Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Barabás Eszter

Elágazó folyamatok és alkalmazásaik a fizikában és biológiában

Szakdolgozat

Matematika BSc, matematikus szakirány

Témavezető:
Backhausz Ágnes
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani Backhausz Ágnes Mariann témavezetőmnek a rendszeres konzultációkért és hasznos tanácsokért, melyek hatalmas segítséget nyújtottak szakdolgozatom megírásában. Köszönettel tartozom családom és barátaim számára, akik végig támogattak egyetemi éveim során.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az elágazó folyamatok eredete a XIX. századra nyúlik vissza, mikor Sir Francis Galton, angol polihisztor, a családnevek kihalását tanulmányozta sztochasztikus folyamatokkal. A viktoriánus Angliában ugyanis aggodalom tárgya lett az arisztokratikus családnevek eltűnése. A patrilineáris – apáról fiúra öröklődő – modell alapján egy családnév kihal, ha egy nemzedéknek nem születik fiú leszármazottja. Tegyük fel, hogy minden férfi tagjának a nemzedéknek azonos eloszlással születik nulla, egy, kettő ... stb. számú fiúgyermeke, aki örökli majd az adott vezetéknevet. Galton 1873-ban vetette fel a kihalással kapcsolatos matematika kérdést, melyre Henry William Watson válaszolt megoldásával, és egy évre rá, kettőjük közös munkájaként jelent meg az *"On the probability of the extinction of family names"* című cikk. Fő matematikai eredményként azt mondhatjuk, ha egy apának átlagosan kevesebb mint egy fia születik, akkor a családnév szinte biztosan kihal idővel. [16]

Szakdolgozatomban célom az elágazó folyamatok széleskörű bemutatása. Az első fejezetben a témához elengedhetetlen matematikai előismereteket gyűjtöttem össze, összpontosítva olyan állításokra és fogalmakra, amik szorosan kapcsolódnak a továbbiak megértéséhez valamint eredmények belátásához. A második és harmadik fejezetben az egy–, illetve többtípusú elágazó folyamatok alapos ismertetése történik, mind a két esetben megvizsgáljuk a kihalás valószínűségét. Az egytípusú esetben mutatok egy másfajta szemléletet is elágazó folyamatokra. Kiemelném, hogy az első három fejezetben többször martingálelméletbeli eszközökkel látok be fontos tételeket és állításokat. A negyedik fejetben a sokrétű alkalmazást szeretném bemutatni, egy gráfelméleti vonatkozású, valamint több a matematikán kívüli ezek közül – természettudományos jelenségek leírására az elágazó folyamatok sokszor alkalmas modellt határoznak meg. Megoldok alkalmazásokhoz kapcsolódó problémákat, valamint a dolgozatban szereplő eredmények segítségével tovább is gondolok forrásokban feldolgozott eredményeket. Végül mutatok egy nemrégiben megjelent cikket, mely bepillantást ad a témában jelenleg zajló egy lehetséges kutatási irányba.

1. fejezet

Matematikai eszközök

Az elágazó folyamatok megértéséhez valamint megalapozásához szükségünk lesz nélkülözhetetlen fogalmakra a valószínűségszámítás elméletéből. Dolgozatomban elsőként ezek ismertetésével indítok, koncentrálva olyan állításokra, fogalmakra, amik hasznosak lesznek a továbbiakban ismertetett eredmények belátásához.

1.1. Generátorfüggvények

A generátorfüggvény nagyon fontos eszközünk lesz a valószínűségi változókkal leírt, időben végbemenő folyamatok leírására, emiatt érdemes első lépésben megismerni ezeket. Ebben a részben a generátorfüggvényekkel kapcsolatos alapvető ismereteket tárgyalom. *A* [2] órai jegyzetet vettem segítségül forrásként.

1.1.1. Definíció. *Az a_0, a_1, a_2... valós számsorozat generátorfüggvényén a $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ függvényt értjük.*

Speciálisan, mivel a későbbiekben ilyenekkel foglalkozunk: a $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ valószínűségeloszlás: $g_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, ha $z \in \mathbb{R}$ és a sor konvergens. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Ekkor X generátorfüggvénye: $g_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \cdot z^n = \mathbb{E}(z^X)$, ha $z \in \mathbb{R}$ és a sor konvergens.

Legyen a hatványsor konvergenciahalmaza: $K = \{z \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k < \infty\}$.

1.1.2. Állítás. *A K halmazhoz létezik $R \in [0, \infty]$ konvergenciasugár, amire $(-R, R) \subseteq K \subseteq [-R, R]$. Speciálisan, feltehetjük mostantól: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < 1$, így $R \geq 1$. Ebben az esetben a $g_p(z)$ abszolút konvergens $[-1, 1]$-en, és a $(-1, 1)$ intervallumon lehet tagonként deriválni. Egy valószínűségi változó eloszlását egyértelműen megadja generátorfüggvénye.*

A továbbiakban még kimondok néhány hasznos állítást a generátorfüggvénnyel és a véletlen tagszámú összeggel kapcsolatban:

1.1.3. Állítás. *X és Y független valószínűségi változók esetén, azon z számokra, amelyekre X valamint Y generátorfüggvénye véges, teljesül, hogy az összeg generátorfüggvénye is véges és a következő alakban áll elő: $g_{X+Y}(z) = g_x(z) \cdot g_Y(z)$.*

1.1.4. Állítás. *Legyen X valószínűségi változó, és $\mathbb{E}(X) < \infty$. Ekkor*

$$\mathbb{E}(X) = g_x'(1).$$

Tegyük fel, hogy $D(X) < \infty$ is teljesül, ekkor

$$D^2(X) = g_x''(1) + g_x'(1) - [g_x'(1)]^2.$$

A fenti állítással formulát nyerhetünk egy adott X valószínűségi változó várható értékére és szórására, mely erősíti a tényt, hogy a generátorfüggvény mennyire erőteljes eszköznek bizonyul X leírására.

Most nézzük meg azt a lehetőséget, mikor az összeadandó tagok számát is valamely N valószínűségi változó adja. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók g_X generátorfüggvénnyel, és N az X_i -ktől független nemnegatív, egészértékű valószínűségi változó, generátorfüggvénye g_N. Vegyük az $S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeget.

1.1.5. Tétel. *S_N generátorfüggvénye: $g_S = g_N \circ g_X$.*

1.1.6. Következmény. *(Wald-azonosság) Az S véletlen tagszámú összeg várható értéke és szórása:*

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$$

$$D^2(S) = D^2(X_1) \cdot \mathbb{E}(N) + D^2(N) \cdot (\mathbb{E}(X_1))^2$$

1.2. Martingálok és sztochasztikus folyamatok

A martingálelmélet központi szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok leírásában, emiatt mindenképpen érdemes lesz megismerni a martingálok főbb tulajdonságait, hiszen ezek a későbbiekben is gyakran használt eszközeink lesznek. Ebben a szakaszban olyan állításokat is belátok, amikre később hivatkozni is fogok, valamint tételeket is többször martingálokkal fogjuk bebizonyítani. Ez a fejezet a [13] melléklet és a [8] könyv 3. fejezete alapján készült.

1.2.1. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező és I egy indexhalmaz teljes rendezéssel $\leq$ (általában $\mathbb{N}$), és minden $i \in I$ esetén $\mathcal{F}_i$ egy σ-algebra. Filtrációnak nevezzük az $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ sorozatot, ahol $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_l$ minden $k \leq l$ esetén. Az $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_i)_{i\in I}, \mathbb{P})$ négyest filtrált valószínűségi térnek hívjuk.*

$I = \mathbb{N}$ esetén a fogalomra úgy gondolhatunk, hogy $n \in \mathbb{N}$ valamilyen folyamat időbeli indexelése, és $\mathcal{F}_n$ az n-edik időpontban elérhető információ.

1.2.2. Definíció. *(Diszkrét esetben) valószínűségi változók $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát sztochasztikus folyamatnak nevezzük.*

Sztochasztikus folyamatokra úgy is tekinthetünk, mint egy végtelen dimenziós valós értékű vektorra. Minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre az $(X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots)$ sorozat a sztochasztikus folyamat trajektóriája.

1.2.3. Definíció. *Az $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sztochasztikus folyamat a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve adaptált, ha X_n minden $n\in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n$-mérhető.*

1.2.4. Megjegyzés. *Sokszor $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Ezt természetes filtrációnak nevezzük.*

1.2.5. Definíció. *Legyen $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy filtráció, amire nézve az $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sztochasztikus folyamat **martingál**, ha*
1. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-adaptált
2. $X_n \in \mathcal{L}^1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
3. $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sztochasztikus folyamatot szuper,-illetve szubmartingálnak nevezzük, ha a martingál definíciójában ismertetett 1., 2. feltétel mellett $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$, illetve $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

1.2.6. Definíció. *Legyen $\tau \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy τ megállási idő $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-ra nézve, ha*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ minden } m \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Az intuíció a definíció mögött, hogy minden $t \in \mathbb{N}$-re a $\tau = t$ bekövetkezése az $\mathcal{F}_t$ információtól függ, tehát bármely t időpillanatban eldönthetjük, hogy megállítjuk-e a sorozatot.

1.2.7. Megjegyzés. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál, és τ megállási idő. Ekkor a megállított folyamat $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is martingál.*

1.2.8. Tétel (Martingál konvergencia tétel). *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^1$-ben korlátos szubmartingál, ekkor X_n egy valószínűséggel konvergens.*

A következő fontos tétel belátásához szükségünk lesz az alábbi lemma állítására:

1.2.9. Lemma. $\mathbb{E}\left[\left(X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right)^2\right] = \mathbb{E}[(X_0)^2] + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$

Bizonyítás. Elsőként bontsuk fel a belső zárójelet, és alkalmazzuk a várható érték additivitását, majd alkalmazzuk a martingálokról tanultakat.

$$\mathbb{E}\left[\left(X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right)^2\right] = \mathbb{E}[(X_0)^2] + 2\mathbb{E}[X_0(X_k - X_{k-1})] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] + 2\sum_{m\neq k}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(X_k - X_{k-1})]$$

Vizsgáljuk az $\mathbb{E}[X_0(X_k - X_{k-1})]$ kifejezést.
A teljes várható érték tétele szerint $\mathbb{E}[X_0(X_k - X_{k-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_0(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1})]$, ahol $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{k-1}$ miatt X_0 $\mathcal{F}_{k-1}$ -mérhető.
Így $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_0(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}((X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1})X_0]$ Alkalmazva a feltételes várható érték linearitását, a martingál definíció 3. pontját valamint, hogy X_{k-1} $\mathcal{F}_{k-1}$ -mérhető, megkapjuk, hogy

$$\mathbb{E}((X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1} = X_{k-1} - X_{k-1} = 0.$$

Tehát $\mathbb{E}[\mathbb{E}((X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1})X_0] = 0$.
Hasonlóan indokolva a $\mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(X_k - X_{k-1})]$ alakú tényezők is nullát adnak értékül, hiszen a várható érték tulajdonságait alkalmazva:

$$\mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(X_k - X_{k-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}((X_m - X_{m-1})(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{m-1})] =$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}((X_m - X_{m-1})|\mathcal{F}_{m-1})(X_k - X_{k-1})], \text{ feltéve, hogy } m > k.$$

Ekkor a martingál definíciójából következik, hogy

$$\mathbb{E}((X_m - X_{m-1})|\mathcal{F}_{m-1}) = \mathbb{E}((X_m)|\mathcal{F}_{m-1}) - \mathbb{E}((X_{m-1})|\mathcal{F}_{m-1}) = X_{m-1} - X_{m-1} = 0.$$

Így $\mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(X_k - X_{k-1})] = 0$ szintén.

Végül a nemnulla tagokat meghagyva, a következő alakot kapjuk:

$$\mathbb{E}\left[\left(X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\right)^2\right] = \mathbb{E}[(X_0)^2] + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$$

Ezzel beláttuk a lemma állítását. □

1.2.10. Tétel ($\mathcal{L}^2$-ben korlátos martingálok konvergenciája). *Legyen* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2$ *martingál, ekkor* X_n *egy valószínűséggel konvergens, valamint* $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X_\infty]$.

Bizonyítás. X_n-t alakítsuk teleszkópos összeggé:

$$\mathbb{E}[(X_n)^2] = \mathbb{E}[(X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}))^2]$$

A 1.2.9. lemma miatt $\mathbb{E}[(X_n)^2] = \mathbb{E}[(X_0)^2] + \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$, így a tétel első állítását az ekvivalenciáról beláttuk.

Az $\mathcal{L}^p$ norma monotonitásából következik, ha (X_n) korlátos $\mathcal{L}^2$-ben $\Rightarrow$ (X_n) korlátos $\mathcal{L}^1$-ben. Ekkor a martingál konvergencia tétel (1.2.10. tétel) miatt $X_n \to X_\infty$ egy valószínűséggel, ahol $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$. Ekkor az 1.2.9. lemma állításában $X_0 = 0$ választással, következik, hogy rögzített k indexre

$$\mathbb{E}[(X_{k+s} - X_k)^2] = \sum_{k+1\leq i\leq k+s}\mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2]$$

Majd alkalmazva a Fatou-lemmát:

$$\mathbb{E}[(X_\infty - X_k)^2] \leq \sum_{k+1\leq i}\mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2]$$

A $k \to \infty$ határátmenetből a jobb oldal a 0-hoz tart, hiszen a sorozat korlátos. Ezzel beláttuk az $\mathcal{L}^2$-es konvergenciát.
Végül $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X_\infty]$ következik a Lebesgue dominált konvergencia tételből, hiszen $|X_\infty| < \infty$ és $\mathbb{E}[(X_\infty - X_k)^2] \to 0$. $\square$

Lássunk be egy további martingálos állítást, amit a későbbiekben felhasználhatunk.

1.2.11. Állítás. *(Nemnegatív szupermartingálok konvergenciája) Ha (M_t) nemnegatív szupermartingál, akkor $M_t \to M_\infty$ egy valószínűséggel, ahol M_∞ véges és $\mathbb{E}[M_\infty] \le \mathbb{E}[M_0]$ teljesül.*

Bizonyítás. A szupermartingál tulajdonság miatt

$$\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}[X_t] \le \mathbb{E}[X_0], \forall t$$

Tehát (M_t) $\mathcal{L}^1$-ben korlátos, így alkalmazhatjuk a martingál konvergencia tételt (1.2.10. tétel), hiszen ekkor $\sup\limits_{t\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M_t^-] < \infty$ is igaz, ahol $M_t^- = -\min(M_t, 0)$, így M_t egy valószínűséggel tart egy véges limeszhez. Végül $\mathbb{E}[M_\infty] \le \mathbb{E}[M_0]$ belátásához a Fatou-lemmát használjuk: $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} M_t] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_t] \le \mathbb{E}[M_0]$. $\square$

1.2.1. Markov-láncok

Az elágazó folyamatok leírásához felhasználunk néhány egyszerűbb állítást a Markov-láncok elméletéből, célom az alapok tisztázása itt. A fejezethez a [9] könyv 1. fejezetének első felét használtam fel.
Valószínűségi változók $X_0, X_1, \dots$ sorozatát Markov láncnak hívjuk, ha a változók értékkészlete megszámlálható és bármely n. pillanatban a jövőbeli $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ állapotok együttes eloszlása csak a jelenlegi X_n állapottól függ (hiszen továbbra is véletlenszerűen alakul a folyamat).

1.2.12. Definíció. *Legyen $X = \{X_n : n \ge 0\}$ sztochasztikus folyamat értelmezve egy megszámlálható S halmazon. X Markov-lánc, ha bármely $i, j \in S$ és $n \ge 0$ esetén*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n) \text{ és}$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij},$$

ahol p_{ij} jelöli annak a valószínűségét, hogy a Markov-lánc az i-edik állapotból a j-edikre ugrik. Valamint teljesül, hogy $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, $i \in S$, így a $P = (p_{ij})$ mátrixot átmenetvalószínűség-mátrixnak nevezzük.

1.2.13. Megjegyzés. *A* $\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_0, \ldots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n)$ *feltételt teljesítő sztochasztikus folyamatot Markov-folyamatnak nevezzük.*

1.2.14. Állítás. *Legyen* X_n *Markov-lánc* S *halmazon* p_{ij} *átmenetvalószínűségekkel és* $\alpha_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ *kezdeti eloszlással. Ekkor bármely* $i_0, \ldots, i_n \in S$ *és* $n \geq 0$ *esetén*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \ldots p_{i_{n-1},i_n}.$$

1.2.15. Állítás. *Legyenek* $Y_1, Y_2, \ldots$ *azonos eloszlású, egész értékű független valószínűségi változók. Ekkor ha teljesül, hogy* $X_0 = 0$ *és*

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} Y_m, \; n \geq 1$$

Akkor X_n *véletlen bolyongás az egész számok halmazán, ahol* Y_n *jelöli az n. lépés mértékét.*

1.2.16. Megjegyzés. *A fent definiált bolyongás esetén teljesül, hogy* $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$, *ahol* Y_{n+1} *független az* $X_0, \ldots, X_n$ *változóktól, így bármely* i, j *egészre és* $n \geq 0$*-ra*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_0, \ldots, X_n = i) = \mathbb{P}(X_n + Y_{n+1}|X_n = i) = \mathbb{P}(Y_1 = j - i)$$

Tehát X_n *Markov-lánc a nemnegatív egészeken,* $p_{ij} = \mathbb{P}(Y_1 = j - i)$ *átmenetvalószínűségekkel.*

1.3. Pozitív mátrixok

A többtípusú elágazó folyamatok vizsgálatához szükséges lesz kimondanunk egy fontos tételt a pozitív mátrixok sajátértékeivel kapcsolatosan. Ehhez a részhez az [5] forrásból merítettem ismereteket, a 2. illetve 3. fejezetekből.

1.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy* $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ *mátrix pozitív, ha* $a_{i,j} > 0$ *minden i,j esetén. Továbbá legyenek*
$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}$
$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$
$\sigma(A)$ *halmazt az* A *mátrix spektrumának,* $\rho(A)$ *értéket pedig a spektrálsugárnak nevezzük.*

1.3.2. Állítás. *Az* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *mátrixok* $A \leq B$ *rendezése jelentse, hogy* $(a_{i,j}) \leq (b_{i,j})$ *minden* $i, j \leq n$ *esetén.*

1.3.3. Tétel. *Ha* $A \leq B$*, akkor* $\rho(A) \leq \rho(B)$*.*

1.3.4. Tétel. *(Perron-tétel) Legyen* $A > 0$ *négyzetes mátrix, ekkor*

1. $\rho(A) > 0$
2. $\rho(A) \in \sigma(A)$*, algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával, és értékük egy.*
3. *Egyértelműen létezik egy* $\boldsymbol{p}$ *jobboldali sajátvektora* A*-nak, amiről feltehető, hogy pozitív és* $A\boldsymbol{p} = \rho(A)\boldsymbol{p}$ *és* $\|\boldsymbol{p}\|_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$*.*
4. *Egyértelműen létezik egy* $\boldsymbol{q}$ *baloldali sajátvektora* A*-nak, amiről feltehető, hogy pozitív és* $\boldsymbol{q}^T A = \boldsymbol{q}^T \rho(A)$ *és* $\boldsymbol{q}^T p = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n = 1$
5. $|\lambda| < \rho(A)$ *minden* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{\rho(A)\}$*-ra*
6. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^n = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{p}$

1.3.5. Megjegyzés. $\boldsymbol{p}$ *és* $\boldsymbol{q}$ *az egyedüli sajátvektorok, amik választhatók pozitívnak. A* $\boldsymbol{p}$ *vektort a jobboldali, míg* $\boldsymbol{q}$*-t a baloldali Perron vektornak nevezzük,* $\rho(A)$ *a Perron-gyök.*

2. fejezet

Egytípusú elágazó folyamatok

A témámhoz szükséges matematikai eszközök áttekintése után rátérek az elágazó folyamatok bemutatására. Tekintsük a következő sztochasztikus modellt: kezdetben van egy egyed (vagy nevezhetjük részecskének is), ami alkossa a 0. nemzedéket. Ő létrehoz bizonyos számú utódot, akik alkotják az első nemzedéket. Általánosítva a lépéseket, a t-edik lépés során a $t-1$-edik nemzedék minden tagja egymástól, és az előző generációktól függetlenül, azonos eloszlással hoz létre véletlen számú utódot. Ezen utódok alkotják az t-edik nemzedéket, és a folyamat így megy tovább. Elsőként olyan elágazó folyamatokat vizsgálunk, ahol egyféle részecsketípus szerepel, következésképpen a létrejött utódokat nem különböztetjük meg. Ezen rész megírásához a [8] forrás 6. fejezetét használtam fel.

2.0.1. Definíció. ***(Galton–Watson elágazó folyamat)***
• *Legyen* $Z_0 := 1$.
• *Legyenek* $X(i,t), i,t \geq 1$, *azonos eloszlású valószínűségi változók, és* $m = \mathbb{E}[X(1,1)] < \infty$. *Definiáljuk a következő sorozatot:*

$$Z_t := \sum_{1 \leq i \leq Z_{t-1}} X(i,t)$$

Ezzel a megadással Z_t jelöli a t-edik lépésben (avagy t-edik időpillanatban) a nemzedék létszámát. A $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ valószínűségeloszlás írja le, hogy $X(1,1)$ mekkora eséllyel hoz létre $k = 0, 1, 2, \ldots$ darab utódot, akik alkotják az első nemzedéket. Az $X(i,t)$ valószínűségi változó adja meg a $t-1$-edik nemzedékből az i-edik egyed utódszámának eloszlását. A t-edik nemzedék generátorfüggvénye legyen $g_t(z)$, az utódszámé $g(z)$, várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2.

Most nézzük meg mit mondhatunk egyes generációk létszámának várható értékéről, szórásáról, valamint hogyan írhatjuk fel a generátorfüggvényt az utódszámét leíró $g(z)$ ismeretében.

2.0.2. Tétel. *A t-edik nemzedik létszámának generátorfüggvénye, várható értéke és szórásnégyzete:*
g_t=$g \circ g \circ \ldots \circ g$ *(t-szeres kompozíció)*
$\mathbb{E}(Z_t) = \mu^t$
$\mathbb{D}^2(Z_t) = \sigma^2(\mu^{t-1} + \mu^t + \ldots + \mu^{2t-1})$

A Galton–Watson-folyamattal kapcsolatban elmondhatjuk, hogy növekedése a t változóban exponenciális:

2.0.3. Lemma. *(Exponenciális növekedés) Legyen*

$$W_t := m^{-t} Z_t$$

Ekkor (W_t) *nemnegatív martingál az* $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_t)$ *filtrációra nézve.*

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy $\mathbb{E}[Z_t] = m^t$. Ehhez alkalmazzunk t szerinti teljes indukciót. A kezdeti $t = 0$ és $t = 1$ esetek triviálisak. Ezután az indukciós feltevésben feltesszük, hogy $\mathbb{E}[Z_{t-1}] = m^{t-1}$. Vizsgáljuk a Z_t feltételes várható értéket az $\mathcal{F}_{t-1}$ σ-algebrára nézve:

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{1\leq j\leq Z_{t-1}} X(j,t)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = mZ_{t-1}. \tag{2.1}$$

Alkalmazva a feltételes várható érték linearitását, valamint, hogy $X(j,t)$ bármely j esetén független a $\mathcal{F}_{t-1}$ σ-algebrától $\Rightarrow \mathbb{E}[X(j,t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[X(j,t)] = m$ minden j esetén.

A (W_t) sztochasztikus folyamatra kell ezután ellenőrizni a martingál definíció pontjait: mivel m egy véges konstans és (Z_t) $\mathcal{F}_t$-adaptált, így (W_t) is. $W_t \in \mathcal{L}^1$ minden $t \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen $\mathbb{E}|Z_t| < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|m^{-t}Z_t| = \mathbb{E}|W_t| < \infty$. Valamint a (2.1) egyenlet alapján

$$\mathbb{E}[W_{t+1}|\mathcal{F}_t] = m^{-t-1}\mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t] = m^{-t-1}mZ_t = W_t$$

□

2.0.4. Lemma. *Azt mondhatjuk, hogy* $W_t \to W_\infty$ *egy valószínűséggel, ahol* W_∞ *nemnegatív, véges valószínűségi változó,* $W_\infty \in \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$ *és* $\mathbb{E}[W_\infty] \leq 1$.

2.1. Kihalás

Előfordulhat, hogy egy lépésben a nemzedék egyik egyede sem hoz létre utódot. Tehát $\{\exists t : Z_t = 0\}$ esemény bekövetkezik, ekkor azt mondjuk, hogy a folyamat kihal. Jelöljuk T-vel a kihalás időpontját: $T = \inf\{t : Z_t = 0\}$; és $T = \infty$, ha nem hal ki. Legyen η a kihalás valószínűsége, és a trivialitások elkerülése végett tegyük fel, hogy $p_0 > 0$ és $p_1 < 1$. Ebben a részben a kihalással kapcsolatos állításokat, tételeket foglaltam össze a [8] forrás 6. fejezete alapján.

2.1.1. Lemma. *Egy valószínűséggel teljesül, hogy $Z_t \to 0$ vagy $Z_t \to \infty$.*

Bizonyítás. (Z_t) olyan egészértékű folyamat, amelynek 0 az egyetlen fixpontja. Tekintsünk egy olyan állapotot, amikor k egyed van az adott nemzedékben. Ekkor annak a valószínűsége bármely $k > 0$ esetén, hogy nem térünk vissza egy ugyanilyen állapothoz, tehát k egyeddel rendelkező nemzedékhez, legalább $p_0^k > 0$ (hiszen ez a valószínűsége, hogy a folyamat rögtön a következő lépésben kihal, és k pozitív egész volt), így kisebb mint 1 valószínűséggel térünk vissza bármely k-ra. Ha $Z_t \to 0$ vagy $Z_t \to \infty$ közül egyik sem teljesülne, az azt jelentené, hogy van olyan $k > 0$, ami végtelen sokszor szerepel, mint egy adott generáció egyedszáma. Rögzítsünk egy ilyen k-t, ekkor vizsgáljuk csak a k utódszámú állapotokat. Ezeket felfoghatjuk úgy, mint végtelen sok független kísérlet, melynél a folyamat $q := p_0^k > 0$ valószínűséggel kihal, $1 - q$ valószínűséggel pedig visszatér k-ba. Így tetszőleges M pozitív szám esetén, annak a valószínűsége, hogy M-szer visszatérünk k-ba éppen $(1 - q)^M$, ami nyilvánvalóan szigorúan monoton csökken, ahogy M nő. Tehát a végtelen visszatérés esélyére adhatunk felső becslést: $\mathbb{P}$(k végtelen sokszor szerepel)$\leq (1-q)^M$, ami igaz bármely pozitív M esetén, tehát ha $M \to \infty$, akkor $(1-q)^M \to 0$, így $\mathbb{P}$(k végtelen sokszor szerepel)$= 0$ bármely rögzített $k > 0$ számra. Most vegyünk minden pozitív egész k számot: $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty}$ k végtelen sokszor szerepel)$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}$(k végtelen sokszor szerepel)$= 0$ teljesül a σ-szubadditivitás miatt, így nem létezhet olyan $k > 0$, ami végtelen sokszor fordul elő. Mindebből adódik, hogy $t \to \infty$ esetén 1 valószínűséggel $Z_t \to 0$ vagy $Z_t \to \infty$ közül valamelyik következik be . □

2.1.2. Tétel. *A kihalás η valószínűségét a g(z) = z egyenlet legkisebb, nemnegatív gyöke adja meg.*
(i) ha $\mu < 1$, akkor η = 1 (szubkritikus eset),

(ii) ha $\mu = 1$, akkor $\eta = 1$ (kritikus eset),

(iii) ha $\mu > 1$, akkor $\eta < 1$ (szuperkritikus eset).

Bizonyítás. (Kritikus eset) $\mu = 1$ esetén a tételt martingál segítségével bizonyítom be. Ekkor ugyanis (Z_t) martingál a természetes filtrációra nézve. Ehhez a definíció három pontját szükséges ellenőrizni: az adaptáltság nyilván teljesül, $\mu = 1$ miatt $Z_t \in \mathcal{L}^1$ minden $t \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel 1 a várható érték és $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_t)$, így a $t+1$-edik nemzedékben a várható utódszám, megszorítva a $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára, éppen μZ_t, tehát Z_t lesz. Így $\mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t] = Z_t$ is igaz, tehát martingál. Alkalmazhatjuk a martingál konvergencia tételt, így Z_t sorozat egy valószínűséggel konvergál egy véges várható értékű valószínűségi változóhoz. Az előző lemma alapján $Z_t \to 0$ következik be 1 valószínűséggel, tehát $\eta = 1$. $\square$

Térjünk vissza a 2.0.3 lemmában ismertetett (W_t) martingálhoz és vizsgáljuk meg egyes tulajdonságait felhasználva a kihalással kapcsolatos észrevételeinket. Idézzük fel a definícióját:

$$W_t := m^{-t} Z_t$$

2.1.3. Lemma. *Tekintsük a (W_t) martingált, ekkor vagy $W_\infty = 0$ vagy $W_\infty > 0$ 1 valószínűséggel. Következésképpen $\mathbb{P}[W_\infty = 0] \in \{0, \eta\}$.*

2.1.4. Lemma. *Legyen (Z_t) egy Galton–Watson elágazó folyamat, melyre $m = \mathbb{E}[X(1,1)] > 1$ és $\sigma^2 = Var[X(1,1)] < \infty$. Ekkor (W_t) konvergens $\mathcal{L}^2$-ben. Valamint $\mathbb{E}[W_\infty] = 1$ és $\mathbb{P}[W_\infty = 0] = \eta$.*

Bizonyítás. Célunk belátni, hogy $\mathbb{E}[W_t^2]$ korlátos $\mathcal{L}^2$-ben, ezt t szerinti teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani. A kezdeti esetekre ez valóban teljesül: $\mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$ és $\mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[m^{-1} Z_1] = m^{-1} \cdot m Z_0 = Z_0 = 1$. Most tegyük fel, hogy $\mathbb{E}[W_{t-1}^2]$-re tudjuk, hogy korlátos $\mathcal{L}^2$-ben.

Azt állítom, hogy az

$$\mathbb{E}[W_t^2] = \mathbb{E}[W_{t-1}^2] + \mathbb{E}[(W_t - W_{t-1})^2] \tag{2.2}$$

egyenlőség teljesül. Ez igazolható lesz az egyenlet jobb oldalán lévő tagok kibontásával és a várható érték lineáris tulajdonságával:

$$\mathbb{E}[W_{t-1}^2] + \mathbb{E}[(W_t - W_{t-1})^2] = \mathbb{E}[W_t^2] + 2\mathbb{E}[W_{t-1}^2 - W_{t-1} W_t]$$

Be kell látnunk, hogy $\mathbb{E}[W_{t-1}^2 - W_{t-1} W_t] = 0$, ehhez alkalmazzuk, hogy $W_t := m^{-t} Z_t$

$$\mathbb{E}[W_{t-1}^2 - W_{t-1}W_t] = \mathbb{E}[m^{-2t+2}Z_{t-1}^2 - m^{-t+1}Z_{t-1}m^{-t}Z_t] = \mathbb{E}[m^{-2t+2}Z_{t-1}^2 - m^{-2t+1}Z_{t-1}Z_t] =$$
$$m^{-2t+1}\mathbb{E}[mZ_{t-1}^2 - Z_{t-1}Z_t] = m^{-2t+1}\Big(\mathbb{E}[mZ_{t-1}^2] - \mathbb{E}[Z_{t-1}Z_t]\Big)$$

Alkalmazzuk a toronyszabályt: $\mathbb{E}[Z_{t-1}Z_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{t-1}Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[Z_{t-1}\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[Z_{t-1}\mathbb{E}[Z_t]] = \mathbb{E}[Z_{t-1} \cdot mZ_{t-1}] = \mathbb{E}[mZ_{t-1}^2]$, hiszen korábban megállapítottuk, hogy $\mathbb{E}[Z_t] = m^t$.
Így beláttuk, hogy $\mathbb{E}[mZ_{t-1}^2] = \mathbb{E}[Z_{t-1}Z_t]$, tehát $\mathbb{E}[W_{t-1}^2 - W_{t-1}W_t] = 0$ valóban.

Az indukció alapján tudjuk, hogy $\mathbb{E}[W_{t-1}^2]$ korlátos, célunk belátni, hogy $\mathbb{E}[(W_t - W_{t-1})^2]$ is. Vehetünk feltételes várható értéket, megszorítva a $\mathcal{F}_{t-1}$ szigma-algebrára, amit az indukciós lépések miatt megtehetünk.
A martingál definícióból $\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = W_{t-1}$, így

$$\mathbb{E}[(W_t - W_{t-1})^2|\mathcal{F}_{t-1}] = Var[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = m^{-2t}Var[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = m^{-2t}Var[\sum_{1\le i\le Z_{t-1}} X(i,t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$
$$= m^{-2t}Z_{t-1}\sigma^2 \tag{2.3}$$

A (2.2) egyenletben a jobb oldalon szereplő második tagnál vegyünk feltételes várható értéket, valamint helyettesítsük be a (2.3) eredményt, és használjuk, hogy $\mathbb{E}[(Z_t)] = m^{-t}$.

$$\mathbb{E}[W_t^2] = \mathbb{E}[W_{t-1}^2] + m^{-t-1}\sigma^2$$

Mivel $\mathbb{E}[W_0] = 1$, így indukcióval belátható, hogy általános tag:

$$\mathbb{E}[W_t^2] = 1 + \sigma^2 \sum_{i=2}^{t+1} m^{-i}$$

Ugyanis, ha $t-1$ esetén megsejtjük, hogy az alak: $\mathbb{E}[W_{t-1}^2] = 1 + \sigma^2 \sum_{i=2}^{t} m^{-i}$, akkor $\mathbb{E}[W_t^2] = \mathbb{E}[W_{t-1}^2] + m^{-t-1}\sigma^2 = 1 + \sigma^2\sum_{i=2}^{t} m^{-i} + m^{-t-1}\sigma^2 = 1 + \sigma^2\sum_{i=2}^{t+1} m^{-i}$ valóban.
Azt kaptuk, hogy $\mathbb{E}[W_t^2]$ egyenletesen korlátos, ha $m > 1$.
Végül alkalmazhatjuk a (W_t) martingálra az $\mathcal{L}^2$-ben korlátos martingál konvergencia tételt: (W_t) egy valószínűséggel konvergál $\mathcal{L}^2$-ben egy véges W_∞ határértékhez, és a 2.1.4 lemma miatt:

$$1 = \mathbb{E}[W_t] \to \mathbb{E}[W_\infty]$$

Ezzel beláttuk az állítást. □

Most oldjunk meg egy konkrét elágazó folyamatos feladatot, hogy lássuk, a gyakorlatba hogyan is ültethetjük át a tanultakat. A példa a [14] forrásból származik.

2.1.5. Példa. *Egy nemzedék minden tagja egymástól függetlenül hoz létre utódokat, és jelölje X valószínűségi változó az utódok számát, ekkor*
$\mathbb{P}(X = 0) = 0.375$
$\mathbb{P}(X = 1) = 0.125$
$\mathbb{P}(X = 2) = 0.5$
$\mathbb{P}(X \geq 3) = 0$
Jelenleg 6 egyed alkotja a populációt, határozzuk meg a kihalás valószínűségét, ha tudjuk, hogy minden egyed képes reprodukálódni.

Megoldás

Határozzuk meg X várható értékét: $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(X = i) = 1 \cdot 0.125 + 2 \cdot 0.5 = 1.125 > 1.$
Tehát ebből adódik, hogy a kihalás valószínűsége minden egyednél egynél kisebb lehet, tehát szuperkritikus a folyamat. A megoldáshoz ezt nem volt szükséges meghatározni, de hasznos lehet előre ellenőrizni a végeredményt, valamint, ha csak a kritikusság eldöntése a kérdés, akkor ennyit elegendő is megnézni.
Az utódeloszlás generátorfüggvénye: $\sum_{i=0}^{\infty} z^i\mathbb{P}(X = i) = 0.375 + 0.125z + 0.5z^2$
A 2.1.2 tétel alapján tudjuk, hogy a kihalás η valószínűségét a $z = 0.375 + 0.125z + 0.5z^2$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke adja meg. A másodfokú egyenlet két gyöke:
$z_1 = 0.75$
$z_2 = 1$
Tehát $\eta = 0.75$. Ez minden egyedre a kihalás esélye. Mivel 6-an alkotják a nemzedéket, így annak a valószínűsége, hogy a populáció kihal:
$\eta^6 = 0.75^6 = \mathbf{0.178}$.

2.2. Véletlen bolyongás - mint szemlélet az elágazó folyamatokra

Az elágazó folyamatok tanulmányozása során, vizsgálhatjuk egy adott nemzedékben egyes egyedekek utódainak számát, sőt akár a folyamat leírására is alkalmas perspektívát biztosít az ilyen jellegű megközelítés. Nézzük meg miként írhatjuk le az elágazó folyamatokat, mint véletlen bolyongást, amihez a [12] könyv 3. fejezetét és a [8] könyv 6. fejezetét használtam fel.

Legyenek $X_1', X_2', \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek eloszlása megegyezik a Galton–Watson-folyamatban ismertetett $X(1,1)$ változóéval. Definiáljuk az $S_0', S_1', \dots$ folyamatot az alábbi rekurzióval

$$S_0' = 1,$$
$$S_i' = S_{i-1}' + X_i' - 1 = X_1' + \dots + X_i' - (i-1).$$

Továbbá legyen

$$T' = \inf\{t : S_t' = 0\} = \inf\{t : X_1' + ... + X_t' = t - 1\}$$

Ha ilyen t nem létezik, akkor $T' = +\infty$.

Ez a fajta leírás valójában megegyezik az elágazó folyamatok klasszikus megadásával. A folyamatra tekinthetünk úgy, mint egy csúcsból induló fagráfra, melynél akkor kötünk össze két csúcsot, ha az egyik utódja a másiknak. Ezt a gráfot szélességi vagy mélységi kereséssel bejárva vizsgáljuk:

Legyen $G = (V, E)$ lokálisan véges gráf, és kezdjünk egy tetszőleges $v \in V$ csúccsal. Jelöljük továbbá a t. időpillanatban

- A_t: aktív csúcsok, melyeket elértünk, de még nem vizsgáltuk minden szomszédját
- E_t: elért csúcsok, amik szomszédjait mind bejártuk
- N_t: még el nem ért "neutrális" csúcsok

Kezdetben $A_0 = v, E_0 = \emptyset, N_t = V \setminus \{v\}$. Ha valamikor $A_{t-1} = \emptyset$, akkor $(A_t, E_t, N_t) = (A_{t-1}, E_{t-1}, N_{t-1})$. Különben veszünk egy $w \in A_{t-1}$ csúcsot, így a t. időben aktív csúcsok halmazát úgy kapjuk, hogy A_{t-1}-ből elvesszük w-t és hozzáadjuk w éppen ekkor elért

szomszédait. Az inaktív elért csúcsok halmaza $E_{t-1} \setminus \{w\}$ lesz. A neutrális csúcsok halmaza így w újonnan felfedezett szomszédaival lesz szűkebb, mint az előző lépésben.
A populáció egy egyeddel indul, az i. időpillanatban kiválasztunk egy aktív egyedet, és hozzárendelünk X_i' számú utódot. Így a kiválasztott egyed inaktívvá, utódai (ha vannak) pedig aktívvá válnak, és a folyamat addig folytatódik, amíg vannak aktív részecskék. Ekkor S_i' adja meg az aktív egyedek számát, az első i darab egyed (akiket tekinthetünk úgy mint a gráf csúcsai) felfedezése után. A folyamat megáll, amikor $S_t' = 0$.

Vizsgáljuk a bolyongás lehetséges kimeneteleit a $T = t$ időpontig. Legyen $H = (X_1, X_2, ...X_T)$ valószínűségi változókból képezett vektor. Ha $T = \infty$, akkor H végtelen hosszú vektor. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ sorozat (ahol $X_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, t$) pontosan akkor lehetséges kimentel, ha $s_i > 0$ minden $i < t$ esetén, és $s_t = 0$, valamint $s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i - (i-1)$. Ekkor $\forall t < \infty$-re

$$\mathbb{P}(H = (x_1, \ldots, x_t)) = \prod_{i=1}^{t} p_{x_i},$$

ahol $(p_k)_{k \geq 0}$ olyan utódeloszása egy elágazó folyamatnak, ahol $\eta < 1$ a kihalás valószínűsége. Ekkor azt mondjuk, hogy $(p_k)_{k \geq 0}$ és $(p_k')_{k \geq 0}$ eloszlások konjugáltak, ha

$$p_k' = \eta^{k-1} p_k.$$

2.2.1. Tétel. *(Dualitás elve elágazó folyamatokra) Legyenek $(p_k)_{k \geq 0}$ és $(p_k')_{k \geq 0}$ konjugált utódeloszlások, továbbá (Z_i) $(p_k)_{k \geq 0}$ utódeloszlású elágazó folyamat $\eta < 1$ kihalási valószínűséggel, arra feltételesen, hogy kihal a folyamat. Ekkor (Z_i) ugyanolyan eloszlású, mint a $(p_k')_{k \geq 0}$-hez tartozó (Z_i') elágazó folyamat. Ezt a duális elágazó folyamatnak hívjuk.*

Bizonyítás. Legyenek $H = (X_1, X_2, \ldots, X_T)$ és $H' = (X_1', X_2', \ldots, X_T')$ a (Z_i) illetve (Z_i') folyamatokhoz tartozó események, és (a kihalási feltétel miatt) H véges hosszú vektor. Alkalmazzuk a feltételes valószínűség definícióját egy $(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ eseményre és véges t-re:

$$\mathbb{P}[H = (x_1, x_2, \ldots, x_t) | T < \infty] = \tfrac{\mathbb{P}[H = (x_1, x_2, \ldots, x_t)]}{\mathbb{P}[T < \infty]} = \eta^{-1} \prod_{s=1}^{t} p_{x_s}.$$

Mivel $(x_1 - 1) + \ldots + (x_t - 1) = -1$:

$$\eta^{-1} \prod_{s=1}^{t} p_{x_s} = \eta^{-1} \prod_{s=1}^{t} \eta^{1-x_s} p_{x_s}' = \prod_{s=1}^{t} p_{x_s}' = \mathbb{P}[H' = (x_1, x_2, ...x_t)]$$

Ez igaz tetszőleges eseményre, így a két eloszlás megegyezik. □

A továbbiakban az utódok számának eloszlására adunk képletet, felhasználva a bolyongáshoz tartozó megállási időt. Tegyük fel, hogy az elágazó folyamat k egyeddel indul, legyenek $(Y_i)_{i\geq 1}$ azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek a bolyongás lépései lesznek. Legyen továbbá $S_n = k + Y_1 + \ldots + Y_n$ a bolyongás helyzete n lépés után. Ekkor legyen

$$H_0 = \inf\{n : S_n = 0\} \text{ a 0 első elérésének időpontja.}$$

Mindennek következtében kimondunk egy fontos tételt.

2.2.2. Tétel. *Ha egy véletlen bolyongás azonos eloszlású $(Y_i)_{i\geq 1}$ lépésekkel teljesíti, hogy egészértékű és*

$$\mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1,$$

akkor H_0 eloszlására elmondhatjuk, hogy

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \tfrac{k}{n}\mathbb{P}_k(S_n = 0).$$

Bizonyítás. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval látjuk be minden nemnegatív egész k-ra. Vegyük észre, hogy $n = 1$ esetén a tételben szereplő egyenlőtlenség mindkét oldala 0 lesz $k = 0$ és $k > 1$ esetén. Ha pedig $k = 1$, akkor az egyenlet két oldala éppen a $\mathbb{P}(Y_1 = -1)$ valószínűséggel lesz egyenlő, hiszen ahhoz, hogy 1-ről induló bolyongás az első lépésben elérje a 0-át, úgy lehetséges, ha -1 értékű az első lépés.
Tehát az $n = 1$ eset teljesülésével, most feltehetjük az indukciós sejtésünket. Nézzük továbbá $n \geq 2$-re, valamint $k = 0$ esetén mivel a mindkét oldal 0, így a $k \geq 1$ esetre vizsgáljuk tovább. A teljes valószínűség tételét alkalmazva

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbb{P}_k(H_0 = n | Y_1 = s)\mathbb{P}(Y_1 = s).$$

Alkalmazva a bolyongás Markov-tulajdonságát:

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n|Y_1 = s) = \mathbb{P}_{k+s}(H_0 = n - 1) = \tfrac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0).$$

Az utolsó egyenlőségben az indukciós feltevést használtuk fel, amit megtehetünk, hiszen $k \geq 0$, $s \geq -1$, tehát $k + s \geq 0$. A tételben lévő $\mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1$ feltételből következik

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1} \mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_1 = s).$$

A teljes valószínűség tételéből felhasználva a $\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0) = \mathbb{P}_k(S_n = 0|Y_1 = s)$ összefüggést:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k(H_0 = n) &= \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1} \mathbb{P}_k(S_n = 0|Y_1 = s)\mathbb{P}(Y_1 = s) = \\
&= \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1} \mathbb{P}_k(\{S_n = 0\} \cap \{Y_1 = s\}) = \\
&= \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k}{n-1} \mathbb{P}_k(\{S_n = 0\} \cap \{Y_1 = s\}) + \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{s}{n-1} \mathbb{P}_k(\{S_n = 0\} \cap \{Y_1 = s\}) = \\
&= \tfrac{k}{n-1} \mathbb{P}_k(S_n = 0) + \tfrac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} s\mathbb{P}(Y_1 = s|S_n = 0)\mathbb{P}(S_n = 0) = \\
&= \tfrac{1}{n-1} \mathbb{P}_k(S_n = 0)\left(k + \sum_{s=-1}^{\infty} s\mathbb{P}(Y_1 = s|S_n = 0)\right) \\
&= \tfrac{1}{n-1} \mathbb{P}_k(S_n = 0)\Big(k + \mathbb{E}_k[Y_1|S_n = 0]\Big).
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségben $\mathbb{E}_k[Y_1|S_n = 0]$ feltételes valószínűséget írhatjuk a szummás kifejezés helyére. Vegyük észre, hogy a $\mathbb{E}_k[Y_i|S_n]$ érték független i választásától, így

$$\mathbb{E}_k[Y_1|S_n] = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_k[Y_i|S_n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}_k\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i|S_n\right] = -\frac{k}{n}.$$

teljesül, hiszen $\sum_{i=1}^{n} Y_i = S_n - k = -k$, ha $S_n = 0$, ekkor

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \tfrac{1}{n-1}\left[k - \tfrac{k}{n}\right]\mathbb{P}_k(S_n = 0) = \tfrac{k}{n}\mathbb{P}_k(S_n = 0)$$

□

A fent belátott tételnek nézzük egy fontos következményét elágazó folyamatokra, mégpedig a teljes populáció számának meghatározásában.

2.2.3. Tétel. *Független, azonos eloszlású utódszámmal rendelkező elágazó folyamatokra (legyen $X = Z_1$ az eloszás)*

$$\mathbb{P}(T = n) = \tfrac{1}{n}\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n = n - 1),$$

ahol $(X_n)_{i=1}^{n}$ az X független, azonos eloszlású másolatai.

3. fejezet

Többtípusú elágazó folyamatok

Az eddigiekben olyan folyamatokkal foglalkoztunk, amelyekben csak egytípusú egyedek voltak csak jelen, most ennek egy általánosítását szeretnénk megvizsgálni. Hasonlóan feltehetjük, hogy kezdetben egy kiindulási egyedünk van vagy megadhatunk kezdeti népességszámot is. Továbbra is lefektetjük, hogy az egyedek egymástól függetlenül hoznak létre utódokat. Az ismertetett Galton–Watson-folyamathoz hasonlóan járunk el, ámde most minden részecskéhez társíthatunk egy jellemzőt: az előre megadott véges sok típus közül, minden egyedhez pontosan egy ilyet hozzárendelünk. Ebben a részben a [8] forrás 6. fejezetét használom fel.

Lássuk a pontos definíciót:

3.0.1. Definíció. *Többtípusú elágazó folyamatban minden egyedhez hozzárendelünk egy $\alpha \in [\tau]$ típust, ahol $[\tau]$ jelenti a következő halmazt: $[\tau] = \{1, 2, \ldots, \tau\}$. Minden α típusnak van egy úgynevezett utódeloszlása, amely megadja, hogy az adott egyed mekkora eséllyel hoz létre $k = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ számú utódot. A folyamat egy többváltozós valószínűségi eloszlás, így kényelmes lesz sorvektorokkal dolgoznunk. Minden $\alpha \in [\tau]$ esetén legyen*

$$X^{(\alpha)}(i,t) = \left(X_1^{(\alpha)}(i,t), \ldots, X_\tau^{(\alpha)}(i,t)\right) \quad \forall i, t \geq 1$$

Vagyis τ számú $\mathbb{Z}_+^\tau$-értékű vektorral írhatjuk le az egyes típusok szerinti eloszlást

$$X^{(1)}(i,t) = \left(X_1^{(1)}(i,t), \ldots, X_\tau^{(1)}(i,t)\right)$$
$$X^{(2)}(i,t) = \left(X_1^{(2)}(i,t), \ldots, X_\tau^{(2)}(i,t)\right)$$
$$\vdots$$

$$X^{(\tau)}(i,t) = \left(X_1^{(\tau)}(i,t), \dots, X_\tau^{(\tau)}(i,t)\right)$$

Azonos eloszlású $\mathbb{Z}_+^\tau$-értékű sorvektorok $\{p_k^\alpha\}$ valószínűségi eloszlással. Továbbá legyen

$$Z_0 = k_0 \in \mathbb{Z}_+^\tau$$

jelölje a kiindulási népességet a nulladik időpillanatban. Ezt sorvektor formájában adtuk meg, tehát leolvasható, hogy az egyes típusokból hány részecske van kezdetben. Rekurzívan a további időpillanatokban is felírhatjuk a megfelelő vektort.

$$Z_t = (Z_{t,1}, ..., Z_{t,\tau}) \in \mathbb{Z}_+^\tau$$

Amit felírhatunk összeg alakban is, mégpedig:

$$Z_t := \sum_{\alpha=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{Z_{t-1,\alpha}} X^{(\alpha)}(i,t)$$

Tehát a $t-1$. generációban lévő α típusú i-edik részecske β típusú, t. generációs utódjainak eloszlását $X_\beta^{(\alpha)}(i,t)$ jelöli.

3.1. Kapcsolat a martingálokkal

Ugyanúgy, mint az egytípusú esetben, most is vehetjük az utódok eloszlását leíró valószínűségi változók várható értékét. Célunk lesz megvizsgálni, hogy ez milyen összefüggést biztosít a martingálelméleti megállapításokkal. Többtípusú folyamatok esetén ezúttal egy mátrixba írhatjuk be az értékeket. Legyen $M = (m_{\alpha,\beta})$ négyzetes mátrix, ahol $m_{\alpha,\beta}$ egy α típusú egyed, β típusú utódszámának várható értéke, amiről feltesszük a végességet, vagyis

$$(m_{\alpha,\beta}) = \mathbb{E}\left[X_\beta^{(\alpha)}(1,1)\right] \quad \forall \alpha, \beta \in [\tau]$$

A 2.0.3. lemmához adott bizonyításhoz hasonlóan általánosítsunk többtípusú folyamatokra, és vizsgáljuk a lépésenkénti növekedést.

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{\alpha=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{Z_{t-1,\alpha}} X^\alpha(i,t)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{\alpha=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{Z_{t-1,\alpha}} \mathbb{E}\left[X^\alpha(i,t)|\mathcal{F}_{t-1}\right] =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{\tau} Z_{t-1,\alpha}\mathbb{E}\left[X^\alpha(1,1)\right] = Z_{t-1}M$$

Sőt, elmondható, hogy M bármely u sajátvektora és nemnulla λ sajátértéke esetén

$$U_t := \lambda^{-t} Z_t u, \quad t \geq 0$$

martingál a természetes filtrációra, hiszen

$$\mathbb{E}[U_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\lambda^{-t} Z_t u|\mathcal{F}_{t-1}] = \lambda^{-t}\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]u = \lambda^{-t} Z_t M u = \lambda^{-t} Z_t \lambda u = U_{t-1}$$

3.2. Kihalás

Egytípusú esetén láttuk, hogy az utódok számának várható értékéből következtethetünk a kimenetelre, nézzük meg hogyan általánosítható elágazó folyamatokra a kihalás valószínűsége. Ebben a szakaszban eredményeket, valamint ezek belátásához szükséges fogalmakat és állításokat mutatok be bizonyítás nélkül. Korábban kitértünk a pozitív mátrixokkal kapcsolatban a Perron-tételre (1.3.3. tétel), melynek következményei fontosak lesznek a többtípusú folyamat kihalásának leírásához. Legyen $\rho := \rho(M)$ a spektrálsugár, ahol M az előző részben ismertetett, a várható értékekből képezett mátrix, és $\mathbf{w}$ a jobboldali Perron vektor, amiről tudjuk, hogy pozitív. Míg egytípusú folyamatnál a várható érték, többtípusúnál a spektrálsugár értéke lesz számunkra mérvadó a kihalás valószínűsége szempontjából. Tehát a

$$W_t := \rho^{-t} \mathbf{Z}_t \mathbf{w}, \quad t \geq 0$$

martingál nemnegatív, így az 1.2.11. állítás értelmében egy valószínűséggel tart egy $\mathcal{L}^1$-ben korlátos valószínűségi változóhoz. Ha $\rho < 1$, akkor meggondolható a Markov-egyenlőtlenség segítségével, hogy a folyamat egy valószínűséggel kihal.
Rögzítsük a kihalási valószínűség formalizálását többtípusú folyamatok esetén. Tegyük fel, hogy kezdetben egy egyed alkotja a 0. nemzedéket, jelölje q^{α} a kihalás valószínűségét, ha α típusú részecskéből indulunk ki.

$$q^{(\alpha)} := \mathbb{P}[Z_t = 0 \text{ valamely t esetén} | Z_0 = e_\alpha]$$

ahol $e_\alpha \in \mathbb{Z}_+^\tau$ az α. koordinátában 1 értéket felvevő standard bázisvektor. Így képezzük a $\mathbf{q} := (q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(\tau)})$ sorvektort. Tehát az eddiek alapján elmondható, ha

$$\rho < 1 \text{ akkor } \mathbf{q} = 1.$$

Ehhez a részhez kapcsolódó fontos tételünkhöz még hivatkoznunk kell Z_t elágazó folyamatot leíró generátorfüggvényre, legyen ez $\mathbf{f}$. A többtípusú eset miatt tudjuk, hogy

$$\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^\tau \to \mathbb{R}^\tau.$$

Láttuk, hogy X valószínűségi változóra a generátorfüggvény: $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ alakban írható fel és $s \in [0,1]$ az egydimenziós esetben. Most általánosítsuk több dimenzióra:

$$f^{(\alpha)}(\mathbf{s}) := \mathbb{E}\left[\prod_{\beta=1}^{\tau} s_\beta^{X_\beta^{(\alpha)}(1,1)}\right],\ s \in [0,1]^\tau$$

és $\mathbf{f} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(\tau)})$.

3.2.1. Tétel. *Legyen $(Z)_t$ pozitív reguláris, nem szinguláris többtípusú elágazó folyamat véges, amihez tartozó M mátrix véges.*

1. *Ha $\rho \leq 1$ akkor $\boldsymbol{q} = 1$.*

2. *Ha $\rho > 1$ akkor $\boldsymbol{q} < 1$ és az egyértelmű megoldása az $f(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}$ egyenletnek $[0.1)^\tau$-ban $\boldsymbol{q}$.*

3. $\lim\limits_{t\to\infty} \rho^{-t} \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{v} W_\infty$ *egy valószínűséggel, ahol W_∞ nemnegatív valószínűségi változó.*

4. *Ha teljesül, hogy $Var\left[X_\beta^{(\alpha)}(1,1)\right] < +\infty, \forall \alpha, \beta$ esetén, akkor*

$$\mathbb{E}[W_\infty | Z_0 = e_\alpha] \ \textit{és}$$
$$q^{(\alpha)} = \mathbb{P}[W_\infty = 0 | Z_0 = e_\alpha], \quad \forall \alpha \in [\tau].$$

4. fejezet

Alkalmazások és kitekintés

A következőkben kitérünk olyan matematikai és természettudományos problémákra, melyeket visszavezethetünk elágazó folyamatokra, valamint konkrét feladatokat is megoldunk ezek segítségével. Továbbá megvizsgálok egy friss, 2020-ban megjelent, cikket is, amivel rátekintést nyerhetünk, hogy napjainkban az elágazó folyamatok terén milyen lehetséges kutatási irányok vannak.

4.1. Erdős-Rényi véletlen gráf

Ennél a matematikai alkalmazásnál a [12] könyv 1.8., 2.4.2., illetve 4. fejezetét használtam fel. A véletlen gráfok tanulmányozásának kezdete az 1950–60-as évekre nyúlik vissza. Több cikk is megjelent ebben az időszakban, ámde a terület megalapozását Erdős és Rényi 1960-ban megjelent munkája biztosította, akik a legegyszerűbb véletlen gráf modelljét írták le: a gráfnak legyen n csúcsa, és minden csúcspárt egymástól függetlenül adott p valószínűséggel kössön össze él.

Az említett p valószínűséget élvalószínűségnek nevezhetjük, és legyen $ER_n(p)$ a keletkezett véletlen gráf. Érdekes lesz megvizsgálni, hogy p változtatásával hogyan alakul a gráf, mégpedig a legnagyobb összefüggő komponenst fogjuk mi részletesebben megnézni. Úgynevezett fázisátmenetről beszélhetünk, ami azt jelenti, hogy történik egy éles átalakulás a legnagyobb összefüggő komponens esetében. Valóban, intuitívan látszik, míg az átlagos száma a szomszédoknak kicsi, tehát egynél kisebb, addig az összefüggő komponensek kicsik, viszont ha ez a szám egynél nagyobb akkor elképzelhető egy nagy, összefüggő komponens létrejötte. Ez a fajta gondolat emlékeztet minket az elágazó folyamatoknál a kihalás valószínűségénel felismert feltételre, ott az utódok számának várható értékéből

következtettünk arra, hogy kihal-e a folyamat. A fizikában észlelt fázisátmeneteket is ezen gráf segítségével ismerhetjük meg jobban matematikailag, p paraméter változtatásával, mint például a víz szilárd-folyékony halmazállapotváltozása 0°C környékén: intermolekuláris kötések létrejötte vezet egy szabályosabb rácsszerkezethez.
Legyen a gráf $ER_n(\frac{\lambda}{n})$, ekkor egy csúcs fokszáma binomiális eloszlású lesz $p = \frac{\lambda}{n}$ élvalószínűséggel és $n-1$ kísérlettel. Valamint $ER_n(\frac{\lambda}{n})$ eloszlására a $\mathbb{P}_\lambda$ jelölést alkalmazzuk.
A következőkben az Erdős–Rényi-gráf és az elágazó folyamatok közötti kapcsolatot fogjuk feltárni, pontosabban a legnagyobb összefüggő komponens tárgyalásával. Először bevezetünk néhány jelölést. A csúcsok halmaza legyen $[n] = \{1, \ldots, n\}$, és minden $s, t \in [n]$ csúcsra, st él p valószínűséggel, valamint legyen $s \longleftrightarrow t$, ha s és t csúcsok között létezik séta. Jelölje a v csúcsból sétával elérhető csúcsok halmazát (komponensét)

$$\mathscr{C}(v) = \{x \in [n] : v \longleftrightarrow x\}.$$

Így a v csúcsból sétával elérhető csúcsok számát $|\mathscr{C}(v)|$ adja meg, és legyen $\mathscr{C}_{max}$ a legnagyobb összefüggő komponens, így

$$|\mathscr{C}_{max}| = \max_{v \in [n]} |\mathscr{C}(v)|$$

Észrevehetjük, hogy $\mathscr{C}_{max}$ nincs egyértelműen definiálva, míg $|\mathscr{C}_{max}|$ igen, hiszen akár több azonos méretű maximális komponens is lehet, ekkor fogalmazhatunk úgy, hogy véve a csúcsok egy rendezését, a legkisebb sorszámú v csúcshoz tartozót tekintsük a maximális komponensek közül $\mathscr{C}_{max}$-nak.
Keressünk eljárást a $\mathscr{C}(v)$ összefüggő komponens megtalálására, adott v esetén. Hasonlóan járhatunk el, mint az elágazó folyamatoknál ismertetett bolyongás esetén: a csúcsokat minden lépésben 3 osztályba sorolhatjuk: aktív, inaktív, neutrális. Szélességi kereséssel bejátjuk a gráfot. Kezdetben egyedül v aktív, minden más csúcs neutrális, így $S_0 = 1$. A t. lépésben kiválasztunk egy aktív w csúcsot és minden, eddig el nem ért, szomszédját hozzávesszük az aktív csúcsokhoz, w inaktív, minden más neutrális marad. S_t jelöli a t. időben aktívvá vált csúcsok számát.

$$S_0 = 1,\ S_t = S_{t-1} + X_t - 1,$$

ahol X_t a t-edik aktív csúcsból felfedezett csúcsok száma. Ez a rekurziós formula nagyon hasonlít az elágazó folyamatoknál vett bolyongáséhoz. A folyamat akkor áll meg, ha valamely t esetén először $S_t = 0$, ekkor az összes inaktív csúcs halmaza $\mathscr{C}(v)$, és $|\mathscr{C}(v)| = t$.

Speciálisan, az Erdős–Rényi-gráfra X_t az S_{t-1} számától függ, hiszen minden, $t-1$. pillanatban neutrális w' csúcs p valószínűséggel válik a t. időben aktívvá. Valamint w legyen aktív a t. időpont előtt, ekkor minden ww' típusú csúcsot pontosan egyszer vizsgálunk, tehát a feltételes valószínűsége, hogy ww' él $ER_n(p)$-ben éppen p. Vegyük a $t-1$. pillanatot, ekkor S_{t-1} aktív, $t-1$ inaktív, és így $n-(t-1)-S_{t-1}$ neutrális csúcs van, így S_{t-1}-re feltételesen

$$X_t \sim Bin\Big(n-(t-1)-S_{t-1}, p\Big).$$

Vegyük észre, hogy a binomiális eloszlás első paramétere idővel csökken, ez nem meglepő, hiszen a felfedezett csúcsokkal egyre kevesebb marad neutrális.
Intuitívan megsejthető, hogy p növelésével - vagy mondhatunk λ-t is, hiszen $p = \frac{\lambda}{n}$ - az Erdős–Rényi-gráf komponensei is nőnek, ezt az alábbi definíció segítségével fogalmazhatjuk meg pontosabban.

4.1.1. Definíció. *(Növekvő események és valószínűségi változók) Azt mondjuk, hogy egy véletlen gráfokra vonatkozó esemény növekvő, ha az alábbi igaz: ha egy G gráfra teljesül az esemény, és G-hez további éleket adunk hozzá, akkor az így kapott gráfra is teljesül az esemény. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó növekvő, ha a $\{X \geq x\}$ események minden $x \in \mathbb{R}$ esetén nőnek.*

Például $\{s \longleftrightarrow t\}$ esemény növekvő, hiszen több él behúzásával (amit p növelésével érhetünk el) nagyobb valószínűséggel lesz két csúcs között séta. $|\mathscr{C}(v)|$ egy növekvő valószínűségi változó, hiszen több élet a gráfhoz véve a v-t tartalmazó maximális komponens nő.

A továbbiakban megvizsgáljuk és formalizáljuk $ER_n(\frac{\lambda}{n})$ összefüggő komponensei és a binomiális elágazó folyamat (tehát az utódok száma binomiális eloszlású) közötti kapcsolatot. Pontosabban sztochasztikus felső és alsó becslést adunk $\mathscr{C}(v)$-ra, majd a legnagyobb összefüggő komponensei teszünk megállapításokat.

4.1.2. Tétel. *(Sztochasztikus felső becslés) Minden $k \geq 1$ esetén*

$$\mathbb{P}_{np}(|\mathscr{C}(1)| \geq k) \leq \mathbb{P}_{n,p}(T^{\geq} \geq k),$$

ahol $T^{\geq}$ jelöli az n, p paraméterű binomiális eloszlású elágazó folyamatban a teljes nemzedék nagyságát.

Most nézzük meg, hogy alulról hogyan tudjuk közelíteni a legalább k nagyságú összefüggő komponens létezésének valószínűségét az Erdős–Rényi-gráfban.

4.1.3. Tétel. *(Alsó becslés) Minden $k \geq 1$ esetén*

$$\mathbb{P}_{np}(|\mathscr{C}(1)| \geq k) \geq \mathbb{P}_{n-k,p}(T^{\leq} \geq k),$$

ahol $T^{\leq}$ jelöli az $n-k, p$ paraméterű binomiális eloszlású elágazó folyamatban a teljes nemzedék nagyságát.

Végül nézzük meg, hogy a szubkritikus Erdős–Rényi-gráfban a legnagyobb összefüggő komponens méretére milyen becsléseket adhatunk.
Szubkritikus esetben tudjuk, hogy $\lambda = np < 1$ teljesül. Ekkor jelölje I_λ az alábbi függvényt:

$$I_\lambda = \lambda - 1 - \log(\lambda),$$

ahol I_λ Poisson-eloszlású, λ várható értékű valószínűségi változók nagy eltérési rátafüggvénye, amelyről a következő tételben leírtakat lesz nekünk érdemes tudni.

4.1.4. Tétel. *Legyen $(X_i)_{i\geq 1}$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor minden $a \geq \mathbb{E}[X_1]$-re létezik egy $a \mapsto I(a)$ függvény, melyre*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq na\right) \leq e^{-nI(a)}$$

valamint $a \leq \mathbb{E}[X_1]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq na\right) \leq e^{-nI(a)}.$$

Az így definiált $I(a)$ függvény kiszámítható, minden $a \geq \mathbb{E}[X_1]$-re az alábbi módon

$$I(a) = \sup_{t\geq 0}\left(ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]\right),$$

$a \leq \mathbb{E}[X_1]$ esetén pedig

$$I(a) = \sup_{t\leq 0}\left(ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]\right).$$

Visszatérve az Erdős–Rényi-gráfhoz, nézzük meg, hogy ekkor a legnagyobb összefüggő komponens méretéről milyen becsléseket adhatunk, felhasználva I_λ függvényt.

4.1.5. Tétel. *(Felső becslés szubkritikus komponensen)*
Legyen $\lambda < 1$, ekkor minden $a > \frac{1}{I_\lambda}$-ra létezik $\delta = \delta(a,\lambda) > 0$, hogy

$$\mathbb{P}_\lambda(|\mathscr{C}_{max}| \geq a\log n) = \mathcal{O}(n^{-\delta}).$$

4.1.6. Tétel. *(Alsó becslés szubkritikus komponensen)*
Legyen $\lambda < 1$, ekkor minden $a < \frac{1}{I_\lambda}$-ra létezik $\delta = \delta(a,\lambda) > 0$, hogy

$$\mathbb{P}_\lambda(|\mathscr{C}_{max}| \leq a\log n) = \mathcal{O}(n^{-\delta}).$$

4.2. Nukleáris láncreakció

E valószínűségi modell alkalmazása a fizikában az atombomba kapcsán vált ismertté, mégpedig a maghasadás és az így elindult láncreakció matematika leírása reményében. Ezen szakasz magját a [10] forrás biztosította, ami a [6] könyv 12. fejezete alapján készült. A fizikai háttértudáshoz a [7] könyv 4. fejezetét használtam fel. A következő leírás a valóság egy leegyszerűsített modellje lesz, feltesszük, hogy minden neutron azonos energiával rendelkezik, és mozgásának iránya egyenletes eloszlású az egységgömbön. Továbbá bármely pillanatban eltalálhat egy atommagot, ekkor energiájából veszítve, kisebb atommagokat hoz létre, a felszabaduló energia során pedig további neutronok szabadulnak fel. Előfordulhat, hogy a neutron elnyelődik a magban, ekkor nem biztos, hogy hasít, az egyszerűség kedvéért ilyen esettel nem foglalkozunk, és feltesszük, hogy a részecskék egymástól függetlenül ütköznek atommaggal. Nézzük a matematikáját a jelenségnek: az elágazó folyamatban szereplő részecskék tehát a neutronok lesznek. Ahogy a neutron atommaggal ütközik, az ennek következtében széthasad, és a folyamatban további neutronok keletkeznek, akik alkotják az utódokat a következő nemzedékben. Jelölje $Z_{n,j}$ az n. nemzedék j. egyedét, tegyük fel, hogy ez a neutron p valószínűséggel ütközik atommaggal, és ekkor m további neutron keletkezik. Tehát ekkor $1-p$ valószínűséggel nem hasít atommagot, és 0 további utód jön létre.

$$\mathbb{P}[Z_{n,j}=i]=\begin{cases} p & i=m \\ 1-p & i=0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Továbbá elmondható, hogy $\mathbb{E}[Z_{n,j}]=mp+0\cdot(1-p)=mp$ és az n. nemzedékben várhatóan $\mathbb{E}[Z_{n,j}]^n=m^np^n$ részecske van.
Megjegyezendő, hogy míg matematikailag igaz, hogy ha sok részecske van és p közel 1, akkor a neutronok száma nagyon gyorsan növekszik és számuk tart a végtelenbe, valójában azonban nem tehetjük fel, hogy a folyamatban egymástól függetlenül keletkeznének új neutronok. Fizikailag lehetetlen, hogy a folyamat idővel ne legyen konstans.

Nézzünk egy konkrét példát láncreakcióra, mely megoldható elágazó folyamatokkal. A feladat szövegét a [14] forrás ihlette, az ábrákat a Wolfram Alpha segítségével készítettem.

4.2.1. Példa. *Egy atomreaktor tegyük fel, hogy tetszőlegesen nagy számú atommagot tar-*

talmaz, melyek neutronok befogásával kettéhasadnak. A maghasadás folyamán további neutronok szabadulnak fel, egy ilyen részecske sorsa a következő:

- *p valószínűséggel elnyelődik egy atommagban, ami nem hasad;*
- *$1-p$ valószínűséggel hasít, ekkor egyenletes eloszlással 1, 2 vagy 3 további neutron jön létre.*

Tételezzük fel továbbá, hogy a neutronok sorsa egymástól független, és elnyelődés után a neutron többet nem hasít. Kezdetben egy neutront lövünk be a reaktorba. A p paramétertől függően miket mondhatunk a láncreakcióban szereplő neutronokról?

A példát modellezhetjük egytípusú elágazó folyamattal, ahol a nulladik nemzedék legyen a kezdetben belőtt egy neutron, tehát $X_0 = 1$. Az első nemzedéket azon neutronok alkotják, amik a kezdeti neutron által kiváltott maghasadás során keletkeztek (ha történt hasadás), számukat jelölje X_1, és így tovább, általánosan a k. nemzedék száma legyen X_k.

Határozzuk meg X_1 és X_4 generátorfüggvényét.

Az első nemzedék számát jelölő X_1 valószínűségi változó generátorfüggvénye meghatározható az utódeloszlásból az 1.1.1 defíniciót felírva:

$$g_{X_1} = \sum_{i=0}^{3} z^i \mathbb{P}(X_1 = i) = p + \frac{1-p}{3}(z + z^2 + z^3).$$

X_4 generátorfüggvénye a 2.0.2. tétel alapján a

$$g_{X_4} = g_{X_1} \circ g_{X_1} \circ g_{X_1} \circ g_{X_1}$$

kompozícióval adható meg.

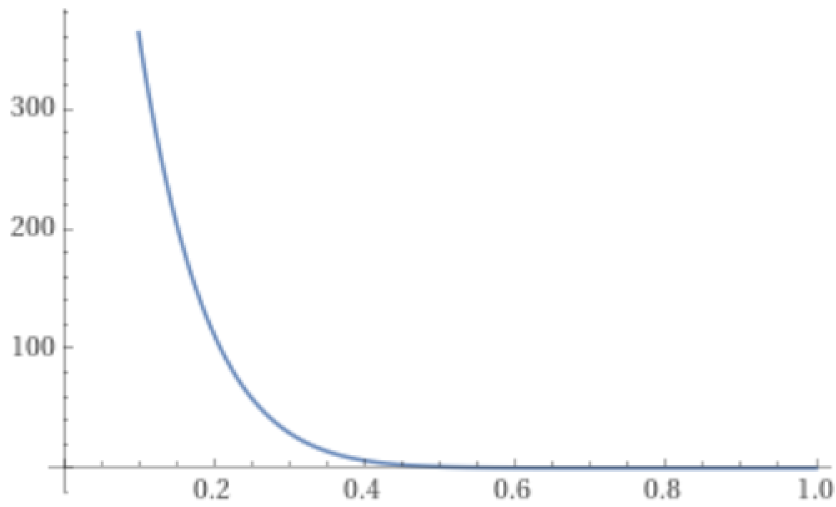
Adjuk meg X_1 és X_{10} várható értékét $p = 0.25$ esetén.

Az első nemzedék esetén diszkrét valószínűségi változó várható értékének definíciója alapján

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{i=0}^{3} i\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1-0.25}{3}(1+2+3) = 1.5 = \mu.$$

Szintén a 2.0.2. tételre hivatkozva, a 10. nemzedék esetén a várható érték:

$$\mathbb{E}(X_{10}) = \mu^{10} = 1.5^{10} \approx 57.7.$$



4.1. ábra. A 10. nemzedék számának várható értéke p értékének változtatásával

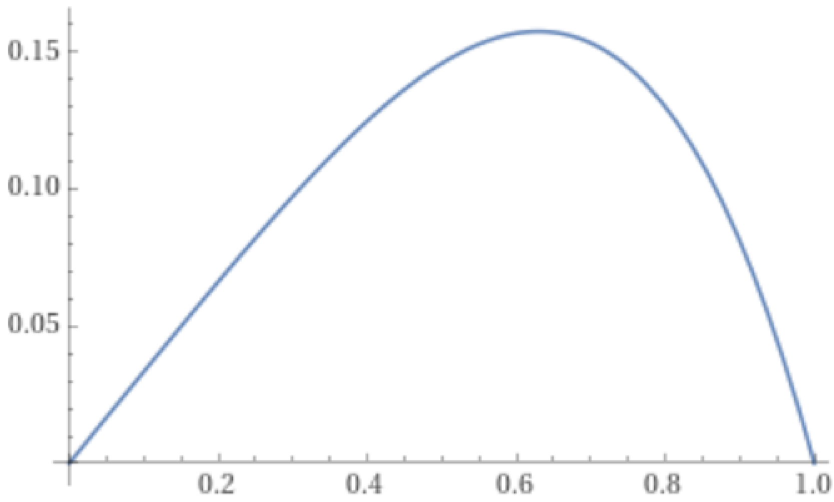
Mennyi a $\mathbb{P}(X_2 = 0)$ valószínűség $p = 0.7$ esetén? Továbbá mekkora valószínűséggel áll le a láncreakció éppen a második nemzedék neutronjainak elnyelődésével?

A $\mathbb{P}(X_2 = 0)$ valószínűséget az X_2 valószínűségi változó generátorfüggvénye adja meg a 0 helyen, ekkor ugyanis a konstans tag kivételével minden együtthatót nullával szorzunk. A generátorfüggvényt felírjuk $g_{X_2} = g_{X_1} \circ g_{X_1}$ kompozíciós alakban, ahol $g_{X_1} = p + \frac{1-p}{3}(z + z^2 + z^3) = 0.7 + 0.1(z + z^2 + z^3)$. Tehát

$$g_{X_2}(0) = 0.7 + 0.1(0.7 + 0.7^2 + 0.7^3) = 0.8533.$$

Annak a valószínűsége, hogy éppen a második nemzedékkel áll le a láncreakció (jelöljük ezt az eseményt A-val), az éppen annak a valószínűsége, hogy az elágazó folyamat a második generációban hal ki. Meghatároztuk, hogy mekkora valószínűséggel lesz $X_2 = 0$, így ebből le kell vonnunk annak a valószínűségét, hogy már az első nemzedékkel kihalt a folyamat (azt tudjuk, hogy kezdetben volt egy neutron amit belőttünk). Tehát

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 0) = g_{X_2}(0) - p = 0.8533 - 0.7 = 0.1533.$$



4.2. ábra. Kihalás valószínűsége a 2. nemzedékben p értékének változtatásával

Jelölje N az összes neutron számát a reaktorban, amely a folyamatban részt vett. Mennyi $\mathbb{E}(N)$ értéke?

A teljes nemzedék számának várható értéke az egyes generációk számának várható értékének összege: $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_i)$.

Mivel az egyes generációk számának várható értéke nemnegatív, így alkalmazhatjuk a Fubini-tételt, tehát $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} X_i\right)$.

Megoldásként pedig pedig egy μ hányadosú mértani sor összegét kapjuk:

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\sum_{i=0}^{\infty} X_i = 1 + \mu + \mu^2 + \ldots = \begin{cases} \frac{1}{1-\mu} & \mu < 1 \\ \infty & \mu \geq 1 \end{cases}$$

4.3. Kozmikus sugárzás

A Föld atmoszféráját folyamatosan, többnyire a Naprendszeren kívülről érkező, magas energiájú részecskék összessége éri, ez túlnyomórészt hidrogén atommag, a fentmaradó részt fotonok, elektronok, nehezebb elemek alkotják. Mikor ezen részecskék kölcsönhatásba kerülnek az atmoszféra molekuláival, további részecskék keletkeznek. Ezt a folyamatot többtípusú elágazó folyamattal írhatjuk le, aminek ismertetéséhez a [11] forrást vettem alapul. A valós fizikai modell komplex, időben folytonos folyamat, sokkal bonyolultabb, mint a dolgozatban ismertetett diszkrét eset. A részecskeáradatot írja le egy $N(E, x)$

függvény, ahol x az atmoszféra vastagsága, E pedig a $T_0, \ldots, T_n$ típusú részecskék energiái. Minden T_i részecskéhez hozzárendelhetünk τ_i élettartamot, amit az atmoszférában végbemenő interakciók határoznak meg. Az elágazó folyamatot minden részecskére külön írjuk fel, és a létrejövő részecskék energiaszintjére teljesül, hogy az utódé legfeljebb akkora, mint a szülőé, végig figyelembe véve az energiamegmaradás törvényét, tehát az utodók energiáinak összege megegyezik a szülő energiájával. Négy lehetséges kimenetelt különböztessünk meg: rugalmas és rugalmatlan ütközés, kihalás és szabad út az atmoszférában. Rugalmas ütközéskor a részecske, bár ütközik molekulával, de mozgási energiáját megtartva, irányváltoztatással halad tovább, rugalmatlan esetben több kisebb energiájú utód jön létre, a szülő pedig veszít energiájából. A kihalást ezektől az különbözteti meg, hogy a kölcsönhatás következtében a kezdeti részecske eltűnik, és új egyedek jönnek létre. A 0. időpillanat közelében legyen $o(h) \to 0$ és használjuk az alábbi jelöléseket a különböző esetek valószínűségére:

$$p_{rugalmas}(E, x)h + o(h)$$
$$p_{rugalmatlan}(E, x)h + o(h)$$
$$p_{kihal}(E, x)h + o(h)$$
$$\lambda = 1 - (p_{rugalmas} + p_{rugalmatlan} + p_{kihal})h + o(h)$$

Annak a valószínűsége, hogy a részecske kölcsönhatás nélkül halad át x mélységű atmoszférán dx hosszú út megtételével:

$$P(E, x) = \frac{\exp(-x/\lambda)}{dx/\lambda}$$

Ha a részecske nem tud kölcsönhatás nélkül túl áthaladni az x mélységű atmoszférán, akkor új részecskék jönnek létre. Interakciók során létrejövő k típusú részecske születési valószínűségére alkalmazzuk a következő jelölést: $w_k(E', x)$. Itt E' adja meg a részecske energiáját, és ez legfeljebb akkora lehet mint a szülő E energiája. Olyan többtípusú folyamatról beszélünk, ahol nem csak a részecskék fajtája, de energiaszintjük alapján is tehetünk megkülönböztetést. Egy részecske energiáját a fizika csak bizonyos pontossággal tudja megmondani, így valójában az energiaszinteket, mint intervallum adhatjuk meg. Legyenek így ezek

$$(E_0, E_0 + \Delta_0), \ldots, (E_n, E_n + \Delta_n)$$
$$\Delta_0^2 + \ldots + \Delta_n^2 \to 0$$

Ekkor egy i típusú részecskének, ha az energiája a j-edik intervallumból származik, akkor arra használjuk a T_i^j jelölést (ezen intervallumban belül bármely megegyező típust azonosnak vehetünk). Tehát ezen kétindexes jelöléssel adjuk meg a párhuzamosan két tulajdonság alapján megkülönböztetett egyedeket a többtípusú folyamatban. Minden T_i^j típusú egyedhez tartozik τ_i^j kihalási idő, melynek eloszlása $\mathbb{P}(\tau_i^j \leq t) = F_i^{(j)}(t)$. Ha ennek a részecskének az utódainak típusai szerinti számát az $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ sorvektor kódolja és mindegyik beleesik még valamely energia intervallumba, akkor a leszármazottak eloszását $w_\alpha^i(E_j, x)$ formában írhatjuk le, valamint teljesül, hogy $\sum_\alpha w_\alpha^i = 1$. Írjuk fel továbbá az egyes típusok generátorfüggvényét és számának várható értékét:

$$h_i^j(s) = \sum_\alpha w_\alpha^i(E_j, x) s^\alpha$$
$$\mathbb{E}(Num(T_i^j)) = \tfrac{\partial h_i^j(1)}{\partial s_j},$$

ahol $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ és $s = (s_1, \dots, s_k)$ esetén jelöljük az alábbi vektort a következőképpen:

$$s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_k^{\alpha_k}.$$

4.4. Gének és mutációk

Az élővilágban az öröklődés jelensége és a gének, melyek a szervezet működéséhez szükséges információt tartalmazzák, leírhatóak szintén elágazó folyamatokkal, amit én a [10] forrás alapján tettem meg. Vegyünk ugyanis egy organizmust, mely rendelkezik valamely tulajdonságát kódoló génnel, ekkor a genetika szabályai figyelembevételével, bizonyos eloszlással ez felbukkan a közvetlen leszármazottak szervezetében, tehát megadhatjuk, mekkora valószínűséggel öröklődik $0, 1, 2, \dots$ utódnál. Különösen fontos lesz ezt megvizsgálni spontán mutációknál, mikor a génszerkezet megváltozik. Ekkor ez az újfajta gént hordozó egyed alkotja a folyamatban a nulladik nemzedéket, és elágazó folyamatként modellezve, megbecsülhetők a mutáció túlélésének és terjedésének esélyei. Például vegyünk egy baktériumfajt, és tegyük fel, hogy minden egyed osztódáskor 200 utódot hoz létre, és egy adott tulajdonságú gént $\frac{1}{200}$ valószínűséggel továbbít, ekkor nyilván $Z_{n,j}$ binomiális eloszlású $n = 200$, $p = \frac{1}{200}$ paraméterrekkel. Valamint $\mathbb{E}(Z_{n,j}) = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1$, emiatt az adott gén egy valószínűséggel kihal.

Most lássunk egy konkrét biológiai példát, a [4] forrású cikkből:
A **Becker-féle izomdisztrófia** egy X kromoszómához kötött recesszíven öröklődő betegség, mely az izomsejtek fokozatos károsodásával jár. Ezt a betegséget 2-típusú elágazó

folyamattal modellezhetjük, ahol az első típus legyen a hordozó nő, második pedig az érintett férfi egyed. Tegyük fel, hogy a gyerekek egyenlő valószínűséggel lehetnek fiúk és lányok, és a hordozó nőnek várhatóan 2 gyereke, az érintett férfinak pedig 2Θ gyereke születik, ahol $\Theta < 1$ (ebben a kórban szenvedők esetében $\Theta \approx \frac{1}{2}$). Öröklődés esetén, mivel az érintett férfi rendelkezik X és Y kromoszómával, így fiúgyermekének csak az Y-t adja át, így ő nem lesz beteg. A mutációt vivő X kromoszómát csak a lánya kaphatja meg, így ő hordozóvá válik. Hordozó nők két X kromoszómával rendelkeznek, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel adják tovább a betegséget (tehát a mutációt hordozó egyik kromoszómát) az utódnak, nemtől függetlenül. Ekkor a többtípusú folyamatoknál ismertetett $M = (m_{i,j})$ négyzetes mátrixot, $i, j \in 1, 2$ (emlékeztetőül: $m_{i,j}$ jelenti, hogy egy i típusú egyed várhatóan hány j típusú utódot hoz létre) ennél az alkalmazásnál is könnyen meghatározhatjuk:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \Theta & 0 \end{bmatrix}.$$

A többtípusú folyamatoknál szereplő 3.2.1. Tétel alapján, az M mátrix ismeretével, nézzük, mit mondhatunk a kihalás valószínűségéről Θ értékétől függően.
Az M mátrix karakterisztikus polinomja:

$$k_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \Theta & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\Theta.$$

A mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\Theta}}{4}; \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8\Theta}}{4}.$$

Emlékeztetőül $\rho = \max_i |\lambda_i|$, és $\rho \leq 1$ esetén a kihalás valószínűsége 1 (különben kisebb mint 1 a valószínűsége), tehát a betegséget hordozó gén idővel szinte biztosan nem jelenik meg egy generációtól kezdve. Nézzük meg, milyennek kell Θ értékét választani, hogy 1 valószínűséggel kihaljon a folyamat.
Kiderül, hogy $\rho = \lambda_1$ lehet, hiszen ha $1 - \sqrt{1 + 8\Theta}$ nemnegatív, akkor nem lehet $1 + \sqrt{1 + 8\Theta}$ értékénél nagyobb. Ha pedig negatív, akkor abszolút értéket véve $|1 - \sqrt{1 + 8\Theta}| = -1 + \sqrt{1 + 8\Theta}$ és $|1 + \sqrt{1 + 8\Theta}| = 1 + \sqrt{1 + 8\Theta}$ közül, hogy valóban λ_1 a nagyobb. Valamint egyenlőek sem lehetnek, hiszen Θ nemnegatív. Tehát $\rho = \lambda_1$.
Ekkor mivel λ_1 mindig nemnegatív, így a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8\Theta}}{4} < 1,$$

melyre $\Theta < 1$ adódik.

A továbbiakban a generátorfüggvények felírását gondoljuk meg. Fontos megkülönböztetni a gyerekek számát leíró függvényt és az elágazó folyamatban az utódok eloszlását megadó generátorfüggvényt, hiszen minden szülőnek születhet egészséges gyereke is. Legyenek O_1, O_2 generátorfüggvények (külön a lányoké és a fiúké) a gyerekek számának leírására. Az elágazó folyamat generátorfüggvényei legyenek P_1 és P_2, melyek azon utódok számát írják le, akik megkapták a betegséget hordozó gént. A gyerekek számát leíró generátorfüggvényekből meghatározhatjuk P_1-et és P_2-t, felhasználva, hogy öröklődés esetén a hordozó nő $\frac{1}{2}$ valószínűséggel adja tovább a betegséget, és ebben az esetben az utód egyenlő eséllyel lesz lány vagy fiú. Ugyanekkor az érintett férfi $\frac{1}{2}$ valószínűséggel felelős a hibás gén továbbításáért, amit csak lány utódja kaphat meg. Így ezen információk birtokában felírhatjuk az elágazó folyamat (két változós) generátorfüggvényeit:

$$P_1(s_1, s_2) = O_1(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}s_1 + \tfrac{1}{4}s_2)$$

$$P_2(s_1, s_2) = O_2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_1),$$

ahol s_1 jelöli a mutációt hordozó nők, s_2 a betegségben érintett férfiak számát és feltételezzük, hogy a gyerekek egyenlő eséllyel fiúk vagy lányok.
Most nézzünk egy olyan példát, amelynél O_1 és O_2 $\lambda_1 = 2$ illetve $\lambda_2 = 2\Theta$ paraméterű Poisson generátorfüggvények, tehát

$$O_1(s) = \sum_{k\geq 0} p_1(k)(s)^k$$

$$O_2(s) = \sum_{k\geq 0} p_2(k)(s)^k,$$

ahol $i = 1, 2$-re bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$p_i(k) = \frac{e^{-\lambda_i}\lambda^k}{k!}$$

Tehát

$$O_i(s) = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^k}{k!}s^k = e^{-\lambda_i}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda_i s)^k}{k!} = e^{-\lambda_i}e^{\lambda_i s} = e^{-\lambda_i+\lambda_i s}$$

Így az összes gyerek számának generátorfüggvényei

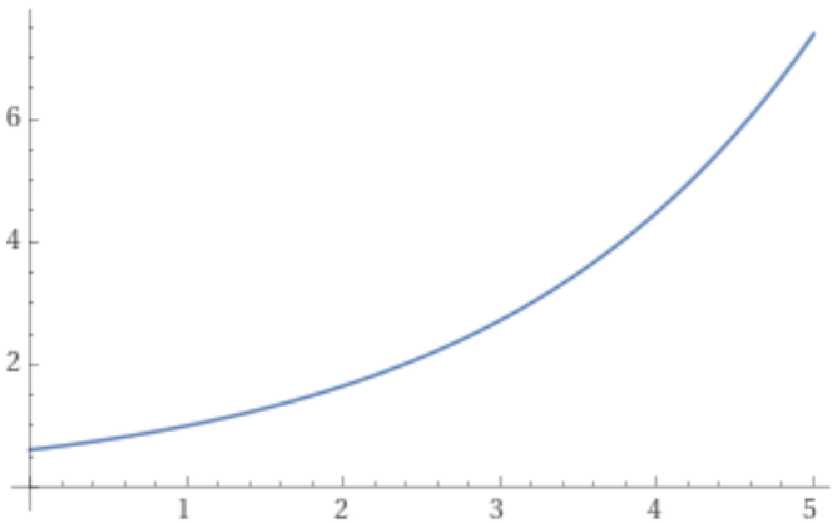
$$O_1(s) = e^{-2+2s}$$

$$O_2(s) = e^{-2\Theta+2\Theta s}$$

Nézzük ekkor mik lesznek az elágazó folyamat generátorfüggvényei, és Wolfram Alpha-val ábrázoljuk a P_2 generátorfüggvényt $\Theta = \frac{1}{2}$ érték esetén.

$$P_1(s_1, s_2) = O_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2) = e^{-2+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}s_1+\frac{1}{4}s_2)} = e^{-1+\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2}$$

$$P_2(s_1, s_2) = O_2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_1) = e^{-2\Theta+2\Theta(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s_1)} = e^{-\Theta+\Theta s_1}$$



4.3. ábra. P_2 generátorfüggvény $\Theta = 0.5$ esetén

4.5. Járványok

A koronavírus-járvány kirobbanásával a fertőző betegségek terjedésének modellezése egyre nagyobb figyelmet kapott. Ehhez a részhez a 2021-ben megjelent [1] cikket használtam forrásként. Fontos megérteni, hogy milyen körülmények vezethetnek egy nagyméretű járvány kialakulásához, és a prevenciós módszerek, mint a védőoltások, maszkviselés, szociális távolságtartás, milyen mértékben segítheti elő ezek lecsengését. A járványszakértők által gyakran használt, úgynevezett alapvető reprodukciós szám (legyen ez R_0), megadja, hogy várhatóan hány embert fertőz meg egy beteg egyén. Ez a mérőszám kapcsolatban áll azzal is, hogy mekkora eséllyel törhet ki egy nagyobb, akár világméretű, járvány. A következőkben megismerjük a leíró valószínűségi modellt, melyet főként a járvány kezdeti fázisaiban lesz hasznos alkalmaznunk, annak eldöntésére, mekkora mértékűvé fajulhat a fertőzés. A későbbi szakaszokban a népesség nagymértékű immunitása alakítja jelentősen a fertőzések számát.

A legegyszerűbb leírást az angol rövidítésű SIR-modell biztosítja, a népességet 3 osztályba sorolhatjuk:

(S) egészséges (fertőzhető)

(I) fertőzött

(R) gyógyult

Egy adott ember S állapotból I-be, valamint I-ből R-be kerülhet, azonban R állapot már változatlan marad (feltesszük, hogy immunissá válik a kórral szemben, vagy elhalálozik). A fertőzés az egyedek közötti interakcióval terjed, melyre a legáltalánosabb megadás a homogén keveredés, tehát bármely két ember egyenlő valószínűséggel lép kapcsolatba. Ezen megadás természetesen nem tükrözi helyesen a valóságot, hiszen a populáció eloszlása egyenlőtlen, egy háztartáson belül az interakciók sűrűbbek, viszont egy nagyvárost közelítően jól leír a modell.

Álljon a populáció N főből, és az egyes osztályokban lévők számát jellemezzék az $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ függvények, ahol t az eltelt idő, és $t = 0$ pontban $S(0) = N - 1, I(0) = 1, R(0) = 0$. Valamint tegyük fel, hogy a fertőző kontaktok száma t idő alatt λt paraméterű Poisson-eloszlású, és a megbetegedés az S osztályból egyenletes elszlással történik. Minden ember egy véletlenszerűen megadott T ideig marad fertőzött, hogy $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\gamma}$. ($T$ eloszlását például választhatjuk exponenciálisnak vagy konstansnak).

Jelölje Y egy adott fertőzött ember által megbetegítettek számát, tehát $\mathbb{E}[Y] = R_0$, valamint $T = t$ megszorítással tudjuk a Poisson-eloszlás miatt, hogy $\mathbb{E}[Y|T = t] = \lambda t$. Alkalmazzuk a toronyszabályt R_0 meghatározására:

$$R_0 = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|T]] = \mathbb{E}[\lambda T] = \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Már említettük, hogy a járvány kezdetén a fertőző kontaktok száma megközelítőleg megegyezik az adott ember által megbetegítettek számával, melynek várható értéke R_0. Így azt mondhatjuk, hogy a Galton–Waltson-folyamat egy megfelelő modellezést jelent ad a fertőző kontaktok számának meghatározására a járvány kezdeti szakaszában. Induljunk ki egy fertőzött egyénből N népességszám esetén, ekkor a következő megállapítást tehetjük:

4.5.1. Lemma. *Annak a valószínűsége, hogy az első n fertőző kontakt következtében további egyedek lesznek betegek, tart az 1-hez, mindaddig amíg $n \ll \sqrt{N}$.*

Továbbá az elágazó folyamatokkal meglévő kapcsolatból még fontos következményként kiemelhetjük, hogy nagy népességszám esetén a járvány kirobbanásának (vagyis a betegség nagy mértékű elterjedésének) esélye közel 0, ha $R_0 < 1$ és pozitív valószínűségű, ha $R_0 \geq 1$. Jelölje az Y valószínűségi változó generátorfüggvényét g_Y, és μ pedig legyen a $g_Y(t) = t$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. Ekkor a Galton–Waltson-folyamatnál megállapítottuk, hogy a kihalás valószínűsége éppen μ lesz, tehát a járvány nagyméretű kitörése $1 - \mu$ valószínűséggel várható. Így elmondhatjuk, hogy egynél nagyobb értékű R_0 reprodukciós szám esetén szinte biztosan számíthatunk a járvány kirobbanására.

4.6. Kitekintés - egy friss cikk bemutatása

Az elágazó folyamat tanulmányozása körülbelül 200 évre nyúlik vissza, a kutatás benne napjainkig aktív. A következő részben feldolgozok egy 2020-ban megjelent cikket [3], mellyel kitekintést nyerhetünk, hogy jelenleg milyen irányban haladhat tovább ezen sztochasztikus folyamatok vizsgálata. A cikk magyar szerzők munkája: Barczy Mátyás és Pap Gyula a Szegedi Tudományegyetemen, Bősze Zsuzsanna a göttingeni Georg-August-Universität-en végezte kutatását.

Vizsgáljunk olyan elágazó folyamatokat, mikor a népességet nem csupán a megszületett utódok, hanem adott időpontokban érkező – úgynevezett bevándorló – egyedek alkotják. Elsőrendű esetben feltesszük, hogy minden egyed egyszer hoz létre utódokat, életének az első évében, majd meghal. A kezdeti népességszám legyen X_0, és ekkor a populációt az n. időpontban az n. generációban született utódok, valamint ebben az időpontban érkező bevándorló egyedek alkotják. Jelölje $\xi_{n,i}$ az n. időpontban az $n-1$. generáció i. egyede utódainak számát, ε_n pedig az ekkor érkező bevándorlók számát minden $i, n \in \mathbb{N}$ esetén. Feltehetjük, hogy $\{\xi_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$ és $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ egész értékű, nemnegatív, azonos eloszlású valószínűségi változók.
Ekkor az n. generáció létszáma:

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hasonló módon nézzünk másodrendű Galton–Watson-folyamatot: ekkor ugyanis egy adott egyed életének első és második évében is hoz létre utódokat, majd meghal. Jelöljük $\xi_{n,i}$ valószínűségi változóval az n. időpontban az $n-1$. generáció i. egyedének, $\eta_{n,j}$ pedig ugyanekkor az $n-2$. generáció j. egyedének utódszámát minden $i, j, n \in \mathbb{N}$ esetén. ε_n hasonlóan a bevándorlók számát jelenti az n. időben. (Továbbra is ezen valószínűségi változók külön-külön azonos eloszlásúak.) A kezdeti népesség számát ezúttal jelölje X_{-1} és X_0 nemnegatív valószínűségi változók.
Az n-edik generáció népessége ekkor:

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,i} + \sum_{i=1}^{X_{n-2}} \eta_{n,j} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A másodrendű Galton–Watson-folyamatokat felírhatjuk, mint kéttípusú elágazó folyamatokat. Legyen $(X_n)_{n\geq -1}$ másodrendű folyamat bevándorlással. Továbbá

$$Y := \begin{bmatrix} Y_{n,1} \\ Y_{n,2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$Y_n = \sum_{i=1}^{Y_{n-1,1}} \begin{bmatrix} \xi_{n,i} \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{Y_{n-1,2}} \begin{bmatrix} \eta_{n,j} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ egy kéttípusú Galton–Watson-folyamat (bevándorlással), ahol a kezdeti népesség:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_{-1} \end{bmatrix}.$$

A két típusnak tehát ezzel a leírással a 0 illetve 1 életkorú egyedek felelnek meg. Például az $n-1$. generációban az i. első típusú egyed $\xi_{n,i}$ első típusút és egyetlen (saját maga) második típusút, míg ebben a generációban a j. második típusú egyed $\eta_{n,j}$ első típusút és nulla második típusút hoz létre.

A cikk kimond két tételt az első, illetve másodrendű folyamattal kapcsolatban. Központi szerepet a másodrendű eset játszik, hiszen a cikk erősen ezen bizonyítására épül. Először azonban lássunk néhány fontos definíciót, melyek szükségesek lesznek a továbbiak megértéséhez.

4.6.1. Definíció. *Legyen $U : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mérhető függvény. Azt mondjuk, hogy U regulárisan változó a végtelenben $p \in \mathbb{R}$ indexre nézve, ha minden $q \in (0,\infty)$ esetén,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(q(x))}{U(x)} = q^p.$$

4.6.2. Definíció. *Legyen X nemnegatív valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy X regulárisan változó $\alpha \in \mathbb{R}_+$ indexre, ha $U(x) := \mathbb{P}(X > x) \in (0,\infty)$ minden $x \in (0,\infty)$-re, és U regulárisan változó a $-\alpha$ indexre nézve a végtelenben.*

4.6.3. Definíció. *Legyen (x_t) sztochasztikus folyamat, és legyen $F(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau})$ (X_t) együttes eloszlásfüggvénye a $t_1+\tau, t_1+\tau, \ldots, t_1+\tau$ helyeken véve. Ekkor azt mondjuk, hogy (X_t) erősen stacionárius, ha*

$$F(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau}) = F(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

minden $\tau, t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

Nézzünk egy fontos tételt az elsőrendű folyamatról. Az alábbi bizonyítását a cikk nem részletezi.

4.6.4. Tétel. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ elsőrendű Galton-Watson folyamat bevándorlással, valamint teljesül, hogy $m_\xi \in (0,1)$ és legyen továbbá ε regulárisan változó $\alpha \in (0,2)$ indexxel. Abban az esetben, ha $\alpha \in [1,2)$ tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Legyen az X_0 kezdeti népességszámot leíró valószínűségi változó eloszlása olyan, hogy a folyamat erősen stacionárius. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X_0 > x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} m_\xi^{i\alpha} \mathbb{P}(\varepsilon > x) = \frac{1}{1-m_\xi^\alpha} \mathbb{P}(\varepsilon > x) \quad x \to \infty$$

A következő tétel játssza a [3] cikkben a központi szerepet, hiszen ennek a bizonyítására épül a tanulmány. Az elsőrendű Galton–Watson folyamat analógiájára, nézzük mit mondhatunk a másodrendű esetről.

4.6.5. Tétel. *Legyen $(x_n)_{n\geq -1}$ másodrendű Galton–Watson-folyamat bevándorlással, valamint teljesül, hogy $m_\xi, m_\eta \in (0,1)$ és $m_\xi + m_\eta < 1$. Legyen továbbá ε regulárisan változó $\alpha \in (0,2)$ indexxel. Abban az esetben, ha $\alpha \in [1,2)$, tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$ és $\mathbb{E}(\eta^2) < \infty$. Legyen az (X_0, X_{-1}) kezdeti népességszámot leíró valószínűségi változó eloszlása olyan, hogy a folyamat erősen stacionárius. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X_0 > x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} m_i^\alpha \mathbb{P}(\varepsilon > x) \quad x \to \infty,$$

ahol $m_0 := 1$, $m_k := \frac{\lambda_+^{k+1} - \lambda_-^{k-1}}{\lambda_+ - \lambda_-}$, $k \in \mathbb{N}$, *és*

$$\lambda_+ := \frac{m_\xi + \sqrt{m_\xi^2 + 4m_\eta}}{2}, \quad \lambda_- := \frac{m_\xi - \sqrt{m_\xi^2 + 4m_\eta}}{2}.$$

A következőkben a cikk a második tétel belátását részletezi. Ehhez felhasznál három lemmát, ebből kettőt nem lát be, ezek segítségével tud megfelelő felső becslést adni X_n és X_n^2 várható értékekre. A harmadik lemma X_0-t írja fel eloszlásban egyenlő kifejezéssel, mint valószínűségi változók végtelen összege.

Irodalomjegyzék

[1] Ahlberg, D. (2021). *Epidemics and branching processes.* Stockholm University.

[2] Backhausz, Á. (2020/2021). *Valószínűségszámítás*, előadásjegyzet, (Móri Tamás előadásai alapján)

[3] Barczy, M., Bősze, Zs., Pap, Gy. (2020). On tail behaviour of stationary second-order Galton–Watson processes with immigration. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 7 (3), 315–338.

[4] Dorman, K. S., Sinsheimer, J. S., Lange, K. (2004). *In the garden of branching processes.* SIAM review, 46(2), 202-229.

[5] Eriksson, K. (2023). *Perron-Frobenius' Theory and Applications.*

[6] Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol. 1).* 68-11708.

[7] Harris, T. E. (1963). *The theory of branching processes (Vol. 6).* Berlin: Springer.

[8] Roch, S. (2024). *Modern discrete probability: An essential toolkit.* Cambridge University Press.

[9] Serfozo, R. (2009). *Basics of applied stochastic processes.* Springer Science and Business Media.

[10] Speers, M., Whitfield, T. (2020). *Branching Processes and Their Applications.*

[11] Tchorbadjieff, A. (2017). *Using branching processes to simulate cosmic rays cascades.* Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 27(1), 103p-114p.

[12] Van Der Hofstad, R. (2024). Random graphs and complex networks. Lecture notes. Cambridge University Press.

[13] Zitkovic, G. (2015). *Lecture 11: Discrete Martingals*, lecture notes, University of Texas at Austin.

Feladatok forrásai:

[14] Első feladat

https://www.casact.org/sites/default/files/old/studytools_exams_sample_questions

[15] Második feladat

http://math.bme.hu/~pollux/stochmsc/4.pdf

Wikipédia link a bevezetéshez

[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Galton%E2%80%93Watson_process

NYILATKOZAT

Név: Barabás Eszter

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: DQ36NL

Szakdolgozat címe: Elágazó folyamatok és alkalmazásaik a fizikában és biológiában

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024. 05. 17.

Barabás Eszter

a hallgató aláírása