik meg d-vel.

2.1.9. Lemma. *Egy G erősen reguláris gráfra akkor és csak akkor áll fenn, hogy $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, ha $G = K_{k,\dots,k}$ vagy G üres egyike sem áll fenn.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda_2 \geq 0$. Tudjuk, hogy egy mátrix sajátértékeinek összege a nyomával egyezik meg, amely adjacencia mátrix esetében 0. Ez akkor lehetséges, ha minden sajátérték 0, vagyis G üres.

Tegyük fel, hogy $0 \geq \lambda_1$. Használjuk fel a legutóbbi tételben kapott képletet λ_1-re.

$$\frac{a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2} \leq 0,$$

amiből látható, hogy $b \geq a$ és ha tovább rendezzük, akkor azt kapjuk, hogy $(b-a)^2 + 4(d-b) \leq (b-a)^2$, vagyis $d \leq b$. Mivel a definíció alapján tudjuk, hogy $b \leq d$ is fennáll, emiatt $b = d$ áll fenn. Itt gráfelméleti indoklásra van szükségünk. Vegyük egy csúcsát a gráfnak, ez legyen h, ekkor h-nak van d darab szomszédja és a többi $n - d - 1$ darab csúcs, amivel h nem szomszédos. A h-val nem szomszédos csúcsok mindegyike is szomszédos h szomszédaival, mivel G d-reguláris. Legyen A_h

azon csúcsok halmaza, amely vagy h vagy nem szomszédos h-val. Másképpen azon csúcsok, amik vagy h vagy azonos csúcsokkal szomszédosak, mint h. Mivel G nem összes csúcsa eleme A_h-nak, emiatt van egy további csúcs, amire ismételhető az eljárás. Ez addig folytatódik, amíg minden csúcs nem szerepel egy halmazban, amit el tudunk érni, mert ha van csúcs, ami nincs egyben sem, akkor azzal folytatjuk. Minden csúcs pontosan egy halmazban szerepel, mivel a második megfogalmazás egy tranzitív tulajdonság, emiatt ha legalább kettőben szerepelne, akkor azonos lenne a két halmaz. Vagyis az A_i halmazok egy particióját adják meg a gráf csúcsainak. Azonos elemszámúak, mivel minden csúcsnak d szomszédja van és azokon felül minden más csúcs a halmazban szerepel, vagyis $n-d$ elemszámúak a halmazok. Egy A_i halmaz eleme szomszédos az összes G-beli csúccsal, ami nem A_i-beli, vagyis G pontosan egy $K_{n-d,\ldots,n-d}$ gráfnak felel meg. Ebben az esetben $\lambda_1 = 0$ egyenlőség áll fenn.

Összefoglalva azt kaptuk, hogy $G = K_{k,\ldots,k}$ és üres gráf esetek kivételével minden esetben fennáll, hogy $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. □

2.1.10. Megjegyzés. *Ha G gráf egy teljes gráf, akkor 1 darab $n-1$ és $n-1$ darab -1 sajátértéke van.*

A 2.1.2 tételben említett nem összefüggő gráf esetén a k darab teljes gráf sajátértékeinek kell venni az unióját, ami ebben esetben k darab $n-1$ és $k(n-1)$ darab -1 sajátértéket ad.

Ha G gráf egy üres gráf, akkor minden sajátérték 0, mivel az adjacencia mátrix a 0 mátrix. Ezekben az esetekben nincs feltétlen 3 különböző sajátérték.

A következő feladat a [3] feladatgyűjteményben található meg.

2.1.11. Lemma. *Legyen a G gráf erősen reguláris a szokásos paraméterezéssel és $d \geq \lambda_1 > \lambda_2$ a G gráf három különböző sajátértéke. Ekkor fennáll a következő*

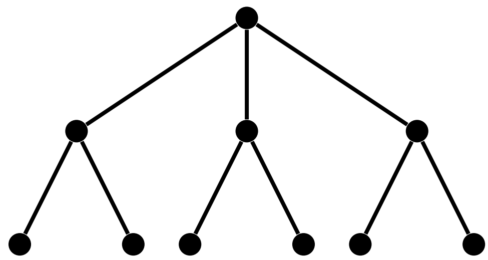
$$(d-\lambda_1)(d-\lambda_2) = nb.$$

Bizonyítás. Az 2.1.8 tételben egy másodfokú egyenlet megoldása a további két sajátérték. A másodfokú egyenlet Viéte-formulái miatt tudjuk, hogy $\lambda_1 + \lambda_2 = b - a$ és $\lambda_1\lambda_2 = b - d$. A tételben szereplő egyenlet bal oldalát kibontva azt kapjuk, hogy $(d-\lambda_1)(d-\lambda_2) = d^2 + (b-a-1)d + b$, amely a 2.1.3 tétel miatt megegyezik nb-vel. □

2.2. Speciális családok

Ebben a fejezetben egyszerű feltételekkel megkapható gráf családok szereplnek. Van olyan család, ami többször is szóba kerül.

Az első tétel azokról a gráfokról szól, ahol bármely két csúcs szomszédos vagy pontosan egy közös szomszédja van.



Egy csúcs szempontjából így néz ki a többi csúcs helyzete. Az ábrán a $d = 3$ eset látható.

2.2.1. Tétel (Hoffman–Singleton)**.** *Legyen G egy erősen reguláris gráf* $(d^2+1, d, 0, 1)$ *paraméterrel, ahol $d \geq 2$. Ekkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.*

Bizonyítás. Az könnyen meggondolható, hogy bármely két csúcs szomszédos vagy pontosan egy közös szomszédja feltétel megegyezik a tételben leírt paraméterekkel, mivel ha fenti feltételben a gráf d-reguláris, akkor $1+d+(d-1)d$ csúcsa van a gráfnak és az utolsó két paraméter meg pontosan azt jelenti, hogy két csúcs szomszédos vagy pontosan egy közös szomszédja van. Tekintsük a gráf sajátértékeinek multiplicitásait.

$$\frac{1}{2}\left(d^2 \mp \frac{2d-d^2}{\sqrt{4d-3}}\right)$$

Mivel a multiplicitás egy egész szám, emiatt a képletben szereplő törtnek egésznek kell lennie, ami alapján két eset lehetséges.

Ha $2d - d^2 = 0$ fennáll, akkor $d = 2$ az egyetlen lehetséges megoldás.

Különben $2d-d^2 \neq 0$, akkor $\sqrt{4d-3}$ racionális szám lehet, vagyis $4d-3$ négyzetszám. Legyen $s^2 = 4d-3$, ahol s nemnegatív egész szám. Ezt felhasználva alakítsuk át korábbi képletünket

$$f = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2 - \frac{2\frac{s^2+3}{4} - \left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2}{s}\right] = \frac{s^5+s^4+6s^3-2s^2+9s-15}{32s}.$$

Egy sajátérték multiplicitásáról van szó, emiatt a számlálóban álló polinomot osztja s, ami alapján $1; 3; 5; 15$ számok valamelyike lehet. Behelyettesítve ezen értékeket azt kapjuk, hogy d lehetséges értekei $1; 3; 7; 57$, ami közül az 1 nem felel meg a feltételnek. □

A fenti esetekről az alábbiakat tudjuk:

- ha $d = 2$, akkor a $(5, 2, 0, 1)$ paramétereket kapjuk, ami az 5 csúcsú körgráf,
- ha $d = 3$, akkor a $(10, 3, 0, 1)$ paramétereket kapjuk, ami a Petersen-gráf,
- ha $d = 7$, akkor a $(50, 7, 0, 1)$ paramétereket kapjuk, ami a Hoffman–Singleton gráf,
- ha $d = 57$, akkor a $(3250, 57, 0, 1)$ paramétereket kapjuk. Ebben az esetben nem ismert, hogy létezik ilyen paraméterű erősen reguláris gráf.

2.2.2. Lemma. *Egy G erősen reguláris gráf akkor és csak akkor konferenciagráf, azaz $(4t+1, 2t, t-1, t)$ paraméterrel rendelkező erősen reguláris gráf, ha fennáll, hogy $\frac{1}{2}(n-1)$ a multiplicitása λ_1-nek és λ_2-nek is.*

Bizonyítás. Legyen λ_1 és λ_2 multiplicitása f és g.

Ha G konferenciagráf, akkor a 2.1.8 tétel alapján láthatjuk, hogy

$$f = \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{2d + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}\right) = \frac{1}{2}\left(4t - \frac{4t - 4t}{\sqrt{(1)^2 + 4t}}\right) = 2t = \frac{1}{2}(n-1),$$

és g-re is hasonló számolás végén ezt kapjuk, vagyis konferenciagráf esetén tényleg fennáll az egyenlőség.

Ha tudjuk, hogy $f = g = \frac{1}{2}(n-1)$, akkor a 2.1.8 tétel alapján $\frac{2d+(n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}$ tört 0-val egyezik meg, ami csak akkor lehetséges, ha $2d + (n-1)(a-b) = 0$. Ez alapján látható, hogy $(n-1) \mid 2d$, míg $1 \leq d \leq n-1$ és így az alábbi két eset lehetséges.

Ha $d = n-1$, akkor $G = K_n$. Ekkor -1 multiplicitása $n-1$.

Ha $d = \frac{n-1}{2}$ és emellett fennáll, hogy $2d + (n-1)(a-b) = 0$, akkor $b - a = 1$. Ezeket beírva a 2.1.3 összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - a - 1\right) = b\left(n - \frac{n-1}{2} - 1\right).$$

Rendezve kapjuk, hogy $a + b = \frac{n-3}{2}$. Az $a = \frac{n-5}{4}$, $b = \frac{n-1}{4}$ megoldást adja a két ismeretlenes egyenletrendszer, ami a konferenciagráfok paraméterei. □

A következő tétel a már korábban említett feltételt használja ki, hogy a sajátértékek multiplicitása egész szám.

2.2.3. Tétel. *Legyen a G gráf erősen reguláris* (n, d, a, b) *paraméterekkel, ekkor minden sajátérték egész szám, vagy G konferenciagráf.*

Bizonyítás. Legyen λ a nem egész sajátértéke a G gráfnak és m multiplicitása ennek a sajátértéknek. Tudjuk, hogy $\lambda \neq d$, mivel d egész. A 2.1.8 tétel alapján

$$\lambda = \frac{a-b+\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}{2},\ m = \frac{1}{2}\left(n-1-\frac{2d+(n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}\right)$$

fennáll.

Tegyük fel, hogy $(a-b)^2+4(b-d)$ egy négyzetszám. Ekkor $\lambda = \frac{a-b+\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}{2}$ egy racionális szám. Mivel λ egy 1 főegyütthatójú másodfokú kifejezésnek a gyöke, emiatt ha tudjuk, hogy racionális, akkor annak mindenképp egésznek is kell lennie.

Tegyük fel, hogy $(a-b)^2+4(b-d)$ nem négyzetszám. Ekkor az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$m - \frac{n-1}{2} = \frac{2d+(n-1)(a-b)}{2\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}.$$

A bal oldal egy tört szám, míg a jobb oldal egy egész szám osztva egy irracionális számmal, amely csak abban az esetben lehetséges, ha a tört számlálója 0, vagyis $2d+(n-1)(a-b) = 0$. Ez pedig a 2.2.2 lemma bizonyításában látszik, hogy konferenciagráfot ad az egyenlet megoldása. Megkaptuk, hogy tényleg a konferenciagráfok családja az egyetlen erősen reguláris gráf család, ahol nem egészek a sajátértékek. $\square$

További feltételt tudunk adni, amely azt adja, hogy a konferenciagráf egy egyedi gráf család az erősen reguláris gráfok körében is.

2.2.4. Tétel. *Legyen a G gráf erősen reguláris* (p, d, a, b) *paraméterekkel, ahol p prím és G nem üres vagy teljes gráf. Ekkor G konferenciagráf.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan G gráf, ami teljesíti a feltételeket és nem konferenciagráf. A 2.2.3 tétel alapján minden sajátértéke egész szám.

$$(d-\lambda_1)(d-\lambda_2) = pb$$

egyenletet tudjuk a 2.1.11 lemma alapján, vagyis $p|(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)$. A gráf sajátértékeiről tudjuk a 2.1.9 lemma alapján, hogy $p-1 \geq d > \lambda_1 > 0$, ami alapján azt kapjuk, hogy $p = d-\lambda_2$ és $b = d-\lambda_1$. Ezeket összeadva és rendezve azt kapjuk, hogy $a = 2d-p$. Vegyük a 2.1.3 tétel egyenletét és a helyett írjuk bele az előbb kapott értéket, ami alapján az adódik, hogy

$$d\left(d-(2d-p)-1\right)=b(p-d-1),$$

vagyis $b=d$, amiről tudjuk a 2.1.9 lemma bizonyítása alapján, hogy csak a $K_{k,\dots,k}$ esetén állhat fenn. Következik, hogy $k|p$, amely alapján $k\in\{1,p\}$. Vagyis a tételben kimondott teljes vagy üres gráf esete. □

A 2.2.3 tétel alapján az látható, hogy az erősen reguláris gráfok egy családot leszámítva egész sajátértékekkel rendelkeznek, emiatt a legkisebb sajátérték vizsgálata érdekes lehet. Tudjuk, hogy negatívnak kell lennie, emiatt van esély arra, hogy karakterizáljuk kis értékekre a gráfokat.

Ha -1 a legkisebb sajátérték, akkor meggondolható, hogy csak a diszjunkt teljes gráfok uniója lehetséges, míg konferencia gráfok esetén teljes ötszög esetén $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ a legkisebb sajátérték. Minden más erősen reguláris gráf legkisebb sajátértéke legfeljebb -2 és a következő tételben megadom az összes paramétert, amely esetén eléri a gráf ezt a felső korlátot.

Az alábbi tétel több cikkben is megjelent, én a [2] cikkben megtalálható bizonyítást fogom feldolgozni a következőkben.

2.2.5. Tétel. *Ha egy erősen reguláris gráfnak a legkisebb sajátértéke -2, akkor ezen paraméterek egyike:*

(i) $(2k, 2k-2, 2k-4, 2k-2)$ *paraméterek,* $k \geq 2$*-re, ami a* $K_{k\times 2}$ *teljes* k*-osztályos gráf paramétere,*

(ii) $(k^2, 2(k-1), k-2, 2)$ *paraméterek,* $k \geq 3$*-ra, ami* $L_2(k)$ *rácsgráf paramétere,*

(iii) $(\binom{k}{2}, 2(k-2), k-2, 4)$ *paraméterek,* $k \geq 5$*-re, ami* $T(k)$ *háromszög gráfok paramétere,*

(iv) $(16, 6, 2, 2)$ *paraméter, ami a Shrikhande-gráf paramétere,*

(v) $(28, 12, 6, 4)$ *paraméter, ami a három Chang-gráf paramétere,*

(vi) $(10, 3, 0, 1)$ *paraméter, ami a Petersen-gráf paramétere,*

(vii) $(16, 10, 6, 6)$ *paraméter, ami a Clebsch-gráf komplementerének paramétere,*

(viii) $(27, 16, 10, 8)$ *paraméter, ami a Schlafli-gráf paramétere.*

Bizonyítás. A 2.1.8 tételben két sajátértéket az alapján kapjuk meg, hogy egy másodfokú egyenletet oldunk meg. Így arra alkalmazva a Viéte-formulákat azt kapjuk, hogy $\lambda_1 - 2 = a - b$ és $-2\lambda_1 = -d + b$. A két egyenletet λ_1-re rendezve és egyiket a másikba helyettesítve azt kapjuk, hogy $d = 2a - b + 4$.

Ha $b = 2$, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = a$ és $d = 2a + 2$, amit ha beírunk a 2.1.3 tételbe, akkor azt kapjuk, hogy $(a+1)^2 = (n-2a-3)$. Ezt n-re rendezve azt kapjuk, hogy $(a+2)^2 = n$, vagyis a G gráf megegyezik $L_2(k)$ paramétereivel ($k = \lambda_1 + 2$-re).

Ha $b = 4$, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = a - 2$ és $d = 2a$, amit ha beírunk a 2.1.3 tételbe, akkor azt kapjuk, hogy $a(a-1) = 2(n - 2a - 1)$. Ezt n-re rendezve azt kapjuk, hogy $n = \frac{(a+2)(a+1)}{2}$, vagyis a G gráf megegyezik a $T(k)$ paramétereivel ($k = \lambda_1 + 4$-re), vagyis továbbiakban $b \neq 2, 4$.

Legyen λ_1 sajátérték multiplicitása f, míg -2 multiplicitása g, amikről tudjuk, hogy $n = 1+f+g$, mert n darab sajátérték van. A sajátértékek összege nulla, emiatt tudjuk, hogy $0 = d + f\lambda_1 - 2g$, míg a 2.1.11 lemma alapján $(d - \lambda_1)(d + 2) = nb$, amiket rendezve kapjuk, hogy

$$f = \frac{2n-d-2}{\lambda_1+2} = 2\frac{n-d-1}{\lambda_1+2} + \frac{d}{\lambda_1+2} = \frac{2d(d-a-1)+db}{b(\lambda_1+2)} =$$

$$= \frac{d(2d+b-2a-2)}{b(\lambda_1+2)} = \frac{(b+2\lambda_1)(d+2)}{b(\lambda_1+2)} = \frac{(b+2\lambda_1)(b+2\lambda_1+2)}{b(\lambda_1+2)}.$$

A $d = b + 2\lambda_1$, $d = 2a - b + 4$ korábban megadott összefüggéseket és a 2.1.3 tétel egyenletét használtuk fel az egyenlőségek során.

Legyen m-karom egy G gráf eleme, ha G-nek feszített részgráfja $K_{1,m}$ és legyen négyszög egy G gráf eleme, ha G-nek feszített részgráfja C_4.

Legyen x a gráfunk egy csúcsa úgy, hogy szomszédja y és z csúcs és közben y és z nem szomszédok. Tegyük fel, hogy $\{x, y, z\}$ benne van c darab 3-karomban és q darab négyszögben. Ekkor x-nek olyan szomszédai lehetnek benne egy 3-karomban, amik y-nal és z-vel sincsenek összekötve. A négyszögek száma attól függ, hogy y-nak és z-nek hány közös szomszédja van x-en felül és ezen csúcsok ne legyenek szomszédosak x-szel. Ezek alapján írjuk fel, hogy c mivel egyenlő. Van kezdetben d darab szomszédja x-nek, ebből kettő kiesik, mert ezek y és z. Ki kell vonni még x-nek y-nal és z-vel közös csúcsainak számát, ami $2a$, de lehetnek olyan csúcsok, ami szomszédai mindhárom csúcsnak, úgy hogy ezek számát hozzá kell adni. Ebből pontosan annyi van, ahány közös szomszédja van y-nak és z-nek, ami b darab, de nem az összes szomszédja x-nek is, mert ami vagy x vagy nem szomszédja x-nek és az pontosan benne van egy négyszögben, ami tartalmazza $\{x, y, z\}$ csúcsokat. Vagyis

$$d - 2 - 2a + (b - 1 - q) = c$$

egyenletet kaptuk, amihez ha használjuk a $d = 2a - b + 4$ egyenlőséget, akkor azt kapjuk, hogy $c + q = 1$, ami azt jelenti, hogy egy adott $\{x, y, z\}$ hármas a fentebb leírt feltételekkel egy 3-karomban vagy egy négyszögben van benne.

Elsőnek vizsgáljuk azt, hogy a gráf tartalmaz 3-karmot. Maradva az eddigi jelölésnél legyen x szomszédja y, z, w csúcsok, úgy hogy ezen három csúcs közül egyik sem szomszédos a másikkal. Ebben az esetben belátjuk, hogy $n = 2d + 4$, amely pár példát is ad.

Ha Z a csúcsok egy halmaza, akkor $N(Z)$ legyen azon csúcsok halmaza, amelyek szomszédosak minden Z-beli csúccsal és $F(Z)$ az olyan csúcsok halmaza, amelyek nem szomszédosak egyik Z-beli csúccsal sem és nem elemei Z-nek.

Elsőnek belátjuk, hogy $\lambda_1 = b$ ebben az esetben. Vizsgáljunk meg két halmazpárt, amikben az egyik tartalmazza a másikat. Az egyik ilyen halmazpár $N(x) \cap F(y)$ és $\{z, w\} \cup N(z, w) \setminus \{x\}$, ahol a második halmaz tartalmazza az elsőt. Az első halmaz azon elemeket tartalmazza, ami x-nek szomszédja, de nem szomszédja y-nak vagy nem y. Az könnyen látható, hogy z és w benne van az első halmazban és hogy nincs x benne az első halmazban.

Vegyünk egy u csúcsot az $N(x) \cap F(y)$ halmazból, ami nem z vagy w. Ekkor u szomszédos x-szel és nem szomszédos y-nal, vagyis ha z-vel vagy w-vel nincs összekötve, akkor z-vel vagy w-vel benne lenne u egy 3-karomban, de tudjuk, hogy ezek közül egyik sem lehet benne már másik 3-karomban, vagyis a kiválasztott csúcs szomszédja z-nek és w-nek is, vagyis beláttuk a tartalmazást.

$N(x) \cap F(y)$ halmazban $d - a - 1$ elem van, mert olyan szomszédjai x-nek, ami nem y vagy y szomszédja, míg $\{z, w\} \cup N(z, w) \setminus \{x\}$-nak $b + 1$ eleme van. Fentebbi egyenlőségeket használva azt kapjuk, hogy $\lambda_1 + 1 = d - a - 1$, vagyis $\lambda_1 \leq b$.

A második halmazpár $(N(y) \cap F(x)) \cup \{y\}$ és $F(z, w)$, amelyek közül a második tartalmazza megint az elsőt. Az első halmazban azon elemek vannak benne, ami y szomszédja és nem szomszédja x-nek vagy y. A látható, hogy y eleme a második halmaznak is.

Vegyük az első halmaz egy elemét, ami nem y, ekkor erről tudjuk, hogy nincs benne egy $\{y, x, w\}$ vagy $\{y, x, z\}$ csúcsokat tartalmazó négyszögben, mert vagy egy 3-karomban vagy egy négyszögben szerepelnek az előbb felsorolt hármasok és feltettük, hogy 3-karom van a gráfban. Ez csak abban az esetben tud teljesülni, ha nem szomszédos z-vel és w-vel sem, mivel olyan csúcsunk van, ami nem szomszédos x-szel, vagyis minden ilyen elem benne van a második halmazban is.

$(N(y) \cap F(x)) \cup \{y\}$ halmazban $d - a$ csúcs van, míg $F(z, w)$-nak $n - 2d + b - 2$ eleme van hasonló gondolatok alapján, mint fentebb. Korábbi egyenlőségek és a legutóbbi egyenlőséget használva azt kapjuk, hogy $n \geq 5\lambda_1 + b + 4$. A 2.1.11 alapján tudjuk, hogy $(d-\lambda_1)(d+2)=nb$ és a bizonyítás legelejéről tudjuk, hogy $d=b+2\lambda_1$. Ha a második egyenletet behelyetesítjük az elsőben d-k helyére és leosztunk b-vel, akkor azt kapjuk, hogy $n=\frac{(b+\lambda_1)(b+2\lambda_1+2)}{b}=3\lambda_1+b+2+\frac{2\lambda_1(\lambda_1+1)}{b}$. Az n-nel kapcsolatos legutóbbi két egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $\lambda_1 \geq b$.

A két egyenlőtlenség alapján azt kaptuk, hogy $\lambda_1=b$. Ez alapján a többi paraméterről azt tudjuk, hogy $a=2\lambda_1-2$, $d=3\lambda_1$, $n=6\lambda_1+4=2d+4$, $f=9-\frac{12}{\lambda_1+2}$, ami alapján $\lambda_1\in\{1,2,4,10\}$. Ha $\lambda_1=1,2,4$, akkor az vagy Petersen-gráf, vagy Shrikhande-gráf, vagy a három Chang-gráf paramétereivel egyezik meg. Ha $\lambda_1=10$ esetén $(64,30,18,10)$ paraméterű gráf kéne, de ez nem létezik a 2.3.8 lemma miatt.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy G nem tartalmaz 3-karmot. Mivel $c+q=1$, minden 2-karom pontosan egy négyszögben van benne. Vagyis a 2-karom végén álló csúcsokat tekintve a közös szomszédok párba szedhetőek, vagyis ezek alapján b páros, emiatt legyen $b=2m$ és ha y nem szomszédos z-vel, akkor $N(y,z)$ megegyezik $K_{m\times 2}$ gráffal. Ráadásul ha egy w csúcs szomszédos y-nal és nem szomszédos z-vel, akkor w szomszédos m darab csúccsal $N(y,z)$-ből. Ha $k,l\in N(y,z)$ és k nem szomszédos l-lel, akkor w szomszédja k-nak vagy l-nek, mivel $\{y;k;l;w\}$ egy 3-karom lenne, ha w egyiknek sem lenne a szomszédja és w nem lehet szomszédja egyszerre k-nak és l-nek, mert akkor $\{z,k,l\}$ hármas két négyszögben is benne lenne. Vagyis vegyük $N(y,z)$ nem szomszédos párokra bontását és ilyen bontás létezik, mivel $K_{m\times 2}$ felbontható így. Előbbi gondolatmenetből következik, hogy w minden párból csak az egyikkel szomszédos, vagyis összesen $\frac{b}{2}$ szomszédja van innen.

Legyen x egy csúcs és nézzük az általa indukált $F(x)$ részgráfot. $F(x)$ vagy erősen reguláris vagy teljes vagy üres gráf, az $(n',d',a',b')=(n-d-1,d-b,a-\frac{b}{2},b)$ paraméterekkel. Természetesen $n-d-1$ csúcsa marad, mivel az egész csúcshalmazból kivesszük x-t és x szomszédait. Minden csúcsnak $d-b$ szomszédja lesz, mivel alapvetően volt d darab, de azok közül b darab az $N(x)$ halmazba megy. Két nem szomszédos csúcsnak alapvetően volt b közös szomszédja és ezen mindegyike $F(x)$-be is esik, mert különben $N(x)$-be eső ilyen csúcsok egy 3-karmot alkotnának x-szel. Két szomszédos csúcsnak pedig $a-\frac{b}{2}$ közös szomszédja lesz a részgráfban, mert előző bekezdésben leírt y, z és w csúcsokkal kapcsolatos megjegyzés alkalmazható. Tekintsük ezen eseteket:

- Ha üres gráf, akkor $d=b$, tehát $G=K_{k_1,k_2,\ldots,k_i}$, de mivel reguláris, emiatt csak a $K_{k,\ldots,k}$ lehet, vagyis az (i) esetbe esik.
- Ha teljes gráf, akkor $n-d-1=d-b+1$. A 2.1.3 tétel egyenletéből induljunk

ki. A bal oldalát rendezve elsőnek azt kapjuk, hogy

$$d(d-a-1) = (b+2\lambda_1)(2a-b+4-a-1) = (b+2\lambda_1)(\lambda_1+1),$$

a jobb oldalát rendezve azt kapjuk, hogy $b(n-d-1) = b(d-b+1) = b(2\lambda_1+1)$, vagyis fennáll a $(b+2\lambda_1)(\lambda_1+1) = b(2\lambda_1+1)$ egyenlőség. Ha ezt b-re megoldjuk, akkor $b = 2(\lambda_1+1)$-t kapunk és ha ezt beírjuk f-re kapott képletünkbe, akkor azt kapjuk, hogy $f = 8 - \frac{12}{\lambda_1+2}$, ami alapján $\lambda_1 \in \{1, 2, 4, 10\}$. Ha $\lambda_1 = 1$, akkor $T(5)$ kapjuk ((iii) eset), $\lambda_1 = 2$ esetén Clebsch-gráf komplementerének paramétereit kapjuk ((vii) eset) és $\lambda_1 = 4, 10$ esetekben hasonlóan ellentmondást kapunk, mint fentebb is a 2.3.8 tétel miatt.

- Utoljára tekintsük azt az esetet, hogy $F(x)$ egy erősen reguláris gráf, ez a gráf legyen Δ. Mivel ez a gráf részgráfja az eredeti gráfnak, emiatt tudjuk, hogy ebben is speciális csúcshármasokra egy négyszög és nulla darab 3-karom van. Nem lehetséges nulla négyszög, mert a részgráfban is b darab közös szomszédja van két nem szomszédos csúcsnak, amik között volt az eddigi négyzet. Vagyis $d'-2-2a'+(b'-1-q) = c$ egyenlet fennáll, ami azt adja, hogy $d' = 2a'-b'+4$. Ha ezt a részgráf sajátértékeibe beírjuk, ami $\frac{a'-b'\pm\sqrt{(a'-b')^2+4(d'-b')}}{2}$, akkor Δ legkisebb sajátértéke $\lambda_2' = -2$ és $\lambda_1' = \lambda_1 - \frac{b}{2}$ a harmadik sajátérték $\frac{4\lambda_1(\lambda_1+1)}{b(\lambda_1-\frac{b}{2}+2)}$ multiplicitással, amit korábbi $f = \frac{(b+2\lambda_1)(b+2\lambda_1+2)}{b(\lambda_1+2)}$ egyenlőségből kapunk meg. Δ részgráfja G-nek, emiatt tudunk csúcsszámra nézve indukciót alkalmazni. Tegyük fel, hogy az n csúccsal rendelkező G gráfokról akarjuk belátni, ekkor feltehetjük, hogy a maximum $n-1$ csúccsal rendelkező gráfokról tudjuk, hogy igaz a tételünk. Δ egy -2 sajátértékkel rendelkező erősen reguláris gráf, vagyis a fenti pár eset egyike. Az esetek közül nem kell megvizsgálni azt, amikor Δ vagy (ii) és (iii) esetekbe esik, mivel ezt az elején általánosan beláttuk és mivel nincs benne 3-karom, emiatt nem lehet $(iv)-(vi)$ esetek egyike sem. Ez alapján csak a $b' \in \{6, 8\}$ (mivel ilyen esetek maradtak már és tudjuk, hogy $b' = b$) vagy Δ megegyezik $K_{k\times 2}$-vel eseteket kell vizsgálnunk. Ha $b = 6$, akkor nincsen ilyen erősen reguláris gráf. Ha $b = 8$, akkor (vi) eset paramétereit kapjuk. Ha Δ megegyezik $K_{k\times 2}$-vel, akkor $(n, d, a, b) = (6k-3, 4k-4, 3k-5, 2k-2)$ paramétert kapjuk, tehát ki tudjuk számolni λ_1-t és annak multiplicitását a korábbiakhoz hasonló képletekből.

$$\lambda_1 = k-1,\ f = 8 - \frac{12}{\lambda_1+2}$$

értékeket kapjuk. Korábbi esetekhez hasonlóan oszthatóság miatt $\lambda_1 \in \{1, 2, 4, 10\}$ esetek lehetnek csak. Ha $\lambda_1 = 1$, akkor $L_2(3)$ paramétereit kapjuk, ami (*ii*) paramétereinek esete. Ha $\lambda_1 = 2$, akkor $T(6)$ paramétereit kapjuk, ami (*iii*) esete. Ha $\lambda_1 = 4$, akkor (*viii*) eset paramétereit kapjuk és $\lambda_1 = 10$ esetén hasonlóan ellentmondást kapunk, mint fentebb is a 2.3.8 tétel miatt.

$\square$

2.3. Egyéb feltételek

A fejezet első részében már pár összefüggést beláttam, hogy milyen algebrai feltételekkel kell rendelkeznie egy erősen reguláris gráfhoz tartozó számnégyesnek. Most azokon túl is szeretnék pár feltételt bizonyítani, amivel több számnégyesről meg tudjuk mutatni, hogy nem létezhet ilyen erősen reguláris gráf.

Egy G erősen reguláris gráfnak $\mathfrak{A}$ Bose-Mesner algebráját úgy definiáljuk, hogy a 3 dimenziós algebrája $\mathfrak{A}$-nak az I, J és A lineáris kombinációi. Ez valóban egy algebra, mivel a 2.1.7 lemmának az egyenlete fennáll. Mivel ez az algebra szimmetrikus kommutatív mátrixokból áll, emiatt létezik egy ortogonális mátrix, amely egyszerre diagonalizálja őket. Ez elemi módon a 2.1.7 lemmának az egyenletéből is látható. A Bose-Mesner algebra kapcsolatban áll az asszociációs sémákkal, amikkel a 4.1-ben fogunk foglalkozni, de jelenleg elég ennyi a tételhez. Továbbá a tételhez szükséges definiálni a Hadamard szorzatot.

2.3.1. Definíció. *Két azonos $m \times n$ dimenziójú A és B mátrixok esetén a Hadamard szorzatuk $A \circ B$, amely azonos dimenziójú, mint A és B és elemeire fennáll, hogy $(A \circ B)_{ij} = A_{ij} B_{ij}$.*

2.3.2. Megjegyzés. *A Hadamard szorzat a Kronecker szorzat egyik almátrixa, ahol $A \otimes B$ szorzatot értjük a Kronecker szorzat alatt.*

2.3.3. Példa. *Két példa 3×3-as mátrix Hadamard szorzata. Lentebb a két mátrix Kronecker szorzata látható, ahol az első, az ötödik és a kilencedik sorok és oszlopok metszete adja meg a Hamamard szorzatot.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 24 & 30 & 0 \\ 12 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 2 & \boxed{0} & 16 & 3 & 0 & \boxed{24} \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 0 & 18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 6 & 6 & 15 & 9 \\ 4 & 0 & 32 & 5 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{24} & 24 & 0 & 30 & \boxed{30} & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 8 & 20 & 12 & 10 & 25 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 56 \\ 36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 42 & 0 \\ \boxed{12} & 30 & 18 & 0 & \boxed{0} & 0 & 14 & 35 & \boxed{21} \end{bmatrix}$$

2.3.4. Megjegyzés. *Két pozitív szemidefinit mátrix Hadamard szorzata is pozitív szemidefinit.*

A következő pár lemma a következő tétel előkészülete.

2.3.5. Lemma. *Legyen A egy valós szimmetrikus mátrix, ekkor*

$$\lambda_1 = \max_{\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}} \frac{\underline{\mathbf{x}}^\top A \, \underline{\mathbf{x}}}{||x||^2} \quad \textit{és} \quad \lambda_n = \min_{\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}} \frac{\underline{\mathbf{x}}^\top A \, \underline{\mathbf{x}}}{||x||^2}$$

egyenletek fennállnak.

Bizonyítás. Mivel A-nak van sajátvektorokból álló ortonormált bázisa, emiatt legyen $\underline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \underline{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \underline{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{\mathbf{v}}_n$. Ez alapján felírhatjuk a $A\underline{\mathbf{x}}$ szorzatot, ami $\lambda_1 \alpha_1 \underline{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \underline{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n \underline{\mathbf{v}}_n$ értéket adja. Ezt balról szorozva $\underline{\mathbf{x}}^\top$-szel kapjuk meg a fentebb keresett tört számlálóját, ami $\lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^2$ értékű, mivel a v_i vektoroknak v_i-vel vett skalárszorzata 1, míg minden más v_j-vel 0 lesz a skalárszorzata. Ezt tudjuk felülről illetve alulról becsülni $\lambda_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2) = \lambda_1 ||x||^2$ és $\lambda_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2) = \lambda_n ||x||^2$ értékekkel, amivel megkaptuk a bizonyítandó állítást. □

2.3.6. Lemma. *Legyen A és B két pozitív szemidefinit mátrix, amiknek sajátértékei $[\alpha_1, \alpha_2]$ és $[\beta_1, \beta_2]$ közé esnek, ahol mind a 4 nemnegatív szám. Ekkor A-nak és B-nek a Hadamard szorzatának sajátértékei $[\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2]$ közé esnek.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy fennáll a $A\underline{\mathbf{x}} = \lambda \underline{\mathbf{x}}$ és $B\underline{\mathbf{y}} = \mu \underline{\mathbf{y}}$ egyenlet a két mátrixra. Most tekintsük $A \otimes B$ mátrixnak a $[y_1\underline{\mathbf{x}}, y_2\underline{\mathbf{x}}, \ldots, y_n\underline{\mathbf{x}}]$ oszlopvektorral jobbról való szorzását. Tekintsük az első sorban kapott értéket:

$$y_1 b_{11} A\underline{\mathbf{x}} + y_2 b_{12} A\underline{\mathbf{x}} + \cdots + y_n b_{1n} A\underline{\mathbf{x}} = (y_1 b_{11} + y_2 b_{12} + \cdots + y_n b_{1n}) A\underline{\mathbf{x}} = \mu y_1 \lambda \underline{\mathbf{x}} = \mu \lambda y_1 \underline{\mathbf{x}}.$$

A szorzás többi sorban is hasonló eredményt ad, csak természetesen másik y_i-vel, vagyis azt kaptuk, hogy ez pontosan $\lambda\mu$-szöröse az eredetileg vett oszlopvektornak, vagyis A és B mátrixok Kronecker szorzatának sajátértékei $\lambda_i \mu_j$ alakban állnak elő.

Most nézzük $A \circ B$ szorzatnak sajátértékeit, mivel tudjuk, hogy Hadamard szorzat a Kronecker szorzat egy almátrixa, emiatt a 2.3 lemma alapján megtehetjük, hogy $A \otimes B$ mátrixra nézve becsüljük felülről a sajátértékeket. Ez alapján azt kapjuk, hogy

$$\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i(A \circ B) = \max_{\underline{\mathbf{x}}\neq\underline{\mathbf{0}}} \frac{\underline{\mathbf{x}}^\top (A \circ B)\underline{\mathbf{x}}}{||x||^2} \leq \max_{\underline{\mathbf{x}}\neq\underline{\mathbf{0}}} \frac{\underline{\mathbf{x}}^\top (A \otimes B)\underline{\mathbf{x}}}{||x||^2} = \max_{i,j}(\lambda_i \mu_j).$$

A középső egyenlőtlenség, amiatt áll fenn, mert a Hadamard szorzat almátrixja a Kronecker szorzat mátrixának és a többi vektorérték nullával egyezik meg a kiterjesztés során. Vagyis megkaptuk az állításunk egyik oldalát és a másik oldal is ugyanilyen módszerrel kapható meg. □

A következő tételt a témában Krein feltételnek szokták hívni.

2.3.7. Tétel. *Legyen G egy erősen reguláris gráf, amelynek az adjacencia mátrixa A és d, λ_1 és λ_2 sajátértékei vannak. Ekkor*

$$(\lambda_1 + 1)(d + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (d + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2$$

és

$$(\lambda_2 + 1)(d + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (d + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)^2$$

egyenlőtlenségek fennállnak.

Bizonyítás. Legyen $B := J - I - A$. Tudjuk, hogy $\mathfrak{A}$ mátrixoknak három közös sajátaltere van, melyeknek 1, f és g a dimenziójúak. Nevezzük ezeknek az altereit V_0, V_1 és V_2 altereknek. Itt V_0 a $\mathbb{1}$ által kifeszített altér, míg V_1 és V_2 az A mátrix λ_1 és λ_2 sajátértékeihez tartozó sajátalterek. Legyen $i = 0, 1, 2$ esetén E_i a V_i-re való vetítés mátrixa, azaz E_i sajátértéke V_i-n egy és a másik két sajátaltéren pedig nulla. Ezeket a mátrixokat nevezzük $\mathfrak{A}$ minimális idempotens bázisának. Tekintsük most ugyanazt az $\mathfrak{A}$ halmazt, de szorzásként vegyük a Hadamard szorzatukat. Nyilvánvaló, hogy I, A és B közül bármely kettőnek 0 a szorzata. Minden $(0, 1)$-mátrix idempotens a Hadamard szorzatra, emiatt $\mathfrak{A}$ zárt a Hadamard szorzásra, és az I, A és B mátrixok alkotják a minimális idempotenseknek bázisát.

Az E_i, ahol $i \in \{0, 1, 2\}$, definíciója alapján fennáll, hogy $I = E_0 + E_1 + E_2$, $A = dE_0 + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ és $B = (n-d-1)E_0 + (-\lambda_1 - 1)E_1 + (-\lambda_2 - 1)E_2$. Ezekből pedig megkapjuk E_i-ket I, A és B függvényében.

A Hadamard szorzat adja E_i mátrixok másik kifejezését. Mivel ezek a bázisai $\mathfrak{A}$-nak, emiatt tudjuk, hogy

$$E_i \circ E_j = \sum_{k=0}^{2} q_{ij}^k E_k,$$

ahol q_{ij}^k a sajátértéke a $E_i \circ E_j$-nek a V_k-n. Ez egy hosszas számolás, de a q_{ij}^k értékek kifejezhetők a G paramétereinek segítségével a fenti egyenletek alapján.

Tudjuk, hogy a Hadamard szorzat a Kronecker szorzat egyik almátrixa. Ez a mátrix idempotens, vagyis minden sajátértéke 0 vagy 1. Így tudjuk, hogy a q_{ij}^k sajátértékeknek 0 és 1 között kell lenniük a 2.3.6 lemma miatt.

Miután elvégeztük az összes számítást azt kapjuk, hogy az egyenlőtlenségek közül kettő kivételével mindegyik teljesül. Ez a kettő $q_{11}^1 \geq 0$ és $q_{22}^2 \geq 0$. Ha ezeket a két egyenletet kifejezzük, akkor megkapjuk a tételbeli állításokat. □

A 2.2.5 tétel bizonyítása során többször hivatkoztunk egy úgy nevezett abszolút korlát nevű egyenlőtlenségre, amely megtalálható a [7] cikkben.

2.3.8. Lemma. *Ha egy erősen reguláris gráfnak λ_1-hez és λ_2-höz tartozó multiplicitásaik f és g, akkor mindig fennállnak az $n \leq \frac{1}{2}f(f+3)$ és $n \leq \frac{1}{2}g(g+3)$ egyenlőtlenségek.*

Bizonyítás. Legyen $B := J - I - A$ és legyenek E_i mátrixok az előző bizonyításban szereplő idompotens mátrixok $i = 0, 1, 2$ esetén. Legyen

$$E_1 = \alpha I + \beta A + \gamma B.$$

Mivel az E_1 szimmetrikus, emiatt van olyan $\begin{pmatrix} H_1 & K_1 \end{pmatrix}$ ortogonális mátrix, amire teljesül, hogy

$$E_1 = \begin{pmatrix} H_1 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\top \\ K_1^\top \end{pmatrix} = H_1 H_1^\top$$

ahol H_1 egy $n \times f$ mátrix, amire igaz, hogy $H_1^\top H_1 = I$. A H_1 sorait az $\mathbb{R}^f$-ből v darab vektornak tekintjük. Ebből következik, hogy a vektorok mindegyike $\alpha^{\frac{1}{2}}$ hosszúságú, és bármely két különböző vektorának (nevezzük S-nek) belső szorzata β vagy γ. Az ilyen halmazt gömbi 2-távolságú halmaznak nevezzük, mert S-t úgy értelmezhetjük, mint a gömb olyan pontjainak halmazát, amelyek csak két különböző távolsággal rendelkeznek. Meg kell mutatnunk, hogy S számossága legfeljebb $\frac{1}{2}f(f+3)$.

Normáljuk le őket és ekkor kapunk egy S' halmazt a v vektorokból az $\mathbb{R}^f$-beli Ω egységgömbön, és legyen a két belső szorzata b és c. Minden $v \in S'$-re definiálunk egy $f_v : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt a következők szerint

$$f_v(x) := \frac{(\langle v, x\rangle - b)(\langle v, x\rangle - c)}{(1-b)(1-c)}.$$

Ha $f_v(x)$ függvényt kifejtve azt kapjuk, hogy

$$f_v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(1-b)(1-c)}\left(\sum_{i=1}^{f} v_i x_i - b\right)\left(\sum_{i=1}^{f} v_i x_i - c\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \gamma_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{f} \gamma_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{f} \delta_i x_i + e.$$

Most belátjuk, hogy az n darab különböző függvényünk lineárisan független egymástól. Tegyük fel, hogy léteznek olyan konstansok, amire fennáll, hogy a függvényeink lineárisan összefüggők

$$\alpha_1 f_{v_1}(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_2 f_{v_2}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \alpha_n f_{v_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Ha bármely v_i-t helyettesíttünk az egyenletbe azt kapjuk, hogy $\alpha_i = 0$, mert $f_{v_i}(v_i) = 1$ és $f_{v_j}(v_j) = 0$, amely alapján ellentmondást kaptunk.

Ez alapján függvények lineárisan függetlenek, emiatt meg kell nézni, hogy maximum hány dimenziós lehet az ilyen függvények tere. A másodfokú tag és a lineáris tag szintén f dimenziós lehet, míg a dupla szorzattal rendelkező tagok $\binom{f}{2}$ dimenzióval rendelkeznek, míg a konstans 1 dimenziós, amit szépen ki tudunk ütni az által, hogy feltettük, hogy a vektoraink egy egységgömbben vannak, vagyis a konstanst fel lehet írni, mint $\sum_{i=1}^{f} x_i^2 = 1$ többszöröse. A dimenziókat összegezve azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}f(f+3)$ dimenziós, vagyis maximum ennyiféle $f_v(x)$ függvény lehet, vagyis $n \leq \frac{1}{2}f(f+3)$. □

A. Neumaier 1980-ban javított ezen az eredményen és azt kapta, hogy

$$n \leq \frac{1}{2}f(f+1),$$

hacsak nem $q_{11}^1 = 0$ és természetesen a másik egyenlet is hasonlóan néz ki.

3. fejezet

Teljes gráfok fedései erősen reguláris gráfokkal

A téma alapötletét az alábbi 3.1.1 ismert tétel adta. Érdemesnek tűnt megnézni a tétel kapcsán, hogy mely n esetén tudunk fedni éldiszjunktan 3 izomorf erősen reguláris gráffal egy n csúcsú teljes gráfot. A fejezetben főleg jól ismert állítások lesznek kezdetben, majd zárásként saját eredményeimet mutatom be.

3.1. K_{10} fedése három Petersen-gráffal

Ahogy fentebb is írtam a következő tétel az alapja témának, amire két bizonyítás is olvasható.

3.1.1. Tétel. *K_{10} nem fedhető három éldiszjunkt Petersen-gráffal.*

Első bizonyítás. Tegyük fel, hogy mégis lefedhető három Petersen-gráffal a K_{10}. Legyen $A_{K_{10}}$ a K_{10} adjacencia mátrixa, míg A_1, A_2 és A_3 a Petersen-gráfok adjacencia mátrixai. A fedhetőség miatt fennáll, hogy $A_{K_{10}} = J - I = A_1 + A_2 + A_3$, ahol J a csupa egy mátrix, míg I az identitás mátrix.

Mivel a Petersen-gráf reguláris, emiatt sajátvektora az $\mathbb{1}$ vektor és könnyen kiszámolható, hogy a 1 sajátérték 5-szörös multiplicitású, ami a gráf spektrumát nézve azt jelenti, hogy az 1-hez tartozó sajátaltér 5 dimenziós. Legyen az A_1-hez tartozó altér V_1 és hasonlóan A_2-höz tartozó altér V_2.

A spektrumot nézve tudjuk, hogy $V_1, V_2 \subset \mathbb{1}^{\perp}$, mert különböző sajáértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra és A_1 és A_2 esetén is sajátvektor az $\mathbb{1}$ vektor. A $\dim(V_i) = 5$, mivel 5-szörös sajátérték az 1, míg $\dim(\mathbb{1}^{\perp}) = 9$, mert $\mathbb{1}$, csak egyszeres sajátvektor, amik alapján felírható, hogy $\dim(V_1 \cap V_2) \geq 1$. Ez alapján létezik $\underline{\mathbf{x}} \in V_1 \cap V_2$ vektor, amire igaz, hogy $\underline{\mathbf{x}} \neq 0$. Ezzel az $\underline{\mathbf{x}}$ vektorral szorozzuk be $A_{K_{10}}$ mátrixot.

$$J\underline{\mathbf{x}} - I\underline{\mathbf{x}} = A_1\underline{\mathbf{x}} + A_2\underline{\mathbf{x}} + A_3\underline{\mathbf{x}},$$

amit rendezve azt kapjuk, hogy

$$A_3\underline{\mathbf{x}} = J\underline{\mathbf{x}} - I\underline{\mathbf{x}} - A_1\underline{\mathbf{x}} - A_2\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} - \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} = -3\underline{\mathbf{x}}.$$

Ez azonban nem lehet, mert a -3 nem sajátértéke a Petersen-gráfnak, vagyis ellentmondást kaptunk. □

3.1.2. Megjegyzés. *Be lehet pakolni éldiszjunktan két Petersen-gráfot a K_{10}-be, úgy, hogy természetesen maradnak fedetlen élek. A fentebbi bizonyításban látható, hogy a kimaradó élek által kifeszített H gráf 3-reguláris és sajátértéke -3. Megmutatható, hogy H összefüggő. Ez alapján azt kapjuk, hogy H egy páros gráf.*

Második bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy a K_{10} teljes gráf felbontható 3 éldiszjunkt Petersen-gráf uniójára. Színezzük ezen Petersen-gráfok éleit kékkel, pirossal és zölddel. Legyen v egy csúcsa K_{10}-nek és legyenek k_1, k_2, k_3 a v szomszédai a kék gráfban. Hasonlóan legyenek p_1, p_2, p_3, z_1, z_2, z_3 a v szomszédai a piros és zöld gráfban.

Nézzük meg a k_1, k_2, k_3 és p_1, p_2, p_3 csúcsosztályokból álló páros gráfot. Tudjuk, hogy a (v, p_1) él piros, vagyis a kék Petersen-gráfban v és p_1 között kettő hosszú út van. Ez azt jelenti, hogy p_1 és k_1, k_2, k_3 között pontosan egy kék él megy. Hasonlóan p_2 és p_3 pontosan egy éllel csatlakozik k_1, k_2, k_3 csúcsokhoz, vagyis pontosan 3 kék él megy k_1, k_2, k_3 és p_1, p_2, p_3 csúcsosztályok közt. Ugyanezen gondolatmenet alapján látható, hogy pontosan 3 piros él megy k_1, k_2, k_3 és p_1, p_2, p_3 csúcsosztályok közt, tehát 3 zöld él megy.

Most a zöld Petersen-gráfot nézzük. Töröljük v, z_1, z_2, z_3 csúcsokat ebből a gráfból, így a maradék 6 csúcs egy kört feszít. A korábbi bekezdés alapján ennek a 6 hosszú körnek van olyan vágása, amely pontosan 3 élt tartalmaz. Ez azonban nem lehetséges, mert egy 6 hosszú kör minden vágása páros sok élt tartalmaz hiszen ahogy körbemegyünk a körön páros sokszor kell a vágáson átmenni, hogy visszaérjünk arra az oldalra ahonnan elindultunk.

Ez ellentmondás, tehát nem bontható fel K_{10} teljes gráf 3 éldiszjunkt Petersen-gráf uniójára. □

3.1.3. Megjegyzés. *Hat Petersen-gráffal le tudjuk fedni kétszeresen a K_{10}-et.*

3.2. K_{16} fedése három Clebsch-gráffal és következménye

Továbbra is 3 éldiszjunkt gráffal való fedésnél maradva Clebsch-gráffal fogunk fedni.

3.2.1. Definíció. *Clebsch-gráfnak hívjuk a* $(16, 5, 0, 2)$ *paraméter négyessel rendelkező erősen reguláris gráfot.*

3.2.2. Tétel. K_{16} *teljes gráf lefedhető három éldiszjunkt Clebsch-gráffal.*

3.2.3. Megjegyzés. *Ha egy csúcsot és szomszédait eltávolítjuk a Clebsch-gráfból, akkor egy Petersen-gráfot kapunk.*

A következő tétel egy Ramsey szám megadása, ami első hangzásra eltér a témától, de a bizonyítás során világossá válik, hogy miben kapcsolódik hozzá.

3.2.4. Definíció. *Ha* $r, k_1, k_2, \ldots, k_s$ *pozitív egész számok, akkor van olyan legkisebb* $R_r(k_1, \ldots, k_s)$ *pozitív egész szám, hogy igaz a következő állítás: ha tetszőleges* S *halmazra* $|S| = R_r(k_1, \ldots, k_s)$ *és* S *összes* r *elemű részhalmazának halmazát* s *színnel színezzük akkor valamelyik* i*-re igaz, hogy van az alaphalmaznak olyan* k_i*-elemű részhalmaza, aminek összes* r *elemű részhalmaza az* i*-edik színt kapja.*

A matematikában $R_r(k_1, \ldots, k_s)$ szám Ramsey számként ismeretes.

3.2.5. Tétel. $R(3, 3, 3) = 17$*, amely azt mondja ki, hogy ha egy* 17 *csúcsú teljes gráf éleit* 3 *színnel színezzük, akkor van benne egyszínű háromszög, de* 16 *csúcs esetén nem minden esetben létezik ilyen színezés.*

Bizonyítás. A 3.2.2 tételben szereplő Clebsch-gráfban nincsen háromszög, mivel a harmadik paraméter 0. Ez alapján ha a 3 éldiszjunkt részgráfot megszínezzük különböző színekkel, akkor ez egy ellenpélda, arra hogy nem lehet $R(3, 3, 3) = 16$.

Legyen a K_{17} egy tetszőleges csúcsa p. Legyen P kék, piros és zöld szomszédainak halmaza rendre A_1, A_2, A_3. Mivel minden csúcs valamelyik halmazba tartozik, emiatt $1 + |A_1| + |A_2| + |A_3| = 17$. Skatulya-elv miatt létezik olyan i, hogy $|A_i| \geq 6$. Mivel nem használtuk ki egyes színek tulajdonságait, emiatt legyen ebben az esetben $i = 1$, amire ez teljesül. Az A_1-ben emiatt 1-es színű él nem lehet, vagyis a másik kettő szín van csak abban a legalább 6 csúcsú teljes gráfban. Tudjuk, hogy $R(3, 3) = 6$, emiatt van benne háromszög. □

3.3. Fedés két izomorf erősen reguláris gráffal

Eddigi tételek 3 részgráffal való fedéssel foglalkoztak, de mielőtt ebben jobban elmélyednénk, azelőtt érdemes megvizsgálni a 2 részgráf esetét.

3.3.1. Lemma. *Legyen G egy erősen reguláris gráf, ekkor G komplementere is erősen reguláris és $(n, n-d-1, n-2d+b-2, n-2d+a)$ paraméterekkel rendelkezik.*

Bizonyítás. A fokszám meggondolható, hogy minden csúcsra ennyi lesz, mert nem lesz összekötve magával és az eredeti gráfban lévő szomszédaival.

A komplementer gráfban két szomszédos csúcsnak a közös szomszédairól a következőt tudjuk. Az eredeti gráfban nem volt szomszédos a két csúcs és volt b darab ottani közös szomszéd és ezen felül $2d-2b$ darab csúcs van, ami pontosan az egyik csúccsal szomszédos az eredeti gráfban, vagyis az eredeti gráfban $n-(2d-2b)-b-2$ olyan csúcs van, ami nem a két kiválasztott csúcs és egyikkel sem szomszédos. Ezen csúcsok a komplementer gráfban lesznek pont a közös szomszédok. A negyedik paraméter ehhez hasonlóan jön ki, vagyis a komplementer gráf tényleg erősen reguláris gráf. □

3.3.2. Tétel. *Legyen G egy erősen reguláris gráf. Ha G két éldiszjunkt darabja lefed egy teljes gráfot, akkor G konferencia gráf.*

Bizonyítás. Mivel két darab erősen reguláris gráffal fedünk, ebből kifolyólag egymás komplementerei, úgy hogy $(n, d, a, b) = (n, n-d-1, n-2d+b-2, n-2d+a)$ egyenlőség fennáll. A fokszámok alapján $d = \frac{n-1}{2}$, míg a két másik paraméterből azt kapjuk, hogy $a = n-2d+b-2$ és $b = n-2d+a$, amik alapján azt kapjuk, hogy $a = b-1$.

Most az eredeti gráfra használjuk a 2.1.3-ben szereplő egyenlőséget.

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-3}{2}-a\right) = (a+1)\frac{n-1}{2}$$

Az egyenletet megoldjuk a-ra, amelyből azt kapjuk, hogy $a = \frac{n-5}{4}$ és $b = \frac{n-1}{4}$, amelyek valóban a konferencia gráfok paramétereinek felelnek meg. □

3.4. Három izomorf erősen reguláris gráf uniója

Szeretnénk általánosan alkalmazni azt a sajátértékes módszert, amely alapja volt a 3.1.1 tétel első bizonyításának.

Tegyük fel, hogy egy adott n-re lefedhető K_n teljes gráf 3 darab éldiszjunkt erősen reguláris G gráffal. Hasonlóan legyenek az adjacencia mátrixok A_{K_n}, A_1, A_2 és A_3.

A fedhetőség miatt ebben az esetben is fennáll, hogy $A_{K_n} = J - I = A_1 + A_2 + A_3$, ahol J a csupa egyes mátrix, míg I az identitás mátrix. Tudjuk, hogy az $\mathbb{1}$ vektor sajátvektora mindhárom adjacencia mátrixnak.

Mivel G-nek 3 sajátértéke van, amik közül egyszeres sajátérték d, akkor további sajátértékek közül az egyik multiplicitása legalább $\frac{n}{2}$.

Ez akkor nem áll fenn, ha a mindkettő $\frac{n-1}{2}$ multiplicitású, de ebben az esetben a 2.2.2 lemma alapján konferencia gráfokról van szó és a legutóbbi tételben beláttuk két darab konferencia gráffal tudunk fedni egy teljes gráfot, így természetesen nem lehetséges hárommal való fedés.

A spektrumot nézve tudjuk, hogy az egyik sajátértéknek van olyan V_1 és V_2 sajátaltere A_1-hez és A_2-höz, hogy azok legalább $\frac{n}{2}$ dimenziósak. A $\dim(\mathbb{1}^\perp) = n-1$, amely tartalmazza V_1 és V_2 sajátaltereket, mert természetesen nem annak a sajátértéknek sajátvektora az $\mathbb{1}$. Vagyis $\dim(V_1 \cap V_2) \geq 1$, emiatt legyen $\underline{\mathbf{x}} \in V_1 \cap V_2$.

$$J\underline{\mathbf{x}} - I\underline{\mathbf{x}} = A_1\underline{\mathbf{x}} + A_2\underline{\mathbf{x}} + A_3\underline{\mathbf{x}},$$

amit rendezve azt kapjuk, hogy

$$A_3\underline{\mathbf{x}} = J\underline{\mathbf{x}} - I\underline{\mathbf{x}} - A_1\underline{\mathbf{x}} - A_2\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} - \underline{\mathbf{x}} - \lambda_1\underline{\mathbf{x}} - \lambda_1\underline{\mathbf{x}} = -(2\lambda_1 + 1)\underline{\mathbf{x}}.$$

Vagyis abban az esetben lehetséges a fedés, ha $\lambda_2 = -(2\lambda_1 + 1)$ egyenlőség fennáll a két sajátérték közt és ezek közül az egyik sem lehet d, mivel annak nem lehet $\underline{\mathbf{x}}$ a sajátvektora.

Mivel minden élet pontosan egyszer fogunk fedni, emiatt $\frac{3nd}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Rendezve $d = \frac{n-1}{3}$ egyenlőség adódik.

Korábbiakhoz hasonlóan legyen f és g rendre λ_1 és λ_2 multiplicitása és írjuk fel, hogy multiplicitások összege n, míg a sajátértékek összege 0.

$$1 + f + g = n = 3d + 1$$
$$d + f\lambda_1 + g\lambda_2 = d + f\lambda_1 - g(2\lambda_1 + 1) = 0$$

Ezen egyenleteket rendezve azt kapjuk, hogy $f = 2d$ és $g = d$ és a 2.1.3 tételt rendezve azt kapjuk, hogy $d = 2b + a + 1$.

A 2.1.8 tételben két sajátértéket az alapján adódik, hogy egy másodfokú egyenletet oldunk meg. Arra alkalmazva a Viéte-formulákat azt kapjuk, hogy $\lambda_1\lambda_2 = b-d$ és $\lambda_1 + \lambda_2 = a-b$ és ha ebben korábbi összefüggéseket használjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$b = (a+1) \pm \sqrt{a+1}.$$

Legyen $a + 1 = k^2$, ahol $k \in \mathbb{N}$, ekkor $a = k^2 - 1$, $b = k^2 \pm k$. Az egyszerűség kedvéért inkább szedjük szét a kettő esetet és ez alapján már az összes paraméter kifejezhető k függvényében.

Az egyik ilyen család paraméterei az alábbiak $n = (3k + 1)^2$, $d = 3k^2 + 2k$, $a = k^2 - 1$ és $b = k^2 + k$, amiből azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -(2k + 1)$, $f = 6k^2 + 4k$ és $g = 3k^2 + 2k$. A másik ilyen család paraméterei az alábbiak $n = (3k - 1)^2$, $d = 3k^2 - 2k$, $a = k^2 - 1$ és $b = k^2 - k$, amiből azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = -k$, $\lambda_2 = 2k + 1$, $f = 6k^2 - 4k$ és $g = 3k^2 - 2k$.

Foglaljuk össze az eredményünket egy tételben, amit kaptunk.

3.4.1. Tétel. *Ha egy n csúccsal rendelkező teljes gráfot éldiszjunktan fedünk három erősen reguláris gráffal és legyen $k \in \mathbb{N}$, akkor az az erősen reguláris gráf az alábbiak egyikébe esik:*

(i) A $((3k + 1)^2, 3k^2 + 2k, k^2 - 1, k^2 + k)$ paraméterekkel rendelkező család,

(ii) A $((3k - 1)^2, 3k^2 - 2k, k^2 - 1, k^2 - k)$ paraméterekkel rendelkező család.

Bizonyítást a fentebb látható, de természetesen attól, hogy adott paraméter négyest elméleti úton nem zártuk ki, attól még nem világos, hogy léteznek-e, illetve hogy lehet-e velük fedni.

3.5. Ortogonális tömbök és Latin-négyzetek

Az alábbiakban egy speciális gráfosztályt mutatunk be, az úgy nevezett ortogonális tömböt, amit elsőnek definiálok.

3.5.1. Definíció. *Legyen A egy $k \times N$-es mátrix, amelynek elemei az $0, \dots, (s-1)$ halmazból származnak, ahol $s \geq 2$. Ezt mátrixot egy t erejű ortogonális tömbnek hívjuk, ha minden $t \times N$ részmátrixban szerepel az összes lehetséges $t \times 1$ oszlopvektor λ-szor. A λ-t a tömb indexének hívjuk és világos, hogy $N = \lambda s^t$.*

3.5.2. Példa. *Az $OA(18, 7, 3, 2)$ paraméterű ortogonális tömb létezik 2 indexszel. Azt könnyű látni, hogy minden 2×18 méretű részmátrixban a $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$ oszlopvektorok mindegyike kétszer szerepel.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Minket csak az az eset érdekel, amikor $t = 2$ és $\lambda = 1$, továbbiakban az ilyen ortogonális tömböt $OA(n, k)$-val jelöljük. Ekkor ha adott egy $OA(n, k)$, akkor ez definiál egy G gráfot a következőképpen:

(i) A G csúcsai az n^2 darab oszlopvektora az $OA(n, k)$-nak,

(ii) Két csúcs szomszédos, akkor és csak akkor, ha a hozzájuk tartozó vektorok pontosan egy koordinátában egyeznek meg.

3.5.3. Tétel. *A gráf, amit fentebb definiáltunk az valójában egy erősen reguláris gráf* $(n^2, (n-1)k, n-2+(k-1)(k-2), k(k-1))$ *paraméterekkel.*

Bizonyítás. Legyen X az $OA(n, k)$ ortogonális tömb oszlopvektorainak halmaza. Elsőnek megadásra kerül, hogy mennyi a regularitási száma a gráfnak. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X$ és legyen $y = (y_1, \ldots, y_k)$ egy szomszédja x-nek akkor és csak akkor, ha $x_i = y_i$ egyetlen i-re és $x_j \neq y_j$ az összes j-re, ami nem egyezik i-vel. Egy i-re pontosan $n-1$ darab olyan y csúcs van, amik az i koordinátában egyeznek meg x-szel, vagyis összesen $k(n-1)$ darab csúcs van, ami szomszédos vele és kettő ilyen nem eshet egybe.

Legyen x és y két szomszédos csúcs és feltehetjük, hogy az első koordinátában egyeznek meg, mivel nincs kitüntetett szerepe az első sornak, emiatt a többi koordinátára is igazak a továbbiak, ekkor $(a, x_2, \ldots, x_k)$ és $(a, y_2, \ldots, y_n)$ alakban állnak elő, ahol $x_i \neq y_i$ minden $2 \leq i \leq k$. Legyen z szomszédja x-nek és y-nak, ekkor z oszlopvektora a kettő lehetőség közül az egyik:

(i) $(a, z_2, \ldots, z_k)$, ahol $x_i \neq z_i \neq y_i$ fennáll minden $2 \leq i \leq k$,

(ii) $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, ahol $z_1 \neq a$, $z_i = x_i$ és $z_j = y_j$, ahol $j \neq i$ és minden további l-re $x_l \neq z_l \neq y_l$.

Az (i) lehetőség pontosan $n-2$ oszlopra igaz, mivel összesen n darab oszlop kezdődik azonos értékkel. Pontosan $(k-1)(k-2)$ darab olyan oszlop van, amire a (ii) eset teljesül, mivel az első koordináta kivételével bármely másik kettő koordinátában lehet az egyezés, mivel az ortogonális tömb definiciója miatt bármely két oszlopvektor pontosan egy koordinátában egyezik meg. Emellett számít, hogy melyik koordinátában egyezik meg x-szel és melyikben y-nal. Vagyis összesen $n-2+(k-1)(k-2)$ csúcs szomszédja egyszerre x-nek és y-nak, ahol ők szomszédosak. Hasonló elv alapján számolható, hogy két nem szomszédos csúcsnak pontosan $k(k-1)$ csúcs közös szomszédja. □

3.5.4. Következmény. *A 3.4.1 tételben szereplő második család paraméterei megegyeznek a fentebbi tétel alapján a* $OA(3k-1,k)$ *paraméterű ortogonális tömb által definiált gráf paramétereivel.*

3.5.5. Definíció. *Egy* $n \times n$ *mátrix Latin négyzet, ha elemei az* $0,1,\ldots,n-1$ *halmazból valók és ezen felül minden sorban és oszlopban minden elem pontosan egyszer található meg.*

Két Latin négyzet, akkor merőleges egymásra, ha az n^2 *darab azonos helyen lévő számpárok mindegyike különböző.*

3.5.6. Definíció. $L_1,\ldots,L_k$ *páronként merőleges egymásra, vagy másnéven MOLS ("Mutually orthogonal Latin square") halmaza, ha minden* $1 \le i < j \le k$*-ra* L_i *és* L_j *merőleges egymásra.*

3.5.7. Állítás ([7])**.** *A* $OA(n,k+2)$ *ortogonális tömb létezése kombinatorilag ekvivalens k darab páronként merőleges Latin négyzet létezésével.*

Bizonyítás. Legyen a k darab négyzet $L_1,\ldots,L_k$ és feltehető azonos S halmazból vannak kiválasztva, ekkor az ortogonális tömb oszlopai így fognak kinézni:

$$[i,j,L_1(i,j),\ldots,L_k(i,j)]^\top, \quad i,j \in S.$$

□

3.5.8. Példa. *Lentebb a* $OA(3,4)$ *ortogonális tömb látható, amit kettő Latin négyzetből a legutóbbi bizonyításban szereplő módon állítottunk elő.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5.9. Állítás. *Ha q prím vagy prímhatvány, akkor a q méretű egymásra merőleges Latin négyzetek maximális száma $q-1$.*

Bizonyítás. A $\mathbb{F}_q$ véges testből következő konstrukcióból jön a bizonyításunk. A $\mathbb{F}_q$ multiplikatív csoportja ciklikus csoport, tehát van egy generátora, ami legyen λ, ami azt jelenti, hogy a test minden nem nulla eleme kifejezhető λ különböző hatványaival. Legyen $\mathbb{F}_q$ véges test q darab eleme a következő:

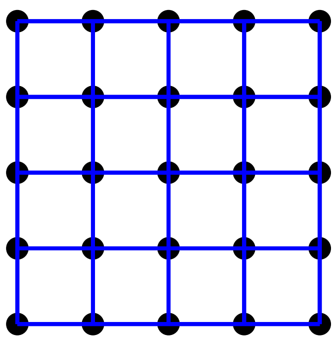
$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \lambda, \alpha_3 = \lambda^2, \ldots, \alpha_{q-1} = \lambda^{q-2}.$$

Tudjuk, hogy $\lambda^{q-1} = 1$ és az α-kra vonatkozó szorzást is, ami nem más, mint $\alpha_i\alpha_j = \alpha_l$, ahol $l \equiv i + j - 1 \mod q - 1$. Legyenek L_r-ek a Latin négyzeteink, ahol $r \neq 0$, és a Latin négyzet (i, j)-edik eleme $L_r(i, j)$. Ezek alapján a Latin négyzeteink megadhatóak $L_r(i, j) = \alpha_i + \alpha_r\alpha_j$ összegként, ahol minden művelet a $\mathbb{F}_q$-beli. Abban az esetben, ha a $q = p$ prím, ahol a test elemeit a szokásos módon, egész számokként, modulo p-hez viszonyítva nevezzük el, akkor a fenti elnevezés elhagyható, és egyszerűsíthető a megadás $L_r(i, j) = i + rj$-re, ahol $r \neq 0$ és i, j és r a $\mathbb{F}_p$ elemei, és minden művelet a $\mathbb{F}_p$-beli. □

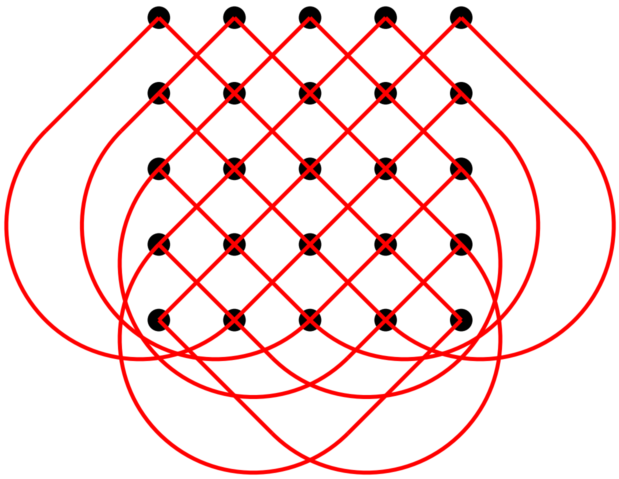
Eddigi állításaink eredménye az, hogy létezik $3k-1$ alakú prím vagy prímhatvány esetén $3k-2$ darab Latin négyzet, amik merőlegesek egymás a 3.5.9 állítás alapján, amiből következik a 3.5.7 állítás miatt, hogy van $OA(3k-1, 3k)$ ortogonális tömb. Most már tudjuk, hogy felbontható három diszjunkt részre, amik erősen reguláris gráfot alkotnak. Ezt megtehetjük, úgy hogy az ortogonális tömböt három egyenlő részre felvágjuk a sorai mentén. Ez alapján megfogalmazhatjuk a következményünk.

3.5.10. Következmény. *Ha $3k-1$ alakú szám prím vagy prímhatvány, akkor létezik $((3k-1)^2, 3k^2-2k, k^2-1, k^2-k)$ paraméterű erősen reguláris gráf és három ilyen gráffal tudunk éldiszjunktan fedni egy teljes gráfot.*

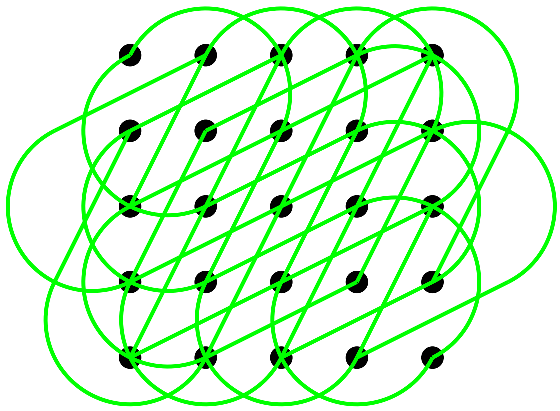
Zárásul pedig itt látható a K_{25} teljes gráf fedése három darab $(25, 8, 3, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráffal. A jobb átláthatóság miatt inkább a három erősen reguláris gráfot nem egy ábrára tettem.



Természetesen az ábrák úgy értendők, hogy az egy egyenesen lévő csúcsok K_5-t alkotnak és nem csak a kettő egymás mellett lévő csúcs szomszédos.



A piros és zöld élek mentén is igaz az, hogy az egyenesen lévő csúcsok K_5-t alkotnak és itt külön kiemelendő, hogy a félkörívek az egyenesek folytatásaik és azok, csak a két szélső ponton mennek át és ha metszenek más pontot az nem helyezkedik el a gráfban azon az egyenesen.



4. fejezet

Teljes gráfok fedései nem feltétlen azonos erősen reguláris gráfokkal

A következőkben az [5] cikket fogom feldolgozni, amiben három vagy négy erősen reguláris gráffal való fedéssel kapcsolatos tételek szerepelnek.

4.1. Asszociációs séma

4.1.1. Definíció. *Egy d-osztályú asszociációs séma egy X halmazból és az $X \times X$ egy S partíciójából áll, amely $R_0, R_1 \ldots, R_d$ halmazokat tartalmazza és teljesülnek rá az alábbi feltételek:*

(i) $R_0 = \{(x,x) : x \in X\}$*, amit identitás relációnak hívunk.*

(ii) $R^* := \{(x,y) : (y,x) \in R\}$*, ha R benne van S-ben, akkor R^* is.*

(iii) Ha $(x,y) \in R_k$, akkor az olyan $z \in X$ száma, amire $(x,z) \in R_i$ és $(z,y) \in R_j$, a konstans p_{ij}^k szám, ami függ i,j,k-tól, de nem függ x és y-tól.

Mivel a fejezetben csak szimmetrikus asszociációs sémák lesznek, emiatt itt olvasható a definíciója.

4.1.2. Definíció. *Egy asszociációs séma szimmetrikus, ha minden R_i-re teljesül, hogy ha $(x,y) \in R_i$, akkor $(y,x) \in R_i$.*

4.1.3. Megjegyzés. *Egy asszociációs séma kommutatív, ha $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ egyenlőség fennáll minden i,j,k-ra és ha egy asszociációs séma szimmetrikus, akkor kommutatív is.*

Egy szimmetrikus asszociációs séma vizualizálható egy teljes gráfként, amelynek élei megvannak jelölve.

A gráf csúcsai az X halmaz elemei, x és y csúcs közt futó él i-vel van megjelölve, ha $(x, y) \in R_i$. Minden él pontosan egy címkével rendelkezik. A kapcsolatok felírhatók egy adjacencia mátrixban. Legyen A_i az adjacencia mátrixa R_i-nek minden $i = 0, 1, \ldots, d$-re:

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in R_i, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel a szimmetrikus asszociációs séma ekvivalens ezen adjacencia mátrixokkal, emiatt fennállnak a következők:

(i) A_i szimmetrikus,

(ii) $\sum_{i=0}^{n} A_i = J$, ahol J a csupa egy mátrix,

(iii) $A_0 = I$,

(iv) $A_i A_j = \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^k A_k = A_j A_i$, ahol $i, j \in \{0, 1, \ldots d\}$.

Tekintsük egy fedését a teljes gráfnak az A_i adjacencia mátrixokkal, ahol $i = 1, 2, \ldots, d$ és legyen $A_0 = I$. Ezek a mátrixok együtt diagonizálhatók és így van közös ortonormált sajátvektorokból álló bázisuk, vagyis a $\mathbb{R}^v$ felbontható maximális közös V_i sajátalterekre, $i = 0, 1, \ldots, t$ (adott t esetén). Mivel az összes gráf reguláris, emiatt az egyik maximális közös sajátaltér az $\mathbb{1}$ vektor, amit jelöljünk V_0-nal. Legyen E_i egy idempotens mátrix, ami reprezentálja azt az ortogonális vetítést, amely V_i sajátaltérre vetít $i = 0, 1, \ldots, t$ esetén, ekkor $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$, ahol δ_{ij} a Kronecker-delta. Továbbá a A_i mátrixokat ki tudjuk fejezni az E_j mátrixokkal, azaz $A_i = \sum_{j=0}^{t} P_{ji} E_j$, ahol $i = 0, 1 \ldots, d$ és P_{ji} a sajátértéke A_i-nek a V_j sajátaltérben. A P mátrixot a dekompozíció sajátmátrixának hívjuk. A következő lemma P-ről szól:

4.1.4. Lemma. *Legyen $\{G_1, G_2, \ldots, G_d\}$ egy kommutatív fedése teljes gráfnak és E_j idempotens mátrix és $j = 0, 1, \ldots, d$-re és P sajátmátrixa, ahogy fentebb definiáltuk. Ekkor $t \geq d$, ahol az egyenlőség, akkor és csak akkor áll fenn, ha a fedés asszociációs séma. Ha fennáll a $t = d$, akkor P nem szinguláris.*

4.2. Két erősen reguláris gráf uniója

Vegyünk kettő éldiszjunkt erősen reguláris gráfot, amiknek azonos a csúcshalmazuk, ezek legyenek G_1 és G_2. Tegyük fel, hogy a két gráf nem komplementere egymásnak, vagyis van egy harmadik gráfunk is $G_3 = \overline{G_1 \cup G_2}$ és az adjacencia mátrixa $A_3 = J - I - A_1 - A_2$, ahol A_1 és A_2 rendre a G_1, G_2 gráfok adjacencia mátrixai. A kérdés ezzel kapcsolatban az, hogy mikor alkot ez a három gráf egy asszociációs sémát. Az világos, hogy feltétel az A_1 és A_2 kommutatívsága.

4.2.1. Lemma. *Legyen G_1 és G_2 éldiszjunkt erősen reguláris gráfok n csúccsal, legyen G_i adjacencia mátrixa A_i, regularitási száma d_i, további sajátértékei r_i és s_i, $i = 1, 2$-re. Ha A_1 és A_2 kommutál, akkor $A_1 + A_2$ sajátértékei $\vartheta_1 = s_1 + s_2$, $\vartheta_2 = s_1 + r_2$, $\vartheta_3 = r_1 + s_2$ és $\vartheta_4 = r_1 + r_2$ és a hozzájuk tartozó multiplicitások*

$$m_1 = \frac{nr_1r_2 - (d_1 - r_1)(d_2 - r_2)}{(r_1 - s_1)(r_2 - s_2)}, \quad m_2 = \frac{nr_1s_2 - (d_1 - r_1)(d_2 - s_2)}{(r_1 - s_1)(r_2 - s_2)},$$

$$m_3 = \frac{ns_1r_2 - (d_1 - s_1)(d_2 - r_2)}{(r_1 - s_1)(r_2 - s_2)}, \quad m_4 = \frac{ns_1s_2 - (d_1 - s_1)(d_2 - s_2)}{(r_1 - s_1)(r_2 - s_2)}.$$

Ha $r_i > s_i$ fennáll $i = 1, 2$ esetén, akkor $m_2 > 0$ és $m_3 > 0$.

Megjegyezzük továbbá, hogyha $r_i > s_i$, akkor $i = 2, 3$ esetén fennáll $\vartheta_4 > \vartheta_i > \vartheta_1$ és $\vartheta_2 = \vartheta_3$, akkor és csak akkor, ha $r_1 - s_1 = r_2 - s_2$.

4.2.2. Definíció. *Egy erősen reguláris gráf Latin négyzet típusú vagy negatív Latin négyzet típusú, ha vannak n és t egész számok (típustól függően pozitív vagy negatív), amelynek n^2 csúcsa, fokszáma $t(n-1)$ és a további sajátértékek $n - t$ és $-t$.*

A 4.2.1 lemma közvetlen következményével folytatjuk.

4.2.3. Következmény. *Legyen G_1 és G_2 éldiszjunkt erősen reguláris gráfok és mindkettő Latin négyzet típusú vagy negatív Latin négyzet típusú. Ha a két adjacencia mátrix kommutatív, akkor az uniója a két gráfnak erősen reguláris és Latin négyzet típusú vagy negatív Latin négyzet típusú.*

Bizonyítás. Vannak n, t_1 és t_2 egész számok (pozitív vagy negatív attól függően, hogy milyen Latin négyzet típusú a gráf), úgy hogy G_1 és G_2-nek n^2 csúcsa van, $t_1(n-1)$ és $t_2(n-1)$ fokszámú és további sajátértékei $r_i = n - t_i$ és $s_i = -t_i$, ahol $i = 1, 2$. A 4.2.1 alapján következik, hogy $m_4 = 0$. Ebből következik, hogy $G_1 \cup G_2$ regularitása $(n-1)(t_1 + t_2)$ és a további sajátértékei $2n - t_1 - t_2$ és $-t_1 - t_2$, tehát az unió is erősen reguláris és azon belül is a Latin négyzet típusú vagy negatív Latin négyzet típusú gráf. □

4.2.4. Tétel. *Legyen G_1 és G_2 kommutatív, éldiszjunkt erősen reguláris gráfok n csúccsal, fokszámaik d_1 és $d_2 < n - 1 - d_1$, további sajátértékei $r_1 > s_1$ és $r_2 > s_2$. Akkor $\{G_1, G_2, \overline{G_1 \cup G_2}\}$ asszociációs séma akkor és csak akkor, ha $nr_1r_2 = (d_1 - r_1)(d_2 - r_2)$ vagy $ns_1s_2 = (d_1 - s_1)(d_2 - s_2)$.*

Bizonyítás. Legyen A_1, A_2 és $A_3 = J - I - A_1 - A_2$ az adjacencia mátrixai G_1, G_2 és $G_3 = \overline{G_1 \cup G_2}$ gráfoknak. Mivel G_i reguláris gráfok $i = 1, 2, 3$-ra és tudjuk, hogy az A_1 és A_2 kommutatív, emiatt a $\{G_1, G_2, G_3\}$ fedés kommutatív. Továbbá G_3 fokszáma $d_3 = n - 1 - d_1 - d_2$ és a további sajátértékei $\theta_i = -1 - \vartheta_i$ a m_i multiplicitásokkal, ahol $i = 1, 2, 3, 4$ és a ϑ_i-k a 4.2.1 lemmában szereplő sajátértékek.

Legyen $V_0 = \mathbb{1}$ és legyen V_i a további sajátalterei ϑ_i sajátértéknek $A_1 + A_2$ mátrixra nézve, ahol $i = 1, 2, 3, 4$, vagyis pontosabban a V_1 az megegyezik az s_1 és s_2 sajátértékekhez (rendre A_1-hez és A_2-höz) tartozó sajátalterek metszeteivel és a többi is hasonlóan. Legyen P a dekompozició sajátmátrixa, ahogy fentebb definiáltuk és ez a következőt adja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_3 = n - 1 - d_1 - d_2 \\ 1 & s_1 & s_2 & \theta_1 = -1 - s_1 - s_2 \\ 1 & s_1 & r_2 & \theta_2 = -1 - s_1 - r_2 \\ 1 & r_1 & s_2 & \theta_1 = -1 - r_1 - s_2 \\ 1 & r_1 & r_2 & \theta_1 = -1 - r_1 - r_2 \end{pmatrix}.$$

Következtetésképp m_2 és m_3 pozitívak (4.2.1 lemma alapján) és a 4.1.4 alapján ha az m_1 vagy m_4 közül legfeljebb az egyik 0, de ha az egyik tényleg az, akkor $\{G_1, G_2, G_3\}$ az tényleg egy 3-osztályú asszociációs séma. Az eredmény a 4.2.1 lemma m_1 és m_4-re vonatkozó részeiből jön ki. □

Az imént bizonyított tétel az első lépés afelé, hogy bármely három erősen reguláris gráf éldiszjunkt fedése egy teljes gráfnak az egy amorf asszociációs séma. A többi lépés olvasható az [5] cikkben.

Akkor beszélünk amorf asszociációs sémáról, ha minden fúziója is asszociációs séma, amely azt jelenti, hogy partícióiknak vehetjük unióit és akkor továbbra is asszociációs sémát kapunk. Ha az asszociációs sémánk szimmetrikus, akkor az amorf tulajdonságra igaz, hogy minden gráfja erősen reguláris. Ennél többet is tudunk, vagyis minden gráfja pozitív vagy negatív Latin négyzet típusú, ennek a bizonyítása megtalálható a [6] cikkben. Erre egy triviális példa egy erősen reguláris gráf és annak a komplementere, amik két gráfból álló fedését adják egy teljes gráfnak. Ez a példa természetesen egy amorf asszociációs séma. Az amorf asszociációs sémák hátterének megértésében a [6] cikk tud segítségül szolgálni.

4.2.5. Következmény. *Ha egy teljes gráf éldiszjunkt fedése $\{G_1, G_2, G_3\}$ erősen reguláris gráfokkal kommutatív, akkor ez egy amorf asszociációs séma.*

4.3. Három vagy négy erősen reguláris gráf uniója

4.3.1. Tétel. *Legyenek $\{G_1, G_2, G_3\}$ erősen reguláris gráfok, amelyek egy teljes gráf fedését alkotják. Ekkor $\{G_1, G_2, G_3\}$ egy amorf asszociációs séma.*

A következőnek kimondjuk, hogy bármely (esetleg háromnál több) Latin négyzet típusú erősen reguláris gráfokkal és bármely negatív Latin négyzet típusú erősen reguláris gráfokkal való fedés egy amorf asszociációs sémát alkot. A [4]-ben megmutatták, hogy egy amorf asszociációs sémában (legalább három gráffal) az összes gráf pozitív latin négyzet típusú, vagy minden gráf negatív latin négyzet típusú. A [5]-ben megmutatták, hogy a teljes gráfnak nincs más olyan erősen reguláris gráfok általi fedése, amelyben minden gráf latin négyzet típusú, vagy amelyben minden gráf negatív latin négyzet típusú.

4.3.2. Tétel. *Legyen $\{G_1, G_2, \ldots, G_d\}$ egy erősen reguláris gráfokból álló fedése egy n csúccsal rendelkező teljes gráfnak, ahol minden gráf vagy Latin négyzet típusú vagy negatív Latin négyzet típusú. Ekkor a fedés egy amorf asszociációs séma.*

Természetes lenne megkérdezni, hogy a Latin négyzet típusú gráfok és a negatív Latin négyzet típusú gráfok keverékének lehetséges egy teljes gráf lefedése, és ha igen, akkor ezek alkotnak-e (alkothatnak-e) asszociációs sémát. A következő részben olyan (kommutatív) fedésekre látunk példákat, amelyek valóban tartalmaznak ilyen keveréket. Ezek a dekompozíciók nem asszociációs sémák azonban.

Egy teljes gráf három erősen reguláris gráffal történő fedése szükségszerűen egy asszociációs séma. Ezután vizsgáljuk meg egy teljes gráf fedését négy erősen reguláris gráffal. Először is, azokat a fedéseket fogjuk osztályozni, amelyekben a négy erősen reguláris gráfból legalább három gráf nem összefüggő. Mindenekelőtt definiáljuk a $L_{1,1,1}(n)$ Latin négyzetes sémákat, $n > 2$ esetén. Egy ilyen amorf asszociációs séma egy n oldalú Latin négyzetből a következőképpen épül fel. A csúcsok a Latin négyzet n^2 eleme. Az első gráfban az n^2 darab csúcs közül kettő szomszédos, ha ugyanabban a sorban vannak a Latin négyzetben, míg a második gráfban akkor szomszédosak, ha ugyanabban az oszlopban van a Latin négyzetben, és a harmadik gráfban akkor szomszédosak, ha ugyanazzal az értékkel rendelkeznek a Latin négyzetben. A negyedik gráf, pedig a fennmaradó éleket tartalmazza a teljes gráfból.

Van egy példacsalád, amely a következőkből áll: az egyik gráf a $K_{4,4,\ldots,4}$ teljes többrészes gráf, a másik három gráf pedig párosítás a 4 elemű részeken belül, úgy hogy az uniójuk a teljes gráf legyen. Ez a négy gráf egy asszociációs sémát alkot és megkaphatjuk őket egy teljes gráf és $L_{1,1,1}(2)$ gráf koszorúszorzataként. Megjegyezzük, hogy ez az asszociációs séma nem amorf.

Koszorúszorzat alatt azt értjük, hogy vesszük az első gráfot és annak a csúcsai helyére berajzoljuk a második gráfot és megmaradnak a második gráfban lévő élek és összekötjük minden olyan csúccsal, ami a első gráfban szomszédos volt vele, mivel azok a szomszédos csúcsok már több csúcsból állnak, emiatt az összes abból keletkező csúccsal összekötjük.

Végül van egy példa 6 csúcsra, amelyben mind a négy gráf nem összefüggő: a négyből három teljes párosítás, a negyedik pedig két háromszög diszjunkt uniója. Ebben a példában a teljes párosítás nem kommutatív, ezért nem ad asszociációs sémát.

4.3.3. Tétel. *Legyen $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ egy erősen reguláris gráfokból álló fedése a teljes gráfnak négy erősen reguláris gráfra, amelyek közül legalább három nem összefüggő. Ekkor a fenti példa szerinti felbontás 6 csúcson, vagy egy koszorúszorzata egy teljes gráfnak és az $L_{1,1,1,1}(2)$-nek, vagy egy Latin négyzetes asszociációs séma, ami $L_{1,1,1}(n)$, ahol $n > 2$.*

Így a négy gráfból álló, erősen reguláris fedés bármely más példájában legalább kettőnek összefüggőnek kell lennie. Feltételezzük, hogy az amorf asszociációs sémák kivételével nincs olyan négy erősen reguláris gráfra való felbontása egy teljes gráfnak, amelyből pontosan kettő összefüggő.

Egy teljes gráf négy erősen reguláris gráffal való fedése kommutatív, akkor a következőt kapjuk.

4.3.4. Tétel. *Legyen $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ erősen reguláris gráfokkal való fedése a K_n teljes gráfnak kommutatív. Legyen G_i regularitási száma d_i és további sajátértékei r_i és s_i (ahol nem feltételezzük, hogy $r_i > s_i$), minden $i = 1, 2, 3, 4$-re. Akkor $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ fedés (i) egy amorf asszociációs séma; vagy (ii) egy olyan asszociációs séma, amelyben három gráf, mondjuk G_2, G_3, G_4 azonos paraméterekkel rendelkezik és amelynek sajátmátrixa a következő alakú*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 1 & s_1 & r_2 & r_2 & r_2 \\ 1 & r_1 & s_2 & s_2 & r_2 \\ 1 & r_1 & s_2 & r_2 & s_2 \\ 1 & r_1 & r_2 & s_2 & s_2 \end{pmatrix};$$

vagy (iii) nem asszociációs séma, amely esetben a sajátmátrix a következő

$$P = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 1 & s_1 & s_2 & r_3 & r_4 \\ 1 & r_1 & r_2 & s_3 & r_4 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_3 & s_4 \\ 1 & r_1 & s_2 & s_3 & r_4 \\ 1 & r_1 & s_2 & r_3 & s_4 \\ 1 & r_1 & r_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix},$$

ahol esetleg egy sort el lehet hagyni.

Irodalomjegyzék

[1] R. C. Bose. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. 1963.

[2] Andries E. Brouwer and Hendrik Van Maldeghem. *Strongly regular graphs*. 2021.

[3] Péter Csikvári, Zoltán Lóránt Nagy, and Dömötör Pálvölgyi. Diszkrét matematikai feladatok. 2014.

[4] Ja. Ju. Gol'fand, A. V. Ivanov, and M.H. Klin. Amorphic cellular rings. *Investigations in algebraic theory of combinatorial objects*, pages 167–186, 1994.

[5] Edwin R. van Dam. Strongly regular decompositions of the complete graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, pages 181–201, 2003.

[6] Edwin R. van Dam and M. Muzychuk. Some implications on amorphic association schemes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, pages 111–127, 2010.

[7] J. H. Van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics.* Cambridge University press, 2001.

NYILATKOZAT

Név: OSZTÉNYI JÓZSEF

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: C3WOU4

Szakdolgozat címe: ERŐSEN REGULÁRIS GRÁFOK

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024. 06. 03.

Osztényi József

a hallgató aláírása