Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

CSAPLÁR VIKTOR

GRÁFPOLITÓPOK

Szakdolgozat
Matematika BSc

Témavezető:
TÓTHMÉRÉSZ LILLA

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni Tóthmérész Lilla témevezetőmnek a már három éves témavezetést. Szakértelme, tanácsai, valamint a konzultációk nagyban segítettek, hogy megírjam a szakdolgozatomat. Szeretném továbbá megköszönni családomnak és barátaimnak a sok-sok támogatást, és a motivációt, amit kaptam tőlük.

1. fejezet

Bevezetés

A szimmetrikus élpolitóp egy gráfhoz rendelt rácspolitóp, amit aktívan kutatnak szép geometriája, illetve alkalmazásai miatt. Egyik ilyen alkalmazása a fizikában fellelhető, az úgynevezett Kuramoto szinkronizációs modellben. Ez a modell oszcillátorok viselkedését írja le, ahol az egyes kölcsönhatások egy gráffal vannak modellezve. Chen és Davis [1] cikkében megmutatták, hogy egy felső korlát a stabil állapotok számára, meghatározható a szimmetrikus élpolitóp térfogatából.

Dolgozatomban én leginkább a szimmetrikus élpolitóp irányított gráfokra, illetve súlyozott irányított gráfokra való általánosításaival fogok foglalkozni, ezen belül is a lapok leírásával, valamint a lapok és a gráfstruktúra közötti kapcsolatokkal.

Először egy teljesen gráfelméleti fogalommal fogunk foglalkozni, a szép feszítőfákkal. Ki fog derülni, hogy minden összefüggő irányított gráfnak létezik szép feszítőfája. Ezután a szép feszítőfákat általánosítjuk súlyozott irányított gráfokra. Belátjuk, hogy egy összefüggő súlyozott irányított gráfban pontosan akkor lesz szép feszítőfa, ha konzervatívan élsúlyozott. Végül pedig belátjuk, hogy minden minimális kötésre létezik azt tartalmazó szép feszítőfa.

A második fejezetben megismerkedünk a gráfpolitópokkal, és bemutatjuk a szép feszítőfák geometriai jelentését. Egy gráf éleinek megfeleltetünk pontokat a $|V|$ dimenziós térben, és ezek konvex burka lesz az élpolitóp. Az élpolitopok lapjainak jellemzése megjelenik a [2], [3] és [4] cikkeben. A lapok jellemzésére adok egy önállóan kidolgozott bizonyítíst adni. Ki fog derülni, hogy a kiterjesztett élpolitóp oldalait meg tudjuk feleltetni a gráf irányított vágásainak, vagy éppen a szép feszítőfáknak.

Végül pedig a [5] cikk második fejezete alapján bemutatom a kapcsolatot a szimmetrikus élpolitóp és egy másik politópcsalád között. Vershik definiálta véges metrikus terekhez rendelt Kantorovich-Rubenstein politópot. Megmutatom, hogy ez a politóp megkapható a szimmetrikus élpolitópot egy megfelelő altérrel elmetszve.

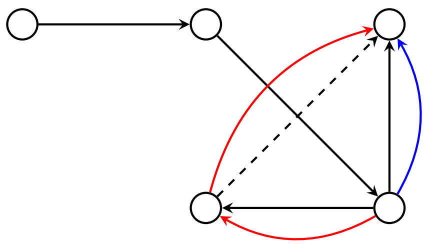
2. fejezet

Szép feszítőfák

2.1. Irányított gráfok

2.1.1. Definíció. *Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf. Ennek legyen $F = (V, H)$ egy feszítőfája. Vegyünk egy $e \in E \backslash H$ élet. Ekkor az $(V, F \cup e)$ gráfban az irányítástól eltekintve létrejön pontosan egy kör, ez legyen K. Ekkor jelölje $K_+(F, e)$ azon a K-ban lévő élek számát, melyek iránya a kör mentén megegyezik e irányával, ezekre az élekre a későbbiekben élőreélekként hivatkozok. Jelölje $K_-(F, e)$ pedig az e-vel ellentétes irányba álló K-beli élek számát, ezekre az élekre a késsőbbiekben hátraélekként hivatkozok.*

2.1.2. Definíció. *Egy $e \in E \backslash H$ élre azt mondjuk, hogy szép az F feszítőfa szerint, ha $K_+(F, e) - K_-(F, e) \geq 0$, vagyis ha a $(V, H \cup e)$ gráfra, K-ban az előreélek száma legalább annyi, mint a hátrélek száma.*



2.1. ábra. Az ábrán a fekete élek alkotják a gráf feszítőfáját, a szaggatottan ábrázolt él pedig a fán kívüli él. A létrejövő K kör élei színessel vannak jelölve, a pirosak az előre élek, a kékek pedig a hátraélek.

2.1.3. Definíció. *Egy $F = (V, H)$ feszítőfa szép, ha $\forall e \in E \backslash H$ él szép.*

2.1.4. Megjegyzés. *Az $e \notin H$ feltételre valójában nincs szükségünk. Egy $e \in H$ élre, $(V, H \cup e)$ gráfban lévő kör az e él két reprezentációjából fog álni, így ekkor $K_+(F,e) = K_-(F,e) = 1$. Vagyis $\forall e \in H$ él szép.*

2.1.5. Definíció. *Legyen F egy fenyő v gyökérrel. Ekkor jelölje $s_v(i)$ az i csúcs távolságát v-től az F fenyőben, ami egyenlő a $v \to i$ egyértelmű F-beli út éleinek számával*

2.1.6. Tétel. *Minden összefüggő irányított gráfnak van szép feszítőfája*

Először az alábbi egyszerűbb esetet látjuk be:

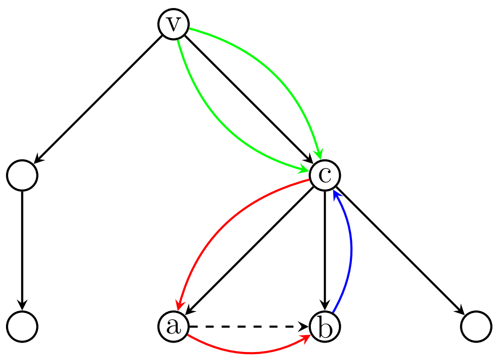
2.1.7. Lemma. *Ha a G gráfban van olyan csúcs, amiből bármely másik csúcs elérhető irányított úton, akkor G-nek van szép feszítőfája.*

Bizonyítás. Legyen v az a csúcs, amiből bármely másik csúcs elérhető irányított úton.

Vegyük ezen v csúcsból induló legrövidebb utak fáját, ez legyen $F = (V, H)$. Azt fogjuk belátni, hogy ez egy szép feszítőfa lesz.

Vegyünk egy tetszőleges $e = \overrightarrow{ab}$ élet. Szeretnénk megtudni az $(V, H \cup e)$ gráfban lévő K körben az előre- és hátraélek különbségét.

Nézzük meg a legrövidebb utak fájában futó $\overrightarrow{va}$ és $\overrightarrow{vb}$ utakat, és legyen c az a csúcs, amin átmegy mindkét út, és $s_v(c)$ maximális. Jelen esetben használhatjuk az 2.1.5 definíciót, mivel a legrövidebb utak fája egy fenyő.



2.2. ábra. Az ábrán a feszítőfához az $\overrightarrow{ab}$ élet vettük hozzá. Az létrjövő kör élei hasonlóan vannak jelölve, mint a korábbi ábrán. Zölddel van jelölve a $\overrightarrow{vc}$ út, amit ketszeresen beveszünk a körbe. (Jelen esetben ez az út csak egy élből áll)

Ekkor legyen K' az a kör $(V, H \cup e)$-ben, hogy K-hoz hozzávesszük a va utat mindkét irányba. Ekkor $K'_+(F,e) = K_+(F,e) + s_v(c)$, és $K'_-(F,e) = K_-(F,e) + s_v(c)$, vagyis $K'_+(F,e) - K'_-(F,e) = K_+(F,e) - K_-(F,e)$.

K'-ben viszont tudjuk az előre- és hátrélek számát. $K'_+(F,e) = s_v(a)+1$, mert mert akkor lépünk előre, amikor v-ből a-ba tartunk a legrövidebb úton, valamint még az $\overrightarrow{ab}$ lesz előreél. $K'_-(F,e) = s_v(b)$ hasonlóan.

Vagyis azt kell ellenőriznünk, hogy tetszőleges e élre, ahol $e \notin H$, $s_v(a)+1 \geq s_v(b)$. Ez az egyenlőtlenség viszont fennáll, mert ellenkező esetben a K'-beli előreélek, egy rövidebb $\overrightarrow{vb}$ utat biztosítanak b-be, mint a legrövidebb utak fájabeli. Vagyis F tényleg szép feszítőfa. □

Most térjünk rá a a 2.1.6 tétel bizonyítására.

Bizonyítás. Először is válasszunk ki egy tetszőleges x_1 csúcsot, továbbá jelölje X_1 a x_1-ből irányított úton elérhető csúcsok halmazát. Legyen $F_1 = (V, H_1)$ a x_1-ből induló legrövidebb utak fája X_1-en. Ekkor azon élek, melyek mindkét végpontja X_1-beli, szép lesz 2.1.7 miatt.

Ha ekkor $X_1 = V$, akkor készen vagyunk.

Ha $X_1 \neq V$, akkor nézzük azokat az éleket, amelyek kezdőpontja $V \backslash X_1$-beli, végpontja pedig X_1-beli. Ezek közül válasszuk ki azt az élet, melynek y végpontjára $s_{x_1}(y)$ maximális, ha több ilyen is van akkor ezek közül egyet. Ezen él kezdőpontja legyen x_2. Ekkor legyen X_2 azon csúcsok halmzaza, amelyek elérhetők x_2 csúcsból, de nem X_1-beliek.

Legyen $G_2 = (V, H_2)$ az x_2-ből induló legrövidebb utak fája. Azt meg kell gondolni, hogy egy $z \in X_2$ csúcsra a legrövidebb $\overrightarrow{x_2 z}$ irányított út tényleg csak X_2-beli csúcsokon megy keresztül. $V \backslash (X_1 \cup X_2)$-beli csúcsot nyilván nem érinthet, mert az út minden csúcsa is elérhető X_2-ből. Viszont X_1-beli csúcson sem mehet kersztül, mert akkor $z \in X_1$ már fennállna.

2.1.8. Definíció. *Terjesszük ki az s függvényt tetszőleges F fára. Jelölje $s_v(u)$ az F-beli egyértelmű vu út során érintett előre élek, és hátraélek különbségét.*

2.1.9. Megjegyzés. *Ez tényleg az eddig használt s függvény kiterjesztése, mivel ha a fabeli út nem tartalmaz hátraélet, akkor csak az előre élek számával lesz egyenlő az s által felvett érték, ami pont megegyezik a korábbi definícióval.*

Ekkor nézzük az $F_2 = (V, H_1 \cup H_2 \cup \overrightarrow{xy})$ gráfot. Ez egy szép fa az $X_1 \cup X_2$ csúcshalmazon. Ehhez használjuk az újonnan definiált s függvényt az $X_1 \cup X_2$ csúcshalmazon. Az F_2 gráf egy fa lesz, mert két diszjunkt fa éleit, és egy azokat összekötő élet tartalmaz.

Nézzünk egy tetszőleges $\overrightarrow{ab}$ élet. Ekkor ha mindkét végpont X_1-beli, vagy mindkettő X_2-beli, akkor 2.1.7 miatt, tudjuk hogy szép élet választottunk ki. Az $a \in X_1$

és $b \in X_2$ esettel nem kell foglalkozni, mert ilyen él nincs, mert ha a elérhető x_1-ből, akkor b is. Vagyis maradt az az eset, amikor $a \in X_2$ és $b \in X_1$.

Nézzük az $(V, H_1 \cup H_2 \cup \overrightarrow{xy} \cup \overrightarrow{ab})$ gráfot, és ennek K körét.

Ugyanazt a gondolatmenetet követjük, mint 2.1.7 bizonyításában. Az x_1a és x_1b utak közös részét kétszeresen hozzávéve K-hoz, kapjuk a K' kört, és ezúttal is azt kell belátni, hogy $s_{x_1}(a) + 1 \geq s_{x_1}(b)$.

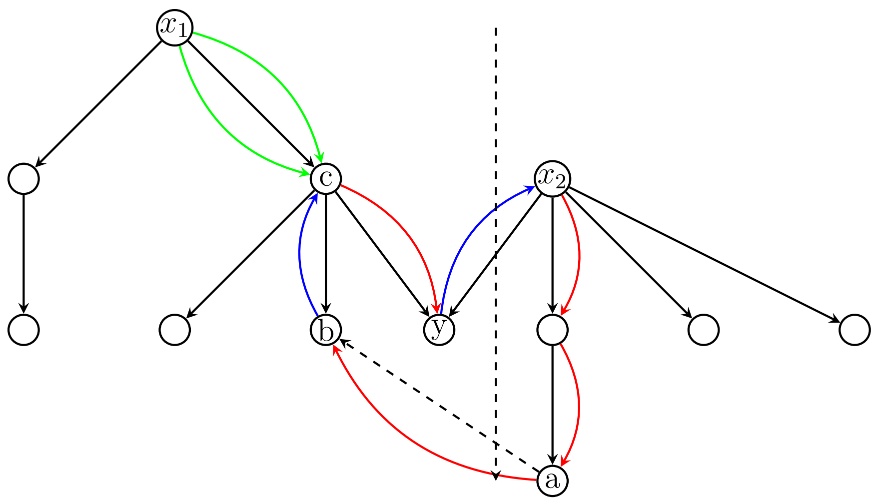
Tudjuk, hogy $s_{x_1}(x_2) \leq s_{x_1}(a)$, mivel minden $u \in X_2$ csúcsra, az x_1u átmegy az yx_2 élen, de az x_2u részúton már csak előreélek szerepelnek.

Továbbá $s_{x_1}(b) \leq s_{x_1}(y)$, mivel y-t úgy választottuk meg, hogy $s_{x_1}(y)$ maximális legyen. Viszont $s_{x_1}(y) = s_{x_1}(x_2) + 1$

Amiből $s_{x_1}(b) \leq s_{x_1}(a) + 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, és pont ezt akartuk belátni.

Legyen $S_1 = X_1$, valamint $S_2 = X_1 \cup X_2$. Ezzel sikerült az S_1 halmazt S_2-re bővíteni, hogy minden S_2-ből S_2-be futó él szép. Ezután az S_2 halmazt bővítjük hasonlóan S_3-ra, amit meg is tudunk tenni, mert F_1-ről azt használtuk, hogy szép feszítőfa. És ezt egészen addig ismételve, amíg valamelyik $S_i = V$ teljesül. Mivel a halmaz mérete folyamatosan nő, ezért valamikor eljutunk oda, hogy $S_i = V$ fennáll, és ezzel megkapjuk G egy szép feszítőfáját.

□



2.3. ábra. A szaggatott vonal bal felére esnek az X_1-beli csúcsok, a baloldalra pedig az X_2-beli csúcsok. A piros élek most is a kör előreéleit jelöli, a kékek a hátraéleket, a zölddel pedig a kétszeresen bevett $\overrightarrow{x_1c}$ út élei. A felső sor csúcsaira $s_{x_1} = 0$, a második sor csúcsaira $s_{x_1} = 1$, és így tovább

2.2. Élsúlyozott irányított gráfok

2.2.1. Definíció. *Legyen egy* $G = (V, E)$ *elsúlyozott irányított gráf. Jelölje* $s(ab)$ *az* $\overrightarrow{ab}$ *irányított él súlyát. Legyen* $F = (V, H)$ *ezen gráf egy feszítőfája. Legyen* $e \notin H$ *él, és nézzük a* $(V, H \cup e)$ *gráf* K *körét. Ekkor legyen* $K_+(F, e)$ *a* K *körben* e*-vel egyirányú elék súlyainak összege. Hasonlóan legyen* $K_-(F, e)$ *a* K *körben* e*-vel ellentétes irányba álló élek súlyainak összege. Az* $e \notin H$ *él szép, ha* $K_+(F, e) - K_-(F, e) \geq 0$

Megjegyzés: Ebben az esetben is elmondható, hogy minden $e \in H$ él szép, mert ekkor a K kör az e él két reprezentációjából áll. Ekkor $K_+(F, e) = K_-(F, e)$ vagyis e tényleg szép.

2.2.2. Definíció. *Egy* $F = (V, H)$ *feszítőfa szép, akkor, ha* $\forall e \notin H$ *él szép.*

2.2.3. Megjegyzés. *Felmerülhet, az olvasóban, hogy nem-e tudunk megszabadulni a negatív élsúlyoktól, és egy olyan gráfra áttérni, ahol csak pozitís élsúlyok vannak.*

Adja magát, a következő gondolat. Ha van a gráfban egy negatív súlyú él, cseréljük ki ezt az élet egy ellwntétes irányú élre, aminek súlya pedig legyen az eredeti él súlyának ellentettje.

Ez látszólag nem okoz semmilyen problémát, hiszen ha ez az él bármikor is benne van egy él K *körében, akkor az új él pontosan ugyanúgy fog beszámolódni a végső összegbe, hiszen egyszer az irány, egyszer pedig az előjel változás miatt szoroztunk* -1*-gyel, amik kiejtik egymást.*

A probléma ezzel a gondolattal akkor lép fel, amikor ennek az élnek a körét vizsgáljuk. Hiszen ekkor ha továbbra is az eredeti irány szerint számolnánk, akkor az előzőhöz hasonlóan az összeg most sem változna. Viszont az élünk már a másik irányba áll, ami az egész kifejezésnek ad egy -1*-es szorzót, ami elrontja az egészet.*

A következőkből kiderül, hogy a negatív éleknek igenis van jelentőségük egy szép feszítőfa létezésére vonatkozóan.

2.2.4. Tétel. *Egy* $G = (V, E)$ *élsúlyozott irányított gráfban nincs szép feszítőfa, ha* G *nem konzervatívan élsúlyozott.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $G = (V, E)$ nem konzervatívan élsúlyozott gráfot, és tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $F = (V, H)$ szép feszítőfája. Ekkor legyen $e_1, e_2, ..., e_n$ élek által alkotott körre $\sum_{i=1}^{n} s(e_i) < 0$. Ahol $e_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, és $A_1 = A_{n+1}$

Definiáljuk u_i-t a következőképpen. Vegyünk egy e_i élet, ahol $1 \leq i \leq n$, és nézzük az $(V, H + e_i)$ gráfban létrejövő K_i kört. Legyen U_i az az út, amit úgy kapunk, hogy

K_i körből elhagyjuk az e_i élet. Legyen továbbá $u_i = K_{i+}(F,e) - K_{i-}(F,e) - s(e_i)$. Ezzel valójában azt kaptuk meg, hogy az F fában futó, $A_{i+1}A_i$ úton az irány szerinti súlyösszeg u_i

Mivel $\forall e \in E$ él szép a feltevésük miatt, ezért $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$-re

$$K_+(F,e) - K_{i-}(F,e) = u_i + s(e_i) \geq 0$$

Ekkor viszont nézzük azt az F-beli utat, amit úgy kapunk, hogy összefűzzük az $U_1, U_2, ..., U_{n-1}$ utakat, ez legyen egy U. Ez egy út lesz A_1 és A_n között, ahol valamely éleket akár többször is tartalmazhatunk. Ekkor nézzük meg, hogy milyen kapcsolat van U_n és U között. Mivel F egy feszítőfa, ezért U előállítható úgy, hogy U_n-hez hozzáadunk néhány oda-visszautat.

Ebből viszont azt kapjuk, hogy $u_n = \sum_{i=1}^{n} -u_i$.

$$k_{n+}(F,e) - k_{n-}(F,e) = u_n + s(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} -u_i + s(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(-u_i - s(e_i)) + \sum_{i=1}^{n} s(e_i)$$

Ahol viszont $\sum_{i=1}^{n-1}(-u_i - s(e_i)) \leq 0$ és $\sum_{i=1}^{n} s(e_i) < 0$, vagyis $k_{n+}(F,e) - K_{n-}(F,e) < 0$, vagyis e_n nem egy szép él. Ezzel pedig ellentmondást kaptunk, vagyis egy nem konzervatívan élsúlyozott gráfban nincs szép feszítőfa.

□

2.2.5. Tétel. *Minden konzervatívan élsúlyozott gráfnak létezik szép feszítőfája.*

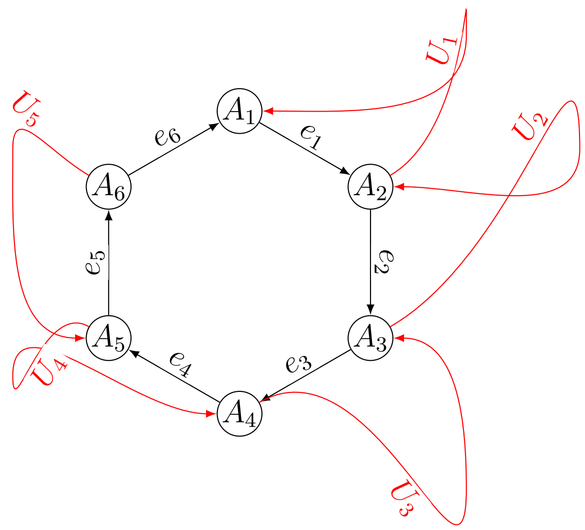
Bizonyítás. Legyen $G = (V, E)$ konzervatívan élsúlyozott írányított gráf. A bizonyítás hasonlóan fog felépülni, mint a nem súlyozott esetben.

2.2.6. Definíció. *Legyen F egy súlyozott fenyő v gyökérrel. Ekkor jelölje $s_v(u)$ a vu egyértelmü úton érintett élek súlyainak összegét.*

2.2.7. Állítás. *Ha az G konzervatívan irányított gráfban van olyan csúcs, amiből bármely másik csúcs elérhető, akkor létezik szép feszítőfája.*

Bizonyítás. Legyen v az a csúcs, amiből bármely másik csúcs elérhető. Mivel G konzervatívan élsúlyozott, ezért létezik a v csúcsból induló legrövidebb utak fája, ez legyen $F = (V, H)$. Azt fogjuk belátni, hogy ez egy szép feszítőfa.

Ekkor nézzünk egy tetszőleges $\overrightarrow{ab}$ élet, és az $(V, h \cup \overrightarrow{ab})$ gráf K körét. Ekkor legyen most is k az a csúcs, ami része a legrövidebb $\overrightarrow{va}$ és $\overrightarrow{vb}$ utaknak, de a $\overrightarrow{ka}$ és $\overrightarrow{kb}$ utaknak már nincs másik közös csúcsa. Ekkor vegyük hozzá a K körhöz kétszeresen a $\overrightarrow{vk}$ utat. Ezzel azt kapjuk, hogy hogy $K_+(F,e) - K_-(F,e) = s_v(a) + s(\overrightarrow{ab}) - s_v(b)$



2.4. ábra. A bizonyításban a fekete élekkel jelölt kört vizsgáltuk, a piros élek pedig a megfelelő utakat jelölik

Vagyis azt kell belátni, hogy $s_v(a) + s(\overrightarrow{ab}) \geq s_v(b)$. Ez az egyenlőtlenség viszont fennáll, mert különben az $(V, H \cup \overrightarrow{ab})$ gráfbeli $\overrightarrow{va} + \overrightarrow{ab}$ út rövidebb lenne, a legrövidebb utakfája beli útnál.

□

Ezek után térjünk rá az általános esetre. Válaszzunk ki egy tetszőleges x_1 csúcsot, és vegyük a x_1-ből elérhető csúcsok halmazán, ez legyen X_1, az $F_1 = (X_1, H_1)$ legrövidebb utak fáját. Először terjesszük ki az s függvényt most is tetszőleges fára:

2.2.8. Definíció. *Legyen F egy irányított fa. Valamint legyen v egy kiemelt csúcs. Ekkor jelölje $s_v(u) = e(vu) - h(vu)$, ahol $e(vu)$ az F-beli vu út előre éleinek súly-összege, $h(vu)$ pedig a hátraélek súlyösszege.*

Ekkor az 2.2.7 eset miatt, az $X_1 \to X_1$ elék szépek lesznek. Ekkor ezt az X_1 csúcshalmazt szeretnénk bővíteni hasonlóan, mint ahogy a 2.1.6 tételben tettük. Akkor azt csináltuk, hogy meg néztük a $V \setminus X_1 \to X_1$ élek közül, melyik végpontjára lesz az s függvény maximális. Ez a súlyozott esetben nem teljesen működik.

Válasszuk ki egy tetszőleges $\overrightarrow{y_1 z_1}$ élet. Ekkor legyen $Y_1 \subset V \setminus X_1$ azon csúcsok halmaza, amik elérhetőek y_1-ből. Ekkor vegyük az Y_1 halmazon vett, $K_1 = (Y_1, L_1)$ legrövidebb utak fáját.

Vizsgáljuk az $I_1 = (V, H_1 \cup L_1 \cup \overrightarrow{y_1z_1})$ fát. A 2.1.6 bizonyításához hasonlóan most is elég csak az Y_1-ből X_1-be futó élekkel foglalkozni, továbbá egy $\overrightarrow{ab}$ él most is pontosan akkor lesz szép, ha $s_{x_1}(a) - s_{x_1}(b) + s(\overrightarrow{ab}) \geq 0$. Ekkor, ha az így kapott fa szép, akkor sikeresen bővítettük X_1-et. Mi van akkor, ha létezik egy olyan él, ami nem szép?

Tegyük fel, hogy az így kapott fa nem szép az $X_1 \cup Y_1$ halmazon. Ezt azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\overrightarrow{y_2z_2}$ él, amire $s_{x_1}(y_2) < s_{x_1}(z_2) - s(\overrightarrow{y_2z_2})$. Itt nyilván $y_2 \in Y_1$ és $z_2 \in X_1$.

Ekkor legyen $Y_2 \subset V \backslash X_1$ azon csúcsok, melyek elérhetőek y_2-ből, de nem X_1-beliek. Mivel $y_2 \in Y_1$, ezért $Y_2 \subset Y_1$. Legyen továbbá $K_2 = (Y_2, L_2)$ a legrövidebb utak fája Y_2-n. Ekkor vegyük az $I_2 = (V, H_1) \cup L_2 \cup \overrightarrow{y_2}$ fát. Legyen továbbá az s függvény I_2-beli megfelelője t.

Ekkor mivel s és t esetében is a kiemelt csúcsunk x_1 volt, ezért $\forall u \in X_1 : s_{x_1}(u) = t_{x_1}(u)$. Ezen felül azt fogjuk belátni, hogy $\forall u \in Y_2 : s_{x_1}(u) < t_{x_1}(u)$. t tulajdonságaiból következik, hogy $t_{x_1}(y_2) = t_{x_1}(z_2) - s(\overrightarrow{y_2z_2})$. Ebből viszont következik, hogy $t_{x_1}(y_2) > s_{x_1}(y_2)$.

Jelölje $u \in Y_2$ csúcsra $f(u)$ a K_2-beli y_2u út súlyát. Ekkor $t_{x_1}(u) = t_{x_1}(y_2) + f(u)$. Továbbá $s_{x_1}(u) \leq s_{x_1}(y_2) + f(u)$, mert Y_1-ben is el lehet jutni $f(u)$ súlyú úton y_2-ből u-ba. Viszont ebből azt kapjuk, hogy:

$$s_{x_1}(u) \leq s_{x_1}(y_2) + f(u) < t_{x_1}(y_2) + f(u) = t_{x_1}(u) \tag{2.2.1}$$

Vagyis $\forall u \in Y_2$ csúcsra $s(u) < t(u)$. Miért is jó ez nekünk?

Nézzük az I_2 fát. Ekkor ha továbbra sem egy szép fát kaptunk, akkor ugyanezen módszerrel kapunk egy I_3 fát, és így tovább. Ezt a módszert viszont csak véges sok alkalommal lehet megismételni. Ugyanis minden lépéssel, az Y_i-beli csúcsok súlya nő, viszont az egész gráfnak véges sok fája van, ezért minden u csúcsra az $s(u)$ érték véges sok értéket vehet fel. Így előbb vagy utóbb eljutunk oda, a magmaradó csúcsok súlya nem növelhető, és ekkor mindenképpen szép fát kapunk. Ekkor minden ilyen fa, az eredeti F_1 fa egy valódi bővítése, vagyis lesz benne olyan csúcs, amit F_1-ben nem volt. Vagyis ezzel az eljárással találunk az $X_2 \supset X_1$ halmazon egy szép feszítőfát. És ezt a lépést ismételve a teljes V-n fogunk kapni egy szép feszítőfát. □

2.2.9. Tétel. *Egy összefüggő élsúlyozott gráfnak pontosan akkor van szép feszítőfája, ha a gráf konzervatívan élsúlyozott.*

2.3. Minimális kötés

2.3.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ összeföggő irányított gráf csúcsainak egy $V = A \sqcup B$ partícióját irányított vágásnak nevezünk, ha nem létezik olyan $\overrightarrow{uv}$ él, amire $u \in B$ és $v \in A$*

Egy irányított vágást a partíciók helyett, lehet a partíciók között futó élek halmazával is leírni.

2.3.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányított gráf egy $K \subset E$ élhalmazát kötésnek nevezzük, ha tetszőleges $A \subset E$ élhalmazra, melyek egy irányított vágás éleiből állnak, $E \cap A \neq \emptyset$*

2.3.3. Definíció. *Egy K kötést minimális kötésnek nevezünk, ha nincs olyan L kötés, amire $|L| < |K|$.*

Nyilván minden irányított gráfnak létezik kötése, mert a $K = E$ élhalmaznak minden irányított vágással van metszete, ezért van értelme minimális kötésekről beszélni.

Vegyünk egy irányított gráfnak egy tetszőleges, nem irányított körét. Ekkor azt mondjuk, hogy a körben az lesz a domináns irány, amelyik irányba több él mutat a kör mentén. Ha a két irányba ugyanannyi él mutat, akkor nincs domináns irány.

2.3.4. Állítás. *Legyen L egy irányított gráf nem irányított köre. Ekkor tetszőleges K minimális kötésre létezik olyan e él ezen a körön, amelyik a domináns irányba áll, és $e \notin K$*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van egy olyan K minimális kötés, ami tartalmazza az L kör minden domináns irányba álló élét. Ekkor változatssuk meg a kötést úgy, hogy a domináns irányba álló éleket cseréljük ki az azzal ellentétes irányba álló élekre. Azt állítjuk, hogy ez továbbra is egy kötés lesz, és kisebb elemszámú, mint a kiindulási minimális kötés.

Az, hogy ezen halmaz elemszáma kisebb lett, következik abból, hogy a domináns irányba álló élek száma, szigorúan nagyobb, mint az azzal ellentétes irányba állóké.

Ha veszünk egy irányított vágást, ami nem metszi el L-t, akkor ezekkel a vágásokkal továbbra is lesz metszet. Ha egy olyan irányított vágást veszünk, ami belemetsz L-be, akkor ennek kell tartalmaznia domináns irányba álló élet, de azzal ellentétes irányba álló élet is. Vagyis minden irányított vágással továbbra is van metszetünk. Ezzel pedig ellentmodást kaptunk $\square$

2.3.5. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányított gráf. Valamint legyen K ezen gráf egy minimális kötése. Ekkor létezik olyan szép feszítőfa, ami tartalmazza K-t.*

Ennél egy erősebb állítást fogunk belátni.

2.3.6. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányított gráf. Valamint legyen K egy olyan élhalmaz, ami nem tartalmaz kört, vagy egy kör domináns éleit. Ekkor létezik olyan szép feszítőfa, ami tartalmazza K-t.*

Bizonyítás. Azt mondjuk, hogy egy élhalmaz tartalmazza egy kör hosszabbik ívét, ha tartalmazza egy kör minden domináns irányba álló élét. Azt az erősebb állítást fogjuk belátni, hogy tetszőleges olyan K élhalmazra, ami nem tartalmazza egy kör domináns éleit, vagy pedig a teljes kört, arra létezik egy olyan szép feszítőfa, ami tartalmazza K éleit.

2.3.7. Lemma. *Adottak a P és Q mátrixok. Ekkor a*

$$Px = b_1, Qx \leq b_2 \tag{2.3.1}$$

primál feladatnak pontosan akkor van megoldása, ha a

$$y_0 P + y_1 Q = 0, y_1 \geq 0, yb = -1 \tag{2.3.2}$$

duál feladatnak nincs megoldása.

Az állítás bizonyításához a 2.3.7 lemmát fogjuk használni:

Jelen esetben a $b = (b_0, b_1)$ vektor a csupa 1 vektor lesz, a (P, Q) mátrixnak a sorai az gráf éleinek felelnek meg, az oszlopok pedig a csúcsoknak, és egy mezőbe 1 kerül, ha az adott élnek az a csúcs a végpontja, -1 kerül, ha ez a csúcs a kiinduló pontja, minden más esetben pedig 0 kerül a mátrixba. A nagy mátrix pedig úgy bomlik fel a P és Q mátrixokra, hogy, P tartalmazza azokat a sorokat, melyeknek megfelelő élek K-beliek, Q pedig tartalmazza az $E - K$ éleket.

Ekkor azt kell először is meggondolni, hogy ha primál feladatnak van megoldása, akkor létezik egy olyan szép feszítőfa, ami tartalmazza K-t. A szép feszítőfákról láttuk, hogy megfeleltethetők olyan $f : V \to \mathbb{Z}$ függvényekben, amelyre egy fabeli $\overrightarrow{ab}$ élre $f(b) - f(a) = 1$, valamint egy nem fabeli $\overrightarrow{ab}$ élre $f(b) - f(a) \leq 1$.

A primál feladat megoldása valami eléggé hasonlót ad nekünk, van ugyanis a primál feladat x megoldása, valójában egy $x : V \to \mathbb{Z}$ függvény, ahol a K-beli $\overrightarrow{ab}$ élekre $x(b) - x(a) = 1$, a nem K-beli élekre pedig $x(b) - x(a) \leq 1$.

Ebből akarunk egy szép feszítőfát előállítani. Ahhoz, hogy egy ilyen x függvény egy szép feszítőfát adjon elégséges az, hogy $\forall \overrightarrow{ab} : x(b) - x(a) \leq 1$, valamint a pontos éleknek ki kéne feszítenie a gráfot. Ha ez a tulajdonság teljesül, akkor abból egy szép feszítőfát kapunk, ha vesszük a pontos élek egy feszítő részhalmazát. Ekkor úgy akarjuk megváltoztatni x-et, hogy a pontos élek kifeszítsék a gráfot.

Induljunk ki egy v csúcsból. Ha nincs ebbe a v-ben befutó vagy kiinduló pontos él, akkor legyen $x'(v) = x(v)$ továbbá $x'(u) = x(u) + 1$, ahol $u \neq v$. Vegyük észre, hogy x' továbbra is a primál feladatnak egy megoldása lesz, mivel v-ből nem indult ki pontos él. Ha továbbra sincs pontos él v-ben, akkor megint hozzáadunk egyet a többi csúcshoz. És ezt addig csináljuk, amíg nem kapunk pontos élet. Igaz, meg kell nézni azt az esetet is, amikor a többi csúcshoz nem hozzáadunk, hanem kivonunk egyet, mert lehetséges, hogy v-be csak befutó élek vannak. Így előtudunk állítani v-ből induló pontos élet. Ekkor most hozzácsapjuk v-hez ezen él másik végpontját, és és ezen particióra ismételjük meg a pontos élt előállító eljárást.

Jelen helyzetben arra akarunk még figyelni, hogy tartalmazzuk K éleit is, ezért minden választásnál, ha tudunk K-neli élet bevenni, akkor olyat veszünk be, és mivel K kör mentes, ezért minden K-beli él be is fog kerülni.

Vagyis látjuk, hogy ha a primál feladatnak van megoldása, akkor létezik olyan szép fesztőfa, ami tartalmazza K éleit.

Ekkor foglalkozzunk most a duális feladattal. A Farkas lemma azt mondja ki, hogy a primál feladatnak pontosan akkor van megoldása, ha a duális feladatnak nincs. Először is a duális feladatban az $yb = -1$ feltételt le lehet cserélni az $yb < 0$ feltételre, mirt egy pozitív konstanssal való szorzás a másik két feltételt nem befolyásolja.

Ekkor a duális probléma egy megoldása egy $y : E \to \mathbb{Z}$ függvény lesz, ami igazából egy súlyozása az éleknek. Az első feltételből, miszerint $y_0P + y_1Q = 0$, következik, hogy y egy áram lesz. Ugyanis y-nal az élekre számokat írunk, és az $y_0P + y_1Q = 0$ mátrixszorzásban, egy-egy oszlop megfelel egy-egy csúcsának a gráfnak, ahol összeadjuk a bemenő élek súlyát, és kivonjük a kimenőkét, és végül az eredmény 0 lesz, minden csúcsra.

Továbbá tudjuk, hogy b a csupa 1 vektor, ezért az y koordinítáinak összege negatív az $yb < 0$ feltételből.

A következőkben az áramot fogjuk manipulálni úgy, hogy az továbbra is teljesítse a duális probléma feltételeit.

Először is, ha van egy olyan e él, amire $y(e) = 0$, akkor azt már soha nem fogjuk megváltoztatni. Legyen $N = \{e : e \in E - K, y(e) = 0\}$. Legyen $e \in E - K - N$ az az él, amire $y(e)$ minimális. Ekkor kezdjünk el sétálni a gráf csúcsai között úgy, hogy csak az $E - N$ éleket használjuk. Legyen ezen séta olyan, hogy egy élen legfeljebb egyszer járunk, és akkor ér véget, amikor egy olyan csúcsba érünk, ahol már jártunk. A sétá által érintett első él pedig legyen az e él, melyen előre haladunk el. A séta pedig a következő algoritmus szerint zajlik:

Nézünk kürül abban a v csúcsban, ahol éppen vagyunk. Ha van olyan $E-N-K$-beli él, ami a v-ből indul ki, akkor azon megyünk tovább. Mikor lehetséges, hogy nincs ilyen él. Mivel még folytatni akarjuk a sétát, ezért most járunk először ebben a v csúcsban. Viszont tudjuk, hogy y egy áram a gráfon, ezért a v-be bevezető élek súlyösszege pontosan annyi, mint a v-ből kivezető élek súlyösszege. Viszont az él, amin bementünk v-be, tudjuk, hogy nem 0 a súlya. Továbbá mivel az eddigiek alapján nem tudunk tovább lépni, ezért minden $E-K-N$-beli él, aminek valamelyik végpontja v, azoknak v csak végpontja lehet. Viszont mivel ezek az élek $E-K$-beliek, ezekre y mindig egy pozitív súlyt ír.

Ekkor viszont szükséges, hogy létezzen legalább egyik az alábbi két él típus közül. Az első egy olyan K-beli él, ami v-ből indul ki, és pozitív súlyú. A másik típus pedig olyan K-beli él, ami v-be vezet, és negatív élsúlyú. Ekkor ezek közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, most még nem számít, hogy milyen fajtájút.

Ezt az eljárást ismételjük addig, amíg egy olyan csúcsba jutunk el, ahol már korábban jártunk. Ekkor válasszuk ki a sétánk azon szakaszát, ami abban a csúcsban kezdődik amelyikben befejeztük, és amikor először jártunk ott. Vagyis igazából kaptunk egy kört, ezen kör éleinek halmaza legyen L.

Ekkor mondjuk azt, hogy a körön azok az előre élek, amelyeken a séta során előrefele megyünk át, az ezzel ellentétes irányba állókat pedig hátraéleknek.

Ekkor a séta megválasztásából látszik, hogy minden $E-K$-beli él amit a sétasorán, vagy a körben érintünk az csak előre él lehet. Hiszen ha tudtunk $E-K$-beli élen előre lépni, akkor mindig azon mentünk, ha pedig nem, akkor K-beli élen léptünk.

Legyen $l \in L - K$ az az él, amire $y(l)$ minimális. Ekkor legyen $z : E \to \mathbb{R}$ a következő: $e \notin L : z(e) = 0$, ha $e \in L$ előre él, akkor $z(e) = y(l)$, ha $e \in L$ hátraél, akkor $z(e) = y(l)$. Ekkor egyrészt a z egy áram lesz, mert csak kétféle csúcs van a körön, az egyik amelybe van befutó, vagy kiinduló él is, és azok amelyekbe csak két befutó, vagy két kiinduló él van, a nem nulla súlyú élekből, látszik, hogy mindkét esetben egyenlő lesz a befutó élek és a kiinduló élek súlyainak összege. Továbbá teljesül, hogy az $e \in L\backslash K$ előre élekre igaz lesz, hogy $z(e) \leq y(e)$.

Vizsgáljuk meg, hogy z milyen viszonyban áll a duális probléma feltételeivel. Egyrészt teljesíti az első feltételt, mivel áram. Másodrészt pedig az $E-K$-beli éleken pozitív, mert úgy választottuk meg a kört, hogy az ilyen élek csak előre élek lehetnek. Vagyis csak a $\sum_{e\in E} z(e) < 0$ állítást kell vizsgálnunk. Tegyük fel, hogy ez igaz.

Ekkor készen lennénk, mert ekkor ezen kör éleire pontosan ugyanaz a szám van írva, azzal az egy eltéréssel, hogy az egyik irányú éleken pozitív előjellel, a másik irányba álló éleken pedig negatív előjellel. Viszont tudjuk, hogy az y_1 részhez tartozó, vagyis a $E-K$-beli élekre írt súlyok mind nem negatívak, valamint az összes súly összege negatív, ezért kell lennie a körön negatív súlyú élnek, sőt mi több, ezekből kell többnek lennie. Viszont ezek a súlyok csak az y_0 részben, vagyis a K-beli élek lehetnek. Vagyis ezen a körön több élnek van negatív súlya, mit pozitív súlya, és mivel minden negatív súlyú él csak K-beli lehet, ezért így találtunk egy olyan kört, aminek a domináns éleit tartalmazza K és pont ezt akartuk belátni.

Ha az adott körre nem teljesülne az $\sum_{e\in E} z(e) < 0$ feltétel, akkor legyen $y'(e) = y(e) - z(e)$, minden élre. Ekkor y' is egy áram, mert két áram különbsége is áram. Továbbá mivel $y(e) \geq z(e) : \forall e \in E-K$, ezért $\forall e \in E-K : y'(e) \geq 0$, vagyis y' teljesíti a második feltételt. Viszont ekkor tudjuk, hogy $\sum_{e\in E} z(e) \geq 0$ ezért $\sum_{e\in E} y'(e) < 0$ fennáll. Vagyis továbbra is egy olyan áramunk van ami teljesíti a duális probléma feltételeit. És ekkor a most kapott y'-t jelöljük y-nal.

Viszont y-ban az 0 súlyú $E-K$-beli élek száma nőtt, mivel van legalább egy olyan él amire $y(e) = z(e)$. Ezért, ha ezt az eljárást ismételgetjük, előbb utóbb vagy találni fogunk egy olyan kört amire $\sum_{e\in E} z(e) < 0$, vagy pedig egyszer csak $\forall e \in E-K : y(e) = 0$ lesz.

Viszont egy nem konstans 0 súlyú áramban a nem 0 súlyú élek egy kört kell, hogy alkossanak, ezért ekkor létezik egy olyan kör, az élei irányátásától függetlenül, amelynek élei mind K-beliek. Viszont pont egy olyan K-beli élhalmazt kerestünk, ami vagy tartalmaz teljesen egy kört, vagy annak legalább a domináns éleit.

Vagyis a beláttuk, hogy a primál feladat ekvivalens azzal, hogy létezik egy szép feszítőfa, ami tartalmazza K éleit. Továbbá, hogy a duális feladat ekvivalens azzal, hogy K tartalmaz kört, vagy egy kör domimáns éleit. A Farkas-lemma pedig azt mondja ki, hogy a primál feladatnak pontosan akkor van megoldása, ha a dualisnak nincs, ezért ebből következik a tétel állítása. $\square$

3. fejezet

Gráfpolitópok

3.1. Alapvető definíciók

A továbbiakban a gráfok egy geometriai megfeleltetésével fogunk foglalkozni. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf. Ekkor G-t megfeleltetjük egy $|V|$ dimenziós politópnak, ahol legyen a tér bázisvektorai az e_v vekrotok, ahol $v \in V$.

Először is definiáljunk néhány geometriai fogalmat.

3.1.1. Definíció. *Egy konvex H ponthalmaz oldala alatt egy mértani O alakzatot értünk, amely előállítható egy $O = T \cap H$ alakban, ahol T egy támaszhipersíkja H-nak.*

3.1.2. Definíció. *A politóp egy véges sok pont konvex burka.*

3.1.3. Állítás. *Egy politóp előállítható zárt félterek metszeteként.*

3.1.4. Definíció. *Egy politóp lapjának azon oldalát hívjuk, mely amelynek dimenziója eggyel kissebb, mint a politóp dimenziója.*

3.1.5. Definíció. *Egy egyszerű gráf szimmetrikus élpolitópja a*

$$P_G = conv\{e_u - e_v, e_v - e_u : uv \in E\} \tag{3.1.1}$$

módon definiált alakzat.

3.1.6. Definíció. *Egy élsúlyozott, $s : E \to \mathbb{R}^+$ egyszerű gráf szimmetrikus élpolitópja a*

$$PS_G = conv\{\frac{e_u - e_v}{s(uv)}, \frac{e_v - e_u}{s(uv)} : uv \in E\} \tag{3.1.2}$$

egyenlőséggel van definiálva.

A fentiekben egyszerű gráfokra definiáltuk a szimmetrikus élpolitópot, de ezt irányított gráfokra is megtehejük, igaz ekkor az politóp nem lesz szimmetrikus.

3.1.7. Definíció. *A G irányított gráf élpolitópja:*

$$P_G = conv\{e_u - e_v : \overrightarrow{uv} \in E\} \tag{3.1.3}$$

A G élsúlyozott, $s : E \to \mathbb{R}^+$ irányított gráf élpolitópja:

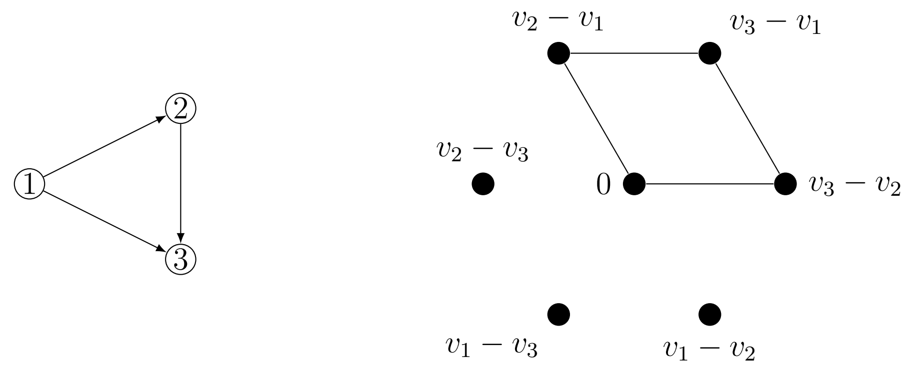
$$PS_G = conv\{\frac{e_u - e_v}{s(\overrightarrow{uv})} : \overrightarrow{uv} \in E\} \tag{3.1.4}$$

3.1.8. Definíció. *A G irányított gráf kiterjesztett élpolitópja:*

$$PO_G = conv\{0; e_u - e_v : \overrightarrow{uv} \in E\} \tag{3.1.5}$$

Ekkor a súlyozott eset a nem súlyozott eset egy kiterjesztése, mivel a nem súlyozott esetben minden él súlya 1.

Egy gráf élpolitópja a $|V|$ dimneziós térben lakik. Viszont vegyük észre, hogy minden élnek olyan pontot feleltettünk meg, aminek koordinátáinak összege 0, vagyis minden ilyen pont beleesik az $\sum_{v \in V} x_v = 0$ altérben, ami $n-1$ dimenziós.



3.1. ábra. A bal oldali gráf, kiterjesztett élpolitópja a bal oldali politóp lesz. Mivel a gráf három csúcsú, ezért a politóp két benne van a két dimenziós térben, így tudjuk ábrázolni a síkon

Ennél többet is tudunk mondani.

3.1.9. Tétel. *Jelölje c a G gráf összefüggőségi komponenseinek számát. Ekkor az G gráf élpolitópja egy $|V| - c$ dimenziós altérben lakik.*

Bizonyítás. Jelölje $V_i : i \in \{1, 2, ..., c\}$ a gráf egyes összefüggőségi komponenseiben lévő csúcsok halmazát. Ekkor minden $i \in \{1, 2, ..., c\}$-re teljesül, hogy az $\frac{e_u - e_v}{s(uv)}$ alakú pontokra, $\sum_{v \in V_i} x_v = 0$, mert az u, v csúcsok csakis egyszerre lehetnek benne egy V_i összeföggűségi komponensben, ekkor nyilván mivel a két koordináta egymás ellentetje, ezért összegük 0. Ha pedig egyik csúcs sincs benne az összefüggőségi komponensben, akkor meg az ezezn komponensbe tartozó koordináták mindegyike 0.

Vagyis, adtunk c darab lineárisan független $n-1$ dimneziós alteret, amelyek mindegyikében benne van az élpolitóp, így ezek metszetében is, ami $n-c$ dimneziós.

Fordítva, azt is meg kell mutatni, hogy létezik $n-c$ darab lineárisan független pont is.

Ehhez elég kiválasztani minden komponensből maximális, kört nem tartalmazó élhalmazt. Hiszen ebben a modellben, mivel minden az hogy a csúcsok lineárisan függetlenek, pont azt jelenti, hogy az általuk meghatározott élek nem alkotnak kört.

Ezzel viszont pont megadtunk egy $n-c$ csúcsú lineárisan független csúcshalmazt.

□

3.2. A kiterjesztett élpolitóp oldalai

Nézzük meg, hogy milyen viszonyban van egy összefüggő irányított gráf élpolitópja és annak egy szép feszítőfája. Először is gondoljuk meg, hogy az 2.1.6 bizonyításában adott s függvény egy szintezése volt a csúcsoknak, hogy minden fabeli $\overrightarrow{uv}$ élre $s(u)+1=s(v)$. Ezen szintezés nyilván minden feszítőfára megkonstruálható.

3.2.1. Definíció. *Egy $f : V \to \mathbb{R}$ függvényt a G gráf egy szintezésének fogjuk nevezni, ha létezik egy olyan F feszítőfája G-nek, amire $\forall\overrightarrow{ab} \in F : f(a)+1=f(b)$.*

Vegyünk egy tetszőleges feszítőfát. Ekkor ezen fa $n-1$ éle, a politóp $n-1$ csúcsára illesztett hipersíknak megfeleltethető.

Ekkor vegyünk egy F veszítőfát, ezek élei legyenek $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$. Ezen éleknek feleljenek meg a $h_1, ..., h_{n-1}$ pontok a politopban. Legyen H a $h_1, ..., h_{n-1}$ pontok által kifeszített hipersík. Ekkor vegyünk egy olyan p pontot, ahol $p=\sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i$: $\forall i : 0 < a_i < 1, \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 1$. Vagyis p a $h_1, .., h_{n-1}$ pontok egy konvex kombinációja.

Ekkor tegyük fel, hogy az F feszítőfa nem szép. Vegyünk egy j élet, ami nem szép. Ezen élnek feleljen meg a k pont a politópban. Ekkor mint láttuk korábban ha hozzávesszük a j élet F-hez, létrejön egy kör. Viszont ez a kör nekünk hasznos lesz a geometriai megfeleltetésben. Ugyanis, ha vesszük az éleknek egy olyan súlyozását, ahol az előre élek -1, a hátraélek pedig 1 súly kapnak, a többi F-beli él pedig 0-t, akkor azzal pont felírtuk a k pontot a $h_1, ..., h_{n-1}$ csúcsok kombinációjaként. Vagyis

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} b_i h_i : b_i \in \{-1, 0, 1\} \tag{3.2.1}$$

Legyen $I = \{i : b_i = 1\}$ és $J = \{i : b_i = -1\}$ és $K = \{i : b_i = 0\}$

Vagyis

$$k = \sum_{i \in I} h_i - \sum_{j \in J} h_j \tag{3.2.2}$$

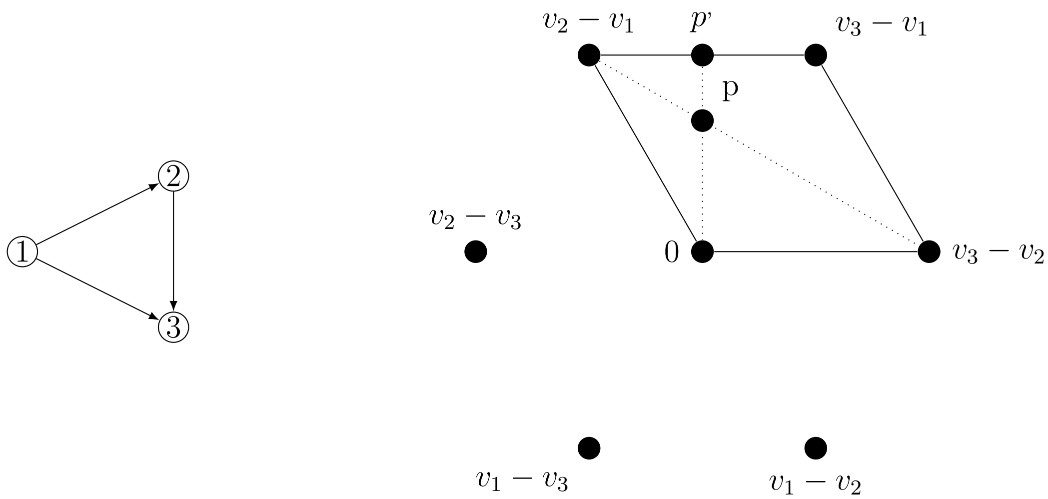
Viszont mivel j nem volt szép, ezért $|I| + 1 < |J|$. Ekkor térjünk vissza a p pontra. Ezt a pontot szeretnénk felírni, egy másik alakban, hogy szerepeljen benne k is.

Legyen $a = min\{a_i : i \in I\}$.

$$\begin{aligned} p = \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i = \sum_{i \in I} a_i h_i + \sum_{i \in J} a_i h_i + \sum_{i \in K} a_i h_i = \\ \sum_{i \in I} (a_i - a) h_i + \sum_{i \in J} (a_i + a) h_i + \sum_{i \in K} a_i h_i + a(\sum_{i \in I} h_i - \sum_{j \in J} h_j) = \\ \sum_{i \in I} (a_i - a) h_i + \sum_{i \in J} (a_i + a) h_i + \sum_{i \in K} a_i h_i + ak \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ezzel p-t felírtuk egy olyan alakba, ami az $h_1, ..., h_{n-1}, k$ pontok egy lineáris kombinációja. Viszont mivel $a = min\{a_i : i \in I\}$, ezért valamelyik $a_i - a : i \in I$ kifejezés 0 lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy a kapott felírásban, továbbra is legfeljebb $n - 1$ tagnak lesz nem 0 együtthatója. Viszont mivel $|I| + 1 < |J|$, ezért:

$$b = \sum_{i \in I} (a_i - a) + \sum_{i \in J} (a_i + a) + \sum_{i \in K} a_i + a < 1 \tag{3.2.4}$$



3.2. ábra. A felvett p pontot előállítóttuk a $v_2 - v_1$ és $v_3 - v_2$ pontok konvex kombinációjaként, de egy az origóból nagyított képe ráesik a $v_2 - v_1$ és $v_3 - v_1$ pontok közé eső szakaszra

Ezért létezik egy olyan $c > 1$, hogy $cb = 1$. Mit is jelent ez igazából? Létezik egy olyan cp nagyítása a p pontnak, hogy a cp pont előáll egy konvex kombinációjaként a $n-1$ pontnak. Ekkor ezzel az új $n-1$-esről megnézzük, hogy szép-e, és ha nem akkor ugyanezt az eljárást ismételjük. Ezzel mit is kaptunk?

Mivel a politópnak véges sok csúcsa van, ezért véges sok $n-1$ pont által feszített altér létezik. És az előző eljárásban egy olyan pontsorozatot kapunk a nagyításokkal, melyek mindegyike rajta van egy az origóból induló egyenesen. Viszont egy-egy ilyen pontnak rajta kell lennie egy megfelelő altéren is, ezért véges sokszor tudjuk ezt a lépést megismételni. Vagyis ezzel adtunk egy új eljárást, hogyan tudunk szép feszítőfát találni.

Ennél valójában többet is megtudtunk. Mivel amikor vettünk egy nem szép feszítőfát, valójában azt láttuk be, hogy a feszítőfa által kifeszített altér egy valódi kettévágása a politópnak. Mivel a politóp része az origó is, valamint minden lépésben az új nagyított pont is. Vagyis egy nem szép feszítofa, nem lehet egy támaszhipersíkja a politópnak.

Viszont vegyünk egy támaszhipersíkot. Ezen a hipersíkon lévő csúcsok halmaza legyen $h_1, ..., h_k$, ezeknek megfelelő élek pedig $e_1, ..., e_k$. Ekkor tegyük fel indirekt, hogy az $e_1, ..., e_k$ élek nem feszítik ki a gráfot. Ekkor létezik egy olyan e él, ami a gráf két komponense között fut. Viszont ha az élek nem feszítik ki a gráfot, akkor ez a köztes él nem lehet benne a kifeszített affin altérben, így a támaszhipersík nem egy lapot határoz meg. Ez azt jelenti, hogy az $e_1, ..., e_k$ halmazból ki lehet választani néhányat, hogy azok egy feszítőfát adjanak. Viszont azt tudjuk, hogy egy nem szép feszítőfa nem lehet támaszhipersík, vagyis minden támaszhipersík meghatároz legalább egy szép feszítőfát.

Azt viszont még át kell gondolnunk, hogy egy szép feszítőfa által meghatározott hipersík, nem vághatja ketté a politópot.

3.2.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy véges irányított gráf. Ekkor egy $f : V \to \mathbb{Z}$ függvény meghatározza a az élpolitóp egy lapját, ha:*

(i) Minden $\overrightarrow{uv} \in E$ élre $f(v) - f(u) \leq 1$

(ii) Az élek $E_f = \{\overrightarrow{uv} \in E : f(v) - f(u) = 1\}$ halmaza kifeszíti a gráfot.

Bizonyítás. Először definiáljunk egy ekvivalencia osztályt az $F = \{f : V \to \mathbb{Z}\}$ függvények halmazán. Az f_1 és f_2 függvénykre azt mondjuk, hogy ekvivalensek, ha létezik egy olyan c konstans, hogy $\forall v \in V : f_1(v) = f_2(v) + c$. Mivel csak összefüggő gráfokról beszélünk, ezért ez ekvivalens azzal, hogy $\forall \overrightarrow{uv} \in E : f_1(v) - f_1(u) = f_2(v) - f_2(u)$. Ez ezért igaz, mert az $f_1(v) - f_1(u) = f_2(v) - f_2(u)$ egyenlet átrandezhető $f_1(v) - f_2(v) = f_1(u) - f_2(u)$ alakba. Sőt igazából az is igaz, hogy $\forall u, v \in V : f_1(v) - f_1 = f_2(v) - f_2(u)$, hasolnó okokból.

Ezek közül nekünk az alábbi alak lesz a leghasznosabb:

$$\forall \overrightarrow{uv} \in E : f_1(v) - f_1(u) = f_2(v) - f_2(u) \tag{3.2.5}$$

Gondoljunk vissza a szép feszítőfa létezéséről szóló bizonyításra. Használtunk egy s függvényt, ami egyfajta taávolságot definiált két csúcs között. Először is vegyük észre, hogy az ott definiált s függvény a gráf egy szintezését adja, azzal a feltétellel, hogy a kiemelt v csúcsra $f(v) = 0$.

Azt viszont szintén láttuk, hogy egy szép feszítőfa esetében egy $\overrightarrow{uv}$ élre $f(v) - f(u) \leq 1$. Vagyis egy ilyen szép feszítőfa által generált szintezés teljesíti az (i) feltételt.

Továbbá a feszítőfa $\overrightarrow{uv}$ éleire igaz lesz $f(v) - f(u) = 1$ egyenlőség. És mivel egy feszítőfáról beszélünk, ezért a pontos élek kifeszítik a gráfot.

Vagyis beláttuk, hogy egy szép feszítőfa által generált szintezés teljesíti az $(i), (ii)$ feltételeket.

Ez fordítva is fennáll. Az (ii) feltétel biztosít nekünk egy olyan élhalmazt, ami kifeszíti a gráfot. Válasszuk ki ezen élhalmaz egy feszítőfáját. Ez egy szép feszítőfa lesz.

A szép feszítőfák létezéséről szóló bizonyítás hasonlóan átvehető, és csak azt kell belátni, hogy $\forall \overrightarrow{uv}$ élre $f(v) - f(u) \leq 1$, ezt viszont az (i) tulajdonság biztosítja. Ezekből következik az alábbi állítás:

3.2.3. Állítás. *Egy feszítőfa által indukált f szintezés pontosan akkor szép, ha f teljesíti az $(i), (ii)$ feltételeket.*

Gondoljunk a politóp egy T támaszhipersíkjára aszerint, hogy mi a normálvektora, legyen ez most $A = (a_1, ..., a_{|V|})$. Ekkor azon x pontok esnek T-re, melyek tejlesítik az $x \cdot (a_1, ..., a_{|V|}) = c$, ahol c egy meghatározott konstans. Feltehető, hogy $c \geq 0$, mert A-t és c-t skalárral beszorozhatjuk. Sőt, hasonló elven feltehetjük, hogy $c = 1$.

A T hipersík pontosan akkor lesz a politóp egy támasz hipersíkja, hogyha

$$\forall x \in P_G : x \cdot A \leq 1 \text{ és } \exists x \in P_G : x \cdot A = 1 \tag{3.2.6}$$

Viszont mivel P_G az éleknek megfelelő pontok konvex burka, ezért elég a csúcsoknak megfeleő pontokat vizsgálni az 3.2.9 összefüggésben.

Tudjuk, hogy ezen pontok $e_v - e_u$ alakba írhatóak. Gondoljunk A-ra, mint egy $f : V \to \mathbb{R}$ függvényre, ahol $f(v) = a_v$. Ekkor azt is látjuk, hogy $A + c(e_1, ..., e_{|V|})$ változtatással a hipersík nem változik. Ezzel egy nagyon ismerős dolgot kaptunk. Ugyanis mivel egy támaszhipersíkról beszélünk, ezért:

$$\forall \overrightarrow{uv} \in E : (e_v - e_u) \cdot A = f(v) - f(u) \leq 1 \tag{3.2.7}$$

Ezen felül pedig:

$$\exists \overrightarrow{uv} \in E : (e_v - e_u) \cdot A = f(v) - f(u) = 1 \tag{3.2.8}$$

Ekkor már csak azt kell átgondolni, hogy a pontos élek miért feszítik ki a gráfot. Ez abból következik, hogy a támaszhipersíkra illeszkedő pontok által meghatározott részgráf komponenseinek száma határozza meg az oldal dimenzióját, ami akkor lesz maximális, ha a részgráf egy komponensű, vagyis az élek kifeszítik a gráfot.

Összefoglalva a T hipersík egyenletéből tudtunk gyártani egy olyan $f : V \to \mathbb{R}$ függvény, ami pont a gráf egy szintezését adja meg. Továbbá beláttuk, hogy ha ez egy támaszhipersík, akkor pontosan akkor határoz meg egy maximális dimenziójú oldalat, ha a szintezés teljesíti az $(i), (ii)$ feltételeket. Továbbá azt is láttuk, hogy ha ugyanazon T-nek egy másfajta felírását vesszük, akkor az egy azonos ekvivalencia osztálbeli szintezést fog megadni.

A visszafele irány, hogy egy olyan f függvény, ami teljesíti az $(i), (ii)$ feltételeket, meghatároz egy megfelelő támaszhipersíkot hasonlóan müködik, ugyanis a levont következtetések visszafele is meggondolhatók. □

A a 3.2.2 Tételben olyan oldalakat vizsgáltunk amelyek semmiképpen sem tartalmazzák az origót. Felvetődhet a kérdés, hogy milyen szerepe van itt az origónak.

Ekkor nézzük meg, hogy milyen támaszhipersík tartalmazhatja az origót.

Legyen T egy támaszhipersík, és legyen $A = (a_1, ..., a_{|V|})$ normálvektora. Ekkor most is elmondható, hogy T pont akkor lesz a politóp támaszhipersíkja, ha:

$$\forall x \in P_G : x \cdot A \leq c \text{ és } \exists x \in P_G : x \cdot A = c \tag{3.2.9}$$

Most viszont olyan támaszhipersíkot keresünk, ami tartalmazza az origót. Ezért ez esetben a fenti egyenletben $c = 0$.

Ekkor most is konstruáljunk egy $f : V \to \mathbb{R}$ függvényt A-ból. Legyen most is $f(v) = a_v$. Ezen esetben is elég lesz vizsgálja a csúcsoknak megfelelő pontokat, valamit persze az origót.

Ekkor most azt kapjuk, hogy:

$$\forall \overrightarrow{uv} \in E : (e_v - e_u) \cdot A = f(v) - f(u) \leq 0 \tag{3.2.10}$$

Továbbá:

$$\exists \overrightarrow{uv} \in E : (e_v - e_u) \cdot A = f(v) - f(u) = 0 \tag{3.2.11}$$

Most is maximális dimenziójú oldalat keresünk, ezért nem elégszünk meg azzal, ha csak az origó esik a hipersíkra.

3.2.4. Tétel. *PO_G azon lapjai, melyek tartalmazzák az origót, megfeleltethetők a gráf irányított vágásainak.*

Bizonyítás. Gondoljuk meg mit is jelent az hogy valami egy irányított vágás, ha egy $f : V \to \mathbb{R}$ függvényről beszélünk. Valamit azzal akarunk csinálni, hogy milyen értéket vehet fel az $f(v) - f(u)$ kifejezés, attól függően, hogy az $\overrightarrow{uv}$ él benne van-e a vágásban vagy nincs.

Legyen K egy irányított vágás éleinek halmaza. Ekkor a következőt fogjuk megkövetelni:

$$\forall \overrightarrow{uv} \in K : f(v) - f(u) \leq 0 \tag{3.2.12}$$

Továbbá:

$$\forall \overrightarrow{uv} \notin K : f(v) - f(u) = 0 \tag{3.2.13}$$

Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy vesszük az irányított vágás által létrjött partíciókat, $V = A \sqcup B$, ahol most a köztes élek A-ból B-be fussanak. Ekkor legyen $\forall v \in A : f(v) = a$ és $\forall v \in B : f(v) = b$ ahol $a \geq b$.

Ezt igazából nem csak irányított vágásokra tudjuk elmondani.

Rendelkezzen a K élhalmaz az alábbi tulajdonsággal: Legyen $V = A_1 \sqcup ... \sqcup A_l$, ahol:

$$\forall \overrightarrow{uv} \in K : u \in A_i, v \in A_j : i \neq j \tag{3.2.14}$$

Ezen felül

$$\forall \overrightarrow{uv} \in E : u \in A_i, v \in A_j : i \neq j : \overrightarrow{uv} \in K \tag{3.2.15}$$

Továbbá $\nexists b_1, ..., b_m$ ami teljesíti a következő tulajdonságokat:

$$\begin{gathered}\forall i \in \{1, ..., m\} : b_i \in \{1, ..., k\} \text{ és } b_{m+1} = b_1 \text{ és } \forall i \neq j : b_i \neq b_j \text{ és} \\ \forall i \in \{1, ..., m+1\} : \exists \overrightarrow{uv} : u \in A_{b_i}, v \in A_{b_j}\end{gathered} \tag{3.2.16}$$

Mit is jelent igazából ez a három tulajdonság? Egyrészt kapjuk, az első két tulajdonságból, hogy K-ban pontosan a partíciók közötti élek vannak benne.

A harmadik tulajdonságban pedig azt mondjuk, hogy nem létezik egy olyan indexsorozat, hogy a szomszédos indexű halmazok között mindig fut egy él. És mivel

$b_{m+1} = b_1$, ezért ezzel azt mondjuk, hogy ha az egyes partíciókat összvonnánk egy pontá, és ezt az l darab csúcsú gráfot néznénk, akkor abban nem lenne kör.

3.2.5. Definíció. *Általános irányított vágás alatt egy olyan $K \cup E$ élhalmazt értünk, hogy a $E - K$ élek összehúzásával egy aciklikus gráfot kapunk.*

Ez tényleg egy általánosabb irányított vágás, mivel egy irányított vágás élei pontosan ezeket a tulajdonságokat teljesíti abban az esetben amikor $l = 2$.

Ekkor hogyha egy olyan lapot keresünk, ami tartalmazza az origót, annak kell a politóp $n - 2$ darab affin független csúcsát tartalmaznia, az origón kívül. Ez pont annak felel meg, hogy a gráf csúcsait két részre particionáltuk.

Az általánosított irányított vágásoknak, melyek nem irányított vágások, pedig olyan oldalak felelnek meg, melyek tartalmazzák az origót.

□

3.3. Minimális belső pont

Vegyük egy G irányított gráf kiterjesztett élpolitóját. Legyen ennek néhány csúcsa $p_1, ..., p_n$. Felmerül az a kérdés, hogy melyik az a legkisebb n, amire létezik a $p_1, ..., p_n$ pontoknak olyan konvex kombinációja, melyek a politóp egy belső pontját adják.

3.3.1. Definíció. *Jelölje $\mu(G)$ a G irányított gráf minimális kötésének elemszámát.*

3.3.2. Tétel. *Ha $n \leq \mu(G)$, akkor tetszőleges $p_1, ..., p_n$ csúcsok konvex kombinációja, a kiterjeszett élpolitóp oldalára fognak esni.*

Bizonyítás. Két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset: A $p_1, ..., p_n$ pontoknak megfelelő gráfbeli élek, a G gráf egy minimális kötését adják.

Ekkor a a 2.3.5 Tétel miatt, létezik egy olyan szép feszítőfa, ami tartalmazza ezeket az éleke. Viszont beláttuk, hogy a szép feszítőfák a politóp egy-egy origót nem tartalmazó oldalát határozzák meg. Vagyis azt kaptuk, hogy a politóp egyik oldalára esnek a $p_1, ..., p_n$ pontok.

Viszont ekkor ezen az oldalon rajta kell lennie ezen pontok tetszőleges konvex kombinációjának.

2. eset: A $p_1, ..., p_n$ pontoknak megfelelő gráfbeli élek, a G gráf nem egy minimális kötését adják. Mivel $n \leq \mu(G)$ ezért ez azt jelenti, hogy a pontoknak megfelelő élek, nem alkotják a gráf egy kötését. Ezért létezik egy olyan irányított vágás a gráfon, amely elvágó élei diszjunktak ettől az élhalmaztól.

Viszont beláttuk, hogy a gráf irányított vágásai a politóp origót tartalmazó lapjait határozzák meg, ahol a nem elvágó élek esnek a lapra. Vagyis ebben az esetben is létezik egy olyan oldala a kiterjesztett élpolitópnak, amely tartalmazza az $p_1, ..., p_n$ pontokat. Ezért ezek tetszőleges konvex kombinációja is ezen oldalra kell hogy essen.

A második esetbe tartozik, amikor a pontok közül az egyik az origó, de ekkor is ugyanezt az érvelést elmodhatjuk, mivel az irányított vágásoknak megfelelő oldalak az origót is tartalmazzák. □

3.4. Fundamentális politópok metrikus térben

Ebben a fejezetben a a [5] cikk második fejezetét dolgozom fel.

A továbbiakban legyen (X, d) egy véges metrikus tér.

3.4.1. Definíció. *Legyen $\mathbb{R}^X$ egy valós vektortér, amelynek bázisát adják az e_i vektorok, ahol $i \in X$. Ekkor a Kantorovich-Rubenstein polinomnak, vagy fundamentális politópnak a következő konvex alakzatot nevezzük:*

$$KR(X, d) = conv\{\frac{e_i - e_j}{d(i, j)} : i, j \in X\} \tag{3.4.1}$$

3.4.2. Megjegyzés. *A K_n gráf szimmetrikus élpolitója éppen ilyen. Hiszen bármely két csúcs között fut él.*

Felmerül, hogy milyen mélyebb kapcsolat áll fenn, a két politóp között.

3.4.3. Definíció. *A Kantorovich-Rubenstein politóp duálisa, a Lipschitz-politóp. Az alábbi képlettel megadott alakzat.*

$$LIP(X, d) = conv\{x \in \mathbb{R}^X : \sum_i x_i = 0, x_i - x_j < d(i, j) \forall i, j \in X\} \tag{3.4.2}$$

A következőkben a szimmetrikus élpolitópok, és a fundamentális politóp kapcsolatát fogjuk vizsgálni.

Legyen $G = (V, E)$ egy véges egyszerű gráf. Ekkor vegyünk egy tetszőleges $w : E \to \mathbb{R}^+$ függvényt. Ekkor tetszőleges $V_1 \subset V$ élhalmazra egy véges metrikus teret definiál a megfeleltetés, ahol két csúcs távolsága, a köztük futó legrövidebb súlyozott út hosszával egyezik meg. Az i, j csúcsok távolságát $d(i, j)$ fogja jelöni.

3.4.4. Definíció. *Jelölje tetszőleges $V_1 \subset V$ csúcshalmazra $P_G \cap \mathbb{R}^{V_1}$, a szimmetrikus él politóp és az $\{x_i = 0 : i \notin V_1\}$ altér metszetét.*

Ekkor vegyük V_1-en a korábban említett metrikát, a $w(e) = 1 : \forall e \in E$ esetben, és legyen

$$K_{G,V_1} := KR(V_1, d) \tag{3.4.3}$$

3.4.5. Tétel. *Tetszőleges $V_1 \subset V$ csúcshalmazra*

$$P_G \cap \mathbb{R}^{V_1} = K_{G,V_1} \tag{3.4.4}$$

3.4.6. Megjegyzés. *$\frac{e_i - e_j}{d'} \in K_{G,V_1}$, ha teljesül, hogy $i, j \in V_1$, továbbá $d' \geq d(i,j)$. Ez teljesül, nivel $0, \frac{e_i - e_j}{d(i,j)} \in K_{G,V_1}$, valamint mivel $d' \geq d(i,j)$, ezért a $\frac{e_i - e_j}{d'}$ pont a $(0, \frac{e_i - e_j}{d(i,j)})$ szakaszra esik.*

3.4.7. Megjegyzés. *Legyen $q \in P_G$. Ekkor q előáll a $\pm(e_i - e_j)$ elemek konvex kombinációjaként, ahol $\{i, j\} \in E$ Ekkor rendeljünk q-hoz az alábbi módon egy irányított teljes gráfot:*

Szerepeljen q felírásában az $e_i - e_j$ és $e_j - e_i$ elemek w_1 és w_2 súlyokkal, ahol $w_2 > w_1$. Ekkor húzzunk be egy i-ből j-be menő írányított élet, $w_2 - w_1$ súllyal.

Ekkor az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az így kapott gráfban nem létezik irányított kör. Tegyük fel indirekt, hogy lenne egy kör a $v_1, ..., v_n$ csúcsokon, ahol a $\{v_i \to v_{i+1}\}$ él súlya α_i. Ekkor q felírásában ezen kör éleinek súlyából $min(\alpha_1)$-t kivonva továbbra is a q egy felírását kaptuk, viszont már a kör egyik élének súlya le lett nullázva, ezzel a kör megszűnt. Ezt addig tudjuk csinálni, amít nem marad a gráfban irányított kör.

3.4.8. Megjegyzés. *Legyen $q \in P_G \cap \mathbb{R}^{V_1}$. Ekkor vegyük q-nak a a 3.4.7 megjegyzés szerint rendelt gráfját. Ekkor tetszőleges $v \in V - V_1$ csúcsra, a bemenő élek súlyainak összege megegyezik a kimenő élek súlyainak összegével.*

Ez azért áll fent, mert megnézzük q felírását a $\pm(e_i - e_j)$ elemekkel. Ekkor mivel $q \in P_G \cap \mathbb{R}^{V_1}$, ezért ha $v \in V - V_1$, ekkor e_v súlya nulla. Viszont ez pont megegyezik a bemenő és a kimenő élek súlyainak különbségével. Ezekre a csúcsokra azt mondjuk, hogy kiegyensúylozottak.

Bizonyítás. Térjünk rá a a 3.4.5 tétel bizonyítísára. Először is $K_{G,V_1} \subset \mathbb{R}^{V_1}$, mivel K_{G,V_1} olyan pontok konvex burka, ahomelyekre $x_i = 0 : i \notin V_1$.

Ezután azt akarjuk bizonyítani, hogy $K_{G,V_1} \subset P_G$. Vegyünk tetszőleges $i, j \in V_1$ csúcsokat. Ekkor legyen $i = a_1 \to ... \to a_k = j$ a legrövidebb út ezen két csúcs között. Ekkor

$$\frac{1}{d}(e_i - e_j) = \frac{1}{d}(e_{a_1} - e_{a_2}) + ... + \frac{1}{d}(e_{a_{d-1}} - e_{a_d}) \tag{3.4.5}$$

Vagyis a $\frac{e_i - e_j}{d}$ pontot előállítottuk P_G-beli pontok konvex kombinációjaként.

Ezzel beláttuk, hogy $K_{G,V_1} \subset P_G \cap \mathbb{R}^{V_1}$

A másik irányú tartalmazás belátásához vegyünk egy $q \in P_G \cap \mathbb{R}^{V_1}$ pontot, és vegyük a a 3.4.7 Meegjegyzés szerint ezen q ponthoz rendelt súlyozott irányított gráfot.

Ha ez a gráf nem tartalmaz V_1-beli csúcsból kiinduló élet, akkor $q = 0$, mert a gráfnak nem lehet egy éle sem. Hiszen indirekt tegyük fel, hogy ekkor a megfeleltetésnek van éle. Ekkor ennek a v tövére $v \notin V_1$. De a 3.4.8 Megjegyzés szerint ezen csúcsok kiegyensúlyozottak, ezért kell lennie olyan élnek, ami v-be fut. Viszont ezen él töve megint nem lehet V_1-beli. Így előbb utóbb létrejön egy irányított köt a $V - V_1$ csúcsokon, ami ellentmondást ad.

Ekkor feltehetjük, hogy $q \neq 0$. Válasszunk ki egy $v_1 \in V_1$ csúcsot, amiből van kiinduló él. Ekkor kezdjünk el egy sétát ezzel az élen. Ekkor egy lépés után vagy V_1-beli csúcsba vagy ezen kívüli csúcsba lépünk bele. Ekkor ha egy V_1-en kívüli csúcsba lépünk, akkor egy ilyen csúcs kiegyensúlyozottsága miatt, kell lennie kimenő élnek és ezen lépünk tovább. Ekkor mivel a gráfban nem létezik irányított kör, ezért előbb utóbb mindenképpen eljutunk egy $u_1 \in V_1$ csúcsba.

Ekkor találtunk egy utat a $v_1, u_1 \in V_1$ csúcsok között. Legyen μ a legkisebb súly az ezen az úton érintett éleken. Ekkor $\mu(e_{v_1} - e_{u_1}) = \mu(e_{a_1} - e_{a_2}) + ... + \mu(e_{a_{d-1}} - e_{a_d})$. Ekkor vonjunk ki ezen élek súlyából μ-t. Ekkor az így kapott súlyozott irányított gráf pont a $q - \mu(e_{v_1} - e_{u_1})$ reprezentációja lesz. Viszont ebben az új gráfban legalább eggyel kevesebb él van, mivel legalább egy élet lenulláztunk. Ezért ilyen lépések sorozatával előbb utóbb eljutunk a 0 ponthoz.

Ekkor igazából q-nak egy felírását kaptuk meg:

$$q = \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_{v_i} - e_{u_i} = \sum_{i=1}^{N} d_i \mu_i \frac{e_{v_i} - e_{u_i}}{d_i} \tag{3.4.6}$$

Ahol $\frac{e_{v_i} - e_{u_i}}{d_i} \in K_{G,V_1}$, a a 3.4.6 megjegyzés alapján. Továbbá $\sum_{i=1}^{N} d_k \mu_k$ megegyezik a q-hoz rendelt súlyozott irányított gráf éleinek súlyainak összegével. Ezzel viszont beláttuk, hogy q tényleg előáll néhány K_{G,V_1}-beli pon konvex kombinációjaként. Ezzel beláttuk, hogy $P_G \cap \mathbb{R}^{V_1} \subset K_{G,V_1}$.

□

Hivatkozások

[1] Tianran Chen és Robert Davis. "A toric deformation method for solving Kuramoto equations". *Nonlinear Dynamics* 109 (2022).

[2] Akihiro Higashitani, Katharina Jochemko és Mateusz Michałek. "Arithmetic aspects of symmetric edge polytopes". *Mathematatika* 65.3 (2019), 763–784. old. ISSN: 0025-5793. DOI: 10.1112/s0025579319000147. URL: https://doi.org/10.1112/s0025579319000147.

[3] Tamás Kálmán és Lilla Tóthmérész. "Degrees of interior polynomials and parking function enumerators". *arXiv preprint arXiv:2304.03221* (2023).

[4] Yasuhide Numata, Yusuke Takahashi és Dai Tamaki. "Faces of directed edge polytopes". *Australas. J. Combin.* 88 (2024), 77–96. old. ISSN: 1034-4942.

[5] Alessio D'Alı, Emanuele Delucchi és Mateusz Michałek. "Many faces of symmetric edge polytopes". *Electron. J. Combin.* 29.3 (2022), Paper No. 3.24., 42. DOI: 10.37236/10387. URL: https://doi.org/10.37236/10387.

NYILATKOZAT

Név: CSAPLÁR VIKTOR

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BCS

NEPTUN azonosító: HBTLUX

Szakdolgozat címe: GRÁFPOLITÓPOK

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024. 06. 03.

Csaplár Viktor

a hallgató aláírása