Eötvös Lóránd
Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Matematikai
Intézet

A de Rahm kohomológia

Horváth Balázs

BSc szakdolgozat

Témavezető: Kubasch Alexander

Budapest, 2024.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A topológiában az alacsony dimenziós terek megkülönböztetésének egyik legmegbízhatóbb eszköze a fundamentális csoport, $\pi_1(X, x_0)$. Ez a topológiai invariáns CW-komplexusokra könnyen számolható, és valamilyen értelemben az egyik legintuitívabb is, azt ragadja meg, hogy egy térben milyen "mozogni", milyen lényegileg különböző utakat lehet bejárni. A fundamentális csoportnak van azonban egy komoly hiányossága: magasabb dimenziós terek megkülönböztetéséhez sokkal kevésbé használható. Ezt jól illusztrálja, hogy egy CW-struktúra esetében a fundamentális csoport csak a struktúra 2-vázától függ. Hasznos lenne tehát a fundamentális csoportnak valamilyen magasabb dimenziós analógiáját kidolgozni.

Egy természetes ilyen általánosítást adnak a magasabb dimenziós homotopikus csoportok. A fundamentális csportra gondolhatunk úgy, hogy $(S^1, p) \to (X, x_0)$ leképezések homotópiaosztályaiból áll. Hasonlóan, a k-adik homotopikus csoport, $\pi_k(X, x_0)$ elemei $(S^k, p) \to (X, x_0)$ leképezések ekvivalenciaosztályai. Ezeken a fundamentális csoporthoz hasonlóan definiálható a csoportművelet, és így az $n > 1$ esetben mindig Abel-csoportot kapunk. Ez a konstrukció rendelkezik sok tulajdonsággal, amivel a fundamentális csoport, és valóban hasznos magasabb dimenziós terek megkülönböztetésében, például $k < n$ esetén $\pi_k(S^n, p) = 0$, míg $\pi_n(S^n, p) = \mathbb{Z}$. Azonban nehezen számolható, nincs ugyanis analógiája a Van-Kampen-tételnek, ami a fundamentális csoport számolásának fő eszköze. Emellett ez a konstrukció néhány váratlan "anomáliát" is okoz, például az nem igaz minden esetben, hogy $k > n$ esetén $\pi_k(S^n, p) = 0$, például $k \geq 2$ esetén $\pi_k(S^2)$ sosem lesz triviális.

Egy másik, kevésbé természetes, de sok szempontból praktikusabb általánosítás azon az észrevételen alapszik, hogy S^1 az egyetlen kompakt 1-dimenziós sokaság, tehát a k-adik csoporthoz $S^1 \to X$ leképezések helyett érdemes lehet $M \to X$ leképezéseket vizsgálni, ahol M egy kompakt k-dimenziós irányítható sokaság. Ekkor azonban, mivel a vizsgált leképezéseink több különböző térből képeznek, nem használhatjuk a homotópiát mint ilyen leképezések ekvivalenciáját. Ezt a problémát egy második észrevétel oldja meg: egy $\gamma : (S^1, p) \to (X, x_0)$ leképezés pontosan akkor nullhomotóp, ha létezik $f : D^2 \to X$ leképezés, amire $f|_{\partial D^2} = \gamma$. Ebből kiindulva a következő ekvivalencia-relációt alkothatjuk meg: legyen $\sigma_1 : M \to X$ és $\sigma_2 : N \to X$ (ahol M, N egy-egy kompakt k-dimenziós irányítható sokaság) ekvivalens pontosan akkor, ha létezik K kompakt peremes $k+1$-dimenziós irányítható sokaság, amire $\partial K = M \sqcup N$, és létezik $\tau: K \to X$ leképezés, amire $\tau|_{\partial K} = \sigma_1 \oplus \sigma_2$. Ebben a konstrukcióban a bázispont fogalmát sem tudjuk használni a csoportművelet definiálására, de ezt könnyen megoldhatjuk, ha az összes M kompakt k-dimenziós irányítható sokaság és $M \to X$ leképezés által generált szabad Ábel-csoportot tekintjük, majd ezt faktorizáljuk le a fenti ekvivalencia-relációval. Így kapjuk az úgynevezett k-adik homologikus csoportot, $H_k(X)$-et. Fontos megjegyezni, hogy bár a fundamentális csoportból indultunk ki, ez az ekvivalencia-reláció erősebb, mint a homotópia (és a konstrukció részletei is mások) így $H_1(X)$ végül a fundamentális csoport Ábelizáltja lesz, és általában is minden homologikus csoport Ábel-csoport lesz. A homologikus csoportok sok szempontból elérik azt, amit a fundamentális csoport általánosításától várnánk: könnyen számolhatók, és hasznosak a magasabb dimenziós terek megkülönböztetésében. Az előző "anomáliát" is elkerültük, ugyanis $k \geq 1$ esetén

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & k \neq n \end{cases}.$$

Egy harmadik általánosítás, amivel ebben a dolgozatban foglalkozunk ismét egy homotópiával kapcsolatos megfigyelésből indul ki, nevezetesen abból, hogy $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazán egy sima vektormező homotóp görbéken vett integráljai megegyeznek. Ez azt sugallja, hogy a görbék helyett lehetne a vektormezőket, és ezeknek valamilyen magasabb dimenziós általánosításait vizsgálni. Ha ezt általános M (sima) n-dimenziós sokaságon próbáljuk definiálni, valamilyen olyan integrálfogalomra lesz szükségünk, amivel tudunk k-dimenziós (peremes sima) irányítható részsokaságokon integrálni. Természetesen ezt az integrálfogalmat úgy akarnánk megalkotni, hogy lokálisan egybeessen az $\mathbb{R}^n$-en történő integrálással. Az integráltranszformációs-formula miatt ahhoz, hogy ez független legyen a térképek megválasztásától, a struktúra amit integrálunk, úgy kell hogy megváltozzon koordinátaváltás esetén, hogy abba a változásba bele van építve a koordinátaváltás Jacobi-mátrixa. Erre a második fejezetben definiált differenciálformák lesznek alkalmasak, ezeket vizsgálva pedig megalkothatunk egy új topológiai invariánst, az úgynevezett de Rahm Kohomológiát, $H^k_{dR}(M)$-et. A fejezet végén belátjuk Stokes tételét, ami összekapcsolja differenciálformák egy peremes részsokaságon, és a peremén vett integráljait. Ez egy kapcsolatot sugall a homologikus csoportok és a de Rahm kohomológiák között, és valóban, a k-adik de Rahm kohomológia tisztán algebrai úton számolható $H_k(M)$-ből. A Stokes-tétel emellett minden analízisből ismert integrálformula általánosításaként is szolgál, mint ahogy ezt a harmadik fejezet végén látni fogjuk.

A harmadik fejezetben a de Rahm kohomológiák kiszámításának módjait vizsgáljuk, és ki fog derülni, hogy a fundamentális csoporthoz hasonlóan ezek is könnyen számolhatóak, főleg az úgynevezett Mayer-Vietoris soroknak köszönhetően, amik a Van-Kampen-tétellel analóg módon viselkednek. Végül a negyedik fejezetben a de Rahm kohomológiák segítségével definiáljuk leképezések fokát, egy a topológia számtalan területén hasznos fogalmat, amit sok más módon is lehet vizsgálni. Ennek segítségével definiáljuk kompakt sokaságokon értelmezett vektormezők indexét, és belátjuk a Poincaré-Hopf-tételt. Ez a gyönyörű, és meglepő eredmény azt mondja, hogy egy kompakt sokaságon minden vektormező indexe megegyezik, sőt ez az index mindig a sokaság Euler-karakterisztikája, és fontos következményei vannak mind a topológiában, mind a matematika egyéb területein.

2. Differenciálformák sima sokaságokon

2.1. Alternáló multilineáris formák

Legyen V egy n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött, és legyen $(e_1, \dots, e_n)$ egy bázisa. Minden $I \subset \{1, \dots, n\}$-re, ahol $|I| = k$, legyen

$$\omega_I: \; V^k \to \mathbb{R} \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \det((v_i^{(I_j)}))$$

multilineáris k-forma, ahol $v_i^{(j)}$ a v_i vektor j-edik koordinátáját jelöli az $(e_1, \dots, e_n)$ bázisban, és I_j az I részhalmaz j-edik eleme, növekvő sorrendben. Tehát ω_I $(v_1, \dots, v_k)$-hoz az I-nek megfelelő koordinátákból alkotott négyzetes mátrix determinánsát rendeli. A $k = 0$ esetben legyen megegyezés szerint $\omega_\emptyset = 1 \in \mathbb{R}$. A $k = 1$ esetben $(\omega_{\{1\}}, \dots, \omega_{\{n\}})$ éppen$(e_1, \dots, e_n)$ duális bázisa V^*-ban. A determináns tulajdonságaiból azonnal kapjuk a következőt.

2.1.1. Következmény. *Ha $i, j \leq k$, $i \neq j$ és $v_i = v_j$, akkor $\omega_I(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

2.1.1. Definíció. *Az előző következményt kielégítő $\omega: V^k \to \mathbb{R}$ multilineáris k-formákat alternálónak nevezzük.*

Legyen most k fix, és legyen

$$\Lambda^k(V) = \mathrm{span}\{\omega_I | I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k\}.$$

Ekkor $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$-t $\omega_\emptyset = 1$ generálja. Ha $k > n$ vagy $k < 0$, legyen $\Lambda^k(V)$ megegyezés szerint $\{0\}$. Ekkor $\Lambda^k(V)$ elemei is alternáló multilineáris k-formák.

2.1.1. Lemma. *A fent megadott generátor-rendszer bázisa $\Lambda^k(V)$-nek, azaz $\{\omega_I | I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k\}$ elemei lineárian függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\omega = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=k} \lambda_I \omega_I = 0,$$

ahol $\forall$ I-re $\lambda_I \in \mathbb{R}$. Legyen $J \subset \{1, \dots, n\}, |J| = k$ fix. Ekkor

$$\omega_I(e_{J_1}, \dots, e_{J_k}) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

tehát $\omega(e_{J_1}, \dots, e_{J_k}) = \lambda_J = 0.$ □

2.1.2. Következmény. *Ekkor* $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

2.1.2. Lemma. *Minden $\omega: V^k \to \mathbb{R}$ alternáló multilineáris k-formára $\omega \in \Lambda^k(V)$.*

Bizonyítás. Legyen $\forall$ $I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k$-ra $\lambda_I = \omega(e_{I_1}, \dots, e_{I_k})$, ekkor $\forall$ $J \subset \{1, \dots, n\}, |J| = k$-ra

$$\omega(e_{J_1}, \dots, e_{J_k}) = \lambda_J = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=k} \lambda_I \omega_I(e_{J_1}, \dots, e_{J_K}),$$

tehát

$$\omega = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=k} \lambda_I \omega_I.$$

□

Az alternáló multilineáris formákon definiálható egy kétváltozós bilineáris operáció, az úgynevezett külső szorzat, a következő állítás segítségével.

2.1.1. Állítás. *Létezik és egyértelmű kétváltozós bilineáris operációk egy $\{\wedge_{k,l}\}$ rendszere, ahol minden k, l-re $\wedge_{k,l}: \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \to \Lambda^{k+l}(V)$, amely teljesíti a következőket:*

1. $\forall\ k, l, m\ \forall\ \omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V), \nu \in \Lambda^m(V) \quad (\omega \wedge_{k,l} \eta) \wedge_{k+l,m} \nu = \omega \wedge_{k,l+m} (\eta \wedge_{l,m} \nu),$
2. $\forall\ I, J \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k, |J| = l \quad \forall\ i \in I, j \in J \quad i < j \implies \omega_I \wedge_{k,l} \omega_J = \omega_{I \cup J},$
3. $\forall\ i, j \leq n \quad \omega_{\{i\}} \wedge_{1,1} \omega_{\{j\}} = -\omega_{\{j\}} \wedge_{1,1} \omega_{\{i\}}.$

A továbbiakban az alsó indexeket elhagyva, $\{\wedge_{k,l}\}$ minden elemét egyszerűen $\wedge$-el jelöljük.

Bizonyítás. Ha $\wedge$ a fentieket teljesíti, 1 szerint a műveleti sorrendet jelző zárójeleket elhagyhatjuk. 2-ből világos, hogy $\forall$ $I \subset \{1, \dots, n\}, |I| = k$-ra $\omega_I = \omega_{\{I_1\}} \wedge \dots \wedge \omega_{\{I_k\}}$. 3-ból következik, hogy $\forall$ $i \leq n$-re $\omega_{\{i\}} \wedge \omega_{\{i\}} = 0$. Ezekből világos, hogy $\forall$ $I, J \subset \{1, \dots, n\}$-re

$$\omega_I \wedge \omega_J = \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \emptyset \\ (-1)^{m(I,J)} \omega_{I \cup J} & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $m(I, J)$ I és J átmetszési száma, azaz $m(I, J) = |\{(i, j) | I_i > J_j\}|$.
Ekkor a 2.1.1 Lemma szerint $\wedge$ ennek az egyértelmű bilineáris kiterjesztése, könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesíti az 1-3 tulajdonságokat. □

2.1.3. Következmény. *Minden $\omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$-re $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$.*

2.1.4. Következmény. *Minden $\omega \in \Lambda^k(V)$-re ha k páratlan, akkor $\omega \wedge \omega = 0$*

2.1.1. Megjegyzés. *A korábbi definíciókból könnyen levezethető az alábbi képlet a külső szorzatra: Minden $\omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$-re*

$$\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Legyen most W m dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött, legyen $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, és legyen k fix. Ekkor definiálható egy $A^* \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k(W), \Lambda^k(V))$ leképezés, amelyre minden $\omega \in \Lambda^k(W)$-re

$$A^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(Av_1, \ldots, Av_k).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $A^*\omega$ valóban alternáló multilineáris k-forma, és A^* valóban lineáris. A $k = 0$ esetben legyen $A^* = id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.2. Differenciálformák sima sokaságon

Legyen M egy n-dimenziós sima sokaság, jelölje TM az érintőnyalábját, és legyen k fix. Legyen $\Lambda^k(TM) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$. Ezt el fogjuk látni egy sima sokaság-struktúrával.
Legyen $\pi: \Lambda^k(TM) \to M \quad (p, \omega_p) \mapsto p$ vetítés, ekkor minden $p \in M$-re $\pi^{-1}(\{p\}) = \Lambda^k(T_pM)$. Legyen (ϕ, U) az M térképe, ekkor ϕ minden $p \in U$-ra meghatároz egy $\mathbb{R}^n \cong_{A_p} T_pM$ izomorfizmust, ahol $A_p = (\phi^{-1})_{*p}$, és így egy $\Lambda^k(T_pM) \cong_{A_p^*} \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ izomorfizmust. Legyen

$$f: \Lambda^k(TU) \to U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \quad (p, \omega_p) \mapsto (p, A_p^*\omega_p),$$

ekkor f bijekció. Legyen

$$\overline{\phi} = (\phi \times id) \circ f: \Lambda^k(TU) \to \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}},$$

ez is bijekció.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k(TU) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\overline{\phi}"] \arrow[dr, "\pi"] & U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \arrow[r, "\phi \times id"] \arrow[d] & \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}} \arrow[d] \\
& U \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Lássuk el $\Lambda^k(TM)$-et M minden (ϕ, U) térképéhez a $\overline{\phi}$ térképpel, ez egy sokaság-struktúrát ad meg $\Lambda^k(TM)$-en. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott sokaság-struktúra sima lesz.

2.2.1. Definíció. *Egy (sima) differenciál k-forma M-en egy $\omega: M \to \Lambda^k(TM)$ sima leképezés, amire $\pi \circ \omega = id$.*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k(TM) \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
M \arrow[u, bend left, "\omega"]
\end{tikzcd}$$

Tehát egy ω differenciál k-forma M minden p pontjához $\Lambda^k(T_pM)$ egy elemét rendeli, ezt jelölje ω_p. Ekkor ω-ra úgy is gondolhatunk, mint egy alternáló k-lineáris leképezésre a sima vektormezők $\mathfrak{X}(M)$ vektorteréről a sima függvények $\mathfrak{F}(M)$ vektorterére, ahol $\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))$. Belátható, hogy minden ilyen leképezés előáll, mint differenciál k-forma.
A vektortér-műveleteket pontonként értve a differenciál k-formák is vektorteret alkotnak, ezt jelölje $\Omega^k(M)$. A $k = 0$ esetben $\Omega^0(M) = F(M)$. A korábbi megegyezések szerint ha $k > n$ vagy $k < 0$, $\Omega^k(M) = \{0\}$.
A 2.1.1 Állítással definiált külső szorzatot pontonként értelmezve definiálható bilineáris operátorok egy

$\{\wedge_{k,l}\}$ családja, ahol minden k,l-re $\wedge_{k,l}:\ \Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\to\Omega^{k+l}(M)$, ezeket a továbbiakban szintén az alsó indexet elhagyva $\wedge$-el jelöljük. A $k=0$ esetben $f\in\Omega^0(M),\omega\in\Omega^l(M)$-re $f\wedge\omega$ helyett röviden $f\omega$-t írunk.
Legyen most (ϕ,U) az M térképe, $(x_1,\dots,x_n)$ a ϕ koordinátafüggvényei, ekkor minden $p\in U$-ra $((\frac{\partial}{\partial x_1})_p,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_n})_p)$ T_pM bázisa. Legyen ennek a duális bázisa $\Lambda^1(T_pM)=T_pM^*$-ben $(dx_1,\dots,dx_n)$.
Legyen minden $I\subset\{1,\dots,n\},|I|=k$-ra $dx_I=dx_{I_1}\wedge\dots\wedge dx_{I_k}$, ekkor a 2.1.1 Lemma és 2.1.1 Állítás szerint minden k-ra $\{dx_I|I\subset\{1,\dots,n\},|I|=k\}$ $\Lambda^k(T_pM)$ bázisa.
Legyen $\omega\in\Lambda^k(M)$, ekkor lokális koordinátákban

$$\omega=\sum_{I\subset\{1,\dots,n\},|I|=k} f_I dx_I,$$

ahol $\forall$ I-re $f_I:\ U\to\mathbb{R}$ függvény. Könnyen belátható, hogy ω simasága ekvivalens az f_I-k simaságával minden lokális koordinátarendszerben.
A differenciálformákon definiálható egy lineáris operátor, az úgynevezett külső derivált, a következő állítás segítségével.

2.2.1. Állítás. *Legyen $U\subset\mathbb{R}^n$ nyílt. Létezik és egyértelmű lineáris operációk egy $\{\mathrm{d}_k\}$ rendszere, ahol minden k-ra $\mathrm{d}_k:\ \Omega^k(U)\to\Omega^{k+1}(U)$, amely teljesíti a következőket:*

1. $\forall\ k,l\ \forall\ \omega\in\Omega^k(U),\eta\in\Omega^l(U)\quad \mathrm{d}_{k+l}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}_k\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}_l\eta,$
2. $\forall\ f\in\Omega^0(U), X$ *sima vektormezőre* $\quad\mathrm{d}_0 f(X)=X(f),$
3. $\forall\ f\in\Omega^0(U)\quad \mathrm{d}_1\mathrm{d}_0 f=0.$

A továbbiakban az alsó indexeket elhagyva, $\{\mathrm{d}_k\}$ minden elemét egyszerűen d*-vel jelöljük.*

Bizonyítás. Legyenek $(X_1,\dots,X_n)$ minden pontban az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát megadó vektormezők. Ha d a fentieket teljesíti, 2-ből $\forall\ f\in\Omega^0(U), j\le n$-re

$$\mathrm{d}f(X_j)=X_j(f)=\frac{\partial}{\partial x_j}f=\frac{\partial}{\partial x_j}f dx_j(X_j)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f dx_i(X_j),$$

tehát

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f dx_i.$$

Speciálisan $\forall\ i\le n$-re $\mathrm{d}x_i=dx_i$. Ekkor 3-ból $\mathrm{d}dx_i=0$, és 1-ből $\forall\ I\subset\{1,\dots,n\}$-re $\mathrm{d}dx_I=0$.
Legyen most $I\subset\{1,\dots,n\}$, és legyen $\omega=f dx_I$, ahol $f\in\Omega^0(U)$. Ekkor 1-ből

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge dx_I+f(\mathrm{d}dx_I)=\mathrm{d}f\wedge dx_I.$$

Ekkor d ennek az egyértelmű lineáris kiterjesztése, könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesíti az 1-3 tulajdonságokat. □

2.2.1. Következmény. *Létezik és egyértelmű lineáris operációk egy $\{\mathrm{d}_k\}$ rendszere, ahol minden k-ra $\mathrm{d}_k:\ \Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$, amely teljesíti a következőket:*

1. $\forall\ k,l\ \forall\ \omega\in\Omega^k(M),\eta\in\Omega^l(M)\quad \mathrm{d}_{k+l}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}_k\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}_l\eta,$
2. $\forall\ f\in\Omega^0(M), X$ *sima vektormezőre* $\quad\mathrm{d}_0 f(X)=X(f),$
3. $\forall\ f\in\Omega^0(U)\quad \mathrm{d}_1\mathrm{d}_0 f=0.$

A továbbiakban az alsó indexeket elhagyva, $\{\mathrm{d}_k\}$ minden elemét egyszerűen d*-vel jelöljük.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ M atlasza, ekkor az előző állítás szerint $\forall\ (\phi,U)\in\mathbf{A}$-ra lokálisan egyértelműen létezik d_U, ami a fenti tulajdonságokat teljesíti. Az egyértelműség miatt $\forall\ (\phi,U),(\psi,V)\in\mathbf{A}$-ra d_U és d_V megegyezik $U\cap V$-n, tehát az

$$\omega\mapsto(p\mapsto(\mathrm{d}_U\omega)_p),\quad \text{ahol } (\phi,U)\in\mathbf{A}, p\in U)$$

leképezés jóldefiniált. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesíti az 1-3 tulajdonságokat. □

2.2.2. Állítás. *Az előző következményben definiált* d*-re* $\mathrm{d}^2 = 0$.

Bizonyítás. Elég az állítást lokálisan igazolni. Legyen $I \subset \{1, \dots, n\}$, és legyen $\omega = f dx_I$, ahol $f \in \Omega^0(U)$, d linearitása miatt elég az állítást ilyen alakú formákra igazolni. Ekkor

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge dx_I,$$

tehát

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}^2 f \wedge dx_I - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}dx_I = 0,$$

tehát $\mathrm{d}^2 = 0$. □

2.2.1. Megjegyzés. *Legyen most k fix. A kompakt tartójú differenciál k-formák M-en lineáris alterét alkotják $\Omega^k(M)$-nek, ezt az alteret jelölje $\Omega_c^k(M)$. Minden $\omega \in \Omega_c^k(M), \eta \in \Omega_c^l(M)$-re support$(\omega \wedge \eta) \subset$ support$(\omega) \cap$ support(η), tehát $\omega \wedge \eta \in \Omega_c^{k+l}(M)$, és support$(d\omega) \subset$ support(ω), tehát $d\omega \in \Omega_c^{k+1}(M)$, tehát a kompakt tartójú differenciálformák közt is értelmezhető a külső szorzat és derivált.*

2.3. Indukált differenciálformák

Legyen M egy m és N egy n-dimenziós sima sokaság, és legyen k fix. Legyen $\theta : M \to N$ sima leképezés. Ekkor minden $p \in M$-re θ indukál egy $\theta_{*p} \in \mathrm{Hom}(T_pM, T_{\theta(p)}N)$ leképezést, és így egy $(\theta_*)_p^* \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k(T_{\theta(p)}N), \Lambda^k(T_pM))$ leképezést. Ezt pontonként értelmezve kapunk egy

$$\theta^* \in \mathrm{Hom}(\Omega^k(N), \Omega^k(M)) \quad \omega \mapsto (p \mapsto (\theta_*)_p^*(\omega_{\theta(p)}))$$

leképezést. Jelöljük ezt a leképezést az összes k-ra egyszerűen θ^*-gal. A $k = 0$ esetben $f \in \Omega^0(N)$-re $\theta^* f = f \circ \theta$.

2.3.1. Lemma. *Minden $f \in \Omega^0(N)$-re $\theta^*\mathrm{d}f = \mathrm{d}\theta^* f$.*

Bizonyítás. Legyen $p \in M$, $q = \theta(p)$ és $v \in T_pM$, $w = \theta_{*p}v \in T_qN$. Ekkor

$$(\mathrm{d}\theta^* f)_p(v) = (\mathrm{d}(f \circ \theta))_p(v) = v(f \circ \theta) = w(f) = (\mathrm{d}f)_q(w) = (\theta^*\mathrm{d}f)_p(v).$$

. □

2.3.1. Állítás. *A fent definiált θ^*-ra a következők teljesülnek (ahol N lokális koordinátázásait $(y_1, \dots, y_n)$-nel jelöljük):*

1. $\forall\ k, l\ \forall\ \omega \in \Omega^k(N), \eta \in \Omega^l(N) \quad \theta^*(\omega \wedge \eta) = \theta^*\omega \wedge \theta^*\eta$,
2. $\forall\ (\phi, U)$ *N térképhez* $\forall\ f \in \Omega^0(U), I \in \{1, \dots, n\}, |I| = k$
$$\theta^*(f dy_I) = (f \circ \theta) d(y_{I_1} \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(y_{I_k} \circ \theta),$$
3. $\forall\ k\ \forall\ \omega \in \Omega^k(N) \quad \theta^* d\omega = d\theta^*\omega$.

(A 2-ből következik, hogy simma forma által indukált forma is sima.)

Bizonyítás. Az 1 a definíciókból világos.
A 2-höz legyen $f \in \Omega^0(U), I \in \{1, \dots, n\}$, ekkor 1-ből

$$\theta^*(f dy_I) = \theta^* f \theta^* dy_{I_1} \wedge \dots \wedge \theta^* dy_{I_k}.$$

Az előző lemma szerint

$$\theta^* f \theta^* dy_{I_1} \wedge \dots \wedge \theta^* dy_{I_k} = \theta^* f \mathrm{d}\theta^* y_{I_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\theta^* y_{I_k} = (f \circ \theta)\mathrm{d}(y_{I_1} \circ \theta) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}(y_{I_k} \circ \theta).$$

A 3-at elég lokálisan igazolni. Legyen (ϕ, U) N térképe, legyen $I \subset \{1, \dots, n\}$, és legyen $\omega = f dy_I$, ahol $f \in \Omega^0(U)$. Ekkor 1-ből

$$\theta^*\mathrm{d}\omega = \theta^*(\mathrm{d}f \wedge dy_I) = \theta^*\mathrm{d}f \wedge \theta^* dy_I.$$

Az előző lemma szerint

$$\theta^*\mathrm{d}f \wedge \theta^* dy_I = \mathrm{d}\theta^* f \wedge \theta^* dy_I = \mathrm{d}(\theta^* f \wedge \theta^* dy_I).$$

Végül ismét 1-et alkalmazva

$$\mathrm{d}(\theta^* f \wedge \theta^* dy_I) = \mathrm{d}\theta^*(f dy_I).$$

□

Legyen K sima sokaság, és $\psi :\ N \to K$ sima leképezés. A definícióból világosak a következők.

2.3.2. Állítás. *Ekkor*

1. $(\psi \circ \theta)^* = \theta^* \circ \psi^*$,
2. $id^* = id$.

Azaz az $(M \mapsto \Omega^k(M))$, $(\theta \mapsto \theta^*)$ hozzárendelések egy kontravariáns funktort határoznak meg a sima sokaságok és sima leképezések kategóriájából a valós vektorterek és lineáris leképezések kategóriájába.

2.4. A de Rahm kohomológia

Legyen M egy n-dimenziós sima sokaság. A 2.2.2 Állítás szerint $\mathrm{d}^2 = 0$, azaz $\mathrm{Im}(\mathrm{d}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d})$.

2.4.1. Definíció. *Nevezzük $\omega \in \Omega^k(M)$-et zártnak, ha $\omega \in Ker(d)$, azaz $d\omega = 0$. Nevezzük ω-t egzaktnak, ha $\omega \in Im(d)$, azaz $\exists\ \eta \in \Omega^{k-1}(M)$, amire $d\eta = \omega$.*

Megegyezés szerint csak a 0 egzakt $\Omega^0(M)$-ben, világos, hogy minden elem zárt $\Omega^n(M)$-ben. Az $\Omega^k(M)$ vektorterek, és köztük a d operátorok egy félegzakt sort (lánckomplexust) adnak.

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

2.4.2. Definíció. *M k-adik de Rahm kohomológiája legyen*

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap \Omega^k(M)}{\mathrm{Im}(\mathrm{d}) \cap \Omega^k(M)}.$$

Tehát $H^k_{dR}(M)$ elemei zárt differenciál k-formák ekvivalenciaosztályai, ahol két elemet ekvivalensnek tekintünk, ha különbségük egzakt. Az $\omega \in \Omega^k(M)$ forma ekvivalenciaosztályát jelölje $[\omega]$. Az a célunk, hogy megmutassuk, hogy a korábban differenciálformákra definiált operátorok kohomológiaosztályokon is értelmezhetők.
A konstrukcióból azonnal adódik, hogy $H^k_{dR}(M)$ valós vektortér. A 2.2.1 Következményből világos, hogy zárt formák külső szorzata zárt, a 2.3.1 Állításból pedig, hogy zárt forma által indukált forma zárt.

2.4.1. Lemma. *Legyen $\omega, \eta \in \Omega^k(M) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d}), \nu, \xi \in \Omega^l(M) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d})$, és legyen $[\omega] = [\eta], [\nu] = [\xi]$, ekkor $[\omega \wedge \nu] = [\eta \wedge \xi]$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{d}\upsilon = \omega - \eta$ és $\mathrm{d}\zeta = \nu - \xi$. Ekkor

$$\omega \wedge \nu - \eta \wedge \xi = \omega \wedge (\nu - \xi) + (\omega - \eta) \wedge \xi = \omega \wedge \mathrm{d}\zeta + \mathrm{d}\upsilon \wedge \xi.$$

Felhasználva, hogy $\mathrm{d}\omega = 0, \mathrm{d}\xi = 0$,

$$\omega \wedge \mathrm{d}\zeta + \mathrm{d}\upsilon \wedge \xi = \omega \wedge \mathrm{d}\zeta + (-1)^k \mathrm{d}\omega \wedge \zeta + \mathrm{d}\upsilon \wedge \xi + (-1)^{k-1}\upsilon \wedge \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}(\omega \wedge \zeta + \upsilon \wedge \xi).$$

□

Tehát a külső szorzat értelmezhető kohomológiaosztályokon.
Legyen most M egy m és N egy n-dimenziós sima sokaság, és legyen $\theta :\ M \to N$ sima leképezés.

2.4.2. Lemma. *Legyen $\omega, \eta \in \Omega^k(N) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d})$, és legyen $[\omega] = [\eta]$, ekkor $[\theta^*\omega] = [\theta^*\eta]$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{d}\upsilon = \omega - \eta$. Ekkor
$$\theta^*\omega - \theta^*\eta = \theta^*(\omega - \eta) = \theta^*\mathrm{d}\upsilon = \mathrm{d}\theta^*\upsilon.$$
□

Tehát az indukálás értelmezhető kohomológiaosztályokon.
Ekkor az $(M \mapsto H^k_{dR}(M))$, $(\theta \mapsto \theta^*)$ hozzárendelések egy kontravariáns funktort határoznak meg a sima sokaságok és sima leképezések kategóriájából a valós vektorterek és lineáris leképezések kategóriájába.
Sőt, a külső szorzat művelet kiterjesztésével M összes de Rahm kohomológiájának direktösszege egy valós algebra, aminek egységeleme a konstans 1 függvény, ezt jelölje $H^*_{dR}(M)$. Ekkor θ^* kiterjesztése egy $H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$ algebra-homomorfizmus a 2.3.1 Állítás miatt, és az $(M \mapsto H^*_{dR}(M))$, $(\theta \mapsto \theta^*)$ hozzárendelések szintén kontravariáns funktort határoznak meg.

2.4.1. Megjegyzés. *A de Rahm kohomológia definíciójában differenciálformák helyett csak a 2.2.1 Megjegyzésben tárgyalt kompakt tartójú differenciálformákat tekintve hasonlóan definiálható a kompakt tartójú formák de Rahm kohomológiája, ennek jele $H^k_c(M)$, ez azonban nem lesz funktoriális tulajdonságú.*

2.5. Differenciálformák integrálása

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és legyen $\omega \in \Omega^n_c(U)$ (lásd a 2.2.1 Megjegyzést). Ekkor $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ alakba írható, ahol $f: U \to \mathbb{R}$ sima és support(f) kompakt. Legyen
$$\int_U \omega = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n.$$
Az a célunk, hogy megmutassuk, ez az érték invariáns irányítástartó diffeomorfizmus alatt.
Legyen tehát $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, legyen $\theta: V \to U$ irányítástartó diffeomorfizmus, és legyen $\eta = \theta^*\omega \in \Omega^n(V)$, világos, hogy ekkor $\eta \in \Omega^n_c(V)$.

2.5.1. Állítás. *Ekkor* $\int_V \eta = \int_U \omega$.

Bizonyítás. A 2.3.1 Állítás szerint
$$\eta = (f \circ \theta)\mathrm{d}(x_1 \circ \theta) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x_n \circ \theta) = (f \circ \theta) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(x_1 \circ \theta) dx_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(x_n \circ \theta) dx_j.$$
Legyen J a θ Jacobi-mátrixa, ekkor $\forall\, i, j \leq n$-re
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i \circ \theta) = J_{i,j},$$
tehát
$$\eta = (f \circ \theta) \sum_{j=1}^n J_{1,j} dx_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^n J_{n,j} dx_j = (f \circ \theta) \sum_{\sigma \in S(n)} J_{1,\sigma(1)} \dots J_{n,\sigma(n)} dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)}.$$
Felhasználva, hogy $\forall\, \sigma \in S(n)$-re $dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,
$$\eta = (f \circ \theta) \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sgn}(\sigma)(J_{1,\sigma(1)}, \dots, J_{n,\sigma(n)}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (f \circ \theta)\det(J) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$
Ekkor
$$\int_V \eta = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \theta)\det(J) dx_1 \dots dx_n = \mathrm{sgn}(\det(J)) \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \mathrm{sgn}(\det(J)) \int_U \omega.$$
Mivel θ irányítástartó, $\mathrm{sgn}(\det(J)) = 1$, tehát $\int_V \eta = \int_U \omega$. □

Szeretnénk kiterjeszteni az integrálás fogalmát sima sokaságokra. Az előző állítás azt sugallja, hogy csak irányított sokaságokon tudunk egyértelmű integrálfogalmat definiálni. Legyen tehát M irányított n dimenziós sima sokaság, és legyen $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Ha support$(\omega) \subset U$, ahol (U, ϕ) M egy térképe, legyen

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega,$$

az előző állítás azt mutatja, hogy ez nem függ (U, ϕ) választásától (ha M irányításával konzisztens térképeket veszünk).
Ahhoz, hogy definiálhassuk általános differenciálforma integrálját, a következő lemmára, az úgynevezett egységosztás-tételre lesz szükségünk, amit most nem bizonyítunk.

2.5.1. Lemma. *Legyen M sima sokaság. Létezik térképek egy $\{(U_i, \phi_i)\}$, és sima $M \to [0,1]$ függvények egy $\{f_i\}$ redszere, amelyekre $\{U_i\}$ lokálisan véges, $\forall$ i-re support$(f_i) \subset U_i$ és $\sum_i f_i = 1$.*

Legyenek $\{(U_i, \phi_i)\}$, $\{f_i\}$ ilyen tulajdonságú rendszerek, ekkor $\forall i$-re support$(f_i\omega) \subset U_i$, vagyis értelmes $\int_M f_i\omega$. Legyen

$$\int_M \omega = \sum_{\text{support}(\omega)\cap U_i \neq \emptyset} \int_M f_i\omega = \sum_i \int_M f_i\omega.$$

Vegyük észre, hogy $\{U_i\}$ lokális végessége és support(ω) kompaktsága miatt az első szumma véges, és ezt a másodikban csak 0 tagokkal bővítjük. Be kell még látnunk, hogy ez az érték nem függ $\{(U_i, \phi_i)\}$, $\{f_i\}$ megválasztásától, legyenek tehát $\{(V_j, \psi_j)\}$, $\{g_j\}$ is a 2.5.1 Lemmát kielégítő rendszerek. Ekkor

$$\sum_i \int_M f_i\omega = \sum_i \int_M f_i(\sum_j g_j)\omega = \sum_i \sum_j \int_M f_i g_j \omega = \sum_j \int_M g_j(\sum_i f_i)\omega = \sum_j \int_M g_j\omega.$$

A definícióból azonnal adódik, hogy $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés. A 2.5.1 Állításból az is azonnal világos, hogy $\int_M \omega$ értéke invariáns irányítástartó diffeomozfizmus alatt, és -1-szeresére változik irányításváltó diffeomorfizmus alatt.
Legyen most $N \subset M$ peremes n dimenziós részsokaság, ekkor hasonlóan definiálható $\int_N \omega$ (azért nem általános peremes sokaságra definiáljuk, mert peremes sokaságra nem definiáltuk a differenciálformákat, de ezt is meg lehet tenni).

2.6. Stokes tétele

Legyen M irányított n-dimenziós sima sokaság és $N \subset M$ peremes n-dimenziós részsokaság. Legyen N beágyazása $i: N \to M$ és N pereme ∂N. Válasszuk meg az M sokaság $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ térképeit úgy, hogy ∂N környezetében ∂N-t $\{x_1 = 0\}$, N-t $\{x_1 \leq 0\}$ adja. Ekkor $(x_2, \ldots, x_n)$ a ∂N sokaság térképe lesz, és ezek a térképek megadnak egy irányítást ∂N-en. Legyen $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, ekkor $i^*\omega \in \Omega_c^{n-1}(\partial N)$, a továbbiakban ezt is egyszerűen ω-val jelöljük, ha egyértelmű, hogy erre gondolunk.

2.6.1. Tétel. *Ekkor $\int_N \mathrm{d}\omega = \int_{\partial N} \omega$.*

Bizonyítás. Az integrálás definíciója miatt elég olyan ω-t vizsgálni, amire support$(\omega) \subset U$, ahol (U, ϕ) az M egy térképe. Ekkor support(ω) kompaktsága miatt $\exists$ $a \geq 0$ amire support(ω) része a lokális koordinátákban $\{|x_1|, \ldots, |x_n| \leq a\}$ által adott halmaznak, ez legyen A.
Az integrálás linearitása miatt elég

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

alakba írható ω-t vizsgálnunk. Ekkor, ha $i = 1$

$$i^*\omega = f|_{\partial N} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

különben $i^*\omega = 0$, és

$$\mathrm{d}\omega = (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Ha $A \cap N = \emptyset$, akkor $\int_N \mathrm{d}\omega = \int_{\partial N} \omega = 0$.
Ha $A \subset \mathrm{int}N$, akkor $\int_N \mathrm{d}\omega = \int_M \mathrm{d}\omega$, és

$$\int_M \mathrm{d}\omega = (-1)^{i+1} \int \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_i} f dx_1 \dots dx_n = (-1)^{i+1} \int \cdots \int \Big[f(x_1, \dots, x_n) \Big]_{x_i=-a}^{x_i=a} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Mivel support$(f) \subset A$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, -a, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0,$$

tehát $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$. Másrészt ekkor $\int_{\partial N} \omega = 0$.
Ha $\partial N \cap A \neq \emptyset$ és $i \neq 1$, akkor

$$\int_N \mathrm{d}\omega = (-1)^{i+1} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{x_1=-a}^{0} \int_{x_i=-a}^{a} \frac{\partial}{\partial x_i} f dx_i dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n =$$

$$= (-1)^{i+1} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{x_1=-a}^{0} \Big[f(x_1, \dots, x_n) \Big]_{x_i=-a}^{x_i=a} dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n = 0,$$

az előzőhöz hasonlóan. Másrészt ekkor is $\int_{\partial N} \omega = 0$.
Végül ha $\partial N \cap A \neq \emptyset$ és $i = 1$, akkor

$$\int_N \mathrm{d}\omega = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_1=-a}^{0} \frac{\partial}{\partial x_1} f dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[f(x_1, \dots, x_n) \Big]_{x_1=-a}^{x_1=0} dx_2 \dots dx_n.$$

Felhasználva, hogy $f(0, x_2, \dots, x_n) = 0$,

$$\int_N \mathrm{d}\omega = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial N} \omega.$$

□

2.6.1. Következmény. *Ha $\eta \in \Omega_c^n(M)$ egzakt (lásd a 2.4.1 Definíciót), akkor $\int_M \eta = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{d}\upsilon = \eta$. Ekkor

$$\int_M \eta = \int_{\partial M} \upsilon = \int_{\emptyset} \upsilon = 0.$$

□

A fenti tétel olyan analízisből ismert integrálformulák általánosítását adja, mint a Newton-Leibniz formula (aminek az 1 dimenziós változatát persze használjuk a bizonyításban), a Green tétel, és a Cauchy tétel.

3. De Rahm Kohomológiák kiszámítása

3.1. A hosszú egzakt sor lemma

3.1.1. Definíció. *Nevezzük valós vektorterek és lineáris leképezések egy*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

sorát félegzaktnak, ha $g \circ f = 0$, azaz $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, *egzaktnak, ha* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

Vegyük észre, hogy a

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

sor egzakt pontosan akkor, ha f injektív, az

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

sor pedig pontosan akkor, ha f szürjektív.
Nevezzük valós vektorterek, és lineáris leképezések egy

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{\mathrm{d}_0} A^1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} A^2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} \dots$$

félegzakt sorát lánckomplexusnak. A továbbiakban az alsó indexeket elhagyva az összes leképezést egyszerűen d-vel jelöljük. A lánckomplexus egészét jelölje A^*, ha A^*, B^* lánckomplexus, jelölje $f: A^* \to B^*$ lineáris leképezések egy $\{f_i\}$ rendszerét ahol $\forall$ i-re $f_i: A^i \to B^i$, és a továbbiakban az alsó indexeket elhagyva jelöljük $\{f_i\}$ minden elemét egyszerűen f-fel.
Legyen A^* lánckomplexus.

3.1.2. Definíció. *A^* k-adik kohomológiája legyen*

$$H^k(A^*) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap A^k}{\mathrm{Im}(\mathrm{d}) \cap A^k}.$$

Az $a \in A^k$ elem ekvikalenciaosztályát jelölje $[a]$. Vegyük észre, hogy ha M egy n-dimenziós sima sokaság, akkor $H^k_{dR}(M) = H^k(\Omega^*(M))$.
Legyen most A^*, B^* lánckomplexus és legyen $f: A^* \to B^*$.

3.1.3. Definíció. *Legyen f láncleképezés, ha* $f\mathrm{d} = \mathrm{d}f$.

A 2.4.2 Lemmához hasonlóan könnyen belátható, hogy egy f láncleképezés értelmezhető kohomológiaosztályokon.
A fejezet hátralévő részében legyen A^*, B^* és C^* lánckomplexus, és legyen $i: A^* \to B^*$, $j: B^* \to C^*$ láncleképezés, amelyekre a

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^* \longrightarrow 0$$

sor egzakt.
Ekkor i és j minden k-ra meghatároz

$$H^k(A^*) \xrightarrow{i} H^k(B^*) \xrightarrow{j} H^k(C^*)$$

leképezéseket.
Definiálni fogunk $\forall$ k-ra egy $\partial_k: H^k(C^*) \to H^{k+1}(A^*)$ leképezést. Ezeket a továbbiakban az alsó indexeket elhagyva egyszerűen ∂-vel jelöljük. Legyen most $c \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap C^k$. Mivel j szürjektív, $\exists$ $b \in B^k$ amire $jb = c$, ekkor $j\mathrm{d}b = \mathrm{d}jb = \mathrm{d}c = 0$. Mivel

$$A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^*$$

egzakt, és i injektív $\exists!$ $a \in A^{k+1}$ amire $ia = \mathrm{d}b$. Legyen $\partial[c] = [a]$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^{k+2} & \xrightarrow{i} & B^{k+2} & \xrightarrow{j} & C^{k+2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{i} & B^{k+1} & \xrightarrow{j} & C^{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k} & \xrightarrow{i} & B^{k} & \xrightarrow{j} & C^{k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{i} & B^{k-1} & \xrightarrow{j} & C^{k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Azt, hogy ∂ jól definiált, a következő három lemma mutatja.

3.1.1. Lemma. *A fenti jelölésekkel* $\mathrm{d}a = 0$.

Bizonyítás. A fenti jelölésekkel
$$i\mathrm{d}a = \mathrm{d}ia = \mathrm{d}^2 b = 0,$$
tehát, mivel i injektív $\mathrm{d}a = 0$. □

3.1.2. Lemma. *A fenti jelölésekkel $\partial[c]$ nem függ b választásától.*

Bizonyítás. Legyen $jb_1 = jb_2 = c$, legyen $a_1 = i^{-1}\mathrm{d}b_1$ és $a_2 = i^{-1}\mathrm{d}b_2$ és legyen $b_3 = b_1 - b_2$, ekkor $jb_3 = j(b_1 - b_2) = c - c = 0$. Mivel
$$A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^*$$
egzakt, és i injektív $\exists!\ a_3 \in A^k$ amire $ia_3 = b_3$. Ekkor
$$i\mathrm{d}a_3 = \mathrm{d}ia_3 = \mathrm{d}b_3 = \mathrm{d}(b_1 - b_2) = \mathrm{d}b_1 - \mathrm{d}b_2 = ia_1 - ia_2 = i(a_1 - a_2),$$
tehát, mivel i injektív $\mathrm{d}a_3 = a_1 - a_2$, tehát $[a_1] = [a_2]$. □

3.1.3. Lemma. *Ha $c_1, c_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap C^k$ és $[c_1] = [c_2]$, akkor $\partial[c_1] = \partial[c_2]$.*

Bizonyítás. Legyen b_1, a_1, b_2, a_2 a b-nek és a-nak megfelelő elemek $c = c_1$ illetve $c = c_2$ esetén. Legyen $\mathrm{d}c_3 = c_1 - c_2$, mivel j szürjektív $\exists\ b_3 \in B^{k-1}$ amire $jb_3 = c_3$. Ekkor
$$j\mathrm{d}b_3 = \mathrm{d}jb_3 = \mathrm{d}c_3 = c_1 - c_2.$$
Legyen $b_4 = (b_1 - b_2) - \mathrm{d}b_3$, ekkor
$$jb_4 = j(b_1 - b_2 - \mathrm{d}b_3) = jb_1 - jb_2 - j\mathrm{d}b_3 = c_1 - c_2 - (c_1 - c_2) = 0,$$
tehát mivel
$$A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^*$$
egzakt, és i injektív $\exists!\ a_4 \in A^k$ amire $ia_4 = b_4$. Ekkor
$$i\mathrm{d}a_4 = \mathrm{d}ia_4 = \mathrm{d}b_4 = \mathrm{d}(b_1 - b_2 - \mathrm{d}b_3) = \mathrm{d}b_1 - \mathrm{d}b_2 - \mathrm{d}^2 b_3 = \mathrm{d}b_1 - \mathrm{d}b_2 = ia_1 - ia_2 = i(a_1 - a_2),$$
tehát mivel i injektív $\mathrm{d}a_4 = a_1 - a_2$, tehát $[a_1] = [a_2]$. □

A definícióból könnyen belátható, hogy ∂ lineáris lesz.
Ekkor van egy úgynevezett hosszú sorunk:
$$\ldots \xrightarrow{\partial} H^k(A^*) \xrightarrow{i} H^k(B^*) \xrightarrow{j} H^k(C^*) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(A^*) \xrightarrow{i} H^{k+1}(B^*) \xrightarrow{j} \ldots.$$

3.1.1. Tétel. *A fenti hosszú sor egzakt.*

A tétel a következő három lemmából következik.

3.1.4. Lemma. *Minden k-ra*
$$H^k(A^*) \xrightarrow{i} H^k(B^*) \xrightarrow{j} H^k(C^*)$$
egzakt.

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $j \circ i: \ A^* \to C^* = 0$ világos, hogy $j \circ i: \ H^k(A^*) \to H^k(C^*) = 0$. Legyen most $b_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap B^k$ és legyen $\mathrm{d}c = jb_1$. Mivel j szürjektív $\exists\ b_2 \in B^{k-1}$ amire $jb_2 = c$, ekkor
$$j\mathrm{d}b_2 = \mathrm{d}jb_2 = \mathrm{d}c = jb_1.$$
Legyen $b_3 = b_1 - \mathrm{d}b_2$, ekkor
$$jb_3 = j(b_1 - \mathrm{d}b_2) = jb_1 - j\mathrm{d}b_2 = jb_1 - jb_1 = 0,$$
tehát, mivel

$$A^* \xrightarrow{\ i\ } B^* \xrightarrow{\ j\ } C^*$$

egzakt, és i injektív $\exists!\ a_3 \in A^k$ amire $ia_3 = b_3$. Ekkor

$$i[a_3] = [b_3] = [b_3 + \mathrm{d}b_2] = [b_1 - \mathrm{d}b_2 + \mathrm{d}b_2] = [b_1].$$

□

3.1.5. Lemma. *Minden k-ra*

$$H^k(B^*) \xrightarrow{\ j\ } H^k(C^*) \xrightarrow{\ \partial\ } H^{k+1}(A^*)$$

egzakt.

Bizonyítás. Legyen először $b \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap B^k$, ekkor ∂ definíciójából világos, hogy

$$\partial j[b] = [i^{-1}\mathrm{d}b] = [i^{-1}0] = [0].$$

Legyen most $c \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap C^k$, hozzá $b = b_1$, $a = a_1$ úgy, mint ∂ definíciójában és legyen $\mathrm{d}a_2 = a_1$. Legyen $b_2 = b_1 - ia_2$, ekkor

$$jb_2 = j(b_1 - ia_2) = jb_1 - jia_2 = jb_1 = c,$$

másrészt

$$\mathrm{d}b_2 = \mathrm{d}(b_1 - ia_2) = \mathrm{d}b_1 - \mathrm{d}ia_2 = \mathrm{d}b_1 - i\mathrm{d}a_2 = \mathrm{d}b_1 - ia_1 = 0,$$

tehát $b_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap B^k$ és $j[b_2] = [c]$. □

3.1.6. Lemma. *Minden k-ra*

$$H^k(C^*) \xrightarrow{\ \partial\ } H^{k+1}(A^*) \xrightarrow{\ i\ } H^{k+1}(B^*)$$

egzakt.

Bizonyítás. Legyen először $c \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap C^k$ és hozzá b, a úgy, mint ∂ definíciójában. Ekkor

$$i\partial[c] = i[a] = [ia] = [\mathrm{d}b] = 0.$$

Legyen most $a \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap C^{k+1}$ és legyen $\mathrm{d}b = ia$. Legyen $c = jb$, ekkor ∂ definíciójából világos, hogy

$$\partial[c] = [a]$$

□

3.2. A Mayer-Vietoris sor

Legyen M n dimenziós sima sokaság, $U, V \subset M$ nyíltak és $U \cup V = M$. Ekkor a komponensenkénti deriválttal $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ is lánckomplexus. Legyen

$$i:\ \Omega^*(M) \to \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \quad \omega \mapsto \mathrm{id}_U^*(\omega) \oplus \mathrm{id}_V^*(\omega)$$

és legyen

$$j:\ \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \to \Omega^*(U \cap V) \quad \omega \oplus \eta \mapsto \mathrm{id}_{U\cap V}^*(\omega) - \mathrm{id}_{U\cap V}^*(\eta).$$

3.2.1. Tétel. *A következő sor egzakt:*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\ i\ } \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\ j\ } \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

Bizonyítás. A konstrukcióból világos, hogy i injektív, és hogy

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{\ i\ } \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\ j\ } \Omega^*(U \cap V)$$

egzakt, j szürjektivitását kell megmutatni.
Legyen $\omega \in \Omega^*(U \cap V)$. Tietze tétele szerint létezik $f: M \to [0,1]$ sima függvény, amire $f|_{M \setminus U} = 1$ és $f|_{M \setminus V} = 0$. Legyen $g = f|_U$ és $h = (1-f)|_V$, ekkor g, h sima, $\mathrm{support}(g), \mathrm{support}(h) \subset U \cap V$ és $g_{U \cap V} + h_{U \cap V} = 1$. Legyen $\eta \in \Omega^*(U)$ ahol $\forall\ p \in U$-ra

$$\eta_p = \begin{cases} g\omega_p & p \in U \cap V \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

és legyen $\nu \in \Omega^*(V)$ ahol $\forall\ p \in V$-re

$$\nu_p = \begin{cases} -h\omega_p & p \in U \cap V \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ekkor

$$j(\eta \oplus \nu) = g_{U \cap V}\omega + h_{U \cap V}\omega = \omega.$$

□

Könnyen meggondolható, hogy $\forall\ k$-ra $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ k-adik kohomológiája $H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V)$, ekkor az előzőből és a 3.1.1 Tételből kapjuk a következőt.

3.2.1. Következmény. *Van egy hosszú egzakt sorunk:*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^k_{dR}(M) \xrightarrow{i} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \xrightarrow{j} H^k_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}_{dR}(M) \xrightarrow{i} \dots.$$

3.3. A Mayer-Vietoris sor kompakt tartójú formákra

Legyen M n dimenziós sima sokaság, $U, V \subset M$ nyíltak és $U \cup V = M$. Ekkor a komponensenkénti deriválttal $\Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V)$ is lánckomplexus. Legyen

$$i: \ \Omega^*_c(U \cap V) \to \Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V) \quad \omega \mapsto \eta \oplus \nu,$$

ahol $\forall\ p \in U$-ra

$$\eta_p = \begin{cases} \omega_p & p \in U \cap V \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

és $\forall\ p \in V$-re

$$\nu_p = \begin{cases} \omega_p & p \in U \cap V \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

és legyen

$$j: \ \Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V) \to \Omega^*_c(M) \quad \omega \oplus \eta \mapsto \nu - \xi,$$

ahol $\forall\ p \in M$-re

$$\nu_p = \begin{cases} \omega_p & p \in U \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

és $\forall\ p \in M$-re

$$\xi_p = \begin{cases} \eta_p & p \in V \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

A következő tételhez szükségünk lesz egy lemmára, amit most nem bizonyítunk (vessük össze a 2.5.1 Lemmával).

3.3.1. Lemma. *Létezik $f, g: M \to [0,1]$ sima függvény, amikre $\mathrm{support}(f) \subset U$, $\mathrm{support}(g) \subset V$ és $f + g = 1$.*

3.3.1. Tétel. *A következő sor egzakt:*

$$0 \longrightarrow \Omega^*_c(U \cap V) \xrightarrow{i} \Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V) \xrightarrow{j} \Omega^*_c(M) \longrightarrow 0$$

Bizonyítás. A konstrukcióból világos, hogy i injektív, és hogy

$$\Omega_c^*(U\cap V) \xrightarrow{\ i\ } \Omega_c^*(U)\oplus\Omega_c^*(V) \xrightarrow{\ j\ } \Omega_c^*(M)$$

egzakt, j szürjektivitását kell megmutatni.
Legyen $\omega\in\Omega_c^*(M)$. Legyenek f, g a 3.3.1 Lemmát kielégítő függvények és legyen

$$\eta = \mathrm{id}_U^*(f\omega)\in\Omega_c^*(U)$$

és

$$\nu = \mathrm{id}_V^*(-g\omega)\in\Omega_c^*(V),$$

ekkor

$$j(\eta\oplus\nu) = f\omega + g\omega = \omega$$

□

Könnyen meggondolható, hogy $\forall$ k-ra $\Omega_c^*(U)\oplus\Omega_c^*(V)$ k-adik kohomológiája $H_c^k(U)\oplus H_c^k(V)$, ekkor az előzőből és a 3.1.1 Tételből kapjuk a következőt.

3.3.1. Következmény. *Van egy hosszú egzakt sorunk:*

$$\dots \xrightarrow{\ \partial\ } H_c^k(U\cap V) \xrightarrow{\ i\ } H_c^k(U)\oplus H_c^k(V) \xrightarrow{\ j\ } H_c^k(M) \xrightarrow{\ \partial\ } H_c^{k+1}(U\cap V) \xrightarrow{\quad} \dots.$$

3.4. Homotópia

Legyen A^*, B^* lánckomplexus és $f, g:\ A^*\to B^*$ láncleképezés (lásd a 3.1.3 Definíciót).

3.4.1. Definíció. *Legyen f és g lánchomotóp, ha létezik lineáris leképezések $\{s_i\}$ rendszere, ahol $\forall$ i-re $s_i:\ A^i\to B^{i-1}$ és $\{s_i\}$ minden elemét az alsó indexeket elhagyva egyszerűen s-el jelölve*

$$\mathrm{d}s + s\mathrm{d} = f - g.$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & A^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl, "s"] & A^k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl, "s"] & A^{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl, "s"] & \dots \arrow[dl, "s"] \\
\dots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & B^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & B^k \arrow[r, "\mathrm{d}"] & B^{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Könnyen belátható, hogy a lánchomotópia ekvivalencia-reláció.

3.4.1. Lemma. *Ha f és g lánchomotóp, akkor $\forall$ k-ra $f = g:\ H^k(A^*)\to H^k(B^*)$.*

Bizonyítás. Legyen $a\in\mathrm{Ker}(\mathrm{d})\cap A^k$, ekkor

$$fa - ga = \mathrm{d}sa - s\mathrm{d}a = \mathrm{d}sa,$$

tehát

$$f[a] - g[a] = [fa - ga] = [\mathrm{d}sa] = 0.$$

□

A következő állításhoz szükségünk lesz egy lemmára, amit most nem bizonyítunk.

3.4.2. Lemma. *Legyen M m, N n dimenziós sima sokaság és $f:\ M\to N$ folytonos leképezés, legyen továbbá $A\subset U\subset M$, ahol A zárt, U nyílt és $f|_U$ sima. Ekkor létezik $g:\ M\to N$ sima leképezés, amire $g|_A = f|_A$.*

Legyen most M m, N n dimenziós sima sokaság és $\theta, \psi:\ M\to N$ sima leképezések.

3.4.1. Állítás. *Ha $\theta\simeq\psi$, akkor $\theta^*:\ \Omega^*(N)\to\Omega^*(M)$ és $\psi^*:\ \Omega^*(N)\to\Omega^*(M)$ lánchomotóp.*

Bizonyítás. Legyen $H: M\times[0,1]\to N$ homotópia θ és ψ között. Terjesszük ki H-t a következőképpen: $\forall\ p\in M, t<0$-ra legyen $H(p,t)=\theta(p)$ és $\forall\ p\in M, t>1$-ra legyen $H(p,t)=\psi(p)$. A 3.4.2 Lemmából $A=M\times((-\infty,-1]\cup[2,\infty))$, $U=M\times((-\infty,0)\cup(1,\infty))$ választásokkal létezik $G: M\times\mathbb{R}\to N$ sima leképezés, amire $G|_{M\times((-\infty,-1]\cup[2,\infty))}=H|_{M\times((-\infty,-1]\cup[2,\infty))}$, és ezt átparaméterezve létezik $G: M\times\mathbb{R}\to N$ sima leképezés, amire $\forall\ p\in M, t\leq 0$-ra $G(p,t)=\theta(p)$ és $\forall\ p\in M, t\geq 1$-ra $G(p,t)=\psi(p)$.
Legyenek M lokális koordinátázásai $(x_1,\dots,x_m)$ és $M\times\mathbb{R}$ lokális koordinátázásai $(x_1,\dots,x_m,t)$ és legyen $\omega\in\Omega^k(N)$, ekkor lokális koordinátákban

$$G^*\omega=\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k} f_I dx_I+\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1} g_J dt\wedge dx_J$$

alakba írható. Azt szeretnénk, hogy lokális koordinátákban $\forall\ p\in M$-re

$$(s\omega)_p=\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)(dx_J)_p$$

legyen, ehhez meg kell mutatnunk, hogy ez nem függ M koordinátázásától.
Legyen tehát ϕ koordinátaváltás M-en és $\forall\ i\in\{1,\dots,m\}$-re $y_i=x_i\circ\phi$. Ekkor $\forall\ p\in M$-re

$$(G^*\omega)_{(p,t)}=\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k} f_I(\phi(p),t)dy_I+\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1} g_J(\phi(p),t)dt\wedge dy_J,$$

és ehhez a felíráshoz

$$(s\omega)_p=\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(\phi(p),t)dt\Big)(dy_J)_p=\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)(dx_J)_p.$$

Ekkor a 2.2.1 Következményhez hasonlóan s értelmes globálisan.
Most $\mathrm{d}s+s\mathrm{d}$-t kell kiszámolnunk, ehhez először

$$G^*\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}G^*\omega=\sum_{i=1}^m\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k}\frac{\partial}{\partial x_i}f_I dx_i\wedge dx_I+\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k}\frac{\partial}{\partial t}f_I dt\wedge dx_I-$$

$$-\sum_{j=1}^m\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}g_J dt\wedge dx_j\wedge dx_J,$$

tehát $\forall\ p\in M$-re

$$(s\mathrm{d}\omega)_p=\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k}\Big(\int_{t=0}^1\frac{\partial}{\partial t}f_I(p,t)dt\Big)dx_I-\sum_{j=1}^m\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)dx_j\wedge dx_J=$$

$$=\sum_{I\subset\{1,\dots,m\},|I|=k}(f_I(p,1)-f_I(p,0))dx_I-\sum_{j=1}^m\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)dx_j\wedge dx_J=$$

$$=(\psi^*\omega)_p-(\theta^*\omega)_p-\sum_{j=1}^m\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)dx_j\wedge dx_J.$$

Másrészt

$$(\mathrm{d}s\omega)_p=\sum_{j=1}^m\sum_{J\subset\{1,\dots,m\},|J|=k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int_{t=0}^1 g_J(p,t)dt\Big)dx_j\wedge dx_J,$$

tehát

$$\mathrm{d}s\omega+s\mathrm{d}\omega=\psi^*\omega-\theta^*\omega.$$

Könnyen belátható, hogy s lineáris. □

3.4.1. Következmény. *Ha $\theta\simeq\psi$, akkor $\forall\ k$-ra $\theta^*=\psi^*:\ H^k_{dR}(N)\to H^k_{dR}(M)$.*

3.4.2. Következmény. *Ha $M\simeq N$, akkor $\forall\ k$-ra $H^k_{dR}(M)\cong H^k_{dR}(N)$.*

3.5. S^n kohomológiáinak kiszámítása

3.5.1. Lemma. *Legyen M összefüggő n dimenziós sima sokaság, ekkor*

$$H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \Omega^0(M)$, ekkor $\mathrm{d}f = 0$ potosan akkor teljesül, ha $\forall$ i-re $\frac{\partial}{\partial x_i} f = 0$, ekkor f lokálisan konstans, tehát M összefüggősége miatt f konstans. Ezek szerint $H^0_{dR}(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap \Omega^0(M)$ a konstans $M \to \mathbb{R}$ függvények tere, ami izomorf $\mathbb{R}$-el. □

3.5.1. Következmény. *Legyen $\{p\}$ az egypontú tér, ekkor*

$$H^k_{dR}(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

A 3.4.2 Következményből kapjuk a következőt.

3.5.2. Következmény. *Legyen M pontrahúzható n dimenziós sima sokaság, ekkor*

$$H^k_{dR}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

S^0 kohomológiáit a következő lemma adja.

3.5.2. Lemma. *Legyen M, N n dimenziós sima sokaság, ekkor $\forall$ k-ra*

$$H^k_{dR}(M \sqcup N) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^k_{dR}(N).$$

Bizonyítás. A 3.2.1 Következményből kapjuk a

$$H^{k-1}_{dR}(M \cap N) \xrightarrow{\partial} H^k_{dR}(M \sqcup N) \xrightarrow{i} H^k_{dR}(M) \oplus H^k_{dR}(N) \xrightarrow{j} H^k_{dR}(M \cap N)$$

egzakt sort. Mivel $M \cap N = \emptyset$,

$$0 \longrightarrow H^k_{dR}(M \sqcup N) \xrightarrow{i} H^k_{dR}(M) \oplus H^k_{dR}(N) \longrightarrow 0$$

egzakt, tehát i izomorfizmus. □

3.5.3. Következmény. *Ekkor*

$$H^k_{dR}(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & k = 0 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

3.5.3. Lemma.

$$H^k_{dR}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

Bizonyítás. $H^0_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$ a 3.5.1 Lemmából. Feleltessük meg S^1-et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$-nek és legyen $D_+ = \{(x, y) \in S^1 | x > -\frac{1}{2}\}$ és $D_- = \{(x, y) \in S^1 | x < \frac{1}{2}\}$, ekkor $S^1 = D_+ \cup D_-$, $D_+, D_- \simeq D^1$ és $D_+ \cap D_- \simeq S^0$. Ekkor a 3.2.1 Következményből, a 3.4.2, 3.5.2, 3.5.3 Következményekből ismert kohomológiákat beírva kapjuk a

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\partial} H^1_{dR}(S^1) \xrightarrow{i} 0 \oplus 0$$

egzakt sort, tehát $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$. □

3.5.1. Állítás. $\forall$ $n \geq 1$*-re*

$$H^k_{dR}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

Bizonyítás. Az előző állításhoz hasonlóan $H^0_{dR}(S^n) \cong \mathbb{R}$ a 3.5.1 Lemmából. Feleltessük meg S^n-t $\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$-nek és legyen $D_+ = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n | x_1 > -\frac{1}{2}\}$ és $D_- = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n | x_1 < \frac{1}{2}\}$, ekkor $S^n = D_+ \cup D_-$, $D_+, D_- \simeq D^n$ és $D_+ \cap D_- \simeq S^{n-1}$.
Teljes indukciót alkalmazunk n szerint, az $n = 1$ esetet az előző lemma adja, tehát feltehetjük, hogy $n \geq 2$ és az állítást igazoltuk S^{n-1}-re. Ekkor a 3.2.1 Következményből, a 3.4.2, 3.5.2, 3.5.3 Következményekből és az indukciós feltételből ismert kohomológiákat beírva kapjuk a

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} H^1_{dR}(S^n) \xrightarrow{i} 0 \oplus 0$$

egzakt sort, tehát $H^1_{dR}(S^n) \cong 0$, és minden $k \geq 2$-re a

$$0 \longrightarrow H^{k-1}_{dR}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H^k_{dR}(S^n) \longrightarrow 0$$

egzakt sort, tehát $H^k_{dR}(S^n) \cong H^{k-1}_{dR}(S^{n-1})$. Ez az indukciós feltételből igazolja az állítást S^n-re. □

3.6. $H^n_{dR}(M)$ kiszámítása kompakt n dimenziós sima sokaságokra

Legyen most M irányítható, összefüggő (de nem feltétlenül kompakt) n dimenziós sokaság, ekkor van egy sorunk

$$\Omega^{n-1}_c(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_c(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

3.6.1. Tétel. *A fenti sor egzakt.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\int_M$ nem azonosan 0, tehát szürjektív. A 2.6.1 Következményből $\int_M \circ \mathrm{d} = 0$. Azt kell belátni, hogy $\forall\ \omega \in \Omega^n_c(M)$-re ha $\int_M \omega = 0$, akkor ω egzakt, azaz $\exists\ \eta \in \Omega^{n-1}_c(M)$ amire $\mathrm{d}\eta = \omega$. Ezt a következő lemmákkal bizonyítjuk. □

3.6.1. Lemma. *A 3.6.1 Tétel igaz $M = \mathbb{R}^n$ esetben.*

Bizonyítás. Legyen $\omega \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ és $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$, ekkor

$$\omega = f dx_{\{1,\dots,n\}}$$

alakba írható, ahol support(f) kompakt, és

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Ekkor η-t

$$\sum_{i=1}^{n} g_i dx_i \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_n$$

alakban keressük, ahol $\forall\ i$-re support(g_i) kompakt. Ekkor

$$\mathrm{d}\eta = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g_i \Big) dx_{\{1,\dots,n\}},$$

tehát $\mathrm{d}\eta = \omega$ pontosan akkor, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g_i = f.$$

Ilyen g_i-k létezését teljes indukcióval bizonyítjuk n szerint. Az $n = 1$ esetben könnyen ellenőrizhető, hogy megfelel a

$$g_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

függvény, tehát feltehetjük, hogy $n \geq 2$ és mindig léteznek megfelelő g_i-k $n-1$-re. Legyen support$(f) \subset [-a, a]^n$ és legyen

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt,$$

ekkor g sima, $\mathrm{support}(g) \subset [-a,a]^{n-1}$ és

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g dx_1 \dots dx_{n-1} = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Az indukciós feltétel szerint léteznek $h_1, \dots, h_{n-1} : \ \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ sima, kompakt tartójú függvények, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i = g.$$

Legyen $\rho : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima, kompakt tartójú függvény, amire $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$, legyen $\forall\ i \leq n-1$-re

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = h_i(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(x_n)$$

és legyen

$$h = f - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} g_i,$$

ekkor h sima, és $\mathrm{support}(h)$ kompakt.
Legyen

$$g_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt,$$

ekkor g_n sima és $\frac{\partial}{\partial x_n} g_n = h$, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g_i = f.$$

Meg kell még mutatni, hogy $\mathrm{support}(g_n)$ kompakt, ehhez elég azt megmutatni, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt = 0.$$

Ehhez

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x_1, \dots, x_{n-1}, t) =$$

$$= f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(t) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) - g(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(t),$$

tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt - g(x_1, \dots, x_{n-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt - g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0.$$

□

3.6.2. Lemma. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, és $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$. Ekkor létezik $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ amire $\mathrm{support}(\omega - \mathrm{d}\eta) \subset U$.*

Bizonyítás. Legyen $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ amire $\mathrm{support}(\nu) \subset U$ és $\int_{\mathbb{R}^n} \nu = 1$, és legyen $a = \int_{\mathbb{R}^n} \omega$. Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\omega - a\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega - a \int_{\mathbb{R}^n} \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \omega - a = 0,$$

tehát az előző lemma szerint $\exists\, \eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ amire $\omega - a\nu = \mathrm{d}\eta$, ekkor $\omega - \mathrm{d}\eta = a\nu$ és $\mathrm{support}(\omega - \mathrm{d}\eta) \subset \mathrm{support}(\nu) \subset U$. □

3.6.3. Lemma. *Legyen $U \subset M$ nemüres nyílt halmaz, és $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Ekkor létezik $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ amire support$(\omega - \mathrm{d}\eta) \subset U$.*

Bizonyítás. Először vizsgáljunk olyan ω-t, amire support$(\omega) \subset V$, ahol (V, ψ) az M sokaság egy térképe. Ekkor könnyen meggondolható, hogy találhatók M-nek $(V_0, \psi_0), \dots, (V_k, \psi_k)$ térképei, amikre $V_0 = V$, $V_k \subset U$ és $\forall$ i-re $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$. Az előző lemma többszöri alkalmazásával léteznek $\eta_0, \dots, \eta_{k-1} \in \Omega_c^{n-1}(M)$ amikre $\forall$ i-re

$$\text{support}(\omega - \sum_{j=0}^{i} \mathrm{d}\eta_j) \subset V_i \cap V_{i+1},$$

ekkor $\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{d}\eta_j$ alkalmas η.

Általános ω-ra legyenek $\{(V_i, \psi_i)\}$, $\{f_i\}$ a 2.5.1 Lemmát kielégítő rendszerek. Mivel support(ω) kompakt, a V_i-k közül csak véges sokat metsz, legyenek ezek $V_1, \dots, V_m$ és a hozzájuk tartozó függvények $f_1, \dots, f_m$, ekkor

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} f_j \omega.$$

Mivel $\forall$ j-re support$(f_j\omega) \subset V_j$, $\exists$ $\eta_j \in \Omega_c^{n-1}(M)$ amire support$(f_j\omega - \mathrm{d}\eta_j) \subset U$, ekkor $\sum_{j=1}^{m} \eta_j$ alkalmas η, mivel

$$\omega - \mathrm{d}\eta = \sum_{j=1}^{m} (f_j\omega - \mathrm{d}\eta_j),$$

tehát

$$\text{support}(\omega - \mathrm{d}\eta) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \text{support}(f_j\omega - \mathrm{d}\eta_j) \subset U.$$

□

Most már be tudjuk fejezni a 3.6.1 Tétel bizonyítását.

Bizonyítás. Legyen tehát $\omega \in \Omega_c^n(M)$ és $\int_M \omega = 0$. Legyen (U, ϕ) M térképe, ekkor a 3.6.3 Lemma szerint $\exists$ $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$, amire support$(\omega - \mathrm{d}\eta) \subset U$. Ekkor a 2.6.1 Következményt alkalmazva

$$\int_M (\omega - \mathrm{d}\eta) = \int_M \omega - \int_M \mathrm{d}\eta = 0,$$

tehát a 3.6.1 Lemma szerint $\exists$ $\nu_0 \in \Omega_c^{n-1}(U)$, amire

$$(\omega - \mathrm{d}\eta)|_U = \mathrm{d}\nu_0.$$

Legyen $\nu \in \Omega_c^{n-1}(M)$ ahol $\forall$ $p \in M$-re

$$\nu_p = \begin{cases} (\nu_0)_p & p \in U \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ekkor

$$\omega - \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\nu,$$

tehát

$$\mathrm{d}(\eta + \nu) = \omega.$$

□

3.6.1. Következmény. *Ekkor*

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R},$$

speciálisan ha M kompakt,

$$H_{dR}^n(M) = H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

Legyen most M irányíthatatlan, összefüggő, kompakt n dimenziós sima sokaság. A következő tételhez szükségünk lesz egy lemmára amit most nem bizonyítunk.

3.6.4. Lemma. *Létezik $\hat{M}$ irányítható, összefüggő, kompakt n dimenziós sima sokaság, $A: \hat{M} \to \hat{M}$, $\pi: \hat{M} \to M$ lokális diffeomorfizmusokkal, amelyekre A irányításváltó, $A^2 = id_{\hat{M}}$, π kétrétű fedőleképezés és $\pi \circ A = \pi$.*

$$\begin{tikzcd}
\hat{M} \arrow[rr, bend right, "A"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \hat{M} \arrow[ll, bend right, "A"'] \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

3.6.2. Tétel. *Ekkor*

$$H^n_{dR}(M) \cong 0.$$

Bizonyítás. Abból, hogy π lokális diffeomorfizmus, világos, hogy $\pi^*: \Omega^n(M) \to \Omega^n(\hat{M})$ injektív. Legyen $\omega \in \Omega^n(M)$ és $\hat{\omega} = \pi^*\omega$. Ekkor

$$\hat{\omega} = \pi^*\omega = A^*\pi^*\omega = A^*\hat{\omega}$$

és

$$\int_{\hat{M}} \hat{\omega} = -\int_{\hat{M}} A^*\hat{\omega} = -\int_{\hat{M}} \hat{\omega},$$

tehát $\int_{\hat{M}} \hat{\omega} = 0$. A 3.6.1 Tétel szerint $\exists\ \hat{\eta} \in \Omega^{n-1}(\hat{M})$ amire $\mathrm{d}\hat{\eta} = \hat{\omega}$. Legyen

$$\hat{\nu} = \frac{1}{2}(\hat{\eta} + A^*\hat{\eta}),$$

ekkor

$$\mathrm{d}\hat{\nu} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}(\hat{\eta} + A^*\hat{\eta})) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\hat{\eta} + \mathrm{d}A^*\hat{\eta}) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\hat{\eta} + A^*\mathrm{d}\hat{\eta}) = \frac{1}{2}(\hat{\omega} + A^*\hat{\omega}) = \frac{1}{2}(\hat{\omega} + \hat{\omega}) = \hat{\omega},$$

és

$$A^*\hat{\nu} = A^*(\frac{1}{2}(\hat{\eta} + A^*\hat{\eta})) = \frac{1}{2}(A^*\hat{\eta} + (A^2)^*\hat{\eta}) = \frac{1}{2}(\hat{\eta} + A^*\hat{\eta}) = \hat{\nu}.$$

Szeretnénk találni, egy $\nu \in \Omega^{n-1}(M)$-et, amire $\pi^*\nu = \hat{\nu}$. Legyen most $\hat{U} \subset \hat{M}$, amire $\pi|_{\hat{U}}$ diffeomorfizmus és legyen $U = \pi(\hat{U})$. Legyen

$$\nu|_U = ((\pi|_{\hat{U}})^{-1})^*(\hat{\nu}|_{\hat{U}}).$$

Ez jól definiált, mivel $\hat{U}$ helyett $A(\hat{U})$ választással

$$\nu|_U = (A \circ (\pi|_{\hat{U}})^{-1})^*(\hat{\nu}|_{A(\hat{U})}) = ((\pi|_{\hat{U}})^{-1})^*A^*(\hat{\nu}|_{A(\hat{U})}) = ((\pi|_{\hat{U}})^{-1})^*(\hat{\nu}|_{\hat{U}}) = \nu|_U.$$

Ekkor az Ekkor a 2.2.1 Következményhez hasonlóan ν értelmes globálisan, és a konstrukcióból világos, hogy $\pi^*\nu = \hat{\nu}$. Ekkor

$$\pi^*\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\pi^*\nu = \mathrm{d}\hat{\nu} = \hat{\omega} = \pi^*\omega,$$

tehát $\mathrm{d}\nu = \omega$. □

Hasonlóan belátható, hogy M irányíthatatlan, összefüggő (nem feltétlenül kompakt) n dimenziós sima sokaságra

$$H^n_c(M) \cong 0.$$

3.7. Differenciálformák a síkon és a térben

Tekintsük először $\mathbb{R}^2$-t, itt $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ elemei $\omega = fdx + gdy$, $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$ elemei $\eta = hdx \wedge dy$ alakba írhatók, ahol $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sima függvények. Feleltessük meg ω-t az $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sima vektormezőnek, η-t a $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sima függvénynek. A definícióból azonnal látszik, hogy egy $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmazra

$$\int_K \eta = \int_K hdxdy.$$

Legyen most $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ sima görbe, ekkor

$$\gamma^*\omega = (f \circ \gamma)\mathrm{d}(x \circ \gamma) + (g \circ \gamma)\mathrm{d}(y \circ \gamma) = ((f \circ \gamma)\gamma_1' + (g \circ \gamma)\gamma_2')dt$$

és

$$\int_{[0,1]} \gamma^*\omega = \int_{[0,1]} ((f \circ \gamma)\gamma_1' + (g \circ \gamma)\gamma_2')dt = \int_\gamma fdx + gdy.$$

Legyen most $F \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, ekkor

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial}{\partial x}Fdx + \frac{\partial}{\partial y}Fdy$$

a grad$F$ vektormezőnek megfelelő 1-forma. Stokes tétele szerint tehát ha grad$F = (f, g)$, akkor $\mathrm{d}F = \omega$ és

$$\int_\gamma fdx + gdy = \int_{[0,1]} \gamma^*\omega = \int_{[0,1]} \gamma^*\mathrm{d}F = \int_{[0,1]} \mathrm{d}\gamma^*F = \int_{\{0,1\}} F \circ \gamma = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)),$$

azaz visszakapjuk a 2-dimenziós görbeintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz-formulát.

Másrészt

$$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial}{\partial x}g - \frac{\partial}{\partial y}f)dx \wedge dy$$

a rot(f, g)-nek megfelelő 2-forma. Ha most rot$(f, g) = h$, akkor $\mathrm{d}\omega = \eta$ és

$$\int_K hdxdy = \int_K \eta = \int_K \mathrm{d}\omega = \int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} fdx + gdy,$$

ami a 2-dimenziós Stokes-tételt adja, ebből $f = 0$ illetve $g = 0$ választással kaphatjuk a 2-dimenziós Greene-tételt.

Legyen most $U \subset \mathbb{R}^2$ pontrahúzható (például konvex) nyílt részhalmaza, ekkor a 3.5.2 Következményből

$$H^k_{dR}(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ami a fenti megfeleltetéseket használva azonnal adja a következő tételt.

3.7.1. Tétel. 1. *Legyen $(f, g) : U \to \mathbb{R}^2$ sima rotációmentes vektormező, ekkor $\exists\ F : U \to \mathbb{R}$ sima függvény, amire grad$F = (f, g)$.*

2. *Legyen $h : U \to \mathbb{R}$ sima függvény, ekkor $\exists\ (f, g) : U \to \mathbb{R}^2$ sima vektormező, amire rot$(f, g) = h$.*

Hasonlóan $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ elemei $\omega = fdx+gdy+hdz$, $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ elemei $\eta = adx\wedge dy-bdx\wedge dz+cdy\wedge dz$ és $\nu = kdx \wedge dy \wedge dz$ alakba írhatók, ahol $f, g, h, a, b, c, k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sima függvények, ezeket megfeleltethetjük rendre az (f, g, h) és az (a, b, c) vektormezőknek illetve a k függvénynek.

A fentivel megegyező módon belátható, hogy ω egy $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ sima görbe mentén való integrálása a szokásos görbeintegrálnak felel meg, és innen levezethető a 3-dimenziós görbeintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz-formula.

Legyen most $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt 2-dimenziós peremes részsokaság, és $i : K \to \mathbb{R}^3$ sima beágyazás, ekkor ($\mathbb{R}^2$ koordinátáit (s, t)-vel jelölve)

$$i^*\eta = (a \circ i)\mathrm{d}(x \circ i) \wedge \mathrm{d}(y \circ i) - (b \circ i)\mathrm{d}(x \circ i) \wedge \mathrm{d}(z \circ i) + (c \circ i)\mathrm{d}(y \circ i) \wedge \mathrm{d}(z \circ i) =$$

$$= (a \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_1 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_1 dt) \wedge (\frac{\partial}{\partial s} i_2 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_2 dt) +$$

$$-(b \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_1 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_1 dt) \wedge (\frac{\partial}{\partial s} i_3 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_3 dt) +$$

$$+(c \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_2 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_2 dt) \wedge (\frac{\partial}{\partial s} i_3 ds + \frac{\partial}{\partial t} i_3 dt) =$$

$$= ((a \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_1 \frac{\partial}{\partial t} i_2 - \frac{\partial}{\partial s} i_2 \frac{\partial}{\partial t} i_1) +$$

$$+(b \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_3 \frac{\partial}{\partial t} i_1 - \frac{\partial}{\partial s} i_1 \frac{\partial}{\partial t} i_3) +$$

$$+(c \circ i)(\frac{\partial}{\partial s} i_2 \frac{\partial}{\partial t} i_3 - \frac{\partial}{\partial s} i_3 \frac{\partial}{\partial t} i_2)) ds \wedge dt =$$

$$= \left\langle (a, b, c) \circ i, \frac{\partial}{\partial s} i \times \frac{\partial}{\partial t} i \right\rangle ds \wedge dt$$

és

$$\int_K i^* \eta = \int_K \left\langle (a, b, c) \circ i, \frac{\partial}{\partial s} i \times \frac{\partial}{\partial t} i \right\rangle ds dt = \int_{i(K)} (a, b, c) dA.$$

Másrészt

$$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial}{\partial x} g - \frac{\partial}{\partial y} f) dx \wedge dy + (\frac{\partial}{\partial x} h - \frac{\partial}{\partial z} f) dx \wedge dz + (\frac{\partial}{\partial y} h - \frac{\partial}{\partial z} g) dy \wedge dz$$

a $\mathrm{rot}(f, g, h)$-nak megfelelő 2-forma. Ha $\mathrm{rot}(f, g, h) = (a, b, c)$, akkor $\mathrm{d}\omega = \eta$ és

$$\int_{i(K)} (a, b, c) dA = \int_K i^* \eta = \int_K i^* \mathrm{d}\omega = \int_K \mathrm{d} i^* \omega = \int_{\partial K} i^* \omega = \int_{i(\partial K)} f dx + g dy + h dz,$$

ami a 3-dimenziós Stokes-tételt adja.

Hasonlóan

$$\mathrm{d}\eta = (\frac{\partial}{\partial x} c + \frac{\partial}{\partial y} b + \frac{\partial}{\partial z} a) dx \wedge dy \wedge dz$$

a $\mathrm{div}(a, b, c)$-nek megfelelő 3-forma. Ha most $T \subset \mathbb{R}^3$ kompakt és $\mathrm{div}(a, b, c) = k$, akkor $\mathrm{d}\eta = \nu$ és

$$\int_T k dx dy dz = \int_T \nu = \int_T \mathrm{d}\eta = \int_{\partial T} \eta = \int_{\partial T} (a, b, c) dA,$$

ami a Gauss–Osztrohradszkij-tételt adja.

Legyen most $V \subset \mathbb{R}^3$ pontrahúzható (például konvex) nyílt részhalmaza, ekkor a 3.5.2 Következményből

$$H^k_{dR}(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ami a fenti megfeleltetéseket használva azonnal adja a következő tételt.

3.7.2. Tétel. *1. Legyen $(f, g, h) : U \to \mathbb{R}^3$ sima rotációmentes vektormező, ekkor $\exists\, F : U \to \mathbb{R}$ sima függvény, amire $gradF = (f, g, h)$.*

2. Legyen $(a, b, c) : U \to \mathbb{R}^3$ sima divergenciamentes vektormező, ekkor $\exists\, (f, g, h) : U \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező, amire $rot(f, g, h) = (a, b, c)$.

3. Legyen $k : U \to \mathbb{R}$ sima függvény, ekkor $\exists\, (a, b, c) : U \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező, amire $div(a, b, c) = k$.

4. Leképezések fokszáma és vektormezők indexe

4.1. Leképezés fokszáma

Legyen M, N irányított, összefüggő, kompakt n dimenziós sima sokaság és legyen $\theta: M \to N$ sima leképezés. Ekkor a 3.6.1 Tételből a következő kommutatív diagrammot kapjuk.

$$\begin{array}{ccc} H^n_{dR}(N) & \xrightarrow{\theta^*} & H^n_{dR}(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\int_N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\int_M} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Itt az alsó nyíl egy valós számmal való szorzás kell legyen, nevezzük ezt a számot $\deg(\theta)$-nak. Ekkor tehát $\forall\ \omega \in \Omega^n(N)$-re

$$\int_M \theta^*\omega = \deg(\theta) \int_N \omega.$$

A definícióból, és a 3.4.1 Következményből azonnal kapjuk a következőket.

4.1.1. Következmény. *Legyen $\psi: M \to N$, $\psi \simeq \theta$, ekkor $deg(\psi) = deg(\theta)$.*

4.1.2. Következmény. *Legyen K irányított, összefüggő, kompakt n dimenziós sima sokaság és legyen $\psi: N \to K$ sima leképezés, ekkor*

$$deg(\psi \circ \theta) = deg(\psi)\, deg(\theta).$$

Legyen $q \in N$ a θ reguláris értéke. A következő tételhez szükségünk lesz egy lemmára.

4.1.1. Lemma. *Ekkor $|\theta^{-1}(\{q\})|$ véges, és létezik q-nak U környezete, amihez q minden ősének létezik V környezete, amire $\theta|_V$ diffeomorfizmus, és $\theta(V) = U$, továbbá a különböző ősökhoz tartozó V-k diszjunktak.*

Bizonyítás. A reguláris érték deifníciójából q minden ősében θ lokális diffeomorfizmus, tehát q minden őse izolált, ekkor M kompaktsága miatt csak véges ős lehet.
Legyen $\theta^{-1}(\{q\}) = \{p_1, \ldots, p_k\}$, ekkor ezeknek léteznek $W_1, \ldots, W_k$ környezetei, amikre $\forall\ i$-re $\theta|_{W_i}$ diffeomorfizmus. Legyen

$$U = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} \theta(W_i)\Big) \setminus \theta\Big(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i\Big),$$

könnyen ellenőrizhető, hogy ez q nyílt környezete, és ekkor $\forall\ i$-re $W_i \cap \theta^{-1}(U)$ alkalmas V_i. □

Legyen minden $p \in \theta^{-1}(\{q\})$-ra

$$\mathrm{ind}(\theta; p) = \begin{cases} 1 & D_p\theta: T_pM \to T_qN \text{ irányítástartó} \\ -1 & D_p\theta: T_pM \to T_qN \text{ irányításváltó} \end{cases},$$

és legyen $\theta^{-1}(\{q\}) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.

4.1.1. Tétel. *A fenti jelölésekkel*

$$\deg(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}(\theta; p_i).$$

Bizonyítás. Legyenek $U, V_1, \ldots, V_k$ az előző lemmát kielégítő környezetei $q, p_1, \ldots, p_k$-nak. Legyen $\omega \in \Omega^n(N)$ amire $\mathrm{support}(\omega) \subset U$ és $\int_N \omega = 1$, ekkor

$$\mathrm{support}(\theta^*\omega) \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i$$

és

$$\theta^*\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$$

alakba írható, ahol $\forall$ i-re support$(\omega_i) \subset V_i$ és

$$(\omega_i)|_{V_i} = (\theta|_{V_i})^*(\omega|_U).$$

Ekkor

$$\deg(\theta) = \deg(\theta)\int_N \omega = \int_M \theta^*\omega = \int_M \Big(\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Big) = \sum_{i=1}^{k}\int_M \omega_i = \sum_{i=1}^{k}\int_{V_i}(\omega_i)|_{V_i} = \sum_{i=1}^{k}\int_{V_i}(\theta|_{V_i})^*(\omega|_U) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{ind}(\theta;p_i)\int_U \omega|_U = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{ind}(\theta;p_i).$$

□

4.1.3. Következmény. *Tehát* $\deg(\theta)$ *egész.*

Felhasználva, hogy minden sima leképezésnek van reguláris értéke, ezt a számítást minden sima leképezésre el tudjuk végezni, és így az előző következmény is mindig érvényes.
A következő lemmára a későbbiekben lesz szükségünk. Legyen most K irányított $n+1$ dimenziós sima sokaság és $\Theta: K \to N$ sima leképezés. Legyen $P \subset K$ kompakt, peremes $n+1$ dimenziós részsokaság, legyen a pereme M úgy irányítva, mint a 2.6 Fejezetben és legyen $\theta = \Theta|_M$.

4.1.2. Lemma. *A fenti jelölésekkel*

$$\deg(\theta) = 0$$

(ahol $\deg(\theta)$ *úgy értendő, mint a* **??** *Megjegyzésben).*

Bizonyítás. Legyen $\omega \in \Omega^n(N)$ amire $\int_N \omega = 1$, ekkor a 2.6.1 Tételt használva

$$\deg(\theta) = \deg(\theta)\int_N \omega = \int_M \theta^*\omega = \int_P \mathrm{d}\Theta^*\omega = \int_P \Theta^*\mathrm{d}\omega = 0.$$

□

4.2. Vektormező lokális indexe

Legyen $n \geq 2$, legyen $X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima vektormező és legyen $p \in \mathbb{R}^n$ izolált nullhelye. Legyen $B \cong D^n$ p környezete, amiben nincs más nullhely és legyen $i: S^{n-1} \to \partial B$ irányítástartó beágyazás. Legyen $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ normálás, ekkor $r \circ X \circ i: S^{n-1} \to S^{n-1}$ sima leképezés. Nevezzük $r \circ X \circ i$ fokát X p-beli lokális indexének, jelölje $\mathrm{ind}(X,p)$. Ez jóldefiniált, mivel minden így előálló i irányítástartó beágyazás homotóp ekvivalens, tehát a 4.1.1 Következmény szerint $r \circ X \circ i$ foka nem függ i választásától.
A fejezet hátralévő részében belátunk néhány hasznos lemmát a lokális indexről, ehhez p egy környezetére szorítkozva és azt átparaméterezve feltehetjük, hogy $p = 0$ és X-nek nincs más nullhelye.

4.2.1. Lemma. *Legyen* X *invertálható lineáris leképezés, ekkor*

$$\mathrm{ind}(X,0) = \mathrm{sgn}(\det X).$$

Bizonyítás. A Gauss-elimináció segítségével könnyen belátható, hogy $X|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ homotóp ekvivalens egy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{sgn}(\det X) \end{pmatrix}$$

mátrixú lineáris leképezés $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ra vett megszorításával. Ez vagy az identitás, vagy egy hipersíkra való tükrözés, könnyen ellenőrizhető, hogy az utóbbi $H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$-en a (-1)-gyel való szorzást indukálja. Tehát ez a leképezés $H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$-en a $\mathrm{sgn}(\det X)$-szel való szorzást indukálja és a 3.4.1 Következmény miatt $X|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ is. Viszont a következő kommutatív diagramm mutatja, hogy $X|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ $H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$-en az $\mathrm{ind}(X, 0)$-el való szorzást indukálja:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[r, "(X|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}})^*"] \arrow[d, shift left, "i^*"] & H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[d, shift left, "i^*"] \\
H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \arrow[r, "(r \circ X|_{S^{n-1}})^*"] \arrow[u, shift left, "r^*"] \arrow[d, "\int_{S^{n-1}}"] & H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \arrow[u, shift left, "r^*"] \arrow[d, "\int_{S^{n-1}}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

ahol $i: S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ a szokásos beágyazás. Itt az alsó nyíl definíció szerint az $\mathrm{ind}(X, 0)$-el való szorzás, tehát

$$\mathrm{ind}(X, 0) = \mathrm{sgn}(\det X).$$

□

4.2.1. Definíció. *Legyen X sima vektormező mathbbR^n-en, aminek csak a 0-ban van nullhelye. Nevezzük 0-t nemdegenerált nullhelynek, ha X Jacobi-mátrixa 0-ban invertálható.*

4.2.2. Lemma. *Ha 0 nemdegenerált nullhely, akkor*

$$\mathrm{ind}(X, 0) = \mathrm{sgn}(\det J)$$

ahol J X Jacobi-mátrixa 0-ban.

Bizonyítás. Legyen

$$G: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} Jx & t = 0 \\ \frac{X(tx)}{t} & t \neq 0 \end{cases}$$

és legyen

$$H = r \circ G|_{S^{n-1} \times [0,1]}: S^{n-1} \times [0, 1] \to S^{n-1},$$

ahol $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ szokásos beágyazását vesszük. Ez megad egy

$$r \circ X|_{S^{n-1}} \simeq r \circ J|_{S^{n-1}}$$

homotópiát, tehát az előző lemmát és a 4.1.1 Következményt használva

$$\mathrm{ind}(X, 0) = \mathrm{ind}(J, 0) = \mathrm{sgn}(\det J).$$

□

4.2.3. Lemma. *Legyen 0 nemdegenerált nullhelye X-nek és legyen*

$$\hat{X}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (x, y) \mapsto (X(x), y),$$

ekkor

$$\mathrm{ind}(\hat{X}, 0) = \mathrm{ind}(X, 0).$$

Bizonyítás. Legyen J, $\hat{J}$ az X illetve $\hat{X}$ Jacobi-mátrixa 0-ban, ekkor

$$\hat{J} = \left[\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

ahol $I \in \mathbb{R}^{k \times k}$ identitásmátrix, tehát $\hat{J}$ invertálható és

$$\det \hat{J} = \det J,$$

ekkor az előző lemmát használva

$$\mathrm{ind}(\hat{X}, 0) = \mathrm{sgn}(\det \hat{J}) = \mathrm{sgn}(\det J) = \mathrm{ind}(X, 0).$$

□

4.2.4. Lemma. *Legyen X sima vektormező mathbbR^n-en, aminek csak a 0-ban van nullhelye. Létezik $Y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima vektormező, aminek csak izolált nemdegenerált nullhelyei vannak, és egy kompakt halmazon kívül $Y = X$.*

Bizonyítás. Legyen $\phi: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ sima, amire

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

és legyen $y \in \mathbb{R}^n$, amire

$$|y| < \min_{1 \leq |x| \leq 2} |X(x)|$$

és y X reguláris értéke (ilyen van, mivel ezen a halmazon $|X(x)| > 0$, és a reguláris értékek sűrűek). Legyen

$$Y = X - \phi y,$$

ekkor a 2 sugarú zárt körlapon kívül $Y = X$. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $1 \leq |x| \leq 2$, akkor

$$|Y(x)| = |X(x) - \phi(x)y| \geq |X(x)| - \phi(x)|y| \geq c - |y| > 0,$$

tehát $Y(x) \neq 0$. Ekkor

$$Y^{-1}(\{0\}) = B_1(0) \cap X^{-1}(\{y\})$$

ahol $B_1(0)$ az egységkörlemez. Ekkor $\forall x \in Y^{-1}(\{0\})$-ra

$$J_x Y = J_x X$$

ahol J_xY, J_xX Y illetve X Jacobi-mátrixa x-ben, tehát mivel y X reguláris értéke J_xY invertálható. □

Legyen most $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $X: U \to \mathbb{R}^n$ olyan sima vektormező aminek csak izolált nullhelyei vannak. Legyen $P \subset U$ kompakt, peremes n dimenziós részsokaság, legyen a pereme M úgy irányítva, mint a 2.6 Fejezetben és M-en ne legyen X-nek nullhelye. Vegyük észre, hogy ekkor P-ben X-nek véges sok nullhelye van. Legyen X indexe P-n

$$\operatorname{ind}(X,P) = \sum_{p \in P | p \text{ } X \text{ nullhelye}} \operatorname{ind}(X,p).$$

Legyenek X nullhelyei P-ben $\{p_1, \ldots p_k,\}$, legyen $F = r \circ X: \ P \setminus \{p_1, \ldots, p_k\} \to S^{n-1}$ és legyen $f = F|_M$.

4.2.5. Lemma. *A fenti jelölésekkel*

$$\operatorname{ind}(X,P) = \deg(f)$$

Bizonyítás. Vegyük $\{p_1, \ldots, p_k\}$-nek $\{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_k\}$ a D^k-val homeomorf, diszjunkt, P-beli környezeteit. Ekkor definíció szerint $\forall$ i-re

$$\operatorname{ind}(X,p_i) = \deg(F|_{\partial \overline{B}_i}).$$

A 4.1.2 Lemmát fogjuk alkalmazni $P \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^k \operatorname{int} \overline{B}_i \right)$-re, ennek pereme

$$M \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{i=1}^{k} \partial \overline{B}_i \Big).$$

Figyeljük meg, hogy itt a $\partial \overline{B}_i$ peremeken az ellentétes irányítást kell használnunk, mivel a részsokaság rajtuk kívül van, tehát azt kapjuk, hogy

$$\deg(f) - \sum_{i=1}^{k} \deg(F|_{\partial \overline{B}_i}) = 0,$$

tehát összefoglalva

$$\operatorname{ind}(X,P) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(X,p_i) = \sum_{i=1}^{k} \deg(F|_{\partial \overline{B}_i}) = \deg(f).$$

□

4.2.1. Következmény. *A 4.2.4 Lemmában*

$$\sum_{x \ azY \ nullhelye} \operatorname{ind}(Y, x) = \operatorname{ind}(X, 0).$$

4.3. Vektormező indexe kompakt sima sokaságon

Legyen M kompakt, irányítható, n dimenziós sima sokaság, X sima vektormező M-en és (U, ϕ) M térképe. Legyen $\forall\ p \in U$-ra

$$(\phi_* X)_{\phi(p)} = \phi_{*p}(X_p),$$

ekkor $\phi_* X$ sima vektormező $\mathbb{R}^n$-en. Legyen $p \in U$ X izolált nullhelye, ekkor $\phi(p)$ a $\phi_* X$ izolált nullhelye. Legyen X lokális indexe p-ben

$$\operatorname{ind}(X, p) = \operatorname{ind}(\phi_* X, \phi(p)),$$

nevezzük p-t nemdegenerált nullhelynek, ha $\phi(p)$ a $\phi_* X$ nemdegenerált nullhelye. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek nem függnek (U, ϕ) választásától.
Legyenek most X-nek csak izolált nullhelyei, ekkor legfeljebb véges sok lehet, és legyen

$$\operatorname{ind}(X) = \sum_{p \in M | p \ X \ \text{nullhelye}} \operatorname{ind}(X, p).$$

A következő tételhez szükségünk lesz egy lemmára, az úgynevezett csőszerű-környezet-lemmára, amit most nem bizonyítunk be.

4.3.1. Lemma. *Létezik k amire M beágyazható $\mathbb{R}^k$-ba, és ha $i: \ M \to \mathbb{R}^k$ M beágyazása és M-et azonosítjuk* $\operatorname{Im}(i)$*-vel, akkor létezik $\rho \in \mathbb{R}^+$, $V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt és $r: \ V \to \mathbb{R}^k$ sima leképezés, amikre*

1. $M \subset V$,
2. $\operatorname{Im}(r) = M$,
3. $r|_M = \operatorname{id}_M$,
4. $\forall\ x \in M, y \in V \quad |y - r(y)| \leq |y - x|$,
5. $\forall\ x \in M, y \in V \quad |y - r(y)| = |y - x| \iff r(y) = x$,
6. $\forall\ x \in M \quad r^{-1}(\{x\}) = B_\rho(x) \cap T_p M^\perp$ *(ahol $B_\rho(x)$ az x középpontú ρ sugarú nyílt gólyó),*
7. $\forall\ \epsilon: \ M \to (0, \rho)$ *sima leképezésre* $\{x \in V || x - r(x)| = \epsilon(r(x))\}$ 1 *kodimenziós sima részsokaság* $\mathbb{R}^k$*-ban.*

Legyenek k, ρ, V, r ilyen tulajdonságúak és legyen $\forall\ \epsilon \in (0, \rho)$-ra

$$S_\epsilon = \{x \in V || x - r(x)| = \epsilon\}$$

és

$$N_\epsilon = \{x \in V || x - r(x)| \leq \epsilon\},$$

ekkor a lemmából világos, hogy N_ϵ peremes k dimenziós részsokaság $\mathbb{R}^k$-ban S_ϵ peremmel, és hogy $\forall\ x \in S_\epsilon$-ra

$$x - r(x) \in T_x S_\epsilon{}^\perp.$$

Legyen $\epsilon \in (0, \rho)$ fix és legyen

$$g: \ S_\epsilon \to S^{k-1} \quad x \mapsto \frac{x - r(x)}{|x - r(x)|}.$$

4.3.1. Tétel. *A fenti jelölésekkel*

$$\operatorname{ind}(X) = \deg(g).$$

Bizonyítás. A 4.2.4 Lemma és 4.2.1 Következmény miatt feltehető, hogy X-nek csak nemdegenerált szingularitásai vannak.
Legyen
$$Y:\ V \to \mathbb{R}^k \quad x \mapsto X(r(x)) + x - r(x)$$
sima vektormező V-n. Mivel $\forall\ x \in V$-re $X(r(x)) \perp x - r(x)$, $Y(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = r(x)$ azaz $x \in M$ és $X(r(x)) = X(x) = 0$, tehát Y nullhelyei pontosan X nullhelyei M-en. Itt X minden x nullhelye körül lokálisan a 4.2.3 Lemma helyzete áll fenn, tehát
$$\mathrm{ind}(X, x) = \mathrm{ind}(Y, x)$$
és ekkor
$$\mathrm{ind}(X) = \sum_{x\in M | x \ X \text{ nullhelye}} \mathrm{ind}(Y, x) = \mathrm{ind}(Y, N_\epsilon).$$
Legyen
$$f:\ S_\epsilon \to S^{k-1} \quad x \mapsto \frac{Y(x)}{|Y(x)|},$$
ekkor a 4.2.5 Lemma szerint
$$\mathrm{ind}(Y, N_\epsilon) = \deg(f).$$
Másrészt $\forall\ x \in S_\epsilon$-ra $f(x), g(x)$ N_ϵ-ból kifelé mutat, tehát ugyanabban a nyílt félsíkban vannak. Ekkor a
$$H:\ S_\epsilon \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x,t) \mapsto tf(x) + (1-t)g(x)$$
homotópiát ad f és g között, tehát a 4.1.1 Következményt használva
$$\deg(f) = \deg(g).$$
□

4.3.1. Következmény. *Minden M-en értelmezett sima, csak izolált nullhelyekkel rendelkező vektormező indexe megegyezik.*

A továbbiakban ezt az állandó idexet szeretnénk megtalálni.

4.4. Morse-függvények

Legyen n fix, M kompakt irányítható n-dimenziós sima sokaság és $f:\ M \to \mathbb{R}$ sima leképezés.

4.4.1. Definíció. *Nevezzük $\forall\ p \in M$-re p-t f kritikus pontjának, ha*
$$(\mathrm{d}f)_p = 0.$$

Legyen $p \in M$ az f kritikus pontja, ekkor van egy kvadratikus formánk, $d_p^2 f:\ T_pM \to \mathbb{R}$, amire $\forall\ \gamma:\ (-1,1) \to M, \gamma(0) = p$ sima görbére
$$d_p^2 f(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)''(0).$$
Könnyen ellenőrizhető, hogy ha (U, ϕ) M térképe, amire $p \in U$ és $\phi(p) = q$, akkor $D_q(\phi^{-1}) \circ d_p^2 f$ a
$$\Big(\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \phi^{-1})(q)\Big)\Big)$$
mátrixhoz tartozó kvadratikus forma.

4.4.2. Definíció. *Nevezzük p-t f nemelfajuló kritikus pontjának, ha a fenti mátrix invertálható (könnyen belátható, hogy ez nem függ (U, ϕ) választásától).*
Nevezzük f-et Morse-függvénynek, ha minden kritikus pontja nemelfejuló.

Legyen p az f nemelfajuló kritikus pontja.

4.4.3. Definíció. *Legyen*

$$\operatorname{ind}(f,p) = \max\{m | \exists\ V \leq T_pM, \dim(V) = m \text{ amire } d_p^2 f|_V \text{ negatív definit}\}.$$

4.4.1. Állítás. *Létezik M-nek (U, ϕ), $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ térképe, amire $p \in U$, $\phi(p) = 0$ és*

$$f|_U = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \pm x_i^2.$$

Bizonyítás. Feltehtő, hogy $f(p) = 0$, $M = \mathbb{R}^n$ és p f egyetlen kritikus pontja.
Legyen $\forall$ i-re

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx)dt,$$

ekkor

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i.$$

Ekkor $\forall$ i-re $g_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = 0$, tehát hasonlóan ha $\forall$ j-re

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} g_i(tx)dt,$$

akkor

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} x_j g_{ij},$$

tehát

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j g_{ij}.$$

Legyen $\forall$ i, j-re $h_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$, ekkor $((h_{ij}))$ szimmetrikus, és

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}.$$

Ekkor $\forall$ i, j-re

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) = 2h_{ij}(0),$$

tehát $((h_{ij}(0)))$ invertálható. Tegyük fel induktívan, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{k-1} \pm x_i + \sum_{i=k}^{n} x_i x_j h_{ij}$$

alakba írtuk, ahol $((h_{ij}(0)))$ invertálható. Lineáris koordinátacserével feltehető, hogy $h_{kk}(0) \neq 0$ és ekkor feltehető, hogy $h_{kk} \neq 0$, legyen $\delta = \operatorname{sgn}(h_{kk})$. Legyen

$$q = \sqrt{\delta h_{kk}},$$

legyen

$$y_k = q\Big(x_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{h_{ik}}{h_{kk}}\Big)$$

és legyen $\forall$ $j \neq k$-ra $y_j = x_j$. Ekkor $\frac{\partial y_k}{\partial x_k}(0) = q \neq 0$, tehát feltehető, hogy $\frac{\partial y_k}{\partial x_k} \neq 0$, ekkor az $(y_1, \ldots, y_n)$ koordinátázásra való áttérés megad egy ϕ diffeomorfizmust. Ekkor

$$f \circ \phi^{-1}(y) = f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \pm x_i^2 + x_k^2 h_{kk}(x) + 2x_k \sum_{i=k+1}^{n} x_i h_{ik}(x) + \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \pm x_i^2 + h_{kk}(x)\Big(x_k + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)}\Big)^2 - h_{kk}(x)\Big(\sum_{i=k+1}^{n} x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)}\Big)^2 + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \pm y_i^2 + \delta y_k^2 + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \pm y_i^2 + \delta y_k^2 + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} y_i y_j h_{ij} \circ \phi^{-1}(x).$$

Ekkor indukcióval kapjuk az állítást. □

Legyen X sima vektormező M-en.

4.4.4. Definíció. *Nevezzük X-et gradiensszerűnek f-hez, ha:*

1. *$\forall\ p \in M$-re, ha p nem kritikus pontja f-nek, akkor $(\mathrm{d}f)_p(X_p) > 0$,*
2. *$\forall\ p \in M$-re, ha p f kritikus pontja, akkor $\exists\ (U, \phi)$, $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ térképe M-nek, amire $p \in U$, $\phi(p) = 0$, $f|_U = f(p) - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2$ és $\phi_* X|_U = \mathrm{grad}(f \circ \phi^{-1})$.*

Legyen X gradiensszerű f-hez. Ekkor p egy környezetében

$$f = f(p) - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2$$

alakba írható, itt

$$\mathrm{grad} f = (-2x_1, \ldots, -2x_m, 2x_{m+1}, \ldots, 2x_n)$$

és

$$\Big(\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0)\Big)\Big) = \mathrm{diag}(-2, \ldots, -2, 2, \ldots, 2)$$

m darab -2 elemmel. Tehát ekkor

$$\mathrm{ind}(f, p) = m$$

és

$$\mathrm{ind}(X, p) = (-1)^m.$$

Ebből azonall kapjuk a következőt.

4.4.1. Tétel. *Ekkor*

$$\mathrm{ind}(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i$$

ahol $\forall$ i-re c_i az f i indexű kritikus pontjainak száma.

4.5. Morse-függvények létezése

Legyen n fix, M kompakt n-dimenziós sima sokaság, ekkor a 4.3.1 Lemma szerint $\exists$ k amire M beágyazható $\mathbb{R}^k$-ba. Legyen $i:\ M \to \mathbb{R}^k$ M beágyazása, és azonosítsuk M-et $\mathrm{Im}(i)$-vel.

4.5.1. Tétel. *Ekkor majdnem minden $p_0 \in \mathbb{R}^k$-ra*

$$f:\ M \to \mathbb{R} \quad p \mapsto \frac{1}{2}|p - p_0|^2$$

Morse-függvény.

Bizonyítás. Legyen (U,ϕ) M térképe és $g=\phi^{-1}:\mathbb{R}^n\to M\subset\mathbb{R}^k$. Legyen $k=n+m$, és legyenek $Y_1,\dots,Y_m:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ sima leképezések, amik $\forall x\in\mathbb{R}^n$-re $T_{g(x)}M^\perp$ bázisát adják. Elég a tételt $M=U$ esetben igazolni, mivel megszámlálható sok térképpel lefedhetjük M-et.
Legyen
$$\theta:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k\quad (x,y)\mapsto g(x)+\sum_{i=1}^m y_iY_i(x).$$
Megmutatjuk, hogy θ reguláris értékei alkalmas p_0-k, ez Saard lemmája értelmében elég az állítás igazolásához.
Legyen tehát $p_0\in M$ θ reguláris értéke és legyen f úgy mint az állításban, elég azt megmutatni, hogy $h=f\circ g:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Morse-függvény, ekkor
$$h(x)=\frac{1}{2}\langle g(x)-p_0,g(x)-p_0\rangle.$$
A konstrukció szerint $\forall\ i,l$-re
$$\langle\frac{\partial}{\partial x_i}g,Y_l\rangle=0,$$
tehát $\forall\ j$-re
$$\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}g,Y_l\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_i}g,\frac{\partial}{\partial x_j}Y_l\Big\rangle.$$
Másrészt $\forall\ i$-re
$$\frac{\partial}{\partial x_i}h=\Big\langle g-p_0,\frac{\partial}{\partial x_i}g\Big\rangle,$$
tehát $\forall\ j$-re
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}h=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j}g,\frac{\partial}{\partial x_i}g\Big\rangle+\Big\langle g-p_0,\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}g\Big\rangle,$$
és $\forall\ i$-re
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\theta(x,y)=\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)+\sum_{i=1}^m y_i\frac{\partial}{\partial x_i}Y_i(x)$$
illetve $\forall\ j$-re
$$\frac{\partial}{\partial y_j}\theta=Y_j.$$
Legyen x h kritikus pontja, ekkor $\forall\ i$-re
$$\Big\langle g(x)-p_0,\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\Big\rangle=\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)=0,$$
tehát $g(x)-p_0\in T_{g(x)}M^\perp$, ekkor $\exists\ y\in\mathbb{R}^m$ amire
$$g(x)-p_0=-\sum_{i=1}^m y_iY_i(x),$$
és $\theta(x,y)=p_0$. Ekkor $\forall\ i,j$-re
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}h=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j}g(x),\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\Big\rangle-\Big\langle\sum_{l=1}^m y_lY_l(x),\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}g(x)\Big\rangle=$$
$$=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j}g(x),\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\Big\rangle+\Big\langle\sum_{l=1}^m y_l\frac{\partial}{\partial x_j}Y_l(x),\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j}\theta(x,y),\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)\Big\rangle.$$
Legyen $A\in\mathbb{R}^{k\times k}$ θ Jacobi-mátrixa, ekkor A invertálható, és a fenti szerint
$$A^TD_xg=\left[\frac{B}{0}\right],$$

ahol

$$B = \Big(\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h\Big)\Big).$$

Mivel $D_x g$ rangja n, $AD_x g$ rangja is n, tehát B invertálható, és ekkor x h nemelfajuló kritikus pontja. □

Legyen $f:\ M \to \mathbb{R}$ Morse-függvény.

4.5.2. Tétel. *Ekkor $\exists$ X sima vektormező M-en, amire X gradiensszerű f-hez.*

Bizonyítás. Létezik M-et lefedő térképek egy $\{(U_i, \phi_i)\}$ rendszere, amire $\forall\, p \in M$, f kritikus pontjához $\exists!$ i amire $p \in U_i$, és ekkor $\phi_i(p) = 0$, és $f \circ \phi^{-1}$ olyan alakú, mint a 4.4.1 Állításban (ebből következik, hogy $\forall$ i-re U_i-ben legfeljebb 1 kritikus pont van). Legyen $\forall$ i-re

$$X_i = (\theta^{-1})_*(\mathrm{grad}(f \circ \phi^{-1})) \in TU_i.$$

Legyen $\{g_i\}$ egységosztás $\{U_i\}$-hez, és

$$X = \sum_i g_i X_i$$

(ahol $g_i X_i$-t 0-nak vesszük U_i-n kívül). Könnyen ellenőrizhető, hogy X gradiensszerű f-hez. □

4.6. Az Euler-karakterisztika

Legyen n fix, M n-dimenziós sima sokaság.

4.6.1. Definíció. *Ha $\forall$ $i \le n$-re $\dim H^i_{dR}(M) < \infty$, akkor legyen M Euler-karakterisztikája*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i_{dR}(M).$$

Belátható (például a fejezet hátralévő részét felhasználva), hogy ez a definíció egybeesik az Euler-karakterisztika szokásos definíciójával.

A 3.2.1 Következmény többszöri alkalmazásával könnyen belátható, hogy ha M kompakt akkor $\forall$ i-re $\dim H^i_{dR}(M) < \infty$, tehát $\chi(M)$ értelmes lesz. Szintén a 3.2.1 Következményből kapjuk a következő lemmát.

4.6.1. Lemma. *Legyen $U, V \subset M$ nyílt, ekkor ha $\chi(U)$, $\chi(V)$ értelmes, akkor $\chi(U \cup V)$ és $\chi(U \cap V)$ is az, és*

$$\chi(U) + \chi(V) = \chi(U \cup V) + \chi(U \cap V).$$

Legyen M kompakt, $f:\ M \to \mathbb{R}$ Morse-függvény, és $\forall$ $t \in \mathbb{R}$-re

$$M(t) = \{p \in M | f(p) < t\}.$$

Szükségünk lesz a következő két lemmára, amiket most nem bizonyítunk.

4.6.2. Lemma. *Ha $s < t \in \mathbb{R}$-re f-nek nincs kritikus értéke $[s,t]$-ben, akkor $M(s)$ és $M(t)$ diffeomorfak.*

4.6.3. Lemma. *Legyen t f kritikus értéke, $p_1, \dots, p_k$ a kritikus pontok $f^{-1}(t)$-ben, és $\forall$ i-re $\lambda_i = \mathrm{ind}(f, p_i)$. Ekkor $\exists$ $\epsilon > 0$, amire $\exists$ $U_1, \dots, U_k$ diszjunkt nyílt környezetei $p_1, \dots, p_k$-nak, és $\exists$ $V_1, \dots, V_k$ pontrahúzható nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^{n-\lambda_i+1}$-nek, amikre*

1. *$p_1, \dots, p_k$-n kívül nincs más kritikus pont $f^{-1}([t-\epsilon, t+\epsilon])$-ban,*
2. *$\forall$ i-re U_i $\mathbb{R}^n$ pontrahúzható nyílt részhalmazával diffeomorf,*
3. *$\forall$ i-re $U_i \cap M(t-\epsilon)$ diffeomorf $S^{\lambda_i - 1} \times V_i$-vel,*
4. *$M(t+\epsilon)$ diffeomorf $M(t-\epsilon) \cup (\bigcup_{i=1}^k U_i)$-vel.*

4.6.4. Lemma. *Az előző lemma esetében ha $\chi(M(t-\epsilon))$ értelmes, akkor $\chi(M(t+\epsilon))$ is az, és*

$$\chi(M(t+\epsilon)) = \chi(M(t-\epsilon)) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\lambda_i}.$$

Bizonyítás. Legyen $\forall$ j-re $c_j = |\{i|\lambda_i = j+1\}|$. Legyen $U = \bigsqcup_{i=1}^{k} U_i$, ekkor a 3.4.2 Következményből, a 3.5.2 Lemma többszöri alkalmazásával, a 3.5.1 Következményt illetve a 3.5.3 Következményt és a 3.5.1 Állítást használva $\forall$ m-re

$$H^m_{dR}(U) = \begin{cases} \mathbb{R}^k & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases},$$

és

$$H^m_{dR}(U \cap M(t-\epsilon)) = \begin{cases} \mathbb{R}^{k+c_0} & m = 0 \\ \mathbb{R}^{c_m} & m \neq 0 \end{cases},$$

tehát $\chi(U) = k$ és

$$\chi(U \cap M(t-\epsilon)) = k - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\lambda_i}.$$

A 4.6.1 Lemma szerint

$$\chi(M(t+\epsilon)) = \chi(M(t-\epsilon) \cup U) = \chi(M(t-\epsilon)) + \chi(U) - \chi(M(t-\epsilon) \cap U) =$$

$$= \chi(M(t-\epsilon)) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\lambda_i}.$$

□

Legyen $\forall$ λ-ra c_λ f λ indexű kritikus pontjainak száma. Ahogy t végigfut $\mathbb{R}$-en az előző, és a 4.6.2 Lemmákból kapjuk a következőt (felhasználva, hogy $\exists$ $t \in \mathbb{R}$ amire $M(t) = \emptyset$ és amire $M(t) = M$, illetve, hogy $\chi(\emptyset) = 0$).

4.6.1. Állítás. *Ekkor*

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda.$$

4.6.1. Következmény. *Ha n páratlan, akkor $\chi(M) = 0$.*

Bizonyítás. A 4.5.1 Tétel szerint $\exists$ $f: M \to \mathbb{R}$ Morse-függvény, ekkor könnyen meggondolható, hogy $-f$ is Morse-függvény, és $p \in M$ pontosan akkor f λ indexű kritikus pontja, ha $-f$ $n-\lambda$ indexű kritikus pontja. Erre a két függvényre felírva a fenti állítást, felhasználva, hogy n páratlan

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} c_\lambda = -\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda = -\chi(M),$$

tehát $\chi(M) = 0$. □

Végül mindent összefoglalva kapjuk a következő tételt.

4.6.1. Tétel. *Legyen M kompakt n-dimenziós sima sokaság, és X sima vektormező M-en aminek csak izolált szingularitásai vannak, ekkor*

$$\mathrm{ind}(X) = \chi(M).$$

Bizonyítás. A 4.5.1 Tétel szerint $\exists\, f: M \to \mathbb{R}$ Morse-függvény, és a 4.5.2 Tétel szerint $\exists\, Y$ sima vektormező M-en, amire Y gradiensszerű f-hez. Legyen $\forall\, \lambda$-ra c_λ mint az előbb, ekkor a 4.3.1 Következmény szerint

$$\operatorname{ind}(X) = \operatorname{ind}(Y),$$

a 4.4.1 Tétel szerint

$$\operatorname{ind}(Y) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda,$$

és a 4.6.1 Állítás szerint

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda = \chi(M).$$

□

4.6.2. Következmény. *Ha $\chi(M) \neq 0$, akkor nem létezhet M-en sehol sem 0 sima vektormező.*

Ekkor a 3.5.1 Állításból azonnal kapjuk a következőt.

4.6.3. Következmény. *Ha n páros, akkor nem létezhet S^n-en sehol sem 0 sima vektormező.*

Hivatkozások

[1] Ib Madsen, Jorgen Tornehave. From Calculus to Cohomology. Cambridge University Press 1997.

[2] Glen E. Bredon. Topology and Geometry. Springer-Verlag New York Inc. 1993.

[3] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press 2001.

[4] Raoul Bott, Loring W. Tu. Differential Forms in Algebraic Topology. Springer-Verlag New York Inc. 1982.