Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Győrffi Ádám György

Spektrális sorozatok és alkalmazásaik

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:
Terpai Tamás

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Terpai Tamásnak a rengeteg segítségért, türelemért és odaadó munkájáért a szakdolgozatom elkészítése közben. Hálás vagyok a családomnak, mivel lehetővé tették, hogy egyetemre járhassak és amiért támogatták a tanulmányaimat. Köszönöm a barátnőmnek, hogy végig mellettem állt és támogatott az alapképzés évei alatt.

1. fejezet

Bevezetés

A topologikus terek osztályozására kézenfekvő megoldás a terek homotopikus csoportjainak meghatározása: az n-edik homotopikus csoport kiszámításához veszünk egy n-dimenziós gömbfelületet, választunk ezen egy bázispontot, a gömbfelületet a térbe képezzük, majd az ilyen leképezések ekvivalenciaosztályait vizsgáljuk aszerint, hogy melyek vihetők egymásba a bázispontot helybenhagyó homotópiával. Ezeket a csoportokat viszonylag könnyen tudjuk definiálni, azonban őket vizsgálva egy furcsaságot vehetünk észre. A kétdimenziós gömbfelület harmadik homotópiacsoportja nem a triviális csoport, azaz olyan, mintha a kétdimenzós gömbfelületben lenne egy "háromdimenziós lyuk".

1.1. Hopf-fibrálás

Ennek a furcsaságnak a megmutatásához Heinz Hopf 1931-es konstrukciójának egy módosított változatát fogjuk használni. [5, 3. oldal] Ez egy olyan $S^3 \to S^2$ folytonos leképezés, amely nem nullhomotóp, így a $\pi_3(S^2)$ csoportnak egy nemnulla elemét reprezentálja.

1.1.1. Definíció. *A Hopf-fibrálást a következő módon definiálhatjuk: S^3 pontjait azonosítsuk az $\mathbb{R}^4$-ben vett koordinátáival, S^2 pontjait pedig az $\mathbb{R}^3$-ben vett koordinátáival. Így a h Hopf-leképezés:*

$$h : (a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$$

1.1.2. Megjegyzés. *Láthatjuk, hogy ez a leképezés folytonos és valóban S^2-be képez, mivel*

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+(2(ad+bc))^2+(2(bd-ac))^2=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2=1$$

1.1.3. Állítás. *A $h : S^3 \to S^2$ leképezés nem nullhomotóp.*

Ezt beláthatjuk például a következőképp: Definiáljuk az $S^3 \to S^2$ differenciálható leképezéseken a hurkolódási számot. Vegyük a leképezés két reguláris értékét, ezek ősei 1-sokaságok lesznek. A két ősképet távolítsuk egymástól homotópiával. Legyen az átmetszési szám az ősök homotópia közben súrolt képeik metszéspontjainak algebrai összege az irányítások szerint vett előjelekkel.

Belátható, hogy ez az átmetszési szám invariáns a reguláris értékek választására nézve és homotópiainvariáns is. Mivel a konstans leképezésnek 0, a h Hopf-fibrálásnak pedig 1 az átmetszési száma, megkapjuk az állítást.

Innen már sejthetjük, hogy a magasabb dimenziós gömbök magasabb dimenziós homotopikus csoportjainak kiszámítása nem egyszerű feladat és komoly differenciáltopológiai eszközöket igényel. Olyannyira, hogy az összes $\pi_m(S^n)$ csoport máig nem ismert. Részeredményeink vannak, például $m < n$ esetén $\pi_m(S^n) = 0$, illetve általában véve $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Ezek bizonyítása megtalálható például Szűcs András topológiajegyzetében. [1, 14.2.5. és 15.2.6. következmény] Van azonban egy másik lehetőségünk is. Egyes homotopikus csoportok kiszámítását felépíthetjük algebrai topológiai eszközökkel a homológia- és kohomológiaelméleten keresztül.

2. fejezet

Homológia

A homotopikus csoportokkal szemben a homológiacsoportok felépítése valamivel bonyolultabb, azonban kiszámításuk egyszerűbb és jobban megfelel az elvárásainknak (például $H_m(S^n)$ pontosan akkor lesz $\mathbb{Z}$, ha $m = n$, különben 0). Ez a fejezet nagyrészt Allan Hatcher Algebraic Topology című könyvének 2. fejezetére fog támaszkodni. [3, Chapter 2.]

2.1. Szimpliciális homológia

A homológiát először speciális topológiai terekre fogjuk definiálni, ezek lesznek a Δ-komplexusok. Ehhez viszont még szükségünk lesz néhány definícióra.

2.1.1. Definíció. *Ha a $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ pontok által kifeszített affin altér n-dimenziós, akkor a $v_0, \ldots, v_n$ pontok konvex burkát n-szimplexnek nevezzük.*

2.1.2. Definíció. *Standard n-szimplexnek nevezzük $\mathbb{R}^{n+1}$-ben a bázisvektorok által meghatározott n-szimplexet.*

A homológia definiálásához fontos lesz nyomon követnünk a szimplexek csúcsainak rendezését, szóval az "n-szimplex" kifejezés igazából az n-szimplexet és a csúcsain való rendezést együtt fogja jelenteni. A csúcsokon való rendezés megadása definiál egy kanonikus lineáris homeomorfizmust a standard n-szimplexről bármelyik másik $[v_0, \ldots, v_n]$ n-szimplexre, mégpedig

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$$

2.1.3. Definíció. *Definiáljuk még az n-szimplexhez a következőket:*

- *Ha egy n-szimplex csúcsai közül egyet kihagyunk, akkor a maradék n darab csúcs meghatároz egy $(n-1)$-szimplexet, ezt az n-szimplex egy lapjának nevezzük. Itt élünk azzal a konvencióval, hogy egy lap vagy bármely részszimplex csúcsainak rendezése megegyezik az eredeti szimplex csúcsainak rendezésével.*
- *Az n-szimplex lapjainak uniója a szimplex határa, a Δ^n n-szimplex esetén $\partial\Delta^n$ jelölést használjuk rá.*
- *Nyílt szimplexnek a szimplex belsejét, azaz $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \backslash \partial\Delta^n$-t nevezzük.*

2.1.4. Definíció. *Az X topologikus téren vett Δ-komplexus struktúrának nevezzük a $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ leképezések összességét, amik teljesítik a következőket:*

(i) *A $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ megszorítás injektív és X minden pontja pontosan egy ilyen megszorításban áll elő képként.*

(ii) *σ_α megszorítása valamelyik lapjára éppen egy $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ leképezés. Itt Δ^n lapját azonosítjuk Δ^{n-1}-gyel a kanonikus lineáris homeomorfizmuson keresztül úgy, hogy megtartjuk csúcsok rendezését.*

(iii) *Egy $A \subset X$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ nyílt Δ^n-ben, minden σ_α esetén.*

Mostmár készen állunk a szimpliciális homológiacsoporthoz kellő algebrai elemek definiálásához.

2.1.5. Definíció. *Legyen X Δ-komplexus. Legyen $C_n(X)$ az X e_α^n nyílt n-szimplexei által generált szabad Abel-csoport. $C_n(X)$ elemeit n-láncoknak nevezzük és formálisan felírhatók a generátorelemek véges összegeként: $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$ (ahol σ_α az a leképezés, amely beágyazza a megfelelő nyílt n-szimplexet és $n_\alpha \in \mathbb{Z}$).*

2.1.6. Definíció. *Definiáljuk a $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határleképezést a következő módon. A $[v_0, \dots, v_n]$ n-szimplexen a leképezés értéke legyen*

$$\partial_n([v_0, \dots, v_n]) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

majd terjesszük ki ezt lineárisan a teljes $C_n(X)$-re. A fenti definícióban $\hat{v}_i$ azt jelöli, hogy v_i-t kihagyjuk a felsorolásból.

2.1.7. Lemma. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, *azaz a "határ határa üres".*

Bizonyítás. Legyen $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ az X Δ-komplexus egy n-szimplexe. Ekkor

$$\partial_n([v_0, \ldots, v_n]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

így

$$\partial_{n-1}\partial_n([v_0, \ldots, v_n]) = \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^i(-1)^{j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n]$$

Ha a második szummában kicseréljük i-t és j-t, akkor az első szumma ellentettjét kapjuk. Mivel az n-szimplexek generálják $C_n(X)$-et, és a határleképezések homomorfizmusok, a lemmát bizonyítottuk. □

Így a határleképezéseket a $\partial_0 : C_0 \to 0$ triviális leképezéssel kiegészítve a következő sorozatot kapjuk:

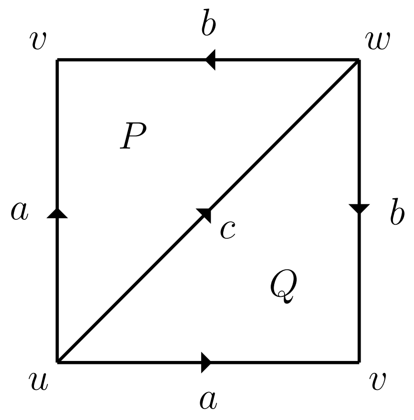
$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ahol $\partial_{n-1}\partial_n = 0$. Az ilyen tulajdonságú sorozatokat lánckomplexusoknak nevezzük. Az, hogy ez a kompozíció 0, éppen azt jelenti, hogy $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_n$, sőt, mivel ezek homomorfizmusok, így $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ nem csak részhalmaz, hanem részcsoport is. Így értelmes a következő definíció:

2.1.8. Definíció. *A fenti lánckomplexus n-edik homológiacsoportjának nevezzük a $H_n = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ faktorcsoportot. Speciálisan, ha a lánckomplexus egy X Δ-komplexusból származik, akkor ezt a Δ-komplexus n-edik szimpliciális homológiacsoportjának nevezzük és $H_n^{\Delta}(X)$-val jelöljük.*

2.1.9. Megjegyzés. *A $\operatorname{Ker}\partial_n$ elemeit ciklusoknak, $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ elemeit pedig határoknak nevezzük.*

2.1.10. Példa. *Számítsuk ki az S^2 gömbfelület szimpliciális homológiacsoportjait. Az ábrán láthatunk egy S^2-n vett Δ-komplexus struktúrát.*



Ez három 0-szimplexből, három 1-szimplexből és két 2-szimplexből áll, az azonos szimplexeket az irányításuknak megfelelő módon azonosítjuk és láthatjuk, hogy a struktúra valóban megfelel a Δ-struktúrák definíciójának. Ekkor a következő lánckomplexust kapjuk:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_4} 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Mivel $\partial_0 = 0$, így $H_0^\Delta(S^2) = \mathbb{Z}^3(u,v,w)/\operatorname{Im}\partial_1$. Az $\operatorname{Im}\partial_1$ csoportot a $\partial_1(a) = v - u$, $\partial_1(b) = v - w$ és $\partial_1(c) = w - u$ elemek generálják. Mivel $\partial_1(c) = \partial_1(a) - \partial_1(b)$, így valóban már $\{v-u, v-w\}$ is egy megfelelő generátorhalmaz. Ugyanakkor $\mathbb{Z}^3(u,v,w)$-t generálja $\{v-u, v-w, v\}$ is, amiből láthatjuk, hogy a faktor, azaz a nulladik szimpliciális homológiacsoport $H_0^\Delta(S^2) \simeq \mathbb{Z}(v)$.

A C_1 láncai $k_1a + k_2b + k_3c$ alakban állnak elő ($k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$), ebből pedig láthatjuk, hogy egy ilyen elem pontosan akkor lesz ciklus, ha $k_1 = -k_2 = -k_3$, mert $\partial_1(k_1a + k_2b + k_3c) = (-k_1 - k_3)u + (k_1 + k_2)v + (-k_2 + k_3)w$. Így viszont a ciklusok mind előállnak képként ∂_2 által, mivel $\partial(P) = -a + b + c$. Tehát $H_1^\Delta(S^2) = 0$.

$\partial_2(P) = -a + b + c = \partial_2(Q)$, azaz a C_2-beli ciklusok $k(P - Q)$ alakúak ($k \in \mathbb{Z}$). Mivel ∂_3 már a konstans 0 leképezés, így $H_1^\Delta(S^2) \simeq \mathbb{Z}(P - Q)$. A nagyobb indexű lánccsoportok pedig mind triviálisak, így a szimpliciális homológiacsoportok is azok.

2.2. Szinguláris homológia

Ezzel a homológiacsoportokat definiáltuk Δ-komplexusokra, de olyan terekre még nem, amelyeken nem létezik Δ-komplexus struktúra, illetve azt sem látjuk még, hogy ugyanazon téren vett különböző Δ-komplexus struktúrák ugyanazon homológiacsoportokat adják meg. Így definiáljuk a homológiákat általánosabb értelemben.

2.2.1. Definíció. *Az X téren vett szinguláris n-szimplexnek nevezünk egy folytonos $\sigma : \Delta^n \to X$ leképezést.*

2.2.2. Definíció. *Legyen $C_n(X)$ az X tér szinguláris n-szimplexei által generált szabad Abel-csoport. Ekkor $C_n(X)$ elemeit n-láncoknak, pontosabban szinguláris n-láncoknak nevezzük és formálisan felírhatók, mint a generátorelemekből képzett véges összegek: $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$ (hasonlóan a szimpliciális láncokhoz, a σ_α-k szinguláris n-szimplexek és $n_\alpha \in \mathbb{Z}$).*

A fentiekhez hasonlóan definiáljuk a szinguláris n-láncok közötti határleképezéseket is.

2.2.3. Definíció. *A $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határleképezés értéke a szinguláris szimplexeken legyen*

$$\partial_n([v_0, \dots, v_n]) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

ahol $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ a $[v_0, \dots, v_n]$ szinguláris szimplex megszorítása arra a lapra, amely a v_i csúcsot nem tartalmazza. Majd terjesszük ki a leképezést $C_n(X)$ egészére lineárisan.

Így meg is kaptuk a

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

szinguláris lánckomplexust, amire már fent definiáltuk a homológiacsoportot.

2.2.4. Állítás. *Vegyünk egy X teret, amely előáll, mint az útösszefüggőségi komponenseinek uniója: $X = \cup_\alpha X_\alpha$. Ekkor a $H_n(X)$ homológiacsoport előáll, mint az útösszefüggőségi komponensek homológiacsoportjainak direktösszege:*

$$H_n(X) \simeq \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

Bizonyítás. Mivel egy szinguláris szimplex útösszefüggő, így $C_n(X)$ felbomlik az útösszefüggőségi komponensek direkösszegére: $\oplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. Ez minden n-re elmondható és a megszorítás nem változtat a szimplex komponensén, így a határleképezések, tehát $\operatorname{Ker}\partial_n$ és $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ is megtartja ezt a felbontást. Ebből láthatjuk, hogy a homológiacsoport is ugyanúgy felbomlik: $H_n(X) \simeq \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$. □

2.2.5. Állítás. *Ha X nemüres és útösszefüggő, akkor $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$, mivel $\partial_0 = 0$. Legyen $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ a következőképp definiált homomorfizmus: $\varepsilon\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) = \sum_i n_i$. Mivel X nemüres, így ez a homomorfizmus szürjektív. Így elegendő azt belátnunk, hogy $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$, hiszen ekkor ε indukál egy $H_0(X) \to \mathbb{Z}$ izomorfizmust.

Vegyünk egy tetszőleges $\sigma : \Delta^1 \to X$ szinguláris 1-szimplexet. Erre $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|[v_0] - \sigma|[v_1]) = 1 - 1 = 0$. Mivel ∂_1-et lineárisan terjesztjük ki, ezért $\varepsilon\partial_1 = 0$, tehát $\operatorname{Im}\partial_1 \subset \operatorname{Ker}\varepsilon$.

Másrészt legyen $\sum_i n_i\sigma_i \in \operatorname{Ker}\varepsilon$, azaz olyan lánc, amelyre $\sum_i n_i = 0$. (Itt a σ_i-k valójában pontok.) Válasszunk az X-ben egy tetszőleges bázispontot, legyen ez x_0, majd minden i-re legyen τ_i egy x_0-t σ_i képével összekötő görbe. Az útösszefüggőség miatt ilyenek mindig léteznek és tekinthetünk rájuk szinguláris 1-szimplexként is. Legyen továbbá σ_0 az a szinguláris 0-szimplex, amelynek képe x_0 Ekkor $\partial_1\left(\sum_i n_i\tau_i\right) = \sum_i n_i(\sigma_i - \sigma_0) = \sum_i n_i\sigma_i - \sum n_i\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i$. Így $\sum_i n_i\sigma_i \in \operatorname{Im}\partial_1$, tehát $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$, amivel beláttuk az állítást. □

2.2.6. Következmény. *Az előző két állításból látszik, hogy egy X topologikus tér $H_0(X)$ homológiacsoportja előáll annyi $\mathbb{Z}$ direktösszegeként, ahány útösszefüggőségi komponense van X-nek.*

Az állítás másik következménye, hogy érdemes bevezetnünk a redukált homológiacsoport fogalmát, mely a későbbiekben segítségünkre lesz, hogy az állításainknál ne kelljen az $n = 0$ esetet külön kezelnünk.

2.2.7. Definíció. *Tekintsük az X tér kiegészített lánckomplexusát:*

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ahol $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$. Az ebből a lánckomplexusból kapott $\tilde{H}_n(X)$ homológiacsoportokat az X tér redukált homológiacsoportjainak nevezzük.

2.2.8. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy ha X nemüres, akkor $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ és $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$, ha $n > 0$.*

2.2.9. Állítás. *Ha X egyetlen pontból áll, akkor $H_n(X) = 0$, ha $n > 0$ és $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Ha X egyetlen pontból áll, akkor minden n-re pontosan egy szinguláris n-szimplex létezik (mely egésze az X egyetlen pontjába képződik), legyen ez σ_n. Így a határleképezés: $\partial_n \sigma_n = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$ Ez páros n-ekre 0-t, páratlan n-ekre pedig σ_{n-1}-et ad, tehát X lánckomplexusa így néz ki:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Ebből pedig már könnyen látható az állítás. □

2.3. Homotópiainvariancia

A homológiacsoportok fontos tulajdonsága, hogy homotopikusan ekvivalens terek homológiacsoportjai megegyeznek. Az alábbiakban ezt fogjuk belátni.

Az $f : X \to Y$ folytonos leképezés indukál egy homomorfizmust a $C_n(X)$ láncairól $C_n(Y)$ láncaira. Az indukált $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ homomorfizmust az eddigiekhez hasonlóan $C_n(X)$ generátorain definiáljuk, majd lineárisan kiterjesztjük. Legyen $\sigma : \Delta^n \to X$ egy X-beli szinguláris n-szimplex. Ekkor $f_\#(\sigma)$ legyen az $f\sigma : \Delta^n \to Y$ kompozíció által megadott Y-beli szinguláris n-szimplex.

2.3.1. Definíció. *Legyenek $\{C_n^1\}$ és $\{C_n^2\}$ lánckomplexusok ∂_1 ás ∂_2 határleképezésekkel. Ekkor a $h_n : C_n^1 \to C_n^2$ homomorfizmusok egy láncleképezést adnak meg $\{C_n^1\}$-ről $\{C_n^2\}$-re, ha a $h\partial_1 = \partial_2 h$ egyenlőség fennáll ($h = \cup_n h_n$ jelölés mellett).*

2.3.2. Állítás. *Az $f : X \to Y$ folytonos leképezés által a terek láncain indukált homomorfizmusok egy láncleképezést adnak meg a terek lánckomplexusain.*

Bizonyítás. Legyen az X és Y lánckomplexusain a határleképezés ∂:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Így azt kell ellenőriznünk, hogy $f_\# \partial = \partial f_\#$, azaz a fenti diagram kommutatív. Legyen $\sigma : \Delta^n \to X$ egy szinguláris n-szimplex. σ-nak az ∂ szerinti képe a σ lapjainak előjeles összege, majd erre alkalmazva $f_\#$-et, az összeg tagjait az f szerinti képükre cseréljük. Másrészt σ-ra a $\partial f_\#$-t alkalmazva $f\sigma$ lapjainak előjeles összegét kapjuk, így az egyenlőség valóban fennáll, mivel f és a megszorítás a lapokra felcserélhető műveletek. Sőt, az előjeles összeget is éppen úgy vesszük, hogy az megtartja a megfelelő Y-beli $(n-1)$-szimplexek előjeleit. $\square$

2.3.3. Állítás. *Egy láncleképezés homomorfizmusokat indukál a két lánckomplexus homológiacsoportjai között.*

Bizonyítás. Az előbb beláttuk, hogy $f_\# \partial = \partial f_\#$, azaz a fenti diagram kommutatív. Ha $\alpha \in C_n$ ciklus, tehát $\partial \alpha = 0$, akkor $\partial f_\# \alpha = f_\# \partial \alpha = 0$, így $f_\# \alpha$ is ciklus. Ha pedig $\partial \beta$ határ, akkor $f_\# \partial \beta = \partial f_\# \beta$ is határ, így $f_\#$ ciklust ciklusba és határt határba visz. Tehát valóban indukál egy $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ homomorfizmust. $\square$

2.3.4. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ és $g : X \to Y$ folytonos leképezések homotópok, akkor ugyanazt a homomorfizmust indukálják a homológiacsoportokon.*

Bizonyítás. Legyen $F : X \times I \to Y$ homotópia f és g között ($F|X \times \{0\} = f$, $F|X \times \{1\} = g$). Ekkor egy adott X-beli σ n-szimplex segítségével F beleképzi a $\Delta \times I$ prizmát Y-ba , mégpedig a $G_\sigma = F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) : \Delta^n \times I \to X \times I \to Y$ kompozícióval, ahol $\mathbb{1}$ az identitás. Így ennek segítségével definiálhatjuk a $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ prizmaleképezést.

A prizma geometriailag két párhuzamos hipersíkon lévő n-szimplex konvex burka, így egy olyan poliéder, melynek csúcsait éppen e két n-szimplex adja. Legyenek ezek a csúcsok $v_0, \ldots, v_n, w_0, \ldots, w_n$. A csúcsok közül bármely $n+2$-t kiválasztva vehetjük ezek konvex burkát, és így egy $\Delta^n \times I$-beli szinguláris $(n+1)$-szimplexet kapunk, majd erre alkalmazva G_σ-t egy Y-beli $(n+1)$-szimplexet.

Így a prizmaleképezés legyen egy σ X-beli szinguláris n-szimplexre

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i G_\sigma|[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

majd terjesszük ki ezt a szokásos módon lineárisan.

Belátjuk, hogy a $P, f_\#, g_\#, \partial$ leképezések között fennáll a $\partial P = g_\# - f_\# - P\partial$ egyenlőség. A bal oldalt tekintve

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j G_\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] +$$
$$+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} G_\sigma|[v_0, \dots, v_i, w_i, , \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]$$

A két összeg azon tagjait tekintve, melyekben $i = j$, egy teleszkopikus összeget kapunk, így ezek közül csak a $G_\sigma|[w_0, \dots, w_n]$ és a $-G_\sigma|[v_0, \dots, v_n]$, amik éppen $g_\#(\sigma) = g \circ \sigma$-t és $-f_\#(\sigma) = -f \circ \sigma$-t jelentik. A maradék tagok pedig éppen $P\partial(\sigma)$ ellentettjét adják meg:

$$P\partial(\sigma) = \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j G_\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] +$$
$$+ \sum_{j > i} (-1)^{i-1} (-1)^j G_\sigma|[v_0, \dots, v_i, w_i, , \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]$$

amivel beláttuk ezt az egyenlőséget.

Egy $\alpha \in C_n(X)$ ciklusra ezt alkalmazva láthatjuk, hogy $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$, mivel $\partial\alpha = 0$, így $f_\#(\alpha)$ és $g_\#(\alpha)$ csak valamilyen $C_{n+1}(Y)$-beli lánc határával térnek el egymástól, tehát a $H_n(Y)$ homológiacsoportban ugyanazt az elemet reprezentálják, amivel beláttuk az állítást. □

2.3.5. Következmény. *Az $f : X \to Y$ homotopikus ekvivalencia által indukált $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ leképezés izomorfizmus.*

Bizonyítás. Mivel f homotopikus ekvivalencia, ezért létezik egy olyan $g : Y \to X$ folytonos leképezés, melyre $g \circ f$ homotóp X identitásleképezésével, $f \circ g$ pedig Y identitásával. Mivel az identitásleképezés a homológiákon is az identitást indukálja, így a következő kompozíciók az előző tétel miatt izomorfizmusok:

$$H_n(X) \xrightarrow{f_\#} H_n(Y) \xrightarrow{g_\#} H_n(X)$$
$$H_n(Y) \xrightarrow{g_\#} H_n(X) \xrightarrow{f_\#} H_n(Y)$$

Az első miatt $f_\#$ injektív, a második miatt pedig $f_\#$ szürjektív, tehát $f_\#$ izomorfizmus. □

2.4. Kivágás

A következőkben bevezetjük a relatív homológiacsoport fogalmát. Ez segítségünkre lesz abban, hogy kapcsolatot teremtsünk egy tér különböző indexű homológiacsoportjai között.

2.4.1. Definíció. *Vegyünk egy X teret és az ő A alterét. Legyen $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$. Az így kapott relatív lánccsoportok a $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határleképezés által indukált $\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ relatív határleképezéssel relatív lánckomplexust alkotnak. Ez valóban lánckomplexus lesz, mivel a határleképezés $C_n(A)$-t $C_{n-1}(A)$-ba viszi.*

2.4.2. Definíció. *Az indukált határleképezésre nézve $\partial^2 = 0$ továbbra is fennáll, így a következő definíciók értelmesek:*

- *A fenti relatív lánckomplexusból kapott $H_n(X, A) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ csoportot az (X, A) pár relatív homológiacsoportjának nevezzük.*
- *A $H_n(X, A)$ elemeit a relatív ciklusok reprezentálják: $\alpha \in C_n(X)$ pontosan akkor relatív ciklus, ha $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.*
- *Az α relatív ciklus pontosan akkor triviális a $H_n(X, A)$ csoportban, ha relatív határ, azaz $\alpha = \partial\beta + \gamma$ alakban írható, ahol $\beta \in C_{n+1}(X)$ és $\gamma \in C_n(A)$.*

2.4.3. Tétel. *Legyen X egy topologikus tér, A pedig egy altere, $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ és $j_* : H_n(X) \to H_n(X, A)$ a láncokon vett i természetes beágyazás és j faktorleképezés által indukált leképezések. Ekkor létezik egy olyan ∂ homomorfizmus, amivel az alábbi homológiacsoportokból álló sorozat egzakt:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

Bizonyítás. Először definiáljuk ∂-t, majd belátjuk, hogy ezzel a leképezéssel a sorozat valóban egzakt. Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & C_n(A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & C_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ez definíció szerint valóban kommutatív, az oszlopai pedig rövid egzakt sorozatok, mivel j éppen $C_n(A)$ elemeit viszi a 0-ba.

∂ definiálásához vegyünk egy tetszőleges, $c \in C_n(X,A)$-beli ciklust. A $j : C_n(X) \to C_n(X,A)$ faktorleképezésnél ez valamely $b \in C_n(X)$-beli elem képe, így $c = j(b)$. $\partial b \in C_{n-1}(X)$ benne van j magjában, mivel $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, c pedig ciklus. Az oszlop egzakt sorozat tulajdonságából adódóan $\partial b = i(a)$ valamely $a \in C_{n-1}(A)$-beli elem képe. $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial\partial b = 0$, így i injektivitása miatt $\partial a = 0$, tehát a ciklus. Definiáljuk a $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ leképezést úgy, hogy a $[c]$ ekvivalenciaosztályhoz az $[a]$ ekvivalenciaosztályt rendelje. Ekkor ∂ jóldefiniált, mivel:

- i injektivitása miatt a egyértelműen meghatározott egy adott b-re.
- Legyen $b, b' \in C_{n-1}(X)$ olyan elemek, melyeket j egyaránt c-be visz. Ekkor $b' - b \in \operatorname{Ker} j$, tehát létezik egy olyan $a' \in C_n(A)$-beli elem, amelyre $b' - b = i(a')$. Így $b' = b + i(a')$, tehát b'-höz az $a + \partial a'$ elemet kapjuk a fenti eljárásban, mivel $\partial b' = \partial b + \partial i(a') = i(a) + i(\partial a') = i(a + \partial a')$. Viszont az $[a]$ és $[a + \partial a']$ ekvivalenciaosztályok megegyeznek, mivel $\partial a'$ határ a $C_{n-1}(A)$ lánccsoportban.
- Vegyünk egy másik reprezentáló elemet a $[c]$ ekvivalenciaosztályból. Ekkor ez előáll $c + \partial c'$ alakban, ahol $c' \in C_{n+1}(X,A)$. Ekkor $c' = j(b')$ valamely $b' \in C_{n+1}(X)$-beli elem képe. Ebből láthatjuk, hogy $c + \partial c' = c + \partial j(b') = j(b) + j(\partial b') = j(b + \partial b')$. Ekkor viszont a fenti eljárással ugyanazt az a-t kapjuk $c + \partial c'$-höz, mint c-hez, mivel $\partial(b + \partial b') = \partial b + \partial\partial b' = \partial b$.

A $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ leképezés homomorfizmus, mivel ha $\partial[c_1] = a_1$ és $\partial[c_2] = [a_2]$, b_1 és b_2 pedig a c_1-hez és c_2-höz megfelelő $C_n(X)$-beli elemek a fenti eljárásban, akkor $c_1 + c_2 = j(b_1) + j(b_2) = j(b_1 + b_2)$ és $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2)$, így $\partial([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$.

Így még azt kell belátnunk, hogy a fenti sorozat valóban egzakt. Ez következik az alábbi hat állítás bizonyításából:

- $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$: Mivel j a $C_n(X)$ $C_n(A)$-beli elemeit a 0-ba viszi, így $ji = 0$, tehát az indukált leképezés $j_* i_* = 0$.
- $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$: Legyen $b \in C_n(X)$ ciklus, amely egy homológiaosztályt reprezentál $\operatorname{Ker} j_*$-ben, tehát $j(b)$ határ. Így $j(b) = \partial c'$ valamilyen $c' \in C_{n+1}(X,A)$-ra. j szürjektivitása miatt $c' = j(b')$ valamely $b' \in C_{n+1}(X)$ elemre. Ekkor $j(b - \partial b') = j(b) - \partial j(b') = \partial c' - \partial c' = 0$, tehát $b - \partial b'$ előáll mint valamilyen $a \in C_n(A)$ elem i szerinti képe. Ezen a-ra $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b - \partial\partial b' = 0$, tehát a ciklus i injektivitása miatt. Így $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$, amivel beláttuk, hogy $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_*$.
- $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$: Legyen $[c] \in \operatorname{Im} j_*$. Ekkor ∂ definíciójában a c-hez tartozó b-re $\partial b = 0$, mivel azon b-k, amelyekre $j(b) = c$, valójában ciklusok. Így $j_* \partial = 0$.
- $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$: Ha c egy $\operatorname{Ker} \partial$-beli homológiaosztályt reprezentál, akkor az $a \in C_{n-1}(A)$ reprezentáló elem, amelyre $[a] = \partial[c]$, határ, így előáll $a = \partial a'$ alakban valamely $a' \in C_n(A)$-ra. Ekkor egy c-hez megfelelő b-vel $\partial(b - i(a')) = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0$, így $b - i(a')$ ciklus. Ekkor $j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c$ miatt $j_*[b - i(a')] = [c]$. Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{Im} j_* = \operatorname{Ker} \partial$.
- $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$: $i_* \partial[c] = i_*[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0$, mivel $\partial b \in C_{n-1}(X)$ határ. Így $i_* \partial = 0$.
- $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$: Ha $a \in C_{n-1}(A)$ egy $\operatorname{Ker} i_*$-beli ciklus, akkor $i(a) = \partial b$ valamely $b \in C_n(X)$-re. Ekkor $j(b)$ ciklus, mivel $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$, tehát $\partial[j(b)] = [a]$. Így $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_*$.

Ezzel beláttuk a tételt. □

2.4.4. Következmény. *Ha $x_0 \in X$ egy pont az X térben, akkor $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ minden n-re.*

Bizonyítás. A fenti tételt az (X, x_0) párra alkalmazva kapjuk, hogy a

$$H_n(x_0) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(x_0)$$

sorozat egzakt. $n > 1$ esetén $H_n(x_0) \simeq H_{n-1}(x_0) = 0$, így az

$$0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, x_0) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozatot kapjuk, amiből láthatjuk, hogy j_* izomorfizmus. Ha $n = 1$, akkor a következő egzakt sorozatot kapjuk:

$$H_1(x_0) \xrightarrow{i_*} H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, x_0) \xrightarrow{\partial} H_0(x_0) \xrightarrow{i_*} H_0(X)$$

Ebből $H_1(x_0) = 0$, $H_0(x_0) \simeq \mathbb{Z}$ és $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^k$, ahol k az X útösszefüggőségi komponenseinek száma. Ugyanakkor $i_* : H_0(x_0) \to H_0(X)$ injektív, mivel $H_0(x_0)$ különböző elemei $H_0(X)$-ben is különböző ekvivalenciaosztályokat adnak meg. Így viszont $\partial : H_1(X, x_0) \to H_0(x_0)$ képe csak a 0, amiből kapjuk, hogy a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, x_0) \longrightarrow 0$$

Így j_* itt is izomorfizmus. A $n = 0$-ra pedig:

$$H_0(x_0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, x_0) \longrightarrow 0$$

Ahogy az előbb láttuk, $H_0(x_0) \simeq \mathbb{Z}$ és $i_* : H_0(x_0) \to H_0(X)$ injektív, így kiegészíthetjük ezt az alábbi rövid egzakt sorozattá:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, x_0) \longrightarrow 0$$

Mivel $H_0(X)$ egy X útösszefüggőségi komponensei által generált szabad Abel-csoport, $H_0(X, x_0)$ pedig ennek az x_0 komponense által generált szabad csoporttal vett faktora, így ez nem más, mint az X x_0-t nem tartalmazó komponensei által generált szabad Abel csoport. Így létezik egy természetes $g : H_0(X, x_0) \to H_0(X)$ beágyazás, amelyre $j_* \circ g$ megegyezik a $H_0(X, x_0)$ identitásával, így a rövid egzakt sorozat hasad és $H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus H_0(X, x_0)$. Így mindhárom esetben $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$. $\square$

Ennek a fejezetnek a fő eredménye a kivágási tétel lesz, ehhez azonban szükségünk van néhány új fogalomra és egy technikai lemmára.

2.4.5. Definíció. *Egy X topologikus térre legyen $\mathcal{U} = \{U_j\}$ alterek egy olyan családja, amelyek belseje X egy nyílt fedését adja. Ekkor legyen $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ a $C_n(X)$ olyan részcsoporja, melynek generátorai pontosan azok a szinguláris n szimplexek, amelyek tartalmazva vannak $\mathcal{U}$ valamelyik eleme által. Mivel a $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határleképezés $C_n^{\mathcal{U}}(X)$-et $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$-be viszi, így ezen $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ csoportok lánckomplexust alkotnak. Az ebből a lánckomplexusból származó homológiacsoportokat $H_n^{\mathcal{U}}(X)$-szel fogjuk jelölni.*

2.4.6. Definíció. *Ha adott két lánckomplexusunk, $\{C_n^1\}$ és $\{C_n^2\}$ a ∂ határleképezéssel, illetve az $f, g : \{C_n^1\} \to \{C_n^2\}$ láncleképezések, akkor a $h = \cup\{h_n : C_n^1 \to C_{n+1}^2\}$ leképezések halmazát lánchomotópiának nevezzük f és g között, amennyiben $f - g = \partial h + h\partial$. Ha létezik ilyen h leképezéshalmaz, akkor az f és g láncleképezéseket lánchomotópnak mondjuk.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}^1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f,g"] & C_n^1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f,g"] \arrow[dl, "h"] & C_{n-1}^1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f,g"] \arrow[dl, "h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}^2 \arrow[r, "\partial"] & C_n^2 \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}^2 \arrow[r, "\partial"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.4.7. Megjegyzés. *Látható, hogy a 2.3.4. Tétel bizonyításában a P prizmaleképezés éppen egy lánchomotópiát adott meg az $f_\#$ és $g_\#$ láncleképezések között.*

2.4.8. Definíció. *Az $f : \{C_n^1\} \to \{C_n^2\}$ láncleképezés lánchomotopikus ekvivalencia, ha létezik olyan $g : \{C_n^2\} \to \{C_n^1\}$ láncleképezés, amelyre az $g \circ f$ és $f \circ g$ leképezések lánchomotópok a $\{C_n^1\}$ és $\{C_n^2\}$ lánckomplexusok identitásaival.*

2.4.9. Megjegyzés. *Ha az $f : \{C_n^1\} \to \{C_n^2\}$ és $g : \{C_n^2\} \to \{C_n^1\}$ leképezések egy lánchomotopikus ekvivalenciát adnak meg a két lánckomplexus között, akkor az f és g homomorfizmusokat indukálnak a lánckomplexusból származó homológiacsoportok között és ezek a 2.3.5. Következmény bizonyítása szerint izomorfizmusok lesznek.*

2.4.10. Lemma. *Az $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \to C_n(X)$ természetes beágyazás lánchomotopikus ekvivalencia.*

Ennek a lemmának az igazolása meglehetősen technikai és túlmutat ezen a dolgozaton. A bizonyítás megtalálható az Algebraic Topology című könyvben [3, Proposition 2.21.].

2.4.11. Tétel. *(Kivágási tétel) Ha az A és B olyan alterei X-nek, hogy* $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = X$*, akkor a* $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ *beágyazás minden n-re izomorfizmusokat indukál a* $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$ *relatív homológiacsoportokon.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Azt fogjuk belátni, hogy az $i : C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ beágyazás és a $j : C_n(B)/C_n(A \cap B) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(A)$ természetes beágyazás által indukált leképezések izomorfizmusokat indukálnak a homológiacsoportokon.

A 2.4.10. Lemma idézett bizonyításában megkapjuk, hogy az $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \to C_n(X)$ beágyazáshoz létezik egy $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ láncleképezés, illetve egy $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ lánchomotópia, amelyekre teljesül, hogy $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ és $\rho\iota = \mathbb{1}$, sőt ezen leképezések az A-beli láncokat A-beli láncokba viszik. Emiatt a leképezéseken vett egyenlőségek akkor is igazak maradnak, ha a $C_n(A)$-val vett faktorcsoportokon tekintjük őket. Így kapjuk, hogy a fenti i beágyazás, a ρ által indukált $r : C_n(X)/C_n(A) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ láncleképezés és a D által indukált $h : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)$ lánchomotópia ugyanígy teljesítik a $\partial h + h\partial = \mathbb{1} - ir$ és $ri = \mathbb{1}$ egyenlőségeket.

Ezek a leképezések láthatóak az alábbi diagramon:

$$
\begin{array}{ccccc}
C_{n+1}(B)/C_{n+1}(A \cap B) & \xrightarrow{\partial} & C_n(B)/C_n(A \cap B) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(B)/C_{n-1}(A \cap B) \\
\downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\
C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)/C_{n+1}(A) & \xrightarrow{\partial} & C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)/C_{n-1}(A) \\
r\uparrow\downarrow i & & r\uparrow\downarrow i & & r\uparrow\downarrow i \\
C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A) & \underset{h}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} & C_n(X)/C_n(A) & \underset{h}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{array}
$$

Azt kell belátnunk, hogy a j és i által a homológiacsoportokon indukált $j_* : H_n(B, A \cap B) \to H_n^{\mathcal{U}}(X, A)$ és $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \to H_n(X, A)$ homomorfizmusok izomorfizmusok.

Először is vegyük észre, hogy $C_n(B)/C_n(A \cap B)$ és $C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n(A)$ egyaránt azon X-beli szinguláris n-szimplexek által generált szabad csoport, amelyeket B tartalmaz, de A nem. Így már a j leképezés is izomorfizmus, tehát nyilvánvalóan j_* is.

Az i_* leképezés nyilvánvalóan injektív, hiszen beágyazás. Megmutatjuk, hogy szürjektív is. Legyen $\alpha \in C_n(X)/C_n(A)$ ciklus. Ekkor $\partial h(\alpha) + h\partial(\alpha) = \alpha - ir(\alpha)$. Mivel α ciklus, így $h\partial(\alpha) = 0$, tehát $\alpha - ir(\alpha) = \partial h(\alpha)$, tehát α és $ir(\alpha)$ csak valamilyen határral térnek el egymástól, így ugyanazt az elemet reprezentálják a homológiacsoportban. $[ir(\alpha)] = [\alpha]$ viszont nyilvánvalóan benne van i_* képterében, tehát i_* szürjektív is.

Így megkaptuk, hogy $H_n(B, A \cap B) \simeq H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \simeq H_n(X, A)$, és az $i_* j_*$ kompozíció éppen a $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beágyazás által indukált, tehát beláttuk a tételt. □

2.4.12. Állítás. *Ha az $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ folytonos leképezések $(X, A) \to (Y, B)$ folytonos leképezéseken keresztül homotópok, akkor ugyanazt a homomorfizmust indukálják a terek relatív homológiacsoportjain: $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.*

Bizonyítás. Tekintsük a 2.3.4. Tétel bizonyítását. Az itt definiált prizmaleképezés $C_n(A)$-t $C_{n+1}(B)$-be képezi, mivel kikötöttük, hogy a homotópia $(X, A) \to (Y, B)$ folytonos leképezéseken keresztül megy. Így kapunk egy, a faktorcsoportokon értelmezett $P : C_n(X, A) \to C_{n+1}(Y, B)$ relatív prizmaleképezést, amelyre a $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$ egyenlőség ugyanúgy igaz marad. Így $f_\#$ és $g_\#$ a relatív lánccsoportokon lánchomotópok, tehát ugyanazt a homomorfizmust indukáják a relatív homológiacsoportokon. □

A párokra vonatkozó hosszú egzakt sorozatot általánosíthatjuk térhármasokra is az alábbi módon.

2.4.13. Állítás. *Legyen (X, A, B) topologikus terek egy hármasa, ahol $B \subset A \subset X$. Ekkor a következő sorozat egzakt:*

$$\cdots \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \cdots$$

Mivel a $0 \to C_n(A, B) \to C_n(X, B) \to C_n(X, A) \to 0$ sorozat az eredeti esethez hasonlóan rövid egzakt sorozatot alkot, így az ott elmondott bizonyítás itt is működni fog.

2.4.14. Definíció. *Ha X topologikus tér, A pedig egy nemüres, zárt altere, amely deformációs retraktuma valamely X-beli környezetének, akkor az (X, A) párt jó párnak nevezzük.*

2.4.15. Állítás. *Ha (X, A) jó pár, akkor a $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ faktorleképezés a $q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A)$ izomorfizmusokat indukálja minden n-re.*

Bizonyítás. Legyen V az A azon környezete X-ben, amelynek deformációs retraktuma. Ekkor kapjuk a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X,A) & \longrightarrow & H_n(X,V) & \longleftarrow & H_n(X-A.V-A) \\ \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ H_n(X/A,A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A,V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A-A/A.V/A-A/A) \end{array}$$

Itt a vízszintes leképezések a természetes beágyazások által indukált homomorfizmusok.

Mivel A deformációs retraktuma V-nek, így a retrakció megad egy homotopikus ekvivalenciát a (V, A) és (A, A) párok között. Így $H_n(V, A) \simeq H_n(A, A) \simeq 0$ minden n-re. Ekkor viszont az (X, V, A) hármas hosszú egzakt sorozatát felírva kapjuk, hogy a $0 \to H_n(X, A) \to H_n(X, V) \to 0$ sorozat egzakt, tehát a bal felső vízszintes leképezés izomorfizmus.

Az $r : V \to A$ retrakció egy $r' : V/A \to A/A$ retrakciót indukál, így az előző esethez hasonlóan a bal alsó homomorfizmus is izomorfizmus.

Az $X = V \cup X - A$ felbontásra alkalmazva a kivágási tételt kapjuk, hogy a jobb felső leképezés is izomorfizmus. Ha pedig az $X/A = V/A \cup X/A - A/A$ felbontásra alkalmazzuk, akkor látszik, hogy a jobb alsó is izomorfizmus.

q-t az A komplemeterére megszorítva egy $(X-A) \to (X/A-A/A)$ homeomorfizmust kapunk. Mivel a jobb oldali függőleges homomorfizmus csak $X - A$-beli szinguláris n-szimplexeken van értelmezve, így ez valójában izomorfizmus. Ekkor viszont a diagram kommutativitásából következik, hogy a középső, illetve a bal oldali függőleges leképezések is izomorfizmusok, amivel beláttuk az állítást. $\square$

2.4.16. Tétel. *Ha (X, A) jó pár, akkor egy megfelelő ∂ leképezéssel a*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt, ahol i az $A \hookrightarrow X$ beágyazás, $j : X \to X/A$ pedig a faktorleképezés.

Bizonyítás. Az előző tételből láthatjuk, hogy $H_n(X, A) \simeq H_n(X/A, A/A)$. Másrészt a 2.2.4. Következmény miatt $H_n(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}(X/A)$. Így a 2.4.3. Tételben a $H_n(X, A)$ csoportokat kicserélhetjük $\tilde{H}(X/A)$-re, majd némi diszkusszióval a többi homológiacsoportot is cserélhetjük a redukált homológiacsoportokra:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H_1(X) & \longrightarrow & H_1(X,A) & \longrightarrow & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & H_0(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\
\tilde{H}_1(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_1(X,A) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(A) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_0(X/A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

A $H_1(X/A)$ csoporttól balra minden csoportot egy izomorfra cseréltünk, így eddig biztosan teljesül az egzakt tulajdonság. Mivel $H_1(X) \to H_1(X, A)$ és így $\tilde{H}_1(X) \to \tilde{H}_1(X, A)$ is szürjektív, így a $H_1(X, A)$-ból induló víszintes leképezés a konstans 0, tehát a $\tilde{H}_1(X, A)$-ból induló is ez lesz, így a sorozat itt is egzakt. $\tilde{H}_0(A) \to \tilde{H}_0(X)$ nyilvánvalóan injektív, tehát az egzaktság itt is teljesül.

Ezután a $\tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_0(X/A)$ leképezés éppen $\tilde{H}_0(A)$ elemeit viszi a 0-ba, így itt is megvan az egzaktság. Végül $\tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_0(X/A)$ szürjektív, ezzel pedig beláttuk az állítást. □

2.4.17. Következmény. *A $\tilde{H}_i(S^n)$ redukált homológiacsoport $i = n$ esetén $\mathbb{Z}$-vel izomorf, egyébként* 0.

Bizonyítás. $n > 0$ esetén vegyük az $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ párt. Így $X/A = S^n$. $\tilde{H}_i(D^n) \simeq 0$ minden i-re, mivel D^n pontrahúzható. Így a sorozat egzaktsága miatt a $\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ leképezés izomorfizmus. A 2.2.6. Következmény és 2.2.8. Megjegyzés miatt $i > 0$-ra $H_i(S^n) \simeq 0$, különben $\mathbb{Z}$, amiből indukcióval következik az állítás. □

2.5. A szimpliciális és szinguláris homológia ekvivalenciája

Ahhoz, hogy könnyen számolhassuk Δ-komplexus struktúrájú terek homológiacsoportjait, be kell látnunk, hogy a szimpliciális homológiacsoportjaik megegyeznek a szinguláris homológiacsoportjaikkal. Ezzel együtt azt is megkapjuk, hogy két különböző Δ-komplexus struktúra ugyanazon X téren ugyanazokat a szimpliciális homológiacsoportokat fogja megadni. Ehhez szükségünk lesz még néhány állításra a kivágási tétel következményeként:

2.5.1. Állítás. $H_i(D^n, \partial D^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{ha } i = n \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$

Bizonyítás. A redukált homológiacsoportokra vonatkozó hosszú egzakt sorozatot felírva a $(D^n, \partial D^n)$ párra kapjuk, hogy a $\tilde{H}_i(D^n/\partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ leképezések izomorfizmusok, mivel $\tilde{H}_i(D^n) \simeq 0$ minden i-re. Így $i > 0$ esetén $H_i(D^n, \partial D^n) \simeq H_i(D_n/\partial D^n, \partial D^n/\partial D^n) \simeq \tilde{H}_i(D^n/\partial D^n) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$. Így a 2.4.17. Következmény miatt teljesül az állítás. □

2.5.2. Állítás. $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \simeq \mathbb{Z}$ *és ezt az* $i_n : \Delta^n \to \Delta^n$ *identitásleképezésből származó szinguláris* n*-szimplex generálja.*

Bizonyítás. Mivel a $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ pár homeomorf a $(D^n, \partial D^n)$ párral, így az állítás első fele nyilvánvalóan igaz.

Az állítás második felét teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 0$-ra Δ^n-nek egyetlen pontja van, az erre képződő egyetlen szinguláris 0-szimplex nyilván generátora a $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) = H_0(\Delta^0)$ csoportnak.

Az indukciós lépésben az állítást n-re fogjuk bizonyítani, feltélve, hogy az állítás $n-1$-re már igaz. Legyen $\Lambda \subset \Delta^n$ a Δ^n valamely n lapjának uniója (tehát egy lap belsejét kihagyjuk $\partial\Delta^n$-ből). Ekkor Λ deformációs retraktuma Δ^n-nek, így a (Δ^n, Λ) pár homotopikusan ekvivalens (Λ, Λ) párral, így $H_i(\Delta^n, \Lambda) \simeq H_i(\Lambda, \Lambda) \simeq 0$. Így a $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ hármasra felírva a hosszú egzakt sorozatot, azt kapjuk, hogy $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ izomorfizmus.

Másrészt tekintsük az $i : \Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n$ beágyazást Δ^n-nek arra a lapjára, amelyet nem tartalmaz Λ. Ez $n = 1$ esetén egy izomorifizmust indukál a $C_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) \to C_0(\partial\Delta^1, \Lambda)$ láncsoportokon és így a $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) \to H_0(\partial\Delta^1, \Lambda)$ homológiacsoportokon is. $n > 1$ esetén pedig i egy homeomorfizmust indukál $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$ és $\partial\Delta^n/\Lambda$ között. Tehát izomorfizmust is a $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ homológiacsoportokon. Összefoglalva a következő diagramot kapjuk minden $n > 0$-ra:

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\simeq} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\simeq} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

Ezek az izomorfizmusok a bal oldali csoportban lévő i_n relatív ciklust a ∂i_n ciklusba viszi, ez pedig $\pm i_{n-1}$-gyel egyenlő $C_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$-ban. □

2.5.3. Állítás. *Ha az X tér előáll az $\vee_\alpha X_\alpha$ terek csokraként és a ragasztást az $x_\alpha \in X_\alpha$ bázispontoknál hajtjuk végre, amelyekre (X_α, x_α) jó párok, akkor az $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \vee_\alpha X_\alpha$ beágyazások egy $\oplus_\alpha i_{\alpha *} : \oplus \tilde{H}_n(X_\alpha) \to \tilde{H}_n(\vee_\alpha X_\alpha)$ izomorfizmust indukálnak.*

Bizonyítás. $\vee_\alpha X_\alpha = (\bigsqcup_\alpha X_\alpha)/(\bigsqcup_\alpha x_\alpha)$, így $\tilde{H}_n(\vee_\alpha X_\alpha) = \tilde{H}_n((\bigsqcup_\alpha X_\alpha)/(\bigsqcup_\alpha x_\alpha))$. Ez a kivágási tétel miatt izomorf $H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha)$-val. Ez a 2.2.4. Állítás miatt előáll a $\oplus_\alpha H_n(X_\alpha, x_\alpha)$ direktösszegként. Végül a 2.4.4 Következmény miatt ez megegyezik $\oplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha)$-val, amivel beláttuk az állítást. □

Illetve a bizonyításban még fel fogjuk használni a következő két lemmát. Ezek közül az egyik tiszán algebrai, a másik pedig egy topológiai állítás.

2.5.4. Lemma. *(Öt-lemma) Tekintsük az alábbi Abel-csoportok közti kommutatív diagramot, amelyben a sorok egzakt sorozatokat alkotnak:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\
A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
\end{array}$$

Ekkor:

(i) ha β és δ szürjektív, ε pedig injektív, akkor γ is szürjektív.

(ii) ha β és δ injektív, α pedig szürjektív, akkor γ is injektív.

(iii) ha α, β, δ és ε izomorfizmus, akkor γ is izomorfizmus.

Bizonyítás. *(i)* Legyen $c' \in C'$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor C-nek létezik olyan eleme, amely γ szerinti képe c'. Legyen $d' = k'(c')$. δ szürjektív, így létezik $d \in D$, amelyre $\delta(d) = d'$. Ezen d-re $\varepsilon(l(d)) = l'(\delta(d)) = 0$, mivel a diagram kommutatív és $l'(\delta(d)) = l'(d') = l'(k'(c)) = 0$ a sorozat egzaktsága miatt. Ekkor viszont $l(d) = 0$, mivel ε injektív. Így $d \in \operatorname{Ker} l$, tehát létezik $c \in C$, amelyre $d = k(c)$. A diagram kommutativitása miatt $k'(\gamma(c)) = \delta(k(c)) = d'$, amiből $k'(\gamma(c) - c') = 0$. Az alsó sorozat egzaktságát kihasználva létezik $b' \in B$, amire $j'(b') = \gamma(c) - c'$. Mivel β szürjektív, így létezik $b \in B$, amelyre $\beta(b) = b'$. Ekkor $\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = \gamma(c) - c'$. Ebből viszont látható, hogy $c' = \gamma(c - j(b))$, amivel beláttuk az állítást.

(ii) Tegyük fel, hogy $c \in C$-re $\gamma(c) = 0$. Ekkor legyen $d = k(c)$. $\delta(d) = \delta(k(c)) = k'(\gamma(c)) = 0$. Így δ injektivitása miatt $d = 0$. Ekkor mivel a felső sor egzakt sorozat, így létezik olyan $b \in B$, amire $j(b) = c$. Legyen $b' = \beta(b)$. $j'(b') = j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = 0$ a diagram kommutativitása miatt, tehát az alsó sorozat egzaktsága miatt létezik $a' \in A'$. amire $i'(a') = b'$. α szürjektív, így ekkor létezik $a \in A$, amelyre $\alpha(a) = a'$. $\beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = b'$, tehát $i(a) = b$, mivel β injektív. Ekkor $c = j(b) = j(i(a)) = 0$, mivel a felső sorozat egzakt. Így γ szükségképpen injektív.

(iii) Ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor, *(i)* és *(ii)* feltételei is teljesülnek, így γ szürjektív és injektív, tehát izomorfizmus. □

2.5.5. Lemma. *Ha X egy (akár végtelen dimenziós) Δ-komplexus, akkor minden X-beli kompakt halmaz legfeljebb véges sok nyílt szimplexét metszi X-nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C egy X-beli kompakt halmaz és végtelen sok nyílt szimplexét metszi X-nek. Ekkor létezik egy olyan C-beli végtelen x_i pontsorozat, hogy mindegyik x_i különböző nyílt szimplexben van. Így az $U_i = X - \cup_{j \neq i} x_j$ halmazok nyíltak, mivel karakterisztikus leképezések szerinti őseik nyíltak, tehát megadtuk C-nek egy nyílt fedését, aminek nincs véges részfedése, ez pedig ellentmondás. □

A következő fogalmat is használni fogjuk:

2.5.6. Definíció. *Az X Δ-komplexus k-váza az a Δ-komplexus, amely éppen X legfeljebb k dimenziós szimplexeit tartalmazza. Ezt X^k-val jelöljük.*

Végül pedig következhet a fejezet fő tétele:

2.5.7. Tétel. *Legyen X egy topologikus tér egy Δ-komplexus struktúrával ellátva, A pedig ennek egy részkomplexusa. Ez a struktúra minden n-re megad egy természetes homomorfizmust a $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ szimpliciális és szinguláris homológiacsoportokon. Ez a homomorfizmus valójában izomorfizmus.*

Bizonyítás. Először azt az esetet bizonyítjuk, amikor A üres (azaz az abszolút homológiacsoportokra bizonyítunk), X pedig véges dimenziós. X^k-ra bizonyítunk k-ra vonatkozó teljes indukcióval.

A teljes indukció előtt még érdemes külön megvizsgálnunk a $H_0^\Delta(X^k) \to H_0(X^k)$ leképezéseket, mert ezekre nem fog működni az indukció. Ezek minden esetben szabad Abel-csoportok, melyeknek generátorelemei egy-egy pont (szimpliciális esetben egy-egy 0-szimplex) X^k útösszefüggőségi komponenseiből, így a közöttük futó leképezések izomorfizmusok minden k-ra.

$k = 0$-ra X^0 pontok diszjunkt uniója, így a szimpliciális és szinguláris szimplexei éppen ugyanazok, tehát $H_n^\Delta(X^0) \simeq H_n(X^0)$.

$k > 0$ esetén az (X^k, X^{k-1}) párra felírva a homlógiacsoportokra vonatkozó hosszú egzakt sorozatokat, a következő egzakt sorozatok közti kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}$$

Először megmutatjuk, hogy az első és negyedik függőleges leképezés izomorfizmus. A $C_n(X^k, X^{k-1})$ szimpliciális lánccsoport $n \neq k$-ra 0, $n = k$-ra pedig az X k-szimplexei által generált szabad Abel-csoport. Így $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$-re ugyanez teljesül.

Az X k-szimplexeinek karakterisztikus leképezései által megadott ϕ : $\bigsqcup_\alpha(\Delta_\alpha^k/\partial\Delta_\alpha^k) \to (X^k, X^{k-1})$ leképezés egy homeomorfizmust indukál $(\bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k)/(\bigsqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha^k)$ és X^k/X^{k-1} között, így izomorfizmusokat indukál a szinguláris homológiacsoportokon. Így a 2.5.2. és 2.5.3. állítások miatt $n \neq k$ esetén $H_n(X^k, X^{k-1}) \simeq 0$, ha pedig $n = k$, akkor $H_k(X^k, X^{k-1})$ egy szabad Abel-csoport, amely X k-szimplexei által generált. Így $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \to H_n(X^k, X^{k-1})$ valóban izomorfizmus minden n-re.

Az indukciós feltétel miatt a második és ötödik leképezés is izomorfizmus, így az öt-lemmát alkalmazva a középső is.

A következő esetünk az lesz, amikor X lehet akár végtelen dimenziós is, A viszont még mindig üres. Először megmutatjuk, hogy a $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ szürjektív. Legyen z egy szinguláris n-ciklus, amely egy tetszőleges $H_n(X)$-beli elem reprezentánsa. Ez véges sok szinguláris szimplex lineáris kombinációja, melyek képe kompakt, így a 2.5.5. Lemma szerint csak véges sok nyílt n-szimplexet metszenek. Így ezek a szimplexek valamely k-ra benne vannak X^k-ban. Azt már megmutattuk, hogy $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizmus, így z homológ valamely X^k szimpliciális ciklussal.

Másrészt megmutatjuk, hogy $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ injektív. Legyen z egy szimpliciális n-lánc, amely szinguláris határ X-ben. Annak a láncnak, melynek a határa z, a képe szintén kompakt X-ben, így benne van X^k-ban valamely k-ra. Ekkor z a $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ leképezés magjának egy elemét reprezentálja. Ugyanakkor tudjuk, hogy ez a leképezés injektív, tehát z homológ egy szimpliciális határral X^k-ban és így X-ben is.

Az általános esetben, amikor $A \neq \varnothing$, akkor az (X, A) pár szimpliciális és szinguláris hosszú egzakt sorozatából a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
H_n^\Delta(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^\Delta(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^\Delta(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^\Delta(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^\Delta(X) \arrow[d] \\
H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

Ebben az első, második, negyedik és ötödik függőleges leképezésről beláttuk, hogy izomorfizmusok, így az öt-lemma miatt a középső is az. □

2.6. Cellahomológia

A szimpliciális és szinguláris homológia ekvivalenciája miatt a Δ-komplexusok homológiáját könnyedén számolhatjuk, más struktúrákra vonatkozóan viszont még nincs igazán hatékony számolási módszerünk. A cellahomológia egy megoldást ad erre a problémára, mivel segítségével ki fogjuk tudni számítani a CW-komplexusok homológiacsoportjait.

2.6.1. Állítás. *Egy CW-komplexus minden kompakt alterét tartalmazza a komplexus egy X^n váza valamely n-re.*

Bizonyítás. Legyen X CW-komplexus, C pedig egy kompakt részhalmaza. Először megmutatjuk, hogy C az X-nek legfeljebb véges sok celláját metszi. Tegyük fel, hogy végtelen sokat metsz, ekkor ki tudunk választani mindegyikből egy-egy C-beli pontot. Legyen egy ilyen pontokból álló végtelen sorozat $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Belátjuk, hogy S-nek minden részhalmaza zárt.

Legyen $T \subset S$ tetszőleges részhalmaz. Indukcióval belátjuk, hogy minden X^n vázra $T \cap X^n$ zárt, így $T \cap X = T$ is zárt. $n = 0$-ra a $T \cap X^n$ egy diszkrét topológiával ellátott tér részhalmaza, tehát zárt. Ha $n-1$-re feltesszük az állítást, akkor minden e^n_α n-cellára igaz, hogy a $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X^n$ ragasztóleképezés ősét nézve D^n_α belsejébe legfeljebb egy pont esik, így $\Phi_\alpha^{-1}(T)$ zárt D^n_α-ben, mivel az indukciós feltétel miatt a T őságképének ∂D^n_α-beli része zárt. Így $T \cap X^n$ zárt.

Tehát S minden pontjának van olyan környezete, amely diszjunkt S többi pontjától, ezek pedig egy olyan nyílt fedését adják S-nek, melynek nincs véges részfedése. Ez viszont ellentmondás, mivel S a C kompakt halmaz zárt részhalmaza, tehát kompaktnak kellene lennie. Ezzel beláttuk, hogy C csak véges sok cellát metszhet.

Mivel C csak véges sok cellát metsz, így ha n ezek közül a legnagyobb dimenziójú cella dimenziója, akkor $C \subset X^n$. □

2.6.2. Lemma. *Ha X egy CW-komplexus és X^n az n-váza, akkor*

(i) $H_k(X^n, X^{n-1})$ $k \neq n$ esetén 0, ha $k = n$, akkor pedig egy szabad Abel-csoport, melynek báziselemei megfelelnek X n-celláinak.

(ii) $k > n$ esetén $H_k(X^n) = 0$, így ha X végesdimenziós, akkor $k > \dim X$ esetén $H_k(X) = 0$.

(iii) Az $X^n \hookrightarrow X$ beágyazás által indukált $H_k(X^n) \to H_k(X)$ leképezés izomorfizmus, ha $k < n$ és szürjektív, ha $k = n$.

Bizonyítás. Mivel (X^n, X^{n-1}) jó pár, így a 2.4.15. Állítás miatt $H_n(X^n, X^{n-1}) = H_n(X^n/X^{n-1}, X^{n-1}/X^{n-1})$. X^n/X^{n-1} homeomorf X n-celláinak megfelelő n dimenziós gömbök csokrával, így a 2.5.3. Állítás és 2.4.4. Következmény alapján (i)-et be is láttuk.

(ii) és (iii) bizonyításához írjuk fel az (X^n, X^{n-1}) pár hosszú egzakt sorozatának egy részletét:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Az (i) állítás miatt $k \neq n$ esetén $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, így a középső leképezés szürjektív, pedig ha $k \neq n-1$, akkor $H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) = 0$, tehát a középső leképezés injektív. Így kapjuk a következő sorozatot:

$$H_k(X^0) \longrightarrow H_k(X^1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_k(X^{k-1}) \longrightarrow H_k(X^k) \longrightarrow H_k(X^{k+1}) \longrightarrow \ldots$$

Itt a $H_k(X^k)$-ra menő leképezés injektív, a $H_k(X^k)$-ról induló szürjektív, a többi pedig izomorfizmus. Mivel $k > 0$ esetén $H_k(X^0) = 0$, így (ii)-t be is láttuk.

Ha X végesdimenziós, akkor valamilyen n-re $X = X^n$, így (iii) is teljesül. Ha X végtelen dimenziós, akkor minden X-beli k-ciklus képe kompakt, így a 2.6.1. Állítást alkalmazva benne van valamely m-re X^m-ben. Így (iii) végesdimenziós esete alapján minden k-ciklus homológ valamely X^n-beli k-ciklussal, tehát $H_k(X^n) \to H_k(X)$ szürjektív. Ha pedig egy X^n-beli k-ciklus a határa valamely X-beli láncnak, akkor ennek a láncnak a képe kompakt, tehát benne van X^m-ben megfelelő $m \leq n$-re, így a végesdimenziós esetből következik, hogy a ciklus valamely X^n-beli láncot is határolja $n > k$ esetén. Ezzel beláttuk az állítást. □

Az (X^n, X^{n-1}) pár hosszú egzakt sorozatában lévő $j : H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ és $\partial : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1})$ leképezéseket jelöljük j_n-nel és ∂_n-nel, illetve legyen $d_n = \partial_n j_n$. Ekkor $d_{n+1} d_n = \partial_{n+1} j_n \partial_n j_{n-1} = 0$, mivel a hosszú egzakt sorozatban már $j_n \partial_n = 0$. Így értelmes a következő definíció.

2.6.3. Definíció. *A $d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ határleképezéssel ellátott $C_n^{CW}(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ csoportokból álló lánckomplexust az X CW-komplexus cellalánckomplexusának nevezzük. Az ebből a lánckomplexusból származó homológiacsoportokat a CW-komplexus cellahomológiacsoportjainak nevezzük és $H_n^{CW}(X)$-szel jelöljük.*

2.6.4. Tétel. *$H_n^{CW}(X) \simeq H_n(X)$.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "d_{n+1}"] & H_n(X^n) \arrow[r] \arrow[d, "j_n"] & H_n(X) \arrow[r] & 0 \\
& H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"] & & \\
0 \arrow[r] & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "j_{n-1}"] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) &
\end{tikzcd}$$

Ennek a felső sora az (X^{n+1}, X^n) pár hosszú egzakt sorozatának részlete, figyelembe véve, hogy a 2.6.2. Lemma (iii) állítása miatt $H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X)$, illetve az (i) állítás miatt $H_n(X^{n+1}, X^n) = 0$.

A függőleges oszlop szintén egy egzakt sorozat, mégpedig az (X^n, X^{n-1}) pár hosszú egzakt sorozatának egy részlete. A lemmát felhasználva ismét kapjuk, hogy $H_n(X^{n-1}) = 0$.

Az alsó sor szintén egzakt, mégpedig az (X^{n-1}, X^{n-2}) páré, ahol alkalmazzuk, hogy $H_{n-1}(X^{n-2}) = 0$.

A felső sorban a középső leképezés injektív, így $H_n(X) \simeq H_n(X^n)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$. Az oszlopot nézve j_n injektív, tehát $\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$-et izomorfan képzi $\operatorname{Im}(j_n\partial_{n+1}) = \operatorname{Im}(d_{n+1})$-be, $H_n(X^n)$-t pedig $\operatorname{Im}(j_n) = \operatorname{Ker}(\partial_n)$-be. j_{n-1} injektivitása miatt pedig $\operatorname{Ker}(\partial_n) = \operatorname{Ker}(d_n)$, így j_n indukál egy izomorfizmust a $H_n(X^n)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$ és $\operatorname{Ker}(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1})$ faktorcsoportok között, amivel beláttuk az állítást. □

2.6.5. Példa. *Számítsuk ki a komplex projektív terek homológiacsoportjait. Ehhez először is szükségünk lesz ezeknek egy CW-struktúrájára. Az n-dimenziós komplex projektív teret úgy kapjuk, mint* $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/_{\sim}$*, ahol* $\sim$ *az ugyanazon origón átmenő komplex egyenesen lévő pontok közötti ekvivalenciareláció.*

Ezzel kapunk egy $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ *leképezést. Ennek képe a* $(1, 0, \dots, 0)$ *normálvektorú hipersíkra megszorítva definíció szerint* $\mathbb{CP}^{n-1}$*-gyel homeomorf, a komplementerére megszorítva pedig* $\mathbb{C}^n$*-nel, mivel minden komplementerben lévő komplex egyenes egy pontként vetül rá a* $z_1 = 1$ *hipersíkra.*

Tehát $\mathbb{CP}^n$ *előáll* $\mathbb{C}^n$ *és* $\mathbb{CP}^{n-1}$ *uniójaként. Így ha adott* $\mathbb{CP}^{n-1}$ *CW-struktúrája, akkor ehhez még egy* $2n$*-dimenziós cellát megfelelően hozzáragasztva megkapjuk* $\mathbb{CP}^n$*-t (hiszen* $\mathbb{C}^n$ *homeomorf* D^{2n} *belsejével).* $\mathbb{CP}^1$ *homeomorf* S^2*-vel, tehát megkapható egy* 0*-dimenziós és egy* 2*-dimenziós cellából. Így induktívan adódik, hogy* $\mathbb{CP}^n$*-nek minden* $0 \leq k \leq n$*-re van egy-egy* $2k$*-dimenziós cellája.*

A $\mathbb{CP}^n$ *terek felszálló uniójaként megkaphatjuk a* $\mathbb{CP}^\infty$ *teret. Ennek minden páros dimenzióban lesz pontosan egy cellája. Így a következő cellaláncкomplexust kapjuk:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \cdots & & 2n+1 & & 2n & & 2n-1 & & \cdots & & 2 & & 1 & & 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Itt a határleképezés mindenhol csak a konstans 0 *lehet, így a* $H_{2n}(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Z}$ *és* $H_{2n+1}(\mathbb{CP}^\infty) \simeq 0$ *minden* $n \geq 0$*-ra.*

Ha valamely végesdimenziós $\mathbb{CP}^n$ *komplex projektív tér homológiacsoportjaira vagyunk kíváncsiak, akkor mindössze annyi változik, hogy* $2n$ *után már csak* 0*-k vannak, így* $m > 2n$ *esetén* $H_m(\mathbb{CP}^n) \simeq 0$*.*

3. fejezet

Kohomológia

3.1. Definíciók

A kohomológiacsoportokat először egy lánckomplexusra fogjuk definiálni. Mivel bármely nemüres topologikus térnek felírhatjuk a lánckomplexusát, így ezzel definiáljuk a terek kohomológiacsoportjait is.

3.1.1. Definíció. *Adott egy szabad Abel-csoportokból álló C lánckomplexus ∂ határleképezéssel, illetve egy G Abel-csoport:*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Ekkor

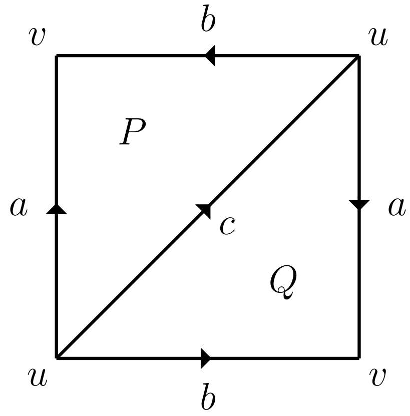
- *A C_n láncсsoportok $C_n^* = \mathrm{Hom}(C_n, G)$ duálisai adják a lánckomplexus koláncсsoportjait, ezek elemei a koláncok.*
- *A ∂ határleképezés duálisa $\delta : C_{n-1}^* \to C_n^*$ kohatárleképezés, amellyel egy $\alpha \in C_{n-1}^*$ leképezéshez a $\alpha\partial \in C_n^*$ leképezést rendeljük.*
- $\mathrm{Ker}\,\delta$ *elemeit kociklusoknak,* $\mathrm{Im}\,\delta$ *elemeit kohatároknak hívjuk.*
- *Az így kapott "fordított" lánckomplexusból kapott $H^n(C, G) = \mathrm{Ker}\,\delta|_{C_n^*} / \mathrm{Im}\,\delta|_{C_{n-1}^*}$ csoportot a kolánckomplexus n-edik kohomológiacsoportjának nevezzük.*

3.1.2. Megjegyzés. *Mivel $\partial\partial = 0$, így $\delta\delta = 0$ (hiszen $\delta\delta(\alpha) = \alpha\partial\partial$), így* $\mathrm{Im}\,\delta|_{C_{n-1}^*} \subset \mathrm{Ker}\,\delta|_{C_n^*}$, *tehát a definíció értelmes.*

3.2. Az univerzális együttható tétel

Mivel a kohomológiacsoportok egyfajta duálisai a homológiacsoportoknak, ezért azt gondolhatnánk, hogy egy adott lánckomplexushoz tartozó $H^n(C;G)$ csoport izomorf $\mathrm{Hom}(H_n(C),G)$-vel. Ez azonban nem lesz igaz.

3.2.1. Példa. *Számítsuk ki az $\mathbb{RP}^2$ tér szimpliciális homológia- és kohomológiacsoportjait ($G=\mathbb{Z}$ esetén). Ehhez először hozzunk létre egy Δ-komplexus struktúrát $\mathbb{RP}^2$-n:*



Ez kettő 0-szimplexből, három 1-szimplexből és két 2-szimplexből áll az ábrán látható jelölésekkel. Ezeket az irányításoknak megfelelően azonosítjuk, ekkor látható, hogy az azonosítások megfelelnek a Δ-komplexusok definíciójának. A kapott lánckomplexus:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_4} 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Mivel $\partial_0 = 0$ és ∂_1 képe az $u-v$ által generált szabad csoport, így $H_0(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}$ generátora pedig az u és v valamelyike. $\partial_2 P = -a+b+c$ és $\partial_2 Q = a-b+c$, így $\mathrm{Im}\,\partial_2$ generátorainak választhatjuk $a-b+c$-t és $2c$-t, illetve $\mathrm{Ker}\,\partial_1$ generátorainak válaszhatjuk c-t és $a-b+c$-t. Ebből láthatjuk, hogy $H_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, c generátorral. Végül ∂_2 magja csak a 0, így $H_2(\mathbb{RP}^2) \simeq 0$, a magasabb dimenziókban pedig nincsenek is szimplexek, így a többi homológiacsoport mind 0.

Most nézzük a kolánckomplexust:

$$\cdots \xleftarrow{\delta_4} 0 \xleftarrow{\delta_3} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2,\mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^3,\mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2,\mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta_0} 0$$

A δ_1 *leképezés azon* $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^2(u,v),\mathbb{Z})$ *elemeket viszi a nullába, melyekre* $\alpha\partial = 0$. *Ehhez az kell, hogy* $\alpha\partial_1$ *a* $\mathbb{Z}^3(a,b,c)$ *generátorelemein* 0 *legyen. Mivel* $\partial_1 a = \partial_1 b = u - v$ *és* $\partial_1 c = 0$, *így ez pontosan akkor teljesül, ha* $\alpha(u-v) = 0$, *ez pedig akkor igaz, ha* $\alpha(u) = \alpha(v)$. *Tehát kapjuk, hogy* $H^0(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\delta_1 \simeq \{\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^2(u,v)), \alpha(u) = \alpha(v)\} \simeq \mathbb{Z}$.

Egy dimenzióval feljebb hasonlóan kell gondolkodnunk, ha $\operatorname{Ker}\delta_2$*-t szeretnénk kiszámolni.* $\partial_2 P = -a + b + c$ *és* $\partial_2 Q = a - b + c$. *Ahhoz, hogy ezekre egy* $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^3(a,b,c),\mathbb{Z})$ *leképezés nullát adjon, az kell, hogy* $\alpha(a) = \alpha(b+c)$ *és* $\alpha(b) = \alpha(a+c) = \alpha(b) + 2\alpha(c)$, *azaz ezzel ekvivalensen* $\alpha(a) = \alpha(b)$ *és* $\alpha(c) = 0$. *Ugyanakkor* $\operatorname{Im}\delta_1$ *azon* α *leképezésekből áll, melyekre* $\alpha(a) = \alpha(b)$ *és* $\alpha(c) = 0$, *mivel* $\partial_1 a = u - v = \partial_1 b$ *és* $\partial_1 c = 0$. *Így* $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) = 0$.

Végül $\operatorname{Ker}\delta_3 = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^2(P,Q),\mathbb{Z})$, *azaz már csak* $\operatorname{Im}\delta_2$*-t kell meghatároznunk. Tegyük fel, hogy* $\alpha \in \operatorname{Im}\delta_2$. *Ekkor valamilyen* $\beta \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^3(a,b,c),\mathbb{Z})$ *leképezésre*

$$\alpha(k_1 P + k_2 Q) = (k_2 - k_1)\beta(a-b) + (k_1 + k_2)\beta(c)$$

Ebből látható, hogy a $k_1 = k_2 = 1$ *helyettesítés miatt* $\alpha(P) + \alpha(Q)$ *páros, ha viszont ez teljesül, akkor* $\alpha(P) = x$ *és* $\alpha(q) = y$ *értékeket választva* $\beta(a-b) = (y-x)/2$ *és* $\beta(c) = (x+y)/2$*-vel* α *előáll képként. Így* $\operatorname{Im}\delta_2$*-t generálják az* $\alpha_1(k_1P + k_2Q) = k_1 + k_2$ *és* $\alpha_2(k_1P + k_2Q) = 2k_2$ *leképezések, tehát* $H^2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

A nagyobb indexű kohomológiacsoportok pedig nyilván mind 0-k. Így láthattuk, hogy a $H^2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z})$ *és* $\operatorname{Hom}(H_2(\mathbb{RP}^2),\mathbb{Z})$ *csoportok nem izomorfak.*

Egyelőre azt sem tudjuk, hogy a homológiacsoportok és a G csoport meghatározzák-e a kohomológiacsoportokat, hiszen azt a lánckomplexusból vezettük le, különböző lánckomplexusok viszont adhatnak ugyanolyan kohomológiacsoportokat. Erre hamarosan választ ad nekünk az univerzális együttható tétel, aminek bizonyítását készítjük elő a továbbiakban néhány algebrai fogalommal és lemmával.

3.2.2. Állítás. *Létezik egy* $h : H^n(C;G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C),G)$ *természetes leképezés, amely szürjektív.*

Bizonyítás. Jelöljük a C_n csoportban lévő ciklusok részcsoportját Z_n-nel, a határokét B_n-nel. A $H^n(C;G)$ egy elemét reprezentálhatjuk egy $\alpha : C_n \to G$ homomorfizmussal, amelyre $\delta_n(\alpha) = 0$, azaz az $\alpha\partial_{n+1} = 0$. Ha ezt Z_n-re megszorítjuk, akkor az így kapott $\alpha_0 = \alpha|_{Z_n}$ homomorfizmus indukál egy $\overline{\alpha_0} : Z_n/B_n \to G$ homomorfizmust, ami pedig $\mathrm{Hom}(H_n(C), G)$-ben van. Ez megadja az $\alpha \mapsto \overline{\alpha_0}$ hozzárendelést, ami egy homomorfizmus a $H^n(C;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C), G)$ csoportok között. Ez a leképezés jóldefiniált, mivel $\alpha\partial_{n+1} = 0$ miatt α B_n-en konstans 0, ha pedig α a triviális ekvivalenciaosztályt reprezentálja $H^n(C;G)$-ben, akkor valamilyen $\beta \in \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G)$ leképezésre $\alpha = \delta_{n-1}(\beta) = \beta\partial_n$, tehát α Z_n-en konstans 0 és így $\overline{\alpha_0} = 0$.

Belátjuk, hogy a h homomorfizmus szürjektív. Tekintsük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Mivel B_{n-1} szabad Abel-csoport, így ez a sorozat hasad, tehát létezik egy $p : C_n \to Z_n$ vetítés, amit egy $\varphi_0 : Z_n \to G$ leképezéssel komponálva egy $\varphi = \varphi_0 p : C_n \to G$ kiterjesztést kapunk.

$\mathrm{Hom}(H_n(C), G)$ elemeit kiterjeszthetjük $\mathrm{Ker}\,\delta_n$-beli elemekre, mivel ezek B_n-en eltűnő homomorfizmusok, tehát a p-vel való kiterjesztésük is ilyen lesz. Ezek után $\mathrm{Ker}\,\delta_n$-re alkalmazhatjuk az őt $H^n(C;G)$-be vivő faktorleképezést, amiből a következő diagramot kapjuk:

$$\mathrm{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\delta_n \longrightarrow H^n(C;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_n(C), G)$$

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik egy $\overline{\varphi_0} : H_n(C) \to G$ leképezéssel, ha alkalmazzuk rá ezen három leképezés kompozícióját. Először $\overline{\varphi_0}$-t kiterjesztjük egy B_n-en eltűnő $\varphi_0 : Z_n \to G$, majd egy $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\delta_n$ leképezéssé. Ez reprezentál egy elemet $H^n(C;G)$-ben, így amikor erre alkalmazzuk h-t, akkor valójában a φ_0, majd a $\overline{\varphi_0}$ leképezést kapjuk vissza, amiből kiindultunk. Így a három leképezés kompozíciója az identitás, tehát h szürjektív. □

3.2.3. Definíció. *A H Abel-csoport szabad feloldásának nevezzük a*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \longrightarrow 0$$

hosszú egzakt sorozatot, ahol F_n szabad Abel-csoport minden n-re.

3.2.4. Lemma. *Ha F és F' szabad feloldásai a H és H' Abel-csoportoknak, akkor minden $\alpha : H \to H'$ homomorfizmus kiterjeszthető egy $F \to F'$ láncleképezéssé. Sőt, bármely két láncleképezés, amely α kiterjesztése, lánchomotóp.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Mivel az F_i csoportok szabadok, így elegendő az α_i leképezéseket F_i generátorelemein definiálni. Mivel f_0' szürjektív, így minden $x \in F_0$ generátorelemhez létezik olyan $x' \in F_0'$, amire $f_0'(x') = \alpha(f_0(x))$. Legyen $\alpha_0(x) = x'$.

Innentől a többi α_i leképezést induktívan definiáljuk. Tegyük fel, hogy α_{i-1}-et már definiáltuk. Ekkor minden $x \in F_i$ generátorelemre $\alpha_{i-1} f_i(x) \in \operatorname{Ker} f_{i-1}$, mivel $f_{i-1}\alpha_{i-1}f_i = \alpha_{i-2}f_{i-1}f_i = 0$ a diagram kommutativitása és a sorozatok egzaktsága miatt. Így létezik $x' \in F_i'$, amire $f_i'(x') = \alpha_{i-1}f_i(x)$. Ekkor legyen $\alpha_i(x) = x'$. (Itt annyi kiegészítést kell tennünk, hogy $\alpha_{-1} = \alpha$, illetve f_{-1} és f_{-1}' a konstans 0 leképezések.)

Most belátjuk, hogy bármely két ilyen kiterjesztett láncleképezés lánchomotóp. Tegyük fel, hogy $\{\alpha_i'\}$ is ilyen kiterjesztett láncleképezés a fent definiált $\{\alpha_i\}$ mellett. Ekkor elegendő belátnunk, hogy a $\beta_i = \alpha_i - \alpha_i'$ képlettel definiált láncleképezés lánchomotóp a konstans 0 láncleképezéssel, mivel $\{\beta_i\}$ a $\beta : H \to H'$, $\beta = 0$ homomorfizmust terjeszti ki. Így egy olyan $\{\lambda_i : F_i \to F_{i+1}\}$ lánchomotópiát kell konstruálnunk, ami teljesíti a $\beta_i - 0 = f_{i+1}'\lambda_i + \lambda_{i-1}f_i$ tulajdonságot.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[dl] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[dl, "\lambda_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\beta_0"] \arrow[dl, "\lambda_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\beta=0"] \arrow[dl, "\lambda_{-1}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"'] & F_1' \arrow[r, "f_1'"'] & F_0' \arrow[r, "f_0'"'] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Legyen $\lambda_{-1} = 0$, ekkor a $\beta_0 = f_1'\lambda_0$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Legyen x az F_0 egy generátoreleme. Ekkor $f_0'\beta_0(x) = \beta f_0(x)$ a diagram kommutativitása miatt, így $\beta_0(x) \in \operatorname{Ker} f_0' = \operatorname{Im} f_1'$. Tehát létezik olyan $x' \in F_1'$, amire $f_1'(x') = \beta_0(x)$. Legyen $\lambda_0(x) = x'$.

Ezután definiáljuk λ_i-t induktívan. Ha λ_{i-1}-et már meghatároztuk, akkor λ_i-nek az $f_{i+1}'\lambda_i = \beta_i - \lambda_{i-1}f_i$ egyenlőséget kell teljesítenie. Legyen x az F_i egy generátoreleme.

Ekkor $\beta_i(x) - \lambda_{i-1} f_i(x) \in \operatorname{Ker} f'_i$, mivel

$$f'_i(\beta_i(x) - \lambda_{i-1} f_i(x)) = f'_i \beta_i(x) - f'_i \lambda_{i-1} f_i(x) = \beta_{i-1} f_i(x) - f'_i \lambda_{i-1} f_i(x) =$$

$$= (\beta_{i-1} - f'_i \lambda_{i-1}) f_i(x)$$

Itt használhatjuk az indukciós feltételt, tehát

$$(\beta_{i-1} - f'_i \lambda_{i-1}) f_i(x) = (f'_i \lambda_{i-1} + \lambda_{i-2} f_{i-1} - f'_i \lambda_{i-1}) f_i(x) = \lambda_{i-2} f_{i-1} f_i(x) = 0$$

$\operatorname{Ker} f'_i = \operatorname{Im} f'_{i+1}$, így létezik olyan $x' \in F'_{i+1}$, amire $f'_{i+1}(x') = \beta_i(x) - \lambda_{i-1} f_i(x)$. Ezt az x'-t választva $\lambda_i(x)$-nek fennáll a $\beta_i = f'_{i+1}\lambda_i + \lambda_{i-1} f_i$ egyenlőség. Így beláttuk a különböző kiterjesztések lánchomotópiáját is. □

3.2.5. Megjegyzés. *Egy szabad feloldás egy lánckomplexust ad meg, amelynek a homológiacsoportjai nem túl érdekesek, hiszen* $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ *miatt mind* 0*-k. A kohomológiacsoportjaik viszont nem lesznek mindig triviálisak, mivel egy egzakt sorozat duálisa nem feltétlenül egzakt.*

3.2.6. Következmény. *Ha F és F' két különböző szabad feloldása H-nak, akkor minden n-re megadhatunk egy kanonikus $H^n(F;G) \simeq H^n(F';G)$ izomorfizmust.*

Bizonyítás. Az előző lemma szerint az $\alpha : H \to H'$ homomorfizmus kiterjeszthető a szabad feloldások közötti $\alpha_n : F_n \to F'_n$ homomorfizmusokra. A feloldásokat dualizálva ezek egy $\alpha^*_n : F'^*_n \to F_n$ láncleképezést adnak meg a $\{\operatorname{Hom}(F'_n, G)\}$ és $\{\operatorname{Hom}(F_n, G)\}$ duális komplexusok között, ez pedig $\overline{\alpha^*_n} : H^n(F';G) \to H^n(F,G)$ homomorfizmusokat indukál a lánckomplexusok kohomológiacsoportjai között. (Az indexelés könnyítésének érdekében a H csoportnál létrejövő kohomológiacsoportot -1-es indexszel fogjuk jelölni.)

Az előző lemmában láthattuk, hogy ha α'_n egy másik kiterjesztés, akkor a két kiterjesztés lánchomotóp egymással, azaz létezik olyan $\lambda_n : F_n \to F'_{n+1}$, amire $\alpha_n - \alpha'_n = f'_{n+1}\lambda_n + \lambda_{n-1} f_n$. Ezt dualizálva kapjuk, hogy $\alpha^*_n - \alpha'^*_n = \lambda^*_n f'^*_{n+1} + f^*_n \lambda^*_{n-1}$. Ezt az azonosságot egy $\varphi \in F'^*_n$-beli kociklusra alkalmazva láthatjuk, hogy $\lambda^*_n f'^*_{n+1}(\varphi) = 0$, mivel $\varphi \in \operatorname{Ker} f'^*_{n+1}$. Másrészt $f^*_n \lambda^*_{n-1}(\varphi) \in \operatorname{Im} f^*_n$, tehát $\alpha^*_n(\varphi)$ és $\alpha'^*_n(\varphi)$ csak valamilyen kohatárban térnek el egymástól, így α^*_n és α'^*_n ugyanazon $\overline{\alpha^*_n} : H^n(F';G) \to H^n(F,G)$ homomorfizmust indukálják. Ezzel azt láttuk be, hogy a homomorfizmusok nem függnek a kiterjesztés megválasztásától.

Ha van három Abel-csoportunk köztük a $H \xrightarrow{\alpha} H' \xrightarrow{\beta} H''$ leképezésekkel, akkor a szabad feloldásaikon indukált $\overline{\alpha_n^*}$ és $\overline{\beta_n^*}$ homomorfizmusokra teljesül, hogy a komponált $\beta\alpha$ leképezés kiterjesztése által indukált $\overline{(\beta\alpha)^*}$ homomorfizmus megegyezik $\overline{\alpha_n^*}\overline{\beta_n^*}$-gal, mivel a $\beta\alpha$ kiterjesztésének választhatjuk az α_n és β_n kiterjesztések kompozícióját.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_2' & \xrightarrow{f_2'} & F_1' & \xrightarrow{f_1'} & F_0' & \xrightarrow{f_0'} & H & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & H & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Most alkalmazzuk ezt $\alpha = \beta = \mathbb{1}_H$ szereposztással úgy, hogy a felső és alsó H-hoz az F feloldást, a középsőhöz pedig az F'-t vesszük. Ekkor az identitások kompozíciójának kiterjesztése lehet maga az identitás, mint láncleképezés, így $\overline{\alpha_n^*}\overline{\beta_n^*} = \mathbb{1}_{F_n}$ minden n-re. Mivel ezt a két feloldás felcserélésével is elmondhatjuk, így ez csak akkor lehetséges, ha az $\overline{\alpha_n^*}$ leképezés izomorfizmus. □

3.2.7. Állítás. *Bármely H Abel-csoportnak létezik $0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$ szabad feloldása, ahol $i > 1$ esetén $F_i = 0$.*

Bizonyítás. Legyen F_0 a H generátorelemeinek megfelelő elemek által generált szabad Abel csoport és f_0 olyan, amely F_0 generátorelemeit a H megfelelő generátorelemeibe viszi. Ekkor $\operatorname{Ker} f_0$ egy szabad Abel csoport részcsoportja, így maga is szabad Abel csoport. Legyen $F_1 = \operatorname{Ker} f_0$, f_1 pedig a beágyázó leképezés. Így meg is kaptuk a fenti feltételeknek megfelelő szabad feloldást. □

Így azt kaptuk, hogy ha H egy szabad Abel-csoport, F pedig egy szabad feloldása, akkor $n > 1$ esetén $H^n(F, G) = 0$, mivel F megválasztható úgy, hogy $F_i = 0$, ha $i > 1$ és $H^n(F, G)$ nem függ F-től, csak H-tól a 3.2.6. Következmény miatt. Így értelmes a következő definíció:

3.2.8. Definíció. *Ha H Abel-csoport, F pedig egy szabad feloldása, akkor az F-től nem függő, $H^1(F; G)$ csoportra az $\operatorname{Ext}(H, G)$ jelölést használjuk.*

Mivel ez a csoport szerepelni fog az univerzális együttható tételben, így az alábbi tulajdonságait belátjuk, hogy a későbbiekben könnyebben tudjuk számolni:

3.2.9. Állítás. *Ha H és H' végesen generált Abel-csoportok, akkor*

(i) $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \mathrm{Ext}(H, G) \oplus \mathrm{Ext}(H', G)$.

(ii) Ha H szabad, akkor $\mathrm{Ext}(H, G) = 0$.

(iii) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \simeq G/nG$

Bizonyítás. (i) $H \oplus H'$ szabad feloldása előáll a H és H' csoportok szabad feloldásainak direktösszegeként, így az indukált kohomológiacsoportok is megkaphatóak direktösszegként, amiből következik az állítás.

(ii) Ha H szabad, akkor $\cdots \to 0 \to H \xrightarrow{\mathbb{1}} H \to 0$ egy szabad feloldása, erre pedig látható, hogy $\mathrm{Ext}(H, G) = 0$.

(iii) $\mathbb{Z}_n$ egy szabad feloldása:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

Itt f az n-nel való szorzás, a következő leképezés pedig a természetes faktorleképezés. A szabad feloldást dualizálva kapjuk, hogy

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \longleftarrow 0$$

Ekkor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \simeq G$ és $f^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)) \simeq nG$, amiből megkaptuk az állítást. □

3.2.10. Tétel. *(Univerzális együttható tétel kohomológiacsoportokra) Ha C egy Abel-csoportokból álló lánckomplexus, melyből a $H_n(C)$ homológiacsoportok származnak, akkor a $\mathrm{Hom}(C_n, G)$ kolánckomplexusból származó $H^n(C; G)$ kohomológiacsoportokat meghatározza a következő hasadó egzakt sorozat:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

Azaz $H^n(C; G)$ nem függ C-től, csak a homológiacsoportoktól és G-től.

Bizonyítás. Tekintsük a következő egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} h \longrightarrow H^n(C;G) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}(H_n(C),G) \longrightarrow 0$$

Mivel h-ról beláttuk, hogy szürjektív, így ha a második nyíl a természetes beágyazás, akkor valóban egzakt sorozatot kapunk. Ugyanakkor a 3.2.2. Állítás bizonyításában kaptunk egy $g : \operatorname{Hom}(H_n(C),G) \to H^n(C;G)$ homomorfizmust, amire $hg = \mathbb{1}_{\operatorname{Hom}(H_n(C),G)}$, tehát ez az egzakt sorozat hasad. Így csak azt kell belátnunk, hogy $\operatorname{Ext}(H_{n-1}(C),G) \simeq \operatorname{Ker} h$.

Tekintsük a következő rövid egzakt sorozatokból álló kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Itt a függőleges leképezések a határleképezés megszorításai a megfelelő csoportokra. Ezt a diagramot dualizálva a következő diagramot kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & Z^*_{n+1} & \longleftarrow & C^*_{n+1} & \longleftarrow & B^*_n & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \\
0 & \longleftarrow & Z^*_n & \longleftarrow & C^*_n & \longleftarrow & B^*_{n-1} & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Mivel az eredeti diagram sorai hasadó rövid egzakt sorozatok, így a duálisok is azok lesznek, mivel $\operatorname{Hom}(A \oplus B,G) \simeq \operatorname{Hom}(A,G) \oplus \operatorname{Hom}(B,G)$. Ezzel egy, a 2.4.3. Tétel bizonyításában szereplő diagramhoz hasonló lánckomplexusokból álló rövid egzakt sorozatot kapunk. Erre alkalmazva a tételt, mivel a ciklusokon és határokon vett határleképezések mind 0-k, így kapjuk a következő hosszú egzakt sorozatot:

$$\cdots \longleftarrow B^*_n \longleftarrow Z^*_n \longleftarrow H^n(C;G) \longleftarrow B^*_{n-1} \longleftarrow Z^*_{n-1} \longleftarrow \cdots$$

A $Z^*_n \to B^*_n$ leképezések konstrukciójából látható, hogy ezek éppen az $i_n : B_n \to Z_n$ beágyazások duálisai. Z^*_n egy φ_0 elemét C^*_n-ba visszahúzva a vetítéssel vett $\varphi = \varphi_0 p$ kompozíciót kapjuk. Erre alkalmazva a $\delta : C^*_n \to C^*_{n+1}$ leképezést a $\varphi\partial$ kompozíciót kapjuk. Ezt utána B^*_n-ba visszahúzva a ∂-val való kompozíciót elhagyjuk, majd φ-t megszorítjuk B_n-re.

Az előző hosszú egzakt sorozatot $H^n(C;G)$ körül rövid egzakt sorozattá tehetjük a következőképp:

$$0 \longleftarrow \operatorname{Ker} i_n^* \longleftarrow H^n(C;G) \longleftarrow \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \longleftarrow 0$$

Itt $\operatorname{Coker} i_{n-1}^*$ a $B_{n-1}^*/\operatorname{Im} i_{n-1}^*$ csoportot jelöli és az indukált leképezéssel valóban egzakt sorozatot kapunk, mivel $\operatorname{Im} i_{n-1}^*$ megegyezik a $B_{n-1}^* \to H^n(C;G)$ leképezés magjával. Másrészt $\operatorname{Ker} i_n^*$ azon $Z_n \to G$ leképezéseket tartalmazza, melyek eltűnnek B_n-en így az elemei megfeleltethetőek $\operatorname{Hom}(H_n(C), G)$ elemeinek. Ezzel a megfeleltetéssel az egzakt sorozatot fordítva felírva kapjuk, hogy

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C;G) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

Erről már korábban láttuk, hogy hasad, illetve az is teljesül, hogy $\operatorname{Ker} h \simeq \operatorname{Coker} i_{n-1}^*$. $\operatorname{Coker} i_{n-1}^*$ meghatározásához írjuk fel a $H_{n-1}(C) = Z_{n-1}/B_{n-1}$ faktorból adódó rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

Ez egy szabad feloldása $H_{n-1}(C)$-nek. Mivel ennek a duálisa

$$0 \longleftarrow B_{n-1}^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}^* \longleftarrow H_{n-1}(C)^* \longleftarrow 0$$

Így láthatjuk, hogy $\operatorname{Coker} i_{n-1}^* = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G)$, amivel beláttuk az állítást. $\square$

3.2.11. Következmény. *Ha a C lánckomplexus H_n és H_{n-1} homológiacsoportjai végesen generáltak és torziórészcsoportjaik $T_n \subset H_n$, illetve $T_{n-1} \subset H_{n-1}$, akkor $H^n(C, \mathbb{Z}) \simeq (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$.*

3.2.12. Következmény. *Az S^n gömbök $\mathbb{Z}$ együtthatós kohomológiacsoportjai megegyeznek a homológiacsoportokkal.*

3.3. Relatív kohomológia

A későbbiekben szükségünk lesz a pár, illetve a hármas hosszú egzakt sorozatának kohomologikus verziójára, ebben a részben erről olvashatunk.

3.3.1. Definíció. *Legyen X topologikus tér, A egy altere, G pedig egy csoport. Tekintsük a $C_n(X,A)$ relatív lánckomplexus dualizálásával kapott $C^n(X,A;G) = \mathrm{Hom}(C_n(X,A),G)$ relatív koláncomplexust. A kohatárleképezéseket a relatív határleképezések dualizálásával kapjuk. Ebből a koláncomplexusból kapott kohomológiacsoportokat az (X,A) pár relatív kohomológiacsoportjainak nevezzük és $H^n(X,A;G)$-vel jelöljük.*

3.3.2. Állítás. *Legyen X topologikus tér, A egy altere, G pedig egy csoport. Az i és j természetes beágyazások által indukált leképezésekkel, illetve a homológiáknál definiált ∂ leképezéssel analóg módon megadott δ leképezéssel az alábbi sorozat egzakt:*

$$\cdots \longrightarrow H^n(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^n(X;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A;G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X,A;G) \longrightarrow \cdots$$

Bizonyítás. Az (X,A) párra tekinthetjük az alábbi rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{j} C_n(X,A) \longrightarrow 0$$

Ezt dualizálva kapjuk az alábbi sorozatot:

$$0 \longleftarrow C^n(A;G) \xleftarrow{i^*} C^n(X;G) \xleftarrow{j^*} C^n(X,A;G) \longleftarrow 0$$

Ebben i^* szürjektív mivel minden $C_n(A) \to G$ leképezés kiterjeszthető $C_n(X) \to G$ leképezéssé. A j^* leképezés képét azon $C_n(X) \to G$ leképezések adják, melyek eltűnnek $C_n(A)$-n, másrészt pedig j^* nyilvánvalóan injektív, így a kapott duális sorozat is egzakt. Ezen már a 2.4.3. Tételben kapott ∂-val analóg módon definiálhatjuk a δ leképezést, és az ottani bizonyítás lépéseit végrehajtva láthatjuk, hogy a kohomológiák sorozata is egzakt. $\square$

Hasonlóan megkaphatjuk a hármas kohomológiáinak hosszú egzakt sorozatát is:

3.3.3. Állítás. *Legyenek $B \subset A \subset X$ topologikus terek, G pedig egy csoport. Ekkor az i és j természetes beágyazások által indukált leképezésekkel, illetve a megfelelően megválasztott δ leképezéssel az alábbi sorozat egzakt:*

$$\cdots \longrightarrow H^n(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^n(X,B;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A,B;G) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X,A;G) \longrightarrow \cdots$$

3.4. Csészeszorzás

A kohomológiacsoportok előnye, hogy definiálhatunk rajtuk egy természetes szorzást, ezzel pedig a kohomológiacsoportokat kiterjeszthetjük egyetlen kohomológiagyűrűvé. Az alábbiakban ezt fogjuk definiálni.

3.4.1. Definíció. *Legyen R egy gyűrű, $\{C^n(X;R)\}$ pedig egy kolánckomplexus. Ekkor a komplexus koláncain értelmezett $C^k(X;R) \to C^l(X;R) \to C^{k+l}(X;R)$ függvényt csészeszorzásnak nevezzük, ahol $\varphi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$ esetén a szorzat a $\sigma : \Delta^{k+l} \to X$ szinguláris szimplexhez a következő értéket rendeli hozzá:*

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \ldots, v_{k+l}])$$

3.4.2. Lemma. *Ha $\varphi \in C^{k+1}(X;R)$ és $\psi \in C^{l+1}(X;R)$ koláncok, akkor a δ határleképezéssel teljesül, hogy*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$$

Bizonyítás. Egy $\sigma : \Delta^{k+l+1} \to X$ szinguláris szimplexre

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l+1}])$$

$$(-1)^k(\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+l+1}])$$

E két kifejezést összeadva az első összeg utolsó tagja és a második kifejezés első tagja éppen egymás (-1)-szeresei, így ezek kiejtik egymást, a többi tag összege pedig éppen megadja $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$-t. □

3.4.3. Következmény. *A lemmából adódik, hogy két kociklus szorzata is kociklus, mivel ha $\delta\varphi = \delta\psi = 0$, akkor $\delta(\varphi \smile \psi) = 0 \smile \psi \pm \varphi \smile 0 = 0$. Másrészt egy kociklus és egy kohatár szorzata mindig kohatár, mivel ha $\delta\varphi = 0$, akkor $\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$. Ez a két tag felcserélésével is teljesül, így a koláncokon értelmezett csészeszorzás indukál egy csészeszorzást a kohomológiacsoportokon is:*

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R)$$

Ez a szorzás asszociatív, az összeadásra nézve pedig disztributív, mivel ezek már a koláncokra is teljesülnek.

3.4.4. Állítás. *Ha $f : X \to Y$ folytonos leképezés, akkor a kohomológiacsoportokon indukált $f^* : H^n(Y;R) \to H^n(X;R)$ leképezés teljesíti az $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$ egyenlőséget.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in C^k(Y;R)$ és $\psi \in C^l(Y;R)$ koláncok, akkor az $f^\# : C^n(Y;R) \to C^n(X;R)$ koláncokon indukált leképezésre és a $\sigma : \Delta^{k+l} \to Y$ szinguláris szimplexre:

$$(f^\#\varphi \smile f^\#\psi)(\sigma) = f^\#\varphi(\sigma|[v_0,\dots,v_k])f^\#\psi(\sigma|[v_k,\dots,v_{k+l}]) =$$

$$= \varphi(f\sigma|[v_0,\dots,v_k])\psi(f\sigma|[v_k,\dots,v_{k+l}]) = (\varphi \smile \phi)(f\sigma) = f^\#(\varphi \smile \psi)(\sigma)$$

Így az állítás teljesül az indukált f^* leképezésre is a kohomológiacsoportokon. □

3.4.5. Definíció. *Legyen $H^*(X;R)$ a $H^n(X;R)$ kohomológiacsoportok direktösszege. Ekkor $H^*(X;R)$ elemei $\sum_i \alpha_i$ véges összegek. Két ilyen elem szorzata legyen $(\sum_i \alpha_i)(\sum_j \beta_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \smile \beta_j$ a korábban definiált csészeszorzással. Az így kapott struktúrát az X tér kohomológiagyűrűjének nevezzük.*

4. fejezet

Spektrális sorozatok

A spektrális sorozatok segítséget adnak a homológia és kohomológiacsoportok kiszámításához. Ezeket többféleképpen is felépíthetjük, itt Robert M. Switzer definíciója olvasható [6, Chapter 15], illetve hasonló felépítés szerepel a Homotopic Topology című könyvben is. [2, Chapter III.]

4.1. Spektrális sorozatok homológiákra

4.1.1. Definíció. *Topologikus terek egy* $\cdots \subset X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots$ *sorozatát az* X *tér filtrálásának nevezzük, ha* $\cup_{-\infty}^{\infty} X^i = X$ *és minden* X*-beli kompakt halmazt tartalmazza valamelyik* X^i*.*

4.1.2. Megjegyzés. *A továbbiakban azt is fel fogjuk tenni, hogy* $i < 0$ *esetén* $X^i = \emptyset$*, mert ez a spektrális sorozatok definiálásakor fontos lesz.*

4.1.3. Megjegyzés. *Ha* X *egy CW-komplexus, akkor a* k*-vázai az* X *egy filtrálását adják meg.*

4.1.4. Definíció. *Legyen* $\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ *az* X *tér egy filtrálása. Tekintsük a* $C_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \to C_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ *természetes leképezés által indukált* $H_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ *leképezést a homológiacsoportokon. Ezen leképezés képterének elemeit az* X *tér homologikus spektrális sorozatának ciklusainak nevezzük, magát a képteret pedig* $Z^r_{p,q}$*-rel jelöljük.*

4.1.5. Definíció. *Legyen $\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ az X tér egy filtrálása. Tekintsük az $(X^{p+r-1}, X^p, X^{p-1})$ hármas hosszú egzakt sorozatában lévő $H_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ leképezést. Ennek képterének elemeit X tér homologikus spektrális sorozatának határainak nevezzük, magát a képteret pedig $B^r_{p,q}$-rel jelöljük.*

A definíciókból látszik, hogy $B^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q}$, $Z^0_{p,q} \supset Z^1_{p,q} \supset Z^2_{p,q} \supset \cdots$ és $B^0_{p,q} \subset B^1_{p,q} \subset B^2_{p,q} \subset \cdots$, így a következő definíciók értelmesek:

4.1.6. Definíció. *Ha r-rel tartunk a végtelenhez, akkor definiálhatjuk a végtelen indexű ciklusokat és határokat is:*

- $Z^\infty_{p,q} := \cap_{r=0}^{\infty} Z^r_{p,q}$
- $B^\infty_{p,q} := \cup_{r=0}^{\infty} B^r_{p,q}$

4.1.7. Definíció. *Az $E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$ csoportokat az X tér spektrális sorozatának nevezzük. Egy rögzített r-re az $E^r_{p,q}$ csoportok összességét a spektrális sorozat r-edik lapjának nevezzük.*

4.1.8. Megjegyzés. *Ezt az $r = \infty$ indexre is elmondhatjuk, így beszélhetünk a spektrális sorozat ∞-edik lapjáról is.*

4.1.9. Állítás. *Ha X egy CW-komplexus, tekintjük a k-vázait, mint filtrálást és $p < 0$ vagy $q < 0$, akkor $E^r_{p,q} = 0$.*

Bizonyítás. $p < 0$ esetén $X^p = \emptyset$, tehát $H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) = 0$, így $E^r_{p,q} = 0$, ha pedig $q < 0$, akkor a 2.6.2. Lemma miatt $H_{p+q}(X^p) = 0$ és így $H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) = 0$. $\square$

4.1.10. Állítás. *A $Z^r_{p,q}/Z^{r+1}_{p,q}$ és $B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$ csoportok között megadható egy természetes izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, melyet az (X^p, X^{p-1}, X^{p-r}) és $(X^p, X^{p-r}, X^{p-r-1})$ hármasok hosszú egzakt sorozataiból kapunk:

$$\begin{tikzcd}
 & H_{p+q}(X^p, X^{p-r-1}) \arrow[d, "j_*"'] \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
H_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & H_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \arrow[r, "j_{2*}"'] \arrow[d, "\partial_2"] & H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & H_{p+q-1}(X^{p-r}, X^{p-r-1}) &
\end{tikzcd}$$

Láthatjuk, hogy itt $Z^r_{p,q}/Z^{r+1}_{p,q} = \operatorname{Im} j_{2*}/\operatorname{Im} j_{1*}$ és $B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} = \operatorname{Im}\partial_2/\operatorname{Im}\partial_1$. Azt fogjuk belátni, hogy ezeken a $\partial_2 j_{2*}^{-1}$ által indukált leképezés izomorfizmus.

Először belátjuk, hogy az indukált leképezés jóldefiniált. Tegyük fel, hogy az $a, b \in H_{p+q}(X^p, X^{p-r})$ elemekre a j_{2*} szerinti képeik különbsége $\operatorname{Im} j_{1*}$-beli. Megmutatjuk, hogy ekkor a ∂_2 szerinti képeik ugyanazt az elemet reprezentálják $\operatorname{Im}\partial_2/\operatorname{Im}\partial_1$-ben. Mivel $j_{2*}(a-b) = j_{2*}(a)-j_{2*}(b) \in \operatorname{Im} j_{1*}$, így létezik egy olyan $c \in H_{p+q}(X^p, X^{p-r-1})$, amire $j_*(c) = a-b$. Így viszont $\partial_2(a)-\partial_2(b) = \partial_2(a-b) = \partial_2(j_*(c)) = 0$ a függőleges oszlop egzaktsága miatt.

Most belátjuk, hogy a kapott homomorfizmus injektív. Tegyük fel, hogy egy $a \in H_{p+q}(X^p, X^{p-r})$ elemre $\partial_2(a) \in \operatorname{Im}\partial_1$. Ekkor létezik olyan $b \in H_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r})$ elem, amire $a = i_*(b)$. Ekkor viszont a vízszintes sor egzaktsága miatt $j_{2*}(a) = j_{2*}(i_*(b)) = 0$, azaz az indukált homomorfizmusban csak akkor képződhet egy elem a 0-ba, ha a 0-t prezentálja.

Végül belátjuk, hogy a kapott leképezés szürjektív. Vegyünk egy tetszőleges $\operatorname{Im} j_{2*}/\operatorname{Im} j_{1*}$-beli elemet, amelyet $a \in \operatorname{Im} j_{2*}$ prezentál. Ekkor valamilyen $b \in H_{p+q}(X^p, X^{p-r})$ elemre $\partial_2(b) = a$. Erre a b-re $j_{2*}(b)$ képe az indukált homomorfizmusban éppen a ekvivalenciaosztálya. □

4.1.11. Definíció. *Az alábbi ábrán látható módon indukált $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ leképezést az X tér spektrális sorozatának határleképezésének nevezzük.*

$$\begin{tikzcd}
Z^r_{p,q}/B^r_{p,q} \arrow[r] & Z^r_{p,q}/Z^{r+1}_{p,q} \simeq B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} \arrow[r] & Z^r_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} \arrow[d, "\simeq"] \\
E^r_{p,q} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[rr, "d^r_{p,q}"] & & E^r_{p-r,q+r-1}
\end{tikzcd}$$

4.1.12. Tétel. $d^r_{p,q} d^r_{p+r,q-r+1} = 0$*, illetve fennáll az alábbi izomorfizmus:*

$$\operatorname{Ker} d^r_{p,q} \big/ \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} \simeq E^{r+1}_{p,q}$$

Bizonyítás. A definíció felső sorának első leképezése szürjektív, a második pedig injektív a $B^r_{p,q} \subset B^\infty_{p,q} \subset Z^\infty_{p,q} \subset Z^{r+1}_{p,q}$ és $B^{r+1}_{p-r,q+r-1} \subset B^\infty_{p-r,q+r-1} \subset Z^\infty_{p-r,q+r-1} \subset Z^r_{p-r,q+r-1}$ tartalmazások miatt. Így láthatjuk, hogy $\operatorname{Ker} d^r_{p,q} = Z^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q}$ és $\operatorname{Im} d^r_{p,q} = B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$, tehát $\operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} = B^{r+1}_{p,q}/B^r_{p,q}$. Ebből láthatjuk, hogy $\operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} \subset \operatorname{Ker} d^r_{p,q}$, amiból adódik az állítás első fele, másrészt pedig

$$\operatorname{Ker} d^r_{p,q} \big/ \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} = Z^{r+1}_{p,q} \big/ B^r_{p,q} \Big/ B^{r+1}_{p,q} \big/ B^r_{p,q} \simeq Z^{r+1}_{p,q} \big/ B^{r+1}_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$$

□

4.1.13. Tétel. *Jelöljük $F_{p,q}$-val a $H_{p+q}(X^p) \to H_{p+q}(X)$ leképezés képterét. Ekkor*

$$F_{p,q} \Big/ F_{p-1,q+1} \simeq E^\infty_{p,q}$$

Bizonyítás. A $Z^\infty_{p,q} := \cap_{r=0}^\infty Z^r_{p,q}$ leszálló metszetet és $B^\infty_{p,q} := \cup_{r=0}^\infty B^r_{p,q}$ felszálló uniót tekintve láthatjuk, hogy $Z^\infty_{p,q}$ a $H_{p+q}(X^p) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ leképezés képtere, $B^\infty_{p,q}$ pedig a $H_{p+q+1}(X, X^p) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ képtere.

Az (X, X^p) és (X^p, X^{p-1}) párok hosszú egzakt sorozatainak részleteiből a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
 & H_{p+q+1}(X, X^p) \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_2"] & \\
H_{p+q}(X^{p-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "i_{1*}"'] & H_{p+q}(X^p) \arrow[r, "j_*"'] \arrow[d, "i_{2*}"] & H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & H_{p+q}(X) &
\end{tikzcd}$$

Ekkor $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q} = \operatorname{Im} j_* / \operatorname{Im} \partial_2$ és $F_{p,q}/F_{p-1,q+1} = \operatorname{Im} i_{2*} / \operatorname{Im} i_{1*}$. Így az ezek között $i_{2*} j_*^{-1}$ által indukált leképezésre alkalmazva a 4.1.10. Állítás bizonyításának gondolatmenetét, megkapjuk a tételt. □

4.2. Spektrális sorozatok kohomológiákra

A kohomologikus spektrális sorozatoknál ugyanúgy egy tér filtrálásánál a megfelelő hármasok egzakt sorozatából képezzük a spektrális sorozat kociklusait és kohatárait. A homologikussal teljesen analóg módon definiálhatjuk ekkor a spektrális sorozat elemeit, illetve a kohatárleképezést. A fő különbség az lesz, hogy a kapott leképezések fordított irányúak a dualizálás miatt. A kohomológiagyűrű struktúrája miatt pedig a kohomologikus spektrális sorozat lapjai modulusként fognak viselkedni a kohomológiagyűrűre nézve.

4.2.1. Definíció. *Legyenek $p, q \in \mathbb{Z}$ és $r \in \mathbb{Z}^+$ egész számok. Tekintsük az X tér egy filtrálásából kapott $(X^{p+r-1}, X^p, X^{p-1})$ és (X^p, X^{p-1}, X^{p-r}) hármasok kohomológiáinak hosszú egzakt sorozatait. Ekkor a kohomologikus spektrális sorozat elemeit a következő csoportok adják meg:*

- $Z_r^{p,q} = \mathrm{Im}[i^* : H^{p+q}(X^{p+r-1}, X^{p-1}) \to H^{p+q}(X^p, X^{p-1})]$
- $B_r^{p,q} = \mathrm{Im}[\delta : H^{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-r}) \to H^{p+q}(X^p, X^{p-1})]$
- $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$

A végtelen indexű lap kociklusai és kohatárai itt is a kociklusok, illetve kohatárok metszetei és uniói lesznek, így kapjuk a következőt:

4.2.2. Állítás. *A kohomologikus spektrális sorozat végtelen indexű lapján a ciklusok és határok az alábbiak:*

- $Z_\infty^{p,q} = \mathrm{Im}[i^* : H^{p+q}(X, X^{p-1}) \to H^{p+q}(X^p, X^{p-1})]$
- $B_\infty^{p,q} = \mathrm{Im}[\delta : H^{p+q-1}(X^{p-1}) \to H^{p+q}(X^p, X^{p-1})]$

4.2.3. Definíció. *A kohomologikus spektralis sorozat $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ kohatárleképezéseit az alábbi diagram definiálja:*

$$\begin{tikzcd}
Z_r^{p,q}/B_r^{p,q} \arrow[r] & Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} \simeq B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1} \arrow[r] & Z_r^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1} \arrow[d, "\simeq"] \\
E_r^{p,q} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[rr, "d_r^{p,q}"] & & E_r^{p+r,q-r+1}
\end{tikzcd}$$

Az alábbi tételek pedig ugyanúgy igazak lesznek:

4.2.4. Tétel. *$d_r^{p,q} d_r^{p-r,q+r-1} = 0$, illetve fennáll az alábbi izomorfizmus:*

$$\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q} \Big/ \mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1} \simeq E_{r+1}^{p,q}$$

4.2.5. Tétel. *Legyen $F^{p,q} = \mathrm{Ker}[H^{p+q}(X) \to H^{p+q}(X^{p-1})]$. Ekkor*

$$F^{p,q} \Big/ F^{p+1,q-1} \simeq E_\infty^{p,q}$$

4.2.6. Megjegyzés. *Ezen tételek bizonyítását az alábbi hosszú egzakt sorozatokból nyert kommutatív diagramokból kapjuk:*

$$\begin{tikzcd}
 & H^{p+q}(X^{p+r}, X^{p-1}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^{p+q}(X^{p+r-1}, X^p) \arrow[r] \arrow[dr] & H^{p+q}(X^{p+r-1}, X^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & H^{p+q+1}(X^{p+r}, X^{p+r-1}) &
\end{tikzcd}$$

A második tételnél pedig még utolsó lépésként azt kell használnunk, hogy a függőleges, illetve az alsó ferde sorozat egzakt:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{p+q-1}(X^{p-1}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^{p+q}(X, X^p) \arrow[r] \arrow[dr] & H^{p+q}(X, X^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & H^{p+q}(X) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & H^{p+q}(X^{p-1}) & H^{p+q}(X^p)
\end{tikzcd}$$

5. fejezet

Gömbök homotopikus csoportjai

Ahhoz, hogy a spektrális sorozatokat alkalmazni tudjuk gömbök homotopikus csoportjainak kiszámításához, még szükségünk lesz néhány fogalomra, illetve tételre.

5.1. Eilenberg-Maclane terek

5.1.1. Definíció. *Legyen G egy csoport, n pedig pozitív egész. Ekkor egy X összefüggő topologikus teret $K(G,n)$ típusú Eilenberg-Maclane térnek nevezünk, ha az n-edik homotopikus csoportja izomorf G-vel, a többi pedig triviális.*

5.1.2. Példa. *S^1 egy $K(\mathbb{Z},1)$ típusú tér.*

Azt már tudjuk, hogy $\pi_1(S^1)=1$ és ennek egy generátora az identitás. A magasabb homotopikus csoportokat megkapjuk abból, hogy a $p:\mathbb{R}\to S^1$ fedésnél $n\geq 2$ esetén a fedőtér és a fedett tér homotopikus csoportjai megegyeznek, így $\pi_n(S^1)=\pi_n(\mathbb{R})=0$, mivel $\mathbb{R}$ pontrahúzható. [3, Proposition 4.1.]

5.1.3. Tétel. *Minden G Abel-csoporthoz és n pozitív egészhez létezik $K(G,n)$ Eilenberg-Maclane tér.*

Bizonyítás. A G Abel-csoporthoz konstruálunk egy megfelelő Eilenberg-Maclane teret. A G Abel-csoport előáll egy szabad Abel-csoport faktoraként, így prezentálhatjuk a generátorainak H halmazával és az ezek közötti R relációkkal. (Mivel $n>1$ esetén a homotopikus csoportok kommutatívak, így a kommutátorokat csak $n=1$ esetén tartalmazza R!)

Az X $K(G,n)$ típusú teret CW-komplexusként fogjuk előállítani indukcióval. Az X^n legyen G generátorainak megfelelő S^n-ek egy csokra, azaz álljon egy darab 0 cellából és minden $g \in H$-ra egy-egy n-cellából, amelyek határa a 0 cellába képződik a ragasztásnál. Ezután az $n+1$ cellákat úgy ragasszuk be, hogy minden $r \in R$ relációra az e_r^{n+1} cella határa egy olyan szferoid képébe képződjön, amely $\pi_n(X^n)$-ben r-et reprezentálja. Ekkor $\pi_n(X^{n+1}) \simeq G$. Mivel egy CW-komplexus n-edik homotopikus csoportja csak az $(n+1)$-vázán múlik, így már csak az a feladatunk, hogy elérjük, hogy a CW komplexusunk magasabb homotopikus csoportjai triviálisak legyenek.

Ha a k-vázat már definiáltuk, akkor a $k+1$ -cellák legyenek olyanok, hogy határaik $\pi_k(X^k)$ reprezentánsaiba képződnek. Ettől $\pi_k(X^{k+1}) = 0$ fog teljesülni, ezzel pedig a k-vázak uniójaként kaptunk egy $K(G,n)$ típusú Eilenberg-Maclane teret. □

5.1.4. Tétel. *Egy adott G Abel-csoportra és n pozitív egészre, bármely két $K(G,n)$ Eilenberg-Maclane-tér gyengén homotopikusan ekvivalens.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha Y egy tetszőleges $K(G,n)$ típusú tér, akkor gyengén homotopikusan ekvivalens az előző bizonyításban megkonstruált X térrel. Azaz konstruálni fogunk egy $f : X \to Y$ folytonos leképezést, amely $f_* : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ izomorfizmusokat indukál a homotópiacsoportok között. Ha $k \neq n$, akkor $\pi_k(X) = \pi_k(Y) = 0$, így f_* nyilvánvalóan izomorfizmus.

f-et induktívan fogjuk definiálni az X k-vázain. Mivel X^n homotopikusan ekvivalens S^n-ek egy csokrával, így egy tetszőleges $\rho : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ izomorfizmust véve a $g \in \pi_n(X)$ generátorelem reprezentánsát az $\rho(g)$ reprezentánsába képezve kapunk egy $f_n : X^n \to Y$ folytonos leképezést. Ha ennek meg tudjuk adni egy $f : X \to Y$ kiterjesztését, akkor láthatjuk, hogy ez egy gyenge homotopikus ekvivalencia.

Most indukcióval terjesszük f_n-et a magasabb dimenziójú vázakra. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \geq n$ vázra már definiáltuk az $f_k : X^k \to Y$ kiterjesztést. Legyen $\Phi_\alpha : S^k \to X^k$ az e_α^{k+1} cellához tartozó ragasztóleképezés. Ekkor $f_k\Phi_\alpha : S^k \to Y$ nullhomotóp, mivel $k = n$ esetén ez adódik f_n konstrukciójából, $k > n$-re pedig $\pi_k(Y) = 0$.

Legyen $H : S^k \times [0,1] \to Y$ egy olyan homotópia, amely $f_k\Phi_\alpha$-t pontrahúzza. Ez indukál egy $H' : (S^k \times [0,1])/S^k \times 1 \to Y$ folytonos leképezést. $(S^k \times [0,1])/S^k \times 1$ homeomorf D^{k+1}-gyel, így az e_α^{k+1} cella belsejét azonosítva f_k kiterjed erre a cellára. Ezt minden $k+1$ cellára elvégezve kapunk egy $f_{k+1} : X^{k+1} \to Y$ folytonos leképezést, amely kiterjesztése f_k-nak.

Az így kapott leképezések felszálló uniójaként kapjuk az $f : X \to Y$ folytonos leképezést, ami egy megfelelő gyenge homotopikus ekvivalencia. $\square$

Ezen bizonyítások részletesebben megtalálhatóak a [7] forrásban. További Eilenberg-Maclane terekre később fogunk példákat látni, amikor majd ténylegesen be tudjuk látni a homotopikus csoportjaikról, hogy megfelelnek a definíciónak.

5.2. Relatív homotópia

Konkrét Eilenberg-Maclane tereket csak akkor tudunk megadni, ha azoknak összes homotópiacsoportját ki tudjuk számítani. Ebben fog nekünk segíteni a homotópiacsoportokra vonatkozó hosszú egzakt sorozat. A homológiákhoz hasonlóan viszont ezt is relatív homotópiacsoportokkal fogjuk tudni kimondani.

5.2.1. Definíció. *Legyen X egy topologikus tér, A ennek egy altere, illetve $x_0 \in A$ egy bázispont. Jelölje I^n az n-dimenziós egységkockát, I^{n-1} pedig azon lapját, melyben a pontok utolsó koordinátája 0. Jelölje J^n a $\partial I^n \backslash I^{n-1}$ lezártját. Ekkor az $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ folytonos leképezések által meghatározott homotópiaosztályokat $\pi_n(X, A, x_0)$-lal jelöljük. $n \geq 2$ esetén ezt elláthatjuk egy természetes művelettel, így relatív homotópiacsoportot kapunk.*

5.2.2. Megjegyzés. *$\pi_n(X, A, x_0)$ néhány egyszerűen látható tulajdonsága:*

- *$\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, azaz az abszolút homotópiacsoport speciális esete a relatívnak.*
- *$n = 1$ esetén $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ és $J^0 = \{1\}$, így nem tudunk műveletet definiálni a $\pi_n(X, A, x_0)$ halmazon (kivéve persze az előző $A = x_0$ esetet).*
- *$n \geq 3$ esetén a $\pi_n(X, A, x_0)$ csoportok kommutatívak.*
- *Az abszolút esethez hasonlóan a definícióban használhatjuk akár a (D^n, S^{n-1}, s_0) hármast is, mivel ez homotopikusan ekvivalens $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$-gyel.*
- *Egy $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ leképezés pontosan akkor reprezentálja a 0-t $\pi_n(X, A, x_0)$-ben, ha homotóp egy olyannal, amiben I^n képe A-ban van.*

5.2.3. Tétel. *A természetes i_* és j_* leképezésekkel, illetve a megfelelően megválasztott ∂ leképezéssel az alábbi sorozat egzakt:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

5.2.4. Megjegyzés. *Ugyan $\pi_1(X, A, x_0)$ nem csoport, de nulleleme ennek is van, így a sorozat egzaktságának vizsgálata értelmes.*

Bizonyítás. A ∂ leképezés legyen az, hogy az $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$-en vett leképezésünk által reprezentált homotópiaosztályhoz ennek az $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$-re vett megszorítását rendeljük. Könnyen láthatjuk, hogy ez a leképezés jóldefiniált és homomorfizmus. Így hat dolgot kell belátnunk:

- $j_* i_* = 0$: Egy $\pi_n(A, x_0)$-beli elemet egy $(I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ folytonos leképezés reprezentál. Erre i_*-ot, majd j_*-ot alkalmazva a kapott elem $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ reprezentánsának képe A-ban van, így csak a nullelem lehet.
- $\partial j_* = 0$: Ha egy $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ folytonos leképezést $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ leképezésként értelmezve, majd ezt megszorítva az I^{n-1} lapra a konstans leképezést kapjuk.
- $i_* \partial = 0$: Egy $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$ leképezés I^n-re vett megszorítása kötötten nullhomotóp, mivel f maga egy homotópiát ad meg (A, x_0)-on belül.
- $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$: Ha egy $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ leképezésre, $j_*([f]) = 0$, akkor f kötötten homotóp egy olyan leképezéssel, melynek képe A-ban van. Így viszont ez a leképezés egy olyan $\pi_n(A, x_0)$-beli elemet reprezentál, amelynek i_* szerinti képe $[f]$.
- $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$: Ha $f : (I^n, \partial I^n, J^n) \to (X, A, x_0)$-ra $\partial([f]) = 0$, akkor létezik olyan $H : I^{n-1} \times [0, 1]$ homotópia, ami kötötten behúzza $f|_{(I^{n-1}, \partial I^{n-1})}$-et x_0-ba. Így az
$$f' = \begin{cases} f(x, 2t), \text{ ha } x \in I^{n-1},\ t \in [0, 1/2] \\ H(x, 2t - 1), \text{ ha } x \in I^{n-1},\ t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
egy olyan $(I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ leképezés, amely ekvivalenciaosztályának j_* szerinti képe $[f]$, mivel H egy homotópiát indukál f és $j(f')$ között.

- $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$: Legyen $f : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ olyan folytonos leképezés, amelyre $i_*([f]) = 0$, akkor létezik olyan $H : I^n \times [0,1] \to X$ homotópia, amely f-et kötötten behúzza x_0-ba. Ez a H homotópia pedig egy olyan ekvivalenciaosztályt határoz meg $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$-ben, amelynek i_* szerinti képe éppen f.

Ezzel beláttuk a sorozat egzaktságát. □

5.3. Fibrálások

5.3.1. Definíció. *Egy $p : E \to B$ topologikus terek közti folytonos leképezés teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot az X térre nézve, ha bármely $g_t : X \to B$ homotópiához, és g_0-t felemelő $\tilde{g}_0 : X \to E$ folytonos leképezéshez (tehát amelyre $p\tilde{g}_0 = g_0$ teljesül), létezik olyan $\tilde{g}_t : X \to E$ homotópia, amely felemelése g_t-nek (azaz $p\tilde{g}_t = g_t$).*

5.3.2. Definíció. *Egy $p : E \to B$ topologikus terek közti folytonos leképezést fibrálásnak nevezünk, ha bármely X CW-komplexusra nézve teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot. Ekkor a B teret a fibrálás bázisterének nevezzük, az E-t pedig totális térnek.*

5.3.3. Példa. *Legyen $*$ a $K(\mathbb{Z}, n)$ tér úttere, azaz azon utak tere, amelyek a $K(\mathbb{Z}, n)$ egy adott pontjából indulnak.*

$$* = \{\gamma : [0,1] \to K(\mathbb{Z}, n), \gamma(0) = x_0\}$$

Ekkor a $p : * \to K(\mathbb{Z}, n), \gamma \mapsto \gamma(1)$ leképezés fibrálás.

Legyen X tetszőleges topologikus tér, $g_t : X \to K(\mathbb{Z}, n)$ homotópia, $\tilde{g}_0 : X \to *$ pedig g_0-t felemelő folytonos leképezés. Ekkor a $\tilde{g}_t(x) = \tilde{g}_0(x) g|_{[0,t] \times \{x\}}$ homotópia egy felemelése g_t-nek, így ez valóban fibrálás.

5.3.4. Definíció. *Ha $p : E \to B$ fibrálás, akkor B pontjainak p szerinti ősképét a fibrálás $F_b = p^{-1}(b)$ fibrumainak nevezzük.*

5.3.5. Állítás. *Ha $p : E \to B$ fibrálás, akkor az F_b fibrumok B útösszefüggőségi komponensein homotopikusan ekvivalensek.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $b_1, b_2 \in B$ egy útösszefüggőségi komponensbeli pontok, akkor a hozzájuk tartozó fibrumok homotopikusan ekvivalensek. Legyen $I = [0,1]$ $\gamma : I \to B$ egy b_1-et és b_2-t összekötő út. Ez megad egy $g_t : F_{\gamma(0)} \to B$ homotópiát $g_t(x) = \gamma(t)$ hozzárendelési szabállyal. Az $F_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$ beágyazás ezt $t = 0$-ra megszorítva felemeli, így a homotópiafelemelési lemma miatt létezik olyan $\tilde{g}_t : F_{\gamma(0)} \to E$ homotópia, amely felemeli g-t. Így erre teljesül, hogy $\tilde{g}_t(F_{\gamma(0)}) \subset F_{\gamma(t)}$.

Ezzel $\tilde{g}_1$ megad egy $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)}$ folytonos leképezést. Belátjuk, hogy ez az $L_{\overline{\gamma}}$ leképezéssel együtt egy homotopikus ekvivalencia.

Tegyük fel, hogy $\gamma, \gamma' : I \to B$ olyan görbék, amelyekre $\gamma(1) = \gamma'(0)$. Ekkor a γ és γ' utak által meghatározott $\tilde{g}_t$ és $\tilde{g}'_t$ felemelt homotópiák

$$f_t = \begin{cases} \tilde{g}_{2t}, \text{ ha } 0 \le t \le 1/2 \\ \tilde{g}_{2t-1} L_\gamma, \text{ ha } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

összefűzésével egy olyan homotópiát kapunk, amelyből látható, hogy $L_{\gamma\gamma'} = L_{\gamma'} L_\gamma$.

Most legyenek $\gamma, \gamma' : I \to B$ a végpontokban kötötten homotóp görbék. Megmutatjuk, hogy ekkor L_γ és $L_{\gamma'}$ is homotópok. Ehhez fel fogjuk használni, hogy egy fibrálás az $(X \times I, X \times \partial I)$ alakú párokra is teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot, mivel a $(I \times I, I \times \{0\} \cup \partial I \times I)$ és $(I \times I, I \times \{0\})$ párok homeomorfak, így az X-el vett szorzataik is azok.

Legyen $h : I \times I \to B$ homotópia γ és γ' között. Ez meghatároz egy $g_{s,t} : F_{\gamma(0)} \to B$ homotópiát $g_{s,t}(x) = h(s,t)$ hozzárendelési szabállyal. A $\tilde{g}_{0,t}$ és $\tilde{g}_{1,t}$ felemelések legyenek azok, amelyek L_γ-t és $L_{\gamma'}$-t határozzák meg, $\tilde{g}_{s,0}$ pedig legyen az $F_{\gamma(0)} \hookrightarrow E$ beágyazás. Így a homotópiafelemelési tulajdonságot az $(F_{\gamma_0} \times I, F_{\gamma(0)} \times \partial I)$ párra alkalmazva a felemelés kiterjeszti $\tilde{g}_{s,t}$-t a teljes $I \times I$-re. Ezt $t = 1$-re megszorítva homotópiát kapunk L_γ és $L_{\gamma'}$ között.

Végül e két részállítást használva adódik az állítás: Mivel a $\gamma\overline{\gamma}$ összefűzés nullhomotóp, ezért a hozzárendelt $L_{\gamma\overline{\gamma}} = L_{\overline{\gamma}} L_\gamma : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(0)}$ leképezés homotóp az $F_{\gamma(0)}$ identitásával és ezt fordítva is elmondhatjuk. Így L_γ valóban homotopikus ekvivalencia. □

5.3.6. Megjegyzés. *Így innentől a fibrum jelölésénél elegendő F-et írnunk a képpont megjelölése nélkül.*

5.3.7. Definíció. *Az E topologikus téren F fibrummal vett fibrált nyaláb struktúrának nevezzük az (E, B, p, F) négyest, ahol $p : E \to B$ egy olyan folytonos leképezés, amely teljesíti a következő tulajdonságot: B minden pontjának létezik olyan U környezete, amelyhez létezik olyan $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ homeomorfizmus, amelyre*

$$p|_{p^{-1}(U)} = rh$$

ahol $r : U \times F \to U$ a természetes vetítés. Ekkor a h-t a fibrálás lokális trivializációjának nevezzük.

Az E, F, B terekre itt is a totális tér, bázistér és fibrum elnevezéseket fogjuk használni. A következő állításból láthatjuk, hogy indokolt ugyanezen elnevezéseket használnunk.

5.3.8. Példa. *Legyen S^{2n+1} az egységgömb $\mathbb{C}^{n+1}$-be ágyazva. Ekkor a $\mathbb{CP}^n$ teret megkaphatjuk S^{2n+1} faktoraként, ahol a faktorizáló ekvalenciareláció $(z_0, \ldots, z_n) \sim \lambda(z_0, \ldots, z_n)$, ahol $\lambda \in S^1$. Ekkor így kapott $p : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ faktorleképezés egy fibrált nyaláb struktúrát ad meg S^1 fibrummal.*

Legyen $U \subset \mathbb{CP}^n$ nyílt halmaz, melynek elemei a $[z_0, \ldots, z_n]$ ekvivalenciaosztályok. Erről feltehetjük, hogy van olyan koordináta, amely U egyik elemére sem 0, legyen ez z_i. Ekkor a $h : p^{-1}(U) \to U \times S^1$, $h(z_0, \ldots, z_n) = ([z_0, \ldots, z_n], z_i/|z_i|)$ leképezés megfelel a fibrált nyaláb definíciójában előírt tulajdonságnak, mivel a fibrumokat fibrumokba viszi. Másrészt ennek a leképezésnek az inverze $([z_0, \ldots, z_n], \lambda) \mapsto \lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \ldots, z_n)$, így homeomorfizmus is.

Ezt $n = \infty$ esetben is elmondhatjuk, így $S^1 \to S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ is egy fibrált nyaláb struktúrát ad meg.

5.3.9. Állítás. *Ha $p : E \to B$ egy fibrált nyaláb struktúrát ad meg, akkor p teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot a D^k lemezekre minden $k \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel a D^k lemez homeomorf az I^k kockával, így elegendő kockákra belátnunk az állítást. Legyen $G : I^n \times I \to B$, $G(x, t) = g_t(x)$ egy homotópia, amit fel szeretnénk emelni úgy, hogy $g_0 : I^n \to B$-hez a $\tilde{g}_0 : I^n \to E$ felemelés már adott.

Mivel p fibrált nyaláb struktúrát ad meg, így B-ben minden pontnak létezik olyan nyílt környezete, ahol létezik lokális trivializáció. Így vehetjük B egy $\{U_\alpha\}$ nyílt fedését $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ lokális trivializációkkal. $I^k \times I$ kompaktsága miatt ennek van olyan véges részfedése, ami fedi $G(I^n \times I)$-t. Így $I^n \times I$ felosztható kisebb

C_l ($(n+1)$-dimenziós) kockákra úgy, hogy minden C_l kocka G szerinti képe a véges részfedés egyik elemébe esik. A C_l kockát a kapott felosztásban meghatározza az a csúcsa, amiben minden koordináta a lehető legkisebb. Ezen csúcsok koordinátái szerinti lexikografikus sorrendben haladva az a rész, melyen már megkonstruáltuk a felemelést, mindig pontrahúzható.

Ha a C_l kocka néhány lapján már definiáltuk $\tilde{G}$-ot, akkor ezen rész pontrahúzhatósága miatt láthatjuk, hogy a homotópia kiterjed $U_\alpha \times F$-ben, majd erre h-t alkalmazva megkapjuk a felemelést. Így kockánként megkaptuk $\tilde{G}$-ot. □

5.3.10. Definíció. *Legyen X topologikus tér, A egy altere. A $p : E \to B$ folytonos leképezés teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot az (X, A) párra, ha bármely $f_t : X \to B$ homotópiának létezik $\tilde{g}_t$ felemelése, ha $\tilde{g}_0 : X \to E$ és $\tilde{g}_t : A \to E$ adottak.*

5.3.11. Állítás. *Ha egy $p : E \to B$ folytonos leképezés teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot minden D^k, $k \geq 0$ lemezre, akkor teljesíti az (X, A) párra is, ahol X CW-komplexus, A pedig egy részkomplexusa.*

Bizonyítás. Ha p teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot D^k-ra, akkor a $(D^k, \partial D^k)$ párra is, mivel $(D^k \times I, D^k \times \{0\})$ homeomorf $(D^k \times I, D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I)$-vel.

X vázain tekintett dimenzió szerinti indukcióval beláthatjuk, hogy létezik $\tilde{g}$ kiterjesztés: Mindig egy újabb cellát véve egy cella $\Phi : D^k \to X$ ragasztóleképezésével láthatjuk, hogy g_t erre is kiterjed, mivel $(D^k, \partial D^k)$-ra is teljesül a felemelési tulajdonság. □

5.3.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $p : E \to B$ teljesíti a homotópiafelemelési tulajdonságot minden D^k lemezre $k \geq 0$ esetén. Legyenek $b_0 \in B$ és $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ bázispontok. Ekkor a $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ izomorfizmus minden $n \geq 1$-re. Továbbá ha B útösszefüggő, akkor kapjuk az alábbi hosszú egzakt sorozatot:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy p_* szürjektív. A $\pi_n(B, b_0)$ csoport elemét reprezentálja egy $f : (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ leképezés. A konstans x_0-ba képződő, $J^{n-1} \to E$ leképezésre alkalmazva a homotópiafelemelési tulajdonságot az $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ párra, kapunk egy $\tilde{f} : (I^n, \partial I^{n-1}, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$ felemelést. Ez reprezentál egy elemet $\pi_n(E, F, x_0)$-ban, ennek p_* szerinti képe éppen $[f]$ lesz.

Most pedig p_* injektivitását bizonyítjuk. Legyenek $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$ folytonos leképezések, amelyekre $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$. Legyen $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (B, b_0)$ egy homotópia $p\tilde{f}_0$ és $p\tilde{f}_1$ között. Ennek egy részleges felemelését adja $\tilde{f}_0$ az $I^n \times \{0\}$-n, $\tilde{f}_1$ az $I^n \times \{1\}$-en, $J^{n-1} \times I$-n pedig a konstans x_0 leképezés. Az utolsó két koordinátát felcserélve látjuk, hogy az $(I^n, \partial I^n)$ párra nézve ez a homotópia felemelhető, így kapunk egy $\tilde{G} : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (E, F, x_0)$ homotópiát $\tilde{f}_0$ és $\tilde{f}_1$ között, azaz $[\tilde{f}_0] = [\tilde{f}_1]$, így p_* injektív.

A hosszú egzakt sorozatot abból kapjuk, hogy az (E, F, x_0) térpár homotopikus hosszú egzakt sorozatába (5.2.3. Tétel) $\pi_n(E, F, x_0)$ helyére beírjuk $\pi_n(B, b_0)$-t. Így az egzakt sorozatban a p_* homomorfizmus valójában a $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ kompozíciót jelöli. A sorozat végén $\pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E, x_0)$ szürjektivitását abból kapjuk, hogy B útösszefüggősége miatt egy tetszőleges $x \in E$ pontból induló, F-be érkező folytonos görbe előáll, mint egy $p(x)$ és b_0 közötti görbe felemeltje. □

5.3.13. Következmény. *A $p : * \to K(\mathbb{Z}, n)$ fibrálás fibruma egy $K(\mathbb{Z}, n-1)$ tér.*

Bizonyítás. A $*$ tér pontrahúzható (hiszen minden $K(\mathbb{Z}, n)$-beli utat behúzhatunk egy pontba saját maga mentén), így az összes homotopikus csoportja triviális. Így a hosszú egzakt sorozatot tekintve azt kapjuk, hogy a fibrum minden homotopikus csoportja izomorf a bázis eggyel nagyobb indexű homotopikus csoportjával. Így F egy $K(\mathbb{Z}, n-1)$ típusú tér. □

5.3.14. Lemma. *Az S^∞ tér pontrahúzható.*

Bizonyítás. Megadunk két lépésben egy olyan homotópiát, ami az S^∞ identitását behúzza a konstans $(1, 0, 0, \ldots)$ leképezésbe. Először legyen $f : \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$ olyan, amelyre $f_t(x_1, x_2, \ldots) = (1-t)(x_1, x_2, \ldots) + t(0, x_1, x_2, \ldots)$. Ez minden nemnulla vektorra nemnulla értékű, így $f/|f|$ megad egy homotópiát, amely minden $(x_1, x_2, \ldots)$ pontot elvisz a $(0, x_1, x_2, \ldots)$ pontba. Ezután a $g_t(x_1, x_2, \ldots) = (1-t)(x_1, x_2, \ldots) + t(1, 0, 0, \ldots)$ leképezést tekintve $g/|g|$ az előbb kapott leképezést behúzza a konstans $(1, 0, 0, \ldots)$ leképezésbe. □

5.3.15. Következmény. *$\mathbb{CP}^\infty$ egy $K(\mathbb{Z},2)$ típusú tér.*

Bizonyítás. Az $S^1 \to S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ fibrált nyaláb struktúrára alkalmazva a 5.3.13. Következmény gondolatmenetét kapjuk, hogy $\pi_n(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \pi_{n-1}(S^1)$ minden n-re, amiből következik az állítás. □

5.4. A Hurewicz-tétel

A következő tétel ahhoz nyújt segítséget, hogy kapcsolatot teremtsünk a terek homotopikus és homologikus csoportjai között.

5.4.1. Definíció. *Legyen u_n a $H_n(S^n)$ csoport kanonikus generátoreleme (ezt a 2.5.2. Állításban definiáltuk). Ekkor Hurewicz-leképezésnek nevezzük a $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ csoporthomomorfizmust, ahol az $[f] \in \pi_n(X)$ homotópiaosztály képe $h_n([f]) = f_*(u_n) \in H_n(X)$.*

5.4.2. Tétel. *(Hurewicz-tétel) Ha $n \geq 2$ és $\pi_k(X) = 0$ minden $k < n$ esetén, akkor a h_n Hurewicz-leképezés izomorfizmus. [3, Theorem 4.32.]*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a Hurewicz-leképezés jóldefiniált. Vegyünk két $f_1, f_2 : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ leképezést, amelyek ugyanazt az elemet reprezentálják $\pi_n(X)$-ben, azaz homotópok. Ekkor a kettő közötti $H : S^n \times [0,1] \to X$ kötött homotópia meghatároz egy $(n+1)$-láncot, melynek határa éppen $f_{2*}(u_n) - f_{1*}(u_n)$, azaz a két leképezés képe homológ, így a jóldefiniáltságot beláttuk.

Most belátjuk a leképezés szürjektivitását. Vegyünk egy tetszőleges X-beli n-ciklust. Megmutatjuk, hogy van olyan homotópiaosztály, amelyet h_n az ő homológiaosztályába képez. Az n-ciklus szinguláris n-szimplexeinek határát adó $(n-1)$-szimplexek párba állíthatóak aszerint, hogy melyek ejtik ki egymást, amikor az n-ciklus határát számoljuk.

Mivel X első $n-1$ homotópiacsoportja triviális, így az n-ciklus szimplexeinek $n-1$-váza homotópiával behúzható az x_0 bázispontba, ráadásul ezt úgy is megtehetjük, hogy az összepárosított $n-1$-szimplexek képe a homotópiában végig megegyezzen. Ez a homotópia kiterjed az n-szimplexekre is az $n-1$ vázak képén. Így kiterjesztés $t = 1$ időpillanatában egy olyan leképezést ad meg, amelynek h_n szerinti képe egy, az eredeti n-ciklussal homológ ciklus. Ezzel beláttuk, hogy h_n szürjektív.

Végül belátjuk, hogy h_n injektív. Tegyük fel, hogy egy $[f]$ homotópiaosztályt h_n a $H_n(X)$ nullelemébe küld. Ez azt jelenti, hogy $f_*(u_n)$ a határa egy X-beli $(n+1)$-ciklusnak. Ennek az $(n-1)$-vázait az előbb leírt módon ismét behúzhatjuk a bázispontba. A homotópia után kapott leképezés néhány $g_i : \Delta_i^{n+1} \to X$ szinguláris $(n+1)$-szimplex képét adja meg. Ezek határainak összege egy, az eredeti f leképezéssel homotóp n-szimplex, így f-et, ezen szimplexeken keresztül behúzhatjuk a konstans x_0 leképezésbe. Így beláttuk, hogy ekkor f nullhomotóp, azaz h_n injektív. □

5.5. Gömbök homotopikus csoportjai

A végső eredményünk bizonyításához még fel fogjuk használni az alábbi két állítást. Ezek bizonyítása megtalálható Hatcher Algebraic Topology című könyvének Spectral Sequences kiegészítésében. [4, p. 542-546.]

5.5.1. Tétel. *Legyen B egy útösszefüggő CW-komplexus $F \to X \to B$ fibrálás. Vegyük X-nek egy olyan filtrálását, amit B p-vázaiból kapunk: X^p legyen B^p őse. Ekkor ha $\pi_1(B)$ triviálisan hat a $H^*(F;G)$ kohomológiagyűrűn, akkor az X tér spektrális sorozatának 2-lapján az alábbi csoportok állnak:*

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B; H^q(F;G))$$

5.5.2. Állítás. *A $H^*(B; H^*(F,G))$ kohomológiagyűrűn értelmezett szorzás szorzást indukál az X spektrális sorozatának E^2 lapján. Ezzel a szorzással a d kohatárleképezésre teljesül, hogy ha $x \in E_r^{p,q}$, akkor $d(xy) = (dx)y + (-1)^{p+q}x(dy)$, a szorzási és kohatárleképezési tulajdonság pedig öröklődik a többi lapra is.*

5.5.3. Tétel. *A $\pi_{n+1}(S^n)$ csoport $n=1$-re triviális, $n=2$-re $\mathbb{Z}$-vel izomorf $n>2$ esetén pedig $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.*

Bizonyítás. $n=1$-re $\pi_2(S^1)$-ről már láttuk, hogy triviális.

$n=2$ esetén tekintsük a 5.3.8. Példában definiált $S^1 \to S^3 \to \mathbb{CP}^1$ fibrált nyaláb struktúrát. Mivel $\mathbb{CP}^1$ homeomorf S^2-vel, így ezt tekinthetjük $S^1 \to S^3 \to S^2$-ként is (sőt, ez valójában a bevezetésben megadott Hopf-fibrálás). Erre alkalmazva a 5.3.12. Tételt, kapjuk, hogy az alábbi sorozat egzakt:

$$\pi_3(S^1) \longrightarrow \pi_3(S^3) \longrightarrow \pi_3(S^2) \longrightarrow \pi_2(S^1)$$

Mivel $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = 0$, így a középső leképezés izomorfizmus. Mivel $\pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$, így $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ is teljesül.

Az $n > 2$ eset bizonyításához először tekintsük a $K(\mathbb{Z}, 2) \to * \to K(\mathbb{Z}, 3)$ fibrálás kohomologikus spektrális sorozatát $\mathbb{Z}$ együtthatókkal. Mivel $\pi_1(K(\mathbb{Z}, 3))$ triviális, ezért alkalmazhatjuk az 5.5.1 Tételt. $\mathbb{CP}^\infty$ $K(\mathbb{Z}, 2)$ típusú tér, így az univerzális együttható tételből megkapjuk, hogy $K(\mathbb{Z}, 2)$ kohomológiái a páros indexen $\mathbb{Z}$-t adnak, a páratlanokon pedig triviálisak. A Hurewicz-tételből következik, hogy $K(\mathbb{Z}, 3)$ 0. és 3. kohomológiacsoportja $\mathbb{Z}$, a közöttük lévőek viszont triviálisak. Ezekből már láthatjuk, hogy a spektrális sorozat E_2 lapjának részlete így néz ki:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{CP}^\infty & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
4 & \mathbb{Z}(x^2) \arrow[ddrrr] & 0 & 0 & \iddots & & & & \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots & & & \\
2 & \mathbb{Z}(x) \arrow[ddrrr] & 0 & 0 & \mathbb{Z}(xy) \arrow[ddrrr] & 0 & \iddots & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots & \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z}(y) & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \cdots \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & K(\mathbb{Z}, 3)
\end{tikzcd}
$$

Azt láthatjuk, hogy az $E_2^{0,0}, E_2^{0,2}, E_2^{0,4}, E_2^{3,0}, E_2^{3,2}, E_2^{3,4}$ pozíciókban $\mathbb{Z}$ van a fentiek miatt, a többi csoport $E_2^{3,4}$-ig pedig 0. Mivel $K(\mathbb{Z}, 3)$ úttere pontrahúzható, így az E_∞ lapon csak az $E_\infty^{0,0}$ pozícióban van egy $\mathbb{Z}$, a többi csoport 0. Így az E_2-n lévő csoportokat valamelyik d_r kohatárleképezésnek el kell tüntetnie. Mivel a többi síknegyedben csak 0-k vannak, így ezeket csak a d_3 leképezés tudja megölni (ezt jelzik az ábrán a nyilak).

Legyen $E_2^{0,2}$ generátoreleme x, $E_2^{3,0}$-é pedig y. Ekkor a multiplikatív struktúrából adódnak az ábrán jelölt generátorelemek. Az $E_2^{0,2}$ és $E_2^{3,0}$ csoportok csak egymást ölhetik ki, így köztük a $d_3^{2,0}$ leképezés izomorfizmus, azaz $dx = y$. Így az 5.5.2.

Állításból következően $d(x^2) = (dx)x + x(dx) = 2xy$. Ekkor viszont az $E_2^{6,0}$ pozícióban $\mathbb{Z}_2$-nek kell lennie, hogy $E_2^{3,2}$-t ki tudjuk ölni. Ezzel megkaptuk, hogy $H^6(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Mivel a többi nem ismert csoportot semmilyen ismert csoporttal nem tudjuk kiölni, így a többi 0-val jelölt csoportról is megállapíthatjuk, hogy triviálisak. Mivel ez először $E_2^{4,0}$-ról és $E_2^{5,0}$-ról állapítható meg, ezért ezekből az is látszik, hogy $H^4(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) \simeq H^5(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) = 0$.

Most írjuk fel hasonlóan a $K(\mathbb{Z},3) \to * \to K(\mathbb{Z},4)$ fibrálásra vonatkozó kohomologikus spektrális sorozatot. A tételt itt is alkalmazhatjuk $\pi_1(K(\mathbb{Z},4)) = 0$ miatt. Ekkor az E_2 lapon (a $d_4^{0,3}$ és $d_7^{0,6}$ kohatárleképezéssel) a következőt látjuk:

$$
\begin{tikzcd}
K(\mathbb{Z},3) & \vdots & \vdots \\
6 & \mathbb{Z}_2 \arrow[ddddddrrrrrrr] & 0 & \iddots \\
5 & 0 & 0 & 0 & \iddots \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots \\
3 & \mathbb{Z} \arrow[dddrrrr] & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} & \iddots \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \iddots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \cdots \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & K(\mathbb{Z},4)
\end{tikzcd}
$$

A totális tér most is pontrahúzható, így az E_∞ lapra az $E_\infty^{0,0}$ pozíción kívül mindenhol meg kell halnia az adott csoportnak. $E_2^{0,3}$-at és $E_2^{4,0}$-t megöli a $d_3^{0,3}$ izomorfizmus. Az $E_2^{0,6}$ pozícióban lévő $\mathbb{Z}_2$-t csak abban az átlóban lévő elemek tudják triviálissá tenni, hol a p és q koordinitáták összege 7. Mivel az $E_2^{4,3}$-ban lévő $\mathbb{Z}$-be $\mathbb{Z}_2$-t nem lehet nemtriviálisan beleképezni, így ez nem tudja megölni. Az átló többi eleme mind 0, mivel a fibrum megfelelő kohomológiacsoportjai triviálisak, az $E_2^{7,0}$ pozíción kívül, ahol egyelőre nem tudjuk mi van. Mivel ezt sem ölheti meg más elem, ezért a $d_7^{0,6}$ leképezés is izomorfizmus lesz és $E_2^{7,0} \simeq \mathbb{Z}_2$. Az előzőhöz hasonlóan ekkor $E_2^{5,0} \simeq E_2^{6,0} = 0$ és így $H^5(K(\mathbb{Z},4);\mathbb{Z}) \simeq H^6(K(\mathbb{Z},4);\mathbb{Z}) = 0$.

Innentől ezt a lépést iterálva indukcióval láthatjuk, $n > 2$ esetén a $K(\mathbb{Z},n)$ tér $\mathbb{Z}$ együtthatós kohomológiacsoportjai 0-tól $n+3$ indexig így néznek ki: $H^0(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) \simeq H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H^{n+3}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$, a többi pedig triviális.

Végül ahhoz, hogy kiszámítsuk $\pi_{n+1}(S^n)$-t, vegyük a $K(\mathbb{Z},n-1) \to * \to K(\mathbb{Z},n)$ fibrálást. Tekintsünk egy olyan folytonos leképezést, amely S^n-t beleképzi a $\pi_n(K(\mathbb{Z},n))$ generátorelemének egy reprezentánsába. Ezen leképezés képét a fibrálás szerint visszahúzva a totális térbe, kapunk egy $K(\mathbb{Z},n-1) \to S^n|_n \to S^n$ fibrálást. Alkalmazzuk erre a fibrálásra a 5.3.12. Tételt. Mivel $\pi_k(K(\mathbb{Z},n-1))$ $k \neq n-1$ esetén triviális, így a kapott hosszú egzakt sorozatból rögtön látszik, hogy $\pi_k(S^n) \simeq \pi_k(S^n|_n)$ teljesül, ha $k \neq n, n-1$.

E két homotópiacsoport kiszámításához tekintsük az ide vonatkozó részletét a hosszú egzakt sorozatnak:

$$0 \longrightarrow \pi_n(S^n|_n) \longrightarrow \pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_{n-1}(K(\mathbb{Z},n-1)) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^n|_n) \longrightarrow 0$$

Ha ez alá odaírjuk a $K(\mathbb{Z},n-1) \to * \to K(\mathbb{Z},n)$ fibrálás homotopikus hosszú egzakt sorozatának megfelelő részét, akkor a beágyazások által indukált leképezésekkel az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_n(S^n|_n) & \longrightarrow & \pi_n(S^n) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(K(\mathbb{Z},n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(S^n|_n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \pi_n(*) & \longrightarrow & \pi_n(K(\mathbb{Z},n)) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(K(\mathbb{Z},n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(*) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$*$ pontrahúzható, így $\pi_n(*) = \pi_{n-1}(*) = 0$, amiből következik, hogy a $\pi_n(K(\mathbb{Z},n)) \to \pi_{n-1}(K(\mathbb{Z},n-1))$ leképezés izomorfizmus. Mivel az ezekbe menő beágyazás által indukált leképezések is izomorfizmusok, így azt kaptuk, hogy $\pi_n(S^n) \to \pi_{n-1}(K(\mathbb{Z},n-1))$ is izomorfizmus. Így csak a felső sort leírva a már ismert csoportokkal, kapjuk az alábbi egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow \pi_n(S^n|_n) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_{n-1}(S^n|_n) \longrightarrow 0$$

Ebből pedig már láthatjuk, hogy $\pi_n(S^n|_n) \simeq \pi_{n-1}(S^n|_n) = 0$. Tehát azt kaptuk, hogy $S^n|_n$ homotópiacsoportjai megegyeznek S^n homotópiacsoportjaival azzal a kivétellel, hogy az n-edik csoport triviális.

Írjuk fel a $K(\mathbb{Z}, n-1) \to S^n|_n \to S^n$ fibrálás kohomologikus spektrális sorozatát $\mathbb{Z}$ együtthatókkal. Mivel $n > 2$, ezért $\pi_1(S^n) = 0$ most is igaz, így alkalmazhatjuk az E_2 lap csoportjaira vonatkozó tételt. Ekkor az E_2 lapon ezt látjuk:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
K(\mathbb{Z}, n-1) & \vdots & \vdots & & & & & & & \\
n+2 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & & & & & & \\
n+1 & 0 & 0 & \cdots & \iddots & & & & & \\
n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \iddots & & & & \\
n-1 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z} & \iddots & & & \\
n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
 & 0 & 1 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & S^n
\end{array}
$$

A nulladik sorban csak $E_2^{0,0}$ és $E_2^{n,0}$ izomorf $\mathbb{Z}$-vel a többi csoport triviális. Az el-ső oszlopban a fibrum kohomológiáit látjuk. Az $E_2^{0,n-1}$ és $E_2^{n,0}$ csoportokat kiöli a $d_n^{0,n-1}$ izomorfizmus. Az $E_2^{0,n+2}$ pozícióban lévő $\mathbb{Z}_2$ csoportot abban az átlóban lévő elemek tudják kiölni, ahol a koordináták összege $n+3$. Ezek viszont mind nullák, így $E_\infty^{0,n+2} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Mivel $E_\infty^{p,n+2-p} \simeq F^{p,n+2-p}/F^{p+1,n+1-p}$, ahol $F^{p,q} = \mathrm{Ker}[H^{p+q}(X) \to H^{p+q}(X^{p-1})]$ és ezek közül a csoportok közül egyedül $E_\infty^{0,n+2} \simeq \mathbb{Z}_2$, a többi triviális, így láthatjuk, hogy $H^{n+2}(S^n|_n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$. Mivel ez alatt az átló alatt minden csoport 0 az E_∞ lapon az $E_\infty^{0,0}$ pozíciót kivéve, így láthatjuk, hogy $H^0(S^n|_n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n+1$ esetén pedig $H^k(S^n|_n; \mathbb{Z}) = 0$. Ezekből az univerzális együttható tétel alapján megállapíthatjuk, hogy $H_{n+1}(S^n|_n) \simeq \mathbb{Z}_2$. Ekkor pedig a Hurewicz-tételből következik, hogy $\pi_{n+1}(S^n|_n) \simeq \mathbb{Z}_2$, mivel a $S^n|_n$ kisebb homotopikus csoportjai mind triviálisak. Végül láthatjuk, hogy $n > 2$ esetén $\pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$. □

Így azt kaptuk, hogy a $\pi_{n+1}(S^n)$ csoportok $n \to \infty$ mellett stabilizálódnak. Freudenthal tételéből következik [3, Corollary 4.24.], hogy ez bármely $\pi_{n+i}(S^n)$-re teljesül $n \to \infty$ mellett. Sőt, még az is igaz, hogy $\pi_{n+i}(S^n)$ már $n > i+1$ esetén stabil, tehát ezek a csoportok már mind izomorfak egymással (rögzített i esetén). Ezeket a stabil csoportokat a gömbök stabil homotopikus csoportjainak nevezzük és π_i^s-sel jelöljük. A dolgozatban így azt kaptuk meg, hogy $\pi_1^s \simeq \mathbb{Z}_2$.

Irodalomjegyzék

[1] Szűcs András. *Topológia.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2018.

[2] V. L. Gutenmacher A.T. Fomenko, D. B. Fuchs. *Homotopic Topology.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[4] Allen Hatcher. Spectral sequences, 2004.

[5] David W. Lyons. An elementary introduction to the hopf fibration. *Mathematics Magazine*, 76(2):87–98, 2003.

[6] Robert M. Switzer. *Algebraic Topology - Homotopy and Homology.* Springer, 1975.

[7] Juhász Ábel. *Construction of Eilenberg-Maclane Spaces.* Vrije Universiteit Amsterdam, 2023.

NYILATKOZAT

Név: Győrffi Ádám György

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: ET5L7A

Szakdolgozat címe:
Spektrális sorozatok és alkalmazásaik

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.06.04.

Győrffi Ádám György

a hallgató aláírása