Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Földesi András

Lipschitz leképezések és önhasonló halmazok

Matematika BSc szakdolgozat

Témavezető:

Keleti Tamás

Analízis Tanszék

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni elsősorban Keleti Tamás segítségét, aki rendszeres konzultációkkal és szakmai tanácsokkal lehetővé tette ezen szakdolgozat létrejöttét. Köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy végig támogattak az egyetemi éveim során. Ezen felül szeretném megköszönni Espán Mártonnak a Latex szövegszerkesztő környezetének felépítésében nyújtott segítségét.

Tartalomjegyzék

Előszó

A szakdolgozatomban először a Lipschitz analízis alapjait fektetem le, majd egyes érdekes területeit vizsgálom részletesebben. Először Kirszbraun és Rademacher tételeire térek ki, melyek a témakör kiemelten fontos és alapvető tételei.

Ezt követően híres kérdésekre foglalom össze az eddig ismert eredményeket. Kiemelt figyelmet szentelek Laczkovich Miklós következő kérdésének:

0.0.1. Kérdés. Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ egy mérhető halmaz pozitív d-dimenziós Lebesgue mértékkel. Ekkor létezik-e biztosan $f : A \to [0,1]^d$ Lipschitz ráképezés?

Végül Balka Richárd és Keleti Tamás egy friss eredményét foglalom össze. Ebben a cikkükben arra keresik a választ, hogy két önhasonló halmaz mikor képezhető egymásra Lipschitz függvénnyel. Ehhez először az önhasonló halmazokról ismert alapvető tényeket foglalom össze.

1. fejezet

Lipschitz analízis bevezetése

1.0.1. Definíció. Legyenek (M, ρ) és (N, δ) metrikus terek, $L \geq 0$. Egy $f : M \to N$ függvény *L-Lipschitz*, ha

$$\delta(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y)$$

minden $x, y \in M$ pontra.

1.1. Kiterjesztési tételek

A Lipschitz analízis egy fontos kérdése, hogy egy metrikus tér egy részhalmazán értelmezett Lipschitz függvény kiterjeszthető-e a teljes metrikus térre a Lipschitz tulajdonság megőrzése mellett. Ezen túl szintén érdekes, hogy a kiterjesztés során hogyan változik a Lipschitz konstans.

Ismert, hogy $f : A \to H_2$ függvényekre, ahol H_1,H_2 Hilbert terek és $A \subset H_1$, ez mindig megtehető, ráadásul a Lipschitz konstans megváltozása nélkül (Kriszbraun's theorem [2]).

A $H_2 = \mathbb{R}$ esetet McShane-Whitney extension theorem-nek is hívják, sőt ebben az esetben H_1 lehet tetszőleges metrikus tér. Erre a speciális esetre a bizonyítás kis előkészítéssel könnyen adódik (ezt a bizonyítást Juha Heinonen írta le [1]).

1.1.1. Lemma. *Legyen H_1 metrikus tér, $\{f_i : i \in I\}$ L-Lipschitz függvények egy halmaza, $f_i : A \to \mathbb{R}$, $A \subset H_1$. Ekkor az*

$$x \mapsto \inf_{i \in I} f_i(x), \quad x \in A$$

és az

$$x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x), \quad x \in A$$

függvények is L-Lipschitzek, ha legalább egy pontban végesek.

Bizonyítás. Supremumra (infimumra ugyanígy megy). Legyen $x_0 \in A$ az a pont amelyre a feltétel szerint a supremum véges. Ekkor tetszőleges $x \in A$ pontra

$$|\sup_{i\in I} f_i(x) - \sup_{i\in I} f_i(x_0)| \leq \sup_{i\in I} |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq \infty,$$

azaz a supremum A minden pontjára véges. Így tetszőleges $x, y \in A$ pontokra $\sup_{i\in I} f_i(x)$ és $\sup_{i\in I} f_i(y)$ véges, és igaz, hogy

$$|\sup_{i\in I} f_i(x) - \sup_{i\in I} f_i(y)| \leq \sup_{i\in I} |f_i(x) - f_i(y)| \leq L|x - y|.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk. □

1.1.2. Tétel. *(McShane-Whitney extension theorem) Legyen M metrikus tér, $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset M$ egy L-Lipschitz függvény. Ekkor létezik egy L-Lipschitz függvény $F : M \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $F|_A = f$.*

Bizonyítás. ([1]) Tekintsük az

$$f_a(x) = f(a) + L|x - a| \quad a \in A$$

függvényeket, ezek L-Lipschitzek, így az

$$F(x) = \inf_{a\in A} f_a(x), \quad F : M \to \mathbb{R}$$

függvény is L-Lipschitz Lemma 1.1.1 szerint. Továbbá

$$F(a) \leq f_a(a) = f(a) \quad \forall a \in A$$

és

$$f_b(a) = f(b) + L|b - a| \geq f(b) + |f(b) - f(a)| \geq f(a)$$

minden $a, b \in A$ pontra, így

$$F(a) \geq f(a) \quad \forall a \in A.$$

Így $F(a) = f(a)$ ($\forall a \in A$), ezzel a tételt igazoltuk. □

1.2. Kirszbraun tételének előkészítése

A tételnek több bizonyítása létezik, a megközelítés melyet itt alkalmazok D. H. Fremlin kéziratában [2] található.

Kirszbraun tételének bizonyításához először tekintsük a Hilbert terek pár ismert általános tulajdonságát. Ezeket itt nem bizonyítom (a bizonyítások szintén megtalálhatóak a kéziratban [2]).

1.2.1. Lemma. *Legyen H Hilbert tér.*

(a) *(i) Tetszőleges $x, y \in H$-ra, $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$, ahol $(\cdot|\cdot)$ a skaláris szorzás. (CBS egyenlőtlenség)*

(ii) Tetszőleges $x \in H$-ra, $\|x\| = \max\{(x|c) : c \in H, \|c\| \leq 1\}$.

(b) Tetszőleges $x, y \in H$-ra, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. (paralelogramma szabály)

(c) Bármely $C \subset H$ nem üres konvex zárt halmazra és $b \in H$ pontra létezik $b' \in C$, hogy tetszőleges $z \in C$ esetén $(z - b|b' - b) \geq \|b' - b\|^2$. (létezik b' legközelebbi pont a b-hez C-ben)

(d) Adott $f : H \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálra, ha $\gamma = \sup\{|f(x)| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$ véges, akkor egyértelműen létezik $z \in H$, hogy $f(x) = (x|z)$ minden $x \in H$ pontra. (Riesz reprezentációs tétele)

(e) Bármely $I \subset H$ véges halmaz konvex burka kompakt H-ban (a természetes topológiára).

A következő lemmák kulcsfontosságú szerepet játszanak a tétel igazolásában.

1.2.2. Lemma. *Legyenek H_1 és H_2 Hilbert terek, $J \subset H_1$ véges, $g : J \to H_2$ 1-Lipschitz, és $\|g(x)\| > \|x\|$ minden $x \in J$ pontra. Ekkor $g(J)$ konvex burka nem tartalmazza a 0-t.*

Bizonyítás. ([2]) Figyeljük meg, a feltételekből könnyen adódik, hogy tetszőleges $x, y \in J$ pontokra

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) <$$
$$< \frac{1}{2}(\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2) = (g(x)|g(y)).$$

Tegyük fel, hogy w eleme a konvex buroknak, ekkor léteznek nem negatív $\langle \lambda_x \rangle_{x \in J}$ valósak, hogy $\sum_{x \in J} \lambda_x = 1$ és $\sum_{x \in J} \lambda_x g(x) = w$. Így

$$\|w\|^2 = \left(\sum_{x \in J} \lambda_x g(x) \middle| \sum_{x \in J} \lambda_x g(x) \right) = \sum_{x,y \in J} \lambda_x \lambda_y (g(x)|g(y)) >$$
$$> \sum_{x,y \in J} \lambda_x \lambda_y (x|y) = \left(\sum_{x \in J} \lambda_x x \middle| \sum_{x \in J} \lambda_x x \right) = \left\| \sum_{x \in J} \lambda_x x \right\|^2 \geq 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $w \neq 0$. □

1.2.3. Lemma. *Legyenek H_1 és H_2 Hilbert terek, $I \subset H_1$ véges halmaz, $f : I \to H_2$ 1-Lipschitz függvény és $a \in H_1$ tetszőleges pont. Ekkor létezik $b \in H_2$, hogy $\|f(x) - b\| \leq \|x - a\|$ minden $x \in I$ pontra.*

Bizonyítás. ([2]) Ha $I = \emptyset$ akkor $b = 0$ megfelelő, ha pedig $a \in I$ akkor $b = f(a)$ tesz eleget a feltételnek, így feltehetjük, hogy $I \neq \emptyset$ és $a \notin I$.

Legyen K az $f(I)$ halmaz konvex burka. Ekkor K nem üres konvex részhalmaza H_2-nek, ezen túl kompakt is (Lemma 1.2.1(e)). Továbbá minden $x \in I$-re a

$$H_2 \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \frac{\|z - f(x)\|}{\|a - x\|}$$

függvény folytonos ($a \notin I$). Így mivel I véges, ezért a

$$h : H_2 \to \mathbb{R}, \quad h(z) = \max_{x \in I} \frac{\|z - f(x)\|}{\|a - x\|}$$

függvény is az. Tehát h felveszi a minimumát K-n egy b helyen. Célunk belátni, hogy $h(b) \leq 1$, ebből ugyanis h definíciója alapján a b megfelelő pont. Tekintsük azokat az $x \in I$ pontokat, amelyekre $\dfrac{\|b - f(x)\|}{\|a - x\|}$ felveszi a maximumát:

$$J = \left\{ x : x \in I, \frac{\|b - f(x)\|}{\|a - x\|} = h(b) \right\}.$$

Belátjuk, hogy $b \in \Gamma(f(J))$ (ahol $\Gamma(A)$ az A halmaz konvex burka). Tegyük fel, hogy $b \notin \Gamma(f(J))$, ekkor létezik $b' \in \Gamma(f(J))$, hogy $(z - b|b' - b) \geq \|b' - b\|^2$ minden $z \in \Gamma(f(J))$ pontra (Lemma 1.2.1(c)). Legyen $b_\delta = (1 - \delta)b + \delta b' = b + \delta(b' - b)$, ahol $\delta \in (0, 1)$, itt $b, b' \in K$, tehát $b_\delta \in K$, mert K konvex.

Így minden $x \in J$-re

$$(f(x) - b|b_\delta - b) = \delta(f(x) - b|b' - b) \geq \delta\|b' - b\|^2.$$

Így

$$\begin{aligned}
\|f(x) - b_\delta\|^2 &= \|(f(x) - b) - (b_\delta - b)\|^2 \\
&= \|f(x) - b\|^2 - 2(f(x) - b|b_\delta - b) + \|b - b_\delta\|^2 \\
&\leq \|f(x) - b\|^2 - 2\delta\|b' - b\|^2 + \delta^2\|b - b'\|^2 < \|f(x) - b\|^2,
\end{aligned}$$

mert $\delta \in (0, 1)$-re $\delta^2 - 2\delta < 0$.

Mivel $z \mapsto \dfrac{\|z - f(x)\|}{\|a - x\|}$ folytonos minden $x \in I$-re, ezért kellően kicsi $\delta > 0$-ra és minden $x \in I \backslash J$-re $\dfrac{\|b_\delta - f(x)\|}{\|a - x\|} < h(b)$, mert $x \in I \backslash J$ miatt

$\dfrac{\|b - f(x)\|}{\|a - x\|} < h(b)$. Továbbá a fentiek alapján minden $x \in J$-re és $\delta \in [0,1]$-re $\dfrac{\|b_\delta - f(x)\|}{\|a - x\|} < \dfrac{\|b - f(x)\|}{\|a - x\|} = h(b)$. Tehát létezik $\delta > 0$, hogy $h(b_\delta) = \max_{x \in I} \dfrac{\|b_\delta - f(x)\|}{\|a - x\|} < h(b)$, ez pedig ellent mond b választásának.

A bizonyítás befejezéséhez lesz szükség a Lemma 1.2.2-re. Ehhez $g(x) = f(x+a) - b$ és $J' = \{x - a : x \in J\}$, ezekre

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x+a) - f(y+a)\| \leq \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - y\|,$$

ahol $x, y \in J'$, és minden $x \in J'$-re

$$\|g(x)\| = \|f(x+a) - b\| = h(b)\|(x+a) - a\| = h(b)\|x\|.$$

Mivel $b \in \Gamma(f(J))$, ezért léteznek $\langle \lambda_x \rangle_{x \in J}$ nemnegatív valósak, hogy $b = \sum_{x \in J} \lambda_x f(x)$ és $1 = \sum_{x \in J} \lambda_x$. De ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{x \in J'} \lambda_{x+a} g(x) = \sum_{x \in J'} \lambda_{x+a}(f(x+a) - b) = \sum_{x \in J} \lambda_x f(x) - b \sum_{x \in J} \lambda_x = b - b = 0.$$

Így Lemma 1.2.2 alapján kell, hogy legyen egy $x \in J'$, amire $h(b)\|x\| = \|g(x)\| \leq \|x\|$, de $a \notin J \subset I$ miatt minden $x \in J'$-re $\|x\| > 0$, ez pedig azt jelenti, hogy $h(b) \leq 1$, amivel a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

1.2.4. Következmény. *A Lemma 1.2.3 egyszerű átfogalmazása, hogy Hilbert terek között egy véges ponthalmazon adott* 1*-Lipschitz függvény* 1*-Lipschitzként kiterjeszthető egy tetszőleges további pontra. Innen indukcióval nyilvánvaló, hogy tetszőleges véges ponthalmazra is kiterjeszthető ugyanígy.*

1.2.5. Következmény. *Ezen túl tetszőleges L Lipschitz konstansra és egy L-Lipschitz függvényre a függvényt elosztva ezzel a konstanssal egy* 1*-Lipschitz függvényt kapunk. Ezt egy véges halmazról tetszőleges véges halmazra ki tudjuk bővíteni* 1*-Lipschitzként. A kibővítés után visszaszorova L-lel az eredeti függvény egy L-Lipschitz kiterjesztését kapjuk. Ez azt jelenti, hogy Hilbert terek közötti véges ponthalmazon értelmezett L-Lipschitz függvény kiterjeszthető L-Lipschitzként tetszőleges véges ponthalmazra.*

Kis topológiai és funkcionálanalízis kitekintés

Kirszbraun tételének bizonyításának gerincét egy kompaktsági érvelés alkotja. Ez teszi lehetővé, hogy a Következmény 1.2.5 állításából el tudjuk hagyni a halmazok végességét. Ehhez kellenek olyan ismert topológiai eszközök, amelyeknek a bizonyítását itt nem részletezem.

1.2.6. Definíció. Legyen $X = (X, \tau)$ topologikus vektortér, melynek folytonos duálisa X^*. A *gyenge-* topológia* ilyenkor a legszűkebb topológia X^*-on, amire minden $x \in X$-re az

$$f_x : X^* \to X, \quad f_x(\Lambda) = \Lambda(x)$$

lineáris funkcionál folytonos.

1.2.7. Tétel. *(Banach-Alaoglu [8]) Az X^* egységgömbje kompakt a gyenge-* topológiában.*

Mivel H Hilbert terekre Riesz reprezentációs tétele megad egy bijekciót H és H^* között (egy folytonos lineáris funkcionált a reprezentáns vektornak feleltetünk meg), ezért vehetjük a gyenge topológiát H-n, amire ez a bijekció homeomorfizmus. Ekkor a két vektortér között a homeomorfizmus az egységgömböket egymásba képzi, így H egységgömbje kompakt a gyenge topológiában. Ezen túl a gyenge-* topológia definíciója alapján világos, hogy $x \mapsto (x|y)$ folytonos minden $y \in H$-ra.

1.2.8. Tétel. *(Tychonoff [9]) Adott kompakt terek egy tetszőleges $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ családja. Legyen $X = \prod_{i \in I} X_i$, az I-n definiált olyan g függvények halmaza, melyekre $g(i) \in X_i$. Ekkor X kompakt a szorzat topológiában.*

1.3. Kirszbraun tétele

1.3.1. Tétel. *(Kirszbraun) Legyenek H_1, H_2 Hilbert terek, $A \subset H_1$, $f : A \to H_2$ L-Lipschitz függvény. Ekkor létezik $F : H_1 \to H_2$ L-Lipschitz függvény, hogy $F|_A = f$.*

Bizonyítás. ([2]) Ha $A = \emptyset$, akkor $F(x) = 0$ minden x-re egy megfelelő függvény. Feltehetjük tehát, hogy $A \neq \emptyset$, rögzítsünk egy $a \in A$-t.

Minden $x \in H_1$ pontra legyen

$$B_x = \{y \in H_2 : \|y\| \leq \|f(a)\| + L\|x - a\|\},$$

ekkor B_x definíciójából nyilvánvaló, hogy tetszőleges L-Lipschitz g függvényre, ha $f(a) = g(a)$, akkor $g \in X = \prod_{x \in H_1} B_x$.

Egy $I \subset H_1$ véges halmazra tekintsük a következő függvények halmazát:

$$F_I = \{g \in X : \forall x \in I \cap A \quad g(x) = f(x), \\ \forall x, y \in I \quad \|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|\}.$$

A Lemma 1.2.3 következménye alapján tetszőleges $I \cap A$-n értelmezett L-Lipschitz függvénynek (többek között f-nek is) van L-Lipschitz kiterjesztése I-re. Egy ilyen függvényt $H_1 \setminus I$-re tetszőlegesen kiterjesztve (úgy, hogy X-ben maradjon) F_I egy elemét kapjuk. Ezek alapján $F_I \neq \emptyset$.

Ahhoz, hogy a kompaktságra tudjunk hivatkozni azt kell belátni, hogy az F_I halmazok zártak (a szorzattopológiában). Ehhez olyan függvényeket vizsgálunk, melyekről vagy ismert, vagy definícióikból nyilvánvaló, hogy folytonosak a H_1-en értelmezett gyenge topológiára.

Tudjuk, hogy a $g \mapsto g(x) : X \to B_x$ vetítés folytonos, ha X-en a szorzattopológiát vesszük. Most belátjuk, hogy H_2*-on a gyenge-* topológiában az egy pontú halmazok zártak. Ez igaz, mert $\Lambda \mapsto \Lambda(x) = (x|c) : H_2^* \to H_2$ folytonos minden $x \in H_2$ pontra, ahol c a Λ reprezentáns vektora. Ekkor rögzített $c \in H_2$-re és $\Lambda \in H_2^*$-ra $\bigcap_{x \in H_2} \{\Lambda : \Lambda(x) = (x|c)\}$ zárt (zártak metszete). Mivel ha $(x|c) = (x|d)$ minden $x \in H_2$-re, akkor $c = d$ (Hilbert terekre ismert), ezért a reprezentációs vektor egyértelműsége miatt az előző metszet egyedül a rögzített Λ-t tartalmazza. Ebből következik, hogy tetszőleges véges halmaz zárt a gyenge-* topológiában H_2^*-on, így a gyenge topológiában is H_2-n. Tehát $\{f(x) : x \in I \cap A\}$ zárt. De akkor $\{g \in X : \forall x \in I \cap A, \quad g(x) = f(x)\}$ is zárt, a vetítés folytonossága miatt.

A gyenge topológia definíciójából világos, hogy $z \mapsto (z|c) : H_2 \to \mathbb{R}$ folytonos minden $c \in H_2$-re. Ebből következik, hogy a $g \mapsto (g(x)|c)$ és $g \mapsto (g(y)|c)$ függvények is folytonosak minden $c \in H_2$-re (egy vetítés és az előző függvény kompozíciói). De akkor a $g \mapsto ((g(x) - g(y))|c)$ is folytonos. Így rögzített $x, y \in I$ pontokra a $\{g \in X : (g(x) - g(y)|c) \leq L\|x - y\|\}$ halmaz zárt, tehát a

$$\{g \in X : \|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|\} = \bigcap_{\|c\| \leq 1} \{g \in X : (g(x) - g(y)|c) \leq L\|x - y\|\}$$

halmaz is zárt (az egyenlőség a Lemma 1.2.1(a)(ii) állítása alapján teljesül). Végül,

$$F_I = \bigcap_{x \in I \cap A} \{g \in X : g(x) = f(x)\} \cap \bigcap_{x, y \in I} \{g \in X : \|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|\}$$

is zárt.

Ha belátnánk, hogy létezik $g : H_1 \to H_2$ függvény, hogy $g \in F_I$ teljesül H_1 minden véges I részhalmazára, abból gyorsan következne a tétel, mert a Lipschitz tulajdonságot elég ha egy halmaz minden véges részhalmazán ellenőrizzük (sőt elég minden két elemű részhalmazán), hasonlóan az $f(x) = g(x)$-et is elég minden pontra külön vizsgálni. Továbbá ha $g \in F_I$ az pont azt jelenti, hogy I pontjain teljesül a Lischitz tulajdonság, és $f(x) = g(x)$ $I \cap A$-n.

Most indirekten belátjuk egy ilyen g létezését. Tegyük fel, hogy minden $g \in X$-hez létezik $I \subset H_1$ véges, hogy $g \notin F_I$. Ekkor $\langle (X \setminus F_I) \rangle_{I \subset H_1 \text{ véges}}$ egy nyílt fedése X-nek, így mivel B_x kompakt a gyenge topológiában, ezért X is a szorzattopológiában (Tétel 1.2.8), tehát létezik véges részfedése X-nek. Ehhez tartozzon $I_1, I_2, ..., I_n$, ekkor $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ véges, azaz F_I nem üres. Azonban F_I definíciójából világos, hogy $F_I \subset \bigcap_{i=1}^n F_{I_i} = \emptyset$, mert $\bigcup_{i=1}^n X \setminus F_{I_i} = X$, ami ellentmondásra vezet. Így megmuattuk, hogy létezik megfelelő g. □

1.4. Rademacher tételének előkészítése

Rademacher tétele a Lipschitz analízis egy másik kiemelten fontos tétele, mely azt mondja ki, hogy egy Lipschitz függvény majdnem mindenhol differenciálható.

A tétel bizonyításához több lemmára is szükség lesz. A továbbiakban ezeket fogom felsorolni bizonyítás nélkül (a bizonyítások megtalálhatók [3]-ban). Innentől $D \subset \mathbb{R}^r$ egy halmaz, $f : D \to \mathbb{R}^s$ függvény.

1.4.1. Lemma. *f pontosan akkor Lipschitz, ha $f_i : D \to \mathbb{R}$ is az minden i-re, ahol $f(x) = (f_1(x), ..., f_s(x))$ minden $x \in D$-re.*

1.4.2. Lemma. *Az előző jelölésekkel f pontosan akkor differenciálható egy $x \in D$ pontban, ha f_i differenciálható x-ben minden i-re.*

1.4.3. Lemma. *Ha f Lipschitz, akkor kiterjeszthető $\mathbb{R}^r$-re a Lipschitz tulajdonság megőrzésével. (Kirszbraun tételének speciális esete)*

1.4.4. Lemma. *Az $r = s = 1$ és $D = [a, b]$ esetén f pontosan akkor Lipschitz, ha abszolút folytonos és korlátos a deriváltja (ahol létezik).*

1.4.5. Lemma. *Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos függvény, ekkor g majdnem mindenhol differenciálható az $[a, b]$-n az 1-dimenziós Lebesgue mérték szerint.*

1.4.6. Tétel. *(Lebesgue sűrűségi tétel) Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mérhető halmaz, ekkor H majdnem minden pontja sűrűségi pont, azaz*

$$\lim_{r \to +0} \frac{\lambda(B(x, r) \cap H)}{\lambda(B(x, r))} = 1$$

majdnem minden $x \in H$ pontra.

1.4.7. Lemma. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ és $x \in D$ a D sűrűségi pontja. Ekkor*

$$\lim_{z \to 0} \frac{\inf_{y \in D} |x + z - y|}{\|z\|} = 0.$$

1.5. Rademacher tételének bizonyítása

1.5.1. Tétel. *(Rademacher) Legyen $f : D \to \mathbb{R}^s$ Lipschitz függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}^r$. Ekkor f a D-n majdnem mindenhol differenciálható az $\mathbb{R}^r$-en vett λ Lebesgue mérték szerint.*

Bizonyítás. (Ezt a bizonyítást D. H. Fremlin írja le. [3])

A Lemma 1.4.1 és a Lemma 1.4.2 szerint elég az $s = 1$ esetet vizsgálni. Ezen túl a Lemma 1.4.3 állítása alapján f kiterjeszthető $\mathbb{R}^r$-re Lipschitzként, és ha a kiterjesztett függvény majdnem mindenhol differenciálható $\mathbb{R}^r$-en, akkor f is majdnem mindenhol differenciálható D-n. Így feltehetjük, hogy $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ Lipschitz függvény.

Először vizsgáljuk az $r = 1$ esetet, ekkor f abszolút folytonos minden korlátos zárt intervallumon (Lemma 1.4.4), és így majdnem mindenhol differenciálható (Lemma 1.4.5). Innentől r szerinti indukcióval folytatódik a bizonyítás.

Először azt kell belátni, hogy majdnem minden pontban az összes parciális derivált létezik (ehhez elég hogy minden parciális derivált $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}$ majdnem minden pontban létezik).

Tekintsük tetszőleges $j \leq r$ pozitív egészre a

$$\Delta(q, x) = \frac{1}{q}(f(x + qe_j) - f(x)), \quad q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}^r$$

függvényt, ahol e_j a j-ik egységvektor. Az f folytonossága miatt Δ is folytonos az első változójában ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$-n). Emiatt (és mert $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-en) tetszőleges $a > 0$-ra

$$\sup_{\delta \in \dot{B}(x,a)} \frac{1}{\delta}(f(x + \delta e_j) - f(x)) = \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap \dot{B}(x,a)} \Delta(q, x),$$

ezért a

$$D^+(x) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(f(x + \delta e_j) - f(x)) = \lim_{n \to \infty} \sup_{q \in \mathbb{Q}, 0 < |q| \leq 2^{-n}} \Delta(q, x)$$

Borel mérhető (Borel mérható függvények megszámlálható supremuma és limesze Borel mérhető). Hasonlóan a

$$D^-(x) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(f(x + \delta e_j) - f(x))$$

is Borel mérhető. Azonban $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j} = D^+(x)|_E$, ahol

$$E = \{x : D^+(x) = D^-(x)\}$$

így a j-ik parciális derivált egy Borel halmazon értelmezett (mert a D^+ és a D^- Borel), Borel mérhető függvény.

Most feleltessük meg $\mathbb{R}^r$ pontjait $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{R}$ pontjainak, úgy hogy $(\xi_1, ..., \xi_r)$-hez $((\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_r), \xi_j)$-t rendeljük. Ekkor $y \in \mathbb{R}^{r-1}$ és $z \in \mathbb{R}$-re definiáljuk az $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$f_y(z) = f(y, z).$$

Ekkor $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}(x) = f_y'(z)$, ahol $x = (y, z)$. Ezt figyelembe véve $E = \{(y, z) : f_y'(z) \text{ értelmes}\}$. Rögzített y-ra ez az 1-dimenziós Lebesgue mérték szerint majdnem mindenhol igaz a korábbiak alapján (f_y is Lipschitz, ha f az). De mivel az r-dimenziós Lebesgue mértékre tekinthetünk az $(r-1)$-dimenziós és az 1-dimenziós Lebesgue mérték szorzataként, így a Fubini tétel szerint E komplementere nullmértékű. Ezzel beláttuk, hogy a parciális deriváltak egyenként majdnem minden pontban léteznek.

Ebből, mivel csak véges sok parciális derivált van, következik, hogy majdnem mindenhol az összes parciális derivált létezik. Innentől legyen

$$H = \left\{x : \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x) \text{ létezik minden } j \leq r \text{ pozitív egészre}\right\}.$$

A bizonyítás további részében feleltessük meg $\mathbb{R}^r$-et $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}$-nek, a $(\xi_1, ..., \xi_r) \mapsto ((\xi_1, ..., \xi_{r-1}), \xi_r)$ bijekcióval, és legyen

$$T : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r, \quad T(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial \xi_r}(x)\right). \tag{1.1}$$

Célunk belátni, hogy a $T(x)$ majdnem minden pontban megfelel a derivált definíciójának ($\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ lineáris leképezésként értelmezve).

Legyen

$$H_1 = \left\{x \in H : \lim_{u\to 0 \ \mathbb{R}^{r-1}\text{-ben}} \frac{|f(x + (u, 0)) - f(x) - T(x)(u, 0)|}{\|u\|} = 0\right\}.$$

Hasonlóan, mint H-ról H_1-ről is belátjuk, hogy a komplementere nullmértékű.

Ehhez először belátjuk, hogy H_1 Borel, utána pedig az indukciós feltétel és Fubini tétele együtt könnyen adja, hogy a komplementere nullmértékű.

Világos, hogy $x \in H$ pontosan akkor eleme H_1-nek, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy minden $\|u\| \leq \delta$-ra

$$|f(x + (u, 0)) - f(x) - T(x)(u, 0)| \leq \varepsilon\|u\|.$$

Ez ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$-re létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $\|u\| \leq 2^{-n}$-re

$$|f(x + (u, 0)) - f(x) - T(x)(u, 0)| \leq 2^{-m}\|u\|.$$

Ugyanakkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ számra és $u \in \mathbb{R}^{r-1}$ vektorra az

$$E_{mu} = \{x : |f(x + (u, 0)) - f(x) - T(x)(u, 0)| \leq 2^{-m}\|u\|\}$$

halmaz Borel, mert az $x \mapsto f(x + (u, 0))$, az $x \mapsto f(x)$ és az $x \mapsto T(x)(u, 0)$ függvények Borel mérhetőek. Így

$$H_1 = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{u \in \mathbb{Q}^{r-1}, \|u\| \leq 2^{-n}} E_{mu}$$

alakú. Itt $u \in \mathbb{Q}^{r-1}$ azért tehető fel, mert az

$$u \mapsto \frac{|f(x + (u, 0)) - f(x) - T(x)(u, 0)|}{\|u\|} \tag{1.2}$$

függvény folytonos $\mathbb{R}^{r-1} \backslash \{0\}$-n és a racionális vektorok sűrűek $\mathbb{R}^{r-1}$-en, így ha egy racionális nullsorozaton tart 0-ba a függvényérték, akkor, mivel tetszőleges nullsorozatnak létezik megfelelő racionális közelítése, így azon is tart 0-hoz a függvényérték. Innen az átviteli elv miatt a függvény tart 0-hoz a 0-ban.

Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valósra tekintsük a

$$v \mapsto f_t(v) = f(v, t) : \mathbb{R}^{r-1} \to \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor $(v, t) \in H_1$ pontosan akkor, ha $f_t'(v)$ létezik. Mivel f_t Lipschitz, ezért az indukciós feltevés alapján $\mathbb{R}^{r-1}$-en majdnem mindenhol differenciálható. Ekkor a Fubini tételből következik, hogy H_1 komplementere nullmértékű.

Most minden $q, q' \in \mathbb{Q}$ és $n \in \mathbb{N}$-hez vegyük fel az

$$F(q, q', n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : q \leq \frac{f(x + (0, \eta)) - f(x)}{\eta} \leq q', \forall \eta \in [-2^{-n}, 2^{-n}] \right\}$$

halmazt. Legyen $F^*(q, q', n)$ az $F(q, q', n)$ sűrűségi pontjainak halmaza. Ekkor az 1.4.6 Tétel állítása szerint $F(q, q', n) \backslash F^*(q, q', n)$ nullmértékű, de így a

$$G = \bigcup_{q, q' \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}} F(q, q', n) \backslash F^*(q, q', n)$$

is nullmértékű. Legyen $H_2 = H_1 \backslash G$, ekkor H_1 majdnem minden pontja H_2-nek is pontja.

Végül belátjuk, hogy f mindenhol differenciálható H_2-n. Ehhez rögzítsünk tetszőleges $x = (u, t) \in H_2$ pontot. Ekkor $\alpha = \frac{\partial f}{\partial \xi_r}(x)$ és $T = T(x)$ létezik. Legyen L az f-hez tartozó Lipschitz konstans.

Vegyünk tetszőleges $\varepsilon > 0$-t, ekkor léteznek $q, q' \in \mathbb{Q}$, hogy $\alpha - \varepsilon < q < \alpha < q' < \alpha + \varepsilon$, de ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $x \in F(q, q', n)$, viszont ekkor $x \in F^*(q, q', n)$ is teljesül H_2 definíciója miatt. A Lemma 1.4.7 állítása alapján létezik $\delta_0 > 0$, hogy $\|z\| \le \delta_0$ esetén $\inf_{y \in F(q,q',n)} |x + z - y| \le \varepsilon \|z\|$, azaz x kis környezetében minden ponthoz van "közeli" pontja $F(q, q', n)$-nek.

Továbbá H_1 definíciója alapján létezik $\delta_1 > 0$, amire minden $\|u\| \le \delta_1$ ($u \in \mathbb{R}^{r-1}$) esetén $|f(x + (u, 0)) - f(x) - T(u, 0)| \le \varepsilon \|u\|$.

Legyen
$$\delta = \frac{\min\{\delta_0, \delta_1, 2^{-n}\}}{1 + 2\varepsilon} > 0.$$

Legyen $z = (v, \tau)$, amire $\|z\| \le \delta$. Így mivel $\|z\| \le \delta_0$, ezért létezik $x' = (u', t') \in F(q, q', n)$, hogy $\|x + z - x'\| \le 2\varepsilon \|z\|$. Legyen $x^* = (u', t)$, ekkor

$$\max\{\|u - u'\|, |t - t'|\} \le \|x - x'\| \le (1 + 2\varepsilon)\|z\| \le \min\{\delta_1, 2^{-n}\}.$$

Így $\|x^* - x\| = \|u - u'\| \le \delta_1$, ekkor δ_1 választása miatt

$$|f(x^*) - f(x) - T(x^* - x)| \le \varepsilon \|u' - u\| \le \varepsilon(1 + 2\varepsilon)\|z\|.$$

Illetve

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x^*) - T(x' - x^*)| &= |f(x') - f(x^*) - \alpha(t' - t)| \\ &\le \varepsilon |t' - t| \le \varepsilon(1 + 2\varepsilon)\|z\|, \end{aligned}$$

mert $x' \in F(q, q', n)$ és $|t' - t| \le 2^{-n}$, így (ha $x \neq x'$)

$$\alpha - \varepsilon \le q \le \frac{f(x^*) - f(x')}{t - t'} \le q' \le \alpha + \varepsilon,$$

azaz
$$\left| \frac{f(x') - f(x^*)}{t' - t} - \alpha \right| \le \varepsilon.$$

Végül
$$|f(x + z) - f(x')| \le L\|x + z - x'\| \le 2L\varepsilon\|z\|,$$
$$|T(z) - T(x' - x)| \le \|T\|\|x + z - x'\| \le 2\varepsilon\|T\|\|z\|.$$

Ezeket összegezve

$$\begin{aligned}|f(x+z)-f(x)-T(z)| \leq |f(x+z)-f(x')|+|T(x'-x)-T(z)|+\\ |f(x')-f(x^*)-T(x'-x^*)|+|f(x^*)-f(x)-T(x^*-x)| \leq\\ 2L\varepsilon\|z\|+2\varepsilon\|T\|\|z\|+\varepsilon(1+2\varepsilon)\|z\|+\varepsilon(1+2\varepsilon)\|z\| =\\ \varepsilon(2L+2\|T\|+2+4\varepsilon)\|z\|\end{aligned}$$

minden $\|z\| \leq \delta$-ra. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért f differenciálható x-ben.

Ezzel f differenciálható H_2 minden pontjában, és majdnem minden $x \in \mathbb{R}^r$ eleme H_2-nek, tehát f majdnem mindenhol differenciálható. Így a tételt beláttuk. $\square$

2. fejezet

Általános kompakt halmazok Lipschitz képe

2.1. Ismert eredmények és nyitott kérdések

2.1.1. Kérdés. (*Analyst's traveling salesman problem*) Mely $\mathbb{R}^2$ beli halmazok fedhetőek le a $[0,1]$ intervallum Lipschitz képeként?

Ezen halmazok karakterizációját P. W. Jones [10] adta meg, sőt az eredményt K. Okikiolu [11] általánosította $\mathbb{R}^d$-re is.

Ezzel analóg módon sok további kérdés vetődik fel, ha lecseréljük a $[0,1]$-intervallumot más kompakt halmazokra.

Egy másféle megközelítésre vall Laczkovich Miklós [12] következő kérdése.

2.1.2. Kérdés. Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ egy mérhető halmaz pozitív d-dimenziós Lebesgue mértékkel. Létezik ekkor $f : A \to [0,1]^d$ Lipschitz ráképezés?

A válasz $d = 1, 2$-re pozitív, $d \geq 3$-ra nem ismert.

2.2. Laczkovich kérdése

A bizonyítás $d = 1$-re könnyen adódik.

2.2.1. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ egy mérhető halmaz pozitív Lebesgue-mértékkel. Ekkor létezik $f : A \to [0,1]$ Lipschitz ráképezés.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $c = \lambda(A \cap [0,1]) > 0$ (ahol $\lambda(A)$ az A halmaz Lebesgue mértéke). Tekintsük a következő $g : A \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$g(x) = \lambda(A \cap [0,x)).$$

Ekkor világos, hogy g 1-Lipschitz, továbbá $g : A \to [0, c]$ ráképzés. Így $f = \frac{g}{c}$ $\frac{1}{c}$-Lipschitz és $f : A \to [0, 1]$ ráképzés ($c \neq 0$). □

2.2.2. Tétel. *Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ egy mérhető halmaz pozitív Lebesgue-mértékkel. Ekkor létezik $f : E \to [0, 1]^2$ Lipschitz ráképezés.*

A következőkben erre két teljesen különböző bizonyítást ismertetek. Az első bizonyítás alapja D. Preisstől [13] származik, Jiří Matoušek ebből kiindulva, több változtatással alkotta meg az itt leírt változatot [4]. A másik bizonyítás P. Jones-tól származik, aki azt vette észre, hogy N. X. Uy egy komplex függvénytani eredményének ez egy könnyű következménye [6]. Ez a bizonyítás említés szintjén szerepel [5]-ben, de részletes kidolgozását nem találtam.

2.3. Jiří Matoušek bizonyítása

Ez a bizonyítás lényegében egy konstrukciót ad a keresett Lipschitz függvényre az Erdős-Szekeres tétel felhasználásával.

Az bizonyítás során a maximum normát alkalmazzuk a szokásos euklideszi norma helyett, ez a normák ekvivalenciája miatt nem befolyásolja az eredmény helyességét. Ennek fényében következő lemmák szükségesek a tétel bizonyításához.

2.3.1. Lemma. *Legyen $a, w > 0$, $2w \leq a$ és $\varphi : [0, a] \to [0, a]$ 1-Lipschitz függvény, ekkor a következőképpen definiált $f_{\varphi,w} : [0, a]^2 \to [0, a] \times [0, a - 2w]$ függvény is 1-Lipschitz (a maximum normára):*

$$f_{\varphi,w}(x, y) = \begin{cases} (x, \min(y, a - 2w)) & \text{ha } y < \varphi(x) - w \\ (x, \max(y - 2w, 0)) & \text{ha } ay > \varphi(x) + w \\ (x, \max(\min(\varphi(x) - w, a - 2w), 0)) & \text{ha } y \in [\varphi(x) - w, \varphi(x) + w]. \end{cases}$$

Bizonyítás. (vázlat, a részletes bizonyításhoz lásd [4])

Legyenek $p_1 = (x_1, y_1)$ és $p_2 = (x_2, y_2)$ tetszőleges pontok, és $f(p_1) = (x_1, q_1)$, $f(p_2) = (x_2, q_2)$.

Ha $|q_1 - q_2| \leq |x_1 - x_2|$, akkor $d_\infty(p_1, p_2) \geq |x_1 - x_2| = d_\infty(f(p_1), f(p_2))$ miatt igaz a lemma.

Ha $|q_1 - q_2| > |x_1 - x_2|$, akkor is könnyen ellenőrizhető, hogy $d_\infty(f(p_1), f(p_2)) = |q_1 - q_2| \leq |y_1 - y_2| = d_\infty(p_1, p_2)$, mert f lényegében az a függvény, mely az y-tengely mentén "ráhúzza" a függvénygrafikon $2w$ sugarú környezetét a függvénygrafikonra. □

2.3.2. Lemma. *Legyenek (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ a sík pontjai, ekkor kiválasztható közülük $\lceil\sqrt{n}\rceil$ pont melyek 1-Lipschitzek az x-koordinátájukban (azaz $|x_i - x_j| \leq |y_i - y_j|$ bármely $i, j \in \{1, ..., n\}$-re), vagy $\lceil\sqrt{n}\rceil$ pont melyek 1-Lipschitzek az y-koordinátájukban ($|y_i - y_j| \leq |x_i - x_j|$).*

Bizonyítás. ([4]) Az Erdős-Szekeres tétel alapján n síkbeli pontból kiválasztható egy $\lceil\sqrt{n}\rceil$ hosszú nem csökkenő lánc (ha $x_i \leq x_j$, akkor $y_i \leq y_j$), vagy egy $\lceil\sqrt{n}\rceil$ hosszú nem növő lánc (ha $x_i \leq x_j$, akkor $y_j \leq y_i$).

Most az eredeti pontjainkat $\pi/4$-gyel forgassuk el negatív irányba az origó körül. Ekkor a kapott pontokból kiválasztjuk a megfelelő hosszú nem csökkenő vagy nem növő láncot. Könnyen latható, hogy egy ilyen nem növő lánc pontjai a forgatás előtt 1-Lipschitzek az y-koordinátájukban, egy nem csökkenőé pedig az x-koordinátájukban. $\square$

2.3.3. Lemma. *Legyen $Q = [0, a]^2$ és $K \subset Q$ kompakt halmaz, amire teljesül, hogy $\lambda(K) = \lambda(Q)(1 - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0{,}01$. Ekkor létezik 1-Lipschitz $g : [0, a]^2 \to [0, a']^2$ leképezés, hogy*

(i) $a' > a(1 - \sqrt{\varepsilon})$,

(ii) $d_\infty(p, g(p)) \leq a\sqrt{\varepsilon}$ *bármely* $p \in Q$ *pontra,*

(iii) $\lambda(g(K)) \geq \lambda(Q')(1 - 0{,}9\varepsilon)$.

Bizonyítás. ([4]) Osszuk fel Q-t $n \times n$ a/n oldalú négyzetre, ezek halmaza legyen G. Tekintsük ezek közül az olyan s négyetek halmazát, melyekre $\lambda(s \backslash K) \geq \dfrac{15}{16}\lambda(s)$. Ezek halmaza legyen B_0. Megmutatjuk, hogy választhatjuk olyan nagyra n-t, hogy B_0 lefedje a $Q \backslash K$ halmaz mértékének legalább felét.

Adott n-re vegyük azon $x \in Q$ pontok H_n halmazát, melyekre igaz, hogy az x-et tartalmazó $\dfrac{a}{2^n}$ oldalú négyzet B_0-beli. A Lebesgue sűrűségi tétel alapján majdnem minden $x \in Q \backslash K$-ra létezik n, hogy $x \in H_n$. Így H_n egy megszámlálható felszálló halmaz sorozat, melynek uniója fedi $Q \backslash K$ majdnem minden pontját, így van olyan n_0, hogy $n > n_0$-ra $\lambda(H_n) > \dfrac{1}{2}\lambda(Q \backslash K)$. Ekkor a $2^n \times 2^n$-es négyzetrácsra $H_n \subset \cup_{s \in B_0} s$ miatt kész vagyunk.

A célunk az lesz, hogy konstruáljunk egy olyan 1-Lipschitz $\varphi_0 : [0, a] \to [0, a]$ függvényt, ami a B_0-ban lévő négyzetek közül minél többnek a középpontján átmegy (legalább $\lceil\sqrt{|B_0|}\rceil$ darab Lemma 2.3.2 alapján), aztán a Lemma 2.3.1 szerint vesszük az $f_{\varphi_0, a/n}$ függvényt, ami 1-Lipschitz. Ekkor azokat a négyzeteket melyeknek középpontján φ átmegy elimináltuk. Így $[0, a]^2$-t $[0, a] \times [0, a(n-2)/n]$-ba képeztük. Majd vesszük a $h_0 : [0, a] \times$

$[0, a(n-2)/n] \to [0, a(n-2)/n]^2$ függvényt, mely a négyzetrács utolsó két oszlopát egy függőleges vonalra húzza, ez is 1-Lipschitz. Így $g_0 = h_0 \circ \varphi_0$ 1-Lipschitz, és $[0, a]^2$-t $[0, a(n-2)/n]^2$-re képzi.

Könnyen látható g_0 konstrukciójából, hogy négyzetrács minden négyzetét egy négyzetbe képzi. Így legyen

$$B_1 = \{s \in G : \exists s' \in B_0 : g_0(s') \subset s,\ \lambda(g_0(s')) > 0\},$$

azaz az olyan négyzetek halmaza melybe képződik olyan B_0-beli négyzet, ami nem lett eliminálva. Mivel legalább $\lceil \sqrt{|B_0|} \rceil$ négyzetet elimináltunk, ezért $|B_1| \leq |B_0| - \lceil \sqrt{|B_0|} \rceil$.

Hasonlóan definiáljuk g_i-t $i = 1, 2, ...$, és

$$B_i = \{s \in G : \exists s' \in B_{i-1} : g_{i-1}(s') \subset s,\ \lambda(g_{i-1}(s')) > 0\}\text{-t}.$$

Ekkor $g_i : Q_i \to Q_{i-1}$ 1-Lipschitz függvény, ahol $Q_i = [0, a(n-2i)/n]^2$, és $|B_i| - |B_{i+1}| \geq \lceil \sqrt{|B_i|} \rceil$.

Legyen t az első index, amire $|B_0| - |B_t| \geq \varepsilon n^2/5$ (ilyen létezik, mert $|B_i|$ szigorúan csökkenő amíg el nem éri a 0-t és egész értékű sorozat, továbbá $|B_0| \geq \varepsilon n^2/2$). Ekkor $|B_i| > \varepsilon n^2/4$, ha $i < t$. Ez azt jelenti, hogy $\varepsilon n^2/5 \geq |B_0| - |B_{t-1}| \geq \sum_{i=0}^{t-2} \sqrt{|B_i|} \geq (t-1)n\sqrt{\varepsilon}/2$. Ebből következik, hogy $t < \frac{2}{5} n\sqrt{\varepsilon} + 1 \leq n\sqrt{\varepsilon}/2$ (itt $n\sqrt{\varepsilon}$ tetszőlegesen nagy).

Komponáljuk a $g_0, ..., g_{t-1}$ leképezéseket, ekkor a kapott g függvény 1-Lipschitz ami Q-t $Q' = [0, a']^2$-re képzi, ahol $a' = a(1 - 2t/n) \geq a(1 - \sqrt{\varepsilon})$. Továbbá a B_0-beli négyzetekből legalább $\varepsilon n^2/5$ eliminálódik, ezek uniója legalább $\frac{15}{16}(a^2/n^2)(\varepsilon n^2/5) = \frac{3}{16}\varepsilon a^2$ mértékű részét fedi $Q \backslash K$-nak, így $\lambda(g(Q \backslash K)) \leq \frac{13}{16}\varepsilon a^2$. Továbbá

$$\lambda(g(K)) \geq \lambda(Q' \backslash g(Q \backslash K)) \geq a'^2 - \frac{13}{16}\varepsilon a^2.$$

Ekkor $\varepsilon \leq 0{,}01$ miatt $a' \geq a(1 - \sqrt{\varepsilon}) \geq 0{,}9a$, így

$$\lambda(g(K)) \geq a'^2 \left(1 - \frac{10 \cdot 13}{9 \cdot 16}\varepsilon\right) \geq a'^2(1 - 0{,}9\varepsilon).$$

A $d_\infty(p, g(p)) \leq a\sqrt{\varepsilon}$ feltétel bármely $p \in Q$ pontra teljesül, mert könnyen ellenőrizhető, hogy bármely g_i függvényre a legnagyobb változás ilyenkor az x-koordinátában a négyzet jobboldalán lévő pontokra következik be, az y-koordinátában pedig a felső oldalra. Ezekre pedig igaz lesz a feltétel $a' \geq a(1 - \sqrt{\varepsilon})$ miatt.

$\square$

2.3.4. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a lemma állításánál elég feltenni, hogy $\lambda(K) \geq \lambda(Q)(1-\varepsilon)$.

2.3.5. Lemma. *A* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-0{,}95^{n-1}/10)$ *végtelen szorzat létezik és értéke nagyobb, mint* $0{,}1$.

Bizonyítás. Az $a_m = \prod_{n=1}^{m}(1-0{,}95^{n-1}/10)$ sorozat nyilvánvalóan monoton csökkenő és pozitív, így létezik határértéke, ez pont a végtelen szorzat. Ezen túl számológéppel ellenőrizhető, hogy $a_{30} > 0{,}19$. Továbbá, ha $m > 30$, akkor $a_m = a_{m-1}(1-0{,}95^{m-1}/10)$ miatt indukcióval könnyen látható, hogy $a_m \geq a_{30}(1-\sum_{n=31}^{m} 0{,}95^{n-1}/10)$. Azonban $\sum_{n=31}^{\infty} 0{,}95^{n-1}/10 = 0{,}95^{30}\cdot 2 < 0,43$, az utolsó lépés számológéppel ellenőrizhető. Mivel a_m monoton fogy, ezért $m > 30$ esetén $a_m \geq a_{30}(1-\sum_{n=31}^{\infty} 0{,}95^{n-1}/10) > 0{,}19\cdot(1-0,43) = 0{,}1064$, tehát $\lim_{m\to\infty} a_m \geq 0{,}1064$. □

Ezen lemmák felhasználásával már könnyen bizonyítható a tétel.

Bizonyítás. ([4]) A Lebesgue mérték regularitása miatt elég kompakt E-re. Legyen Q_0 olyan négyzet, amire $\lambda(Q_0 \cap E) > 0{,}99\lambda(Q_0)$ (a sűrűségi tétel miatt van ilyen). Feltehető, hogy $Q_0 = [0,a]^2$.

Válasszunk Lemma 2.3.3 szerint $g_1 : Q_0 \to Q_1$ függvényt $\varepsilon_1 < 0{,}01$-hez. Most megmutatjuk, hogy léteznek $g_i : Q_{i-1} \to Q_i$ (i pozitív egész) 1-Lipschitz függvények és $0 < \varepsilon_i < (0{,}9^{i-1}\cdot 0{,}01)$ valósak, hogy pozitív egész n-ekre

$$\lambda((g_n \circ \ldots \circ g_1(Q_0 \cap E)) \geq \lambda(Q_n)(1-0{,}9\varepsilon_n).$$

Ezen túl elérjük azt is, hogy $a_{n-1} \geq a_n > a_{n-1}(1-\sqrt{\varepsilon_n})$, és $d_\infty(p, g_n(p)) \leq a_n\sqrt{\varepsilon_n}$ bármely $p \in Q_n$ pontra. A g_1 választása miatt ezek $n = 1$-re teljesülnek, innen n szerint rekurzívan választjuk a többi függvényt. Legyen $\varepsilon_n = 0{,}9\cdot\varepsilon_{n-1}$ és g_n olyan 1-Lipschitz függvény, amire

$$\lambda(g_n(g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1(Q_0 \cap E))) \geq \lambda(Q_n)(1-0{,}9\varepsilon_n), \tag{2.1}$$

ilyen létezik Lemma 2.3.3 szerint, mert az indukciós feltevés alapján

$$\lambda((g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1(Q_0 \cap E)) \geq \lambda(Q_{n-1})(1-0{,}9\varepsilon_{n-1}),$$

és $\varepsilon_{n-1} < (0{,}9^{n-2}\cdot 0{,}01)$ miatt a lemma feltételei és $\varepsilon_n < (0{,}9^{n-1}\cdot 0{,}01)$ teljesülnek.

Most megmutatjuk, hogy

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}(g_n \circ \ldots \circ g_1)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in Q$$

létezik. Válasszunk tetszőleges $x \in Q_0$ pontot erre g_n-k és ε_n-k választása miatt $d_\infty(x, f_n(x)) < \sum_{i=1}^{n} a\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}9^{i-1}}$, ez egy véges összegű mértani sor ha n tart a végtelenbe, így $f_n(x)$ valóban konvergál. Legyen $Q' = g(Q_0)$.

Az ε_i-k választása miatt, és mert $a_i > a_{i-1}(1 - \sqrt{\varepsilon_i})$,

$$a_i \geq a_0 \prod_{j=1}^{i} (1 - 0{,}95^{j-1}/10),$$

és így Lemma 2.3.5 szerint Q' oldalhosszára $\lim_{i\to\infty} a_i = a' \geq 0{,}1 \cdot a_0$ adódik. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \lambda(Q_n) = \lambda(Q')$ könnyen meggondolható. Ezen túl $\lambda(g(E \cap Q_0)) = \lambda(Q')$, mert $\lambda(f_n(E \cap Q_0)) \geq \lambda(Q_n)(1 - 0{,}9\varepsilon_n)$ a (2.1) egyenlőtlenség szerint, és ε_n tart a 0-hoz.

Kell még, hogy g Lipschitz, de ez következik abból, hogy 1-Lipschitz függvények limesze.

Mivel E-ről feltettük, hogy kompakt, így $E \cap Q$ is az. Ekkor $\lambda(g(E \cap Q_0)) = \lambda(Q')$ miatt $g(E \cap Q_0)$ sűrű Q'-n, és kompakt (kompakt Lipschitz képe), így $g(E \cap Q_0) = Q'$.

Innen g megfelelő nagyításával és kiterjesztésével könnyen adódik egy a feltételeknek megfelelő függvény. □

2.4. Peter Jones bizonyítása

2.4.1. Tétel. *(N. X. Uy [6]) Legyen $E \subset \mathbb{C}$ pozitív Lebesgue-mértékű kompakt halmaz. Ekkor létezik nem konstans $f : \mathbb{C}\backslash E \to \mathbb{C}$ korlátos holomorf Lipschitz függvény.*

A továbbiakban $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (azaz a Riemann-gömb).

2.4.2. Következmény. *Tetszőleges $E \subset \mathbb{C}$ pozitív Lebesgue-mértékű kompakt halmazra létezik $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ Lipschitz függvény, hogy f holomorf a $\overline{\mathbb{C}}\backslash E$-n.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy f függvényt Következmény 2.4.2 alapján, ez kiterjeszthető $\mathbb{C}$-re Lipschitzként (Kirszbraun), ezt jelöljük szintén f-fel.

Kell még, hogy ∞-ben létezik f határértéke (és ezzel kiegészítve holomorf a függvény), de ez teljesül ha f holomorf és korlátos a ∞ egy környezetében, ez azonban nyilvánvaló. □

A következőkben sima folytonos függvények sima approximációjával és sima leképezések fokával kapcsolatos definíciókat és tételeket ismertetek bizonyítások nélkül. A bizonyítások megtalálhatóak Szűcs András Topológia jegyzetében [14].

2.4.3. Tétel. *(folytonos függvények sima approximációja)*

(a) Legyenek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ sima sokaságok, $\mathcal{M}$ kompakt, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tetszőleges folytonos leképezés. Ekkor f-hez tetszőlegesen közel létezik egy g sima függvény (az $\mathcal{N}$-en vett metrika szerinti maximum normában).

(b) Ha f eleve sima $\mathcal{M}$ egy L kompakt részhalmazának valamely U környezetén, akkor g megválasztható úgy, hogy L-en megegyezzen f-fel.

2.4.4. Tétel. *(Sard lemma) Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{R}^p$ sima leképezés, valamint legyen $C = \{x \in U : r(f'(x)) < p\}$, ahol $r(f'(x))$ az $f'(x)$ rangja. Ekkor $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ nullmértékű.*

2.4.5. Definíció. Az $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ differenciálható leképezésnek $p \in \mathcal{N}$ *kritikus* pontja, ha létezik x, amire $f(x) = p$ és $r(f'(x)) < \dim \mathcal{N}$. A nem kritikus pontokat *reguláris* pontnak hívjuk.

2.4.6. Definíció. Legyen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ sima leképezés, ahol $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ zárt, n-dimenziós, differenciálható, irányított sokaságok. Ekkor ha p az f egy reguláris értéke, akkor a *foka*:

$$\deg(f, p) = \sum_{f(x)=p} \operatorname{sgn}(\det f'(x)).$$

2.4.7. Lemma. *Legyen $\mathcal{N}$ összefüggő és legyen y és z az f leképezés két tetszőleges reguláris értéke. Ekkor* $\deg(f, y) = \deg(f, z)$.

Ezen ismeretek tükrében már könnyen bizonyítható Laczkovich kérdése d=2-re.

Bizonyítás. Legyen E a pozitív Lebesgue mértékű kompakt halmaz. Feleltessük meg $\mathbb{R}^2$-et $\mathbb{C}$-vel. Következmény 2.4.2 alapján létezik nem konstans $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Lipschitz függvény, ami holomorf $\overline{\mathbb{C}} \backslash E$-n (kiterjeszthető $\overline{\mathbb{C}}$-re, mert korlátos és a ∞ egy környezetén holomorf). Ezen túl $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt, 2-dimenziós, differenciálható, irányítható sokaság (diffeomorf S^2-vel), így sima $\overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ függvényekre tudjuk vizsgálni a leképezés fokát reguláris pontokra. Mostantól $V = \overline{\mathbb{C}} \backslash E$ (V nyílt).

A nyílt leképezések tételének következménye, hogy létezik $B \subset \mathbb{C}$ nyílt gömb, amire $B \subset f(V)$.

Most indirekten belátjuk, hogy $f(E)$ sűrű B-n. Tegyük fel, hogy $f(E)$ nem sűrű B-n, ekkor B-t lecseréljük egy $f(E)$-től diszjunkt nyílt részhalmazára (nyílt gömbre). Legyen $C \subset \mathbb{C}$ nyílt gömb, amire $\overline{C} \subset B$. Ekkor

$f^{-1}(\overline{C}) \subset f^{-1}(B) \subset V$. Így Tétel 2.4.3 alapján létezik g sima függvény, amire $g|_{f^{-1}(\overline{C})} = f|_{f^{-1}(\overline{C})}$, és minden $x \in \overline{\mathbb{C}}$-re $|g(x) - f(x)| < \frac{\mathrm{diam} C}{4}$, (diam$C$ a C átmérőjének a hossza).

Ha f-t $\overline{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$ függvényként tekintjük, akkor a Cauchy-Riemann egyenletek alapján tetszőleges $x \in \overline{\mathbb{R}^2} \backslash E$ pontra $\det f'(x) = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 \geq 0$. Így tetszőleges $x \in f^{-1}(C)$-re $\det g'(x) \geq 0$.

Ezen túl $\overline{g(\overline{\mathbb{R}^2})} \neq \mathbb{R}^2$, mert kompakt folytonos képe kompakt, azaz létezik $p \in \mathbb{R}^2$ reguláris pont, amire $\deg(g, p) = 0$. Továbbá $\mathbb{R}^2$ összefüggő, így minden reguláris pont foka 0 (Lemma 2.4.7).

A Sard lemma alapján (2.4.4) a g szerint reguláris pontok halmaza sűrű $\mathbb{R}^2$-en. Így létezik p reguláris pont, mely a C középpontjától legfeljebb (diam$C$)/8 távolságra van. Erre a p pontra, ha $g(x) = p$, akkor $x \in f^{-1}(C)$, mert $|g(p) - f(p)| < (\mathrm{diam} C)/4$. Azonban erre a p pontra $g^{-1}(p)$ nem üres, mert $f^{-1}(p)$ nem üres, és $g|_{f^{-1}(\overline{C})} = f|_{f^{-1}(\overline{C})}$, és minden $x \in g^{-1}(p) \subset f^{-1}(C)$ pontra $\det g'(x) \geq 0$. Ráadásul itt az egyenlőtlenség szigorú, mert p reguláris, így $\deg(g, p) > 0$, ami ellent mond annak, hogy a reguláris pontok foka 0.

Így azt kaptuk, hogy $f(E)$ sűrű B-n, de mivel E kompakt és f folytonos, ez azt jelenti, hogy $B \subset f(E)$. Így létezik Q zárt négyzet, amire $Q \subset f(E)$, innen a tétel állítása az f megfelelő transzformálásával könnyen adódik.

□

Egyik bizonyítás se általánosítható könnyen $d \geq 3$-ra. A másodiknál ez világosan látszik, hiszen a bizonyítás alapgondolata a $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}^2$ természetes megfeleltetése, ami nagyobb dimenziókra nem tehető meg. Az első bizonyítás általánosításához arra lenne szükség, hogy ha adott m pont $\mathbb{R}$-ben, akkor tudunk ebből $cm^{1-1/d}$ pontot kiválasztani, melyek valamelyik koordinátájukban 1-Lipschitzek. Tardos Gábor azonban belátta, hogy ilyen részhalmaz nem feltétlenül létezik, lásd [15]. Egyéb hasonló kombinatorikus sejtések is születtek, melyek a $d \geq 3$ esetre általánosítanák a problémát, de eddig egyiket se sikerült bizonyítani (sőt nem is mindegyikről világos, hogy eredményre vezetne).

3. fejezet

Önhasonló halmazok Lipschitz képe

3.1. Dimenzió fogalmak

A téma tárgyalásához új dimenzió fogalmak bevezetésére van szükség. Ezek legfontosabb tulajdonsága számunkra, hogy egy halmaz Lipschitz képének dimenziója nem nagyobb, mint az eredeti halmazé.

3.1.1. Definíció. Legyen (X, ρ) egy metrikus tér. Ekkor tetszőleges $U \subset X$ részhalmazra $\mathrm{diam} U$ jelölje U *átmérőjét*, azaz

$$\mathrm{diam} U = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in U\}, \quad \mathrm{diam}\emptyset = 0.$$

3.1.2. Definíció. Legyen (X, ρ) egy metrikus tér, $S \subset X$ tetszőleges részhalmaz, és $d > 0$. Ekkor S *d-dimenziós Hausdorff mértéke*:

$$H^d(S) = \sup_{\delta > 0} H^d_\delta(S) = \lim_{\delta \to 0} H^d_\delta(S),$$

ahol

$$H^d_\delta(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam} U : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ \mathrm{diam} U_i < \delta \right\}.$$

Ha nem létezik megfelelő fedése S-nek, akkor $H^d_\delta(S) = \infty$.

3.1.3. Definíció. Legyen (X, ρ) egy metrikus tér. Ekkor X *Hausdorff dimenziója*:

$$\dim_H(X) = \inf\{d \geq 0 : H^d(X) = 0\}.$$

A Hausdorff dimenzióról többek között Dierk Schleicher [16] ír átfogó összefoglalást.

3.1.4. Definíció. Legyen (X, ρ) egy metrikus tér. Jelölje $N(X, r)$ az X-et fedő r sugarú zárt gömbök minimális számát. Ekkor X *box-dimenziója*:

$$\overline{\dim}_B(X) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\log N(X, r)}{\log(1/r)}.$$

3.1.5. Definíció. Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$. A box dimenzió σ-stabil változata a *pakolási dimenzió*:

$$\dim_P(X) = \inf\{\sup_i \overline{\dim}_B(X_i) : X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,\ X_i \text{ korlátos}\}.$$

3.2. Önhasonló halmazok

3.2.1. Definíció. Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor X *önhasonló*, ha léteznek f_i, $i \in I$ (I véges) hasonlóságok, hogy

$$X = \bigcup_{i\in I} f_i(X).$$

3.2.2. Definíció. Egy X önhasonló halmaz *rendelkezik az SSC-vel* (strong separability condition), ha az előző definícióban $f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset$ minden $i \neq j$-re.

3.2.3. Definíció. Legyenek (M, ρ) és (N, δ) metrikus terek. Egy $f : M \to N$ függvény *kontrakció*, ha létezik $0 < q < 1$, hogy minden $x, y \in M$ pontpárra

$$\delta(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

A legegyszerűbb példa önhasonló halmazra SSC-vel a Cantor halmaz, ahol f_0 és f_1 a 0 illetve 1 centrumú 1/3 arányú középpontos hasonlóságok.

Meg fogjuk mutatni, hogy kontrakciók tetszőleges véges $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ halmazára létezik olyan egyértelmű kompakt H halmaz, hogy $H = \bigcup_{i\in I} f_i(H)$. Ez azt is mutatja, hogy "viszonylag egyszerű" önhasonló halmazokat "készíteni", elég ha a kontrakcióink egyben hasonlóságok is. A tény bizonyításához először szükség van a Hausdorff távolság bevezetésére.

3.2.4. Definíció. Legyen (M, δ) metrikus tér, ekkor $A, B \subset M$ nem üres halmazok *Hausdorff távolsága* $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$, ahol $d(a, B) = \inf_{b\in B}(\delta(a, b))$.

3.2.5. Állítás. *A Hausdorff távolság metrika egy metrikus tér kompakt részhalmazain. (A szükséges tulajdonságok könnyen ellenőrizhetőek.)*

3.2.6. Tétel. *Legyen (M,δ) metrikus tér, $f_i : M \to M$ kontrakciók, ahol $i \in I$, I véges. Ekkor egyértelműen létezik olyan $K \subset M$ kompakt halmaz, hogy*

$$K = \bigcup_{i\in I} f_i(K).$$

Bizonyítás. Mivel minden $i \in I$-re f_i kontrakció, ezért folytonos is, így ha $L \subset M$ kompakt, akkor $f_i(L)$ is kompakt. De kompaktak véges uniója is kompakt, azaz $\bigcup_{i\in I} f_i(L)$ is kompakt. Legyen $\mathcal{K}$ az M kompakt részhalmazainak halmaza. Ekkor a

$$g : \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad g(L) = \bigcup_{i\in I} f_i(L)$$

jól definiált.

Azt állítom, hogy ez egy kontrakció a Hausdorff metrikára. Vegyünk $A, B \in \mathcal{K}$ halmazokat, ekkor

$$\sup_{a\in A}(\inf_{b\in B}(\delta(a,b))) = \max_{a\in A}(\min_{b\in B}(\delta(a,b))) \tag{3.1}$$

(felhasználva, hogy A és B kompakt, és δ mindkét változójában folytonos).

Rögzítsünk $x \in A$-t, és vegyünk egy $y \in B$ pontot, amire $\delta(x,y)$ minimális, azaz $\delta(x,y) = d(x,B)$. Ekkor tetszőleges $i \in I$-re $\delta(f_i(x), f_i(y)) \leq q_i\delta(x,y)$, ahol q_i a megfelelő kontrakcióhoz tartozó konstans ($0 < q_i < 1$). De ekkor

$$\max_{i\in I}(\min_{b\in B}(\delta(f_i(x), g(b)) \leq \max_{i\in I}(\delta(f_i(x)), f_i(y)) \leq \max_{i\in I}(q_i)\delta(x,y)$$
$$= \max_{i\in I}(q_i)d(x,B).$$

Ekkor tetszőleges $c \in g(A)$-hoz létezik $i \in I$ és $a \in A$, hogy $c = f_i(a)$. Legyen $g^{-1}(c)$ az a függvény, mely c-hez kiválaszt egy ilyen a-t. Így az előzőek alapján

$$d(c, g(B)) \leq \max_{i\in I}(q_i)d(a,B) = \max_{i\in I}(q_i)d(g^{-1}(c), B).$$

Ugyanezt meg tudjuk ismételni A és B felcserélésével, így tetszőleges $e \in g(B)$-re

$$d(e, g(A)) \leq \max_{i\in I}(q_i)d(g^{-1}(e), A).$$

Legyen $q = \max_{i\in I}(q_i)$, ekkor $0 < q < 1$. Továbbá

$$d_H(g(A), g(B)) = \max\{\max_{c\in g(A)}(d(c, g(B))), \max_{e\in g(B)}(d(e, g(A)))\} \leq$$
$$q\max\{\max_{c\in g(A)}(d(g^{-1}(c), B)), \max_{e\in g(B)} d(g^{-1}(e), A)\} \leq qd_H(A,B).$$

Ezzel beláttuk, hogy g kontrakció a Hausdorff metrikában. Ebből azonban a Banach fixponttétel szerint következik, hogy g-nek egyértelműen létezik egy K fixpontja, erre viszont g definíciója alapján világos, hogy $K = \bigcup_{i \in I} f_i(K)$. Ezzel a tételt beláttuk.

□

További érdekesség, hogy Balka Richárd és Keleti Tamás bizonyította, tetszőleges természetes dimenzió fogalomra igaz, hogy a Hausdorff és a box dimenzió közötti értékeket vesz fel. Illetve, ha σ-stabilitást is megkövetelünk, akkor a Hausdorff és a pakolási dimenzió között helyezkedik el. Ez a tétel a Tétel 3.3.3 állításának könnyű következménye. A következő definícióra szükség van a tétel kimondásához.

3.2.7. Definíció. Legyen X teljes szeparábilis metrikus tér. Ekkor $A \subset X$ *analitikus*, ha megkapható egy teljes szeparábilis metrikus tér folytonos képeként. (Ismert, hogy minden Borel halmaz analitikus.)

A tétel pontos állítása (bizonyításhoz lásd [7]):

3.2.8. Tétel. *Legyen n rögzített pozitív egész, $\mathcal{F}$ tetszőleges családja $\mathbb{R}^n$ részhalmazainak, amely az összes kompakt részhalmazt tartalmazza. Tegyük fel, hogy a $D \to [0,1]$ függvényre teljesülnek a következő tulajdonságok:*

(i) Lipschitz függvények nem növelik D-t kompakt halmazokra, azaz $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazra és f Lipschitz függvényre $D(f(K)) \leq D(K)$.

(ii) D monoton, azaz $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $A \subset B$-ből következik $D(A) \leq D(B)$.

(iii) Ha S önhasonló halmaz az SSC-vel, akkor $D(S) = \dim_H(S)$.

Ekkor igazak a következő állítások.

(a) Minden analitikus $A \in \mathcal{F}$ halmazra

$$\dim_H(A) \leq D(A).$$

(b) Minden korlátos $A \in \mathcal{F}$ halmazra

$$D(A) \leq \overline{\dim}_B(A).$$

(c) Ha azt is előírjuk, hogy

(i) D σ-stabil a kompakt halmazokon,

(ii) $\mathcal{F}$ tartalmazza F_σ minden elemét, vagy minden $A \in \mathcal{F}$-re és zárt $F \in \mathbb{R}^n$-re $A \cap F \in \mathcal{F}$,

akkor

$$D(A) \leq \dim_P(A).$$

3.3. Lipschitz képek

Az itt következő eredmények Balka Richárd és Keleti Tamás cikkében találhatóak ([7]).

3.3.1. Definíció. Egy $(\mathcal{M}, d)$ metrikus tér, akkor *ultrametrikus*, ha a háromszögegyenlőtlenség a következő, erősebb formában teljesül rajta:

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z)) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{M}.$$

3.3.2. Definíció. Egy önhasonló halmaz akkor *homogén*, ha megválaszthatóak úgy a definícióban szereplő f_i leképezések, hogy hasonlósági arányaik megegyezzenek.

3.3.3. Tétel. *Legyen A teljes ultrametrikus tér vagy önhasonló halmaz az SSC-vel és B kompakt metrikus tér, ahol $\dim_H(A) > \overline{\dim}_B(B)$. Ekkor létezik A-nak Lipschitz ráképezése B-re.*

Ismert, és könnyen látható, hogy bármely önhasonló halmaz az SSC-vel bilipschitz ekvivalens egy teljes ultrametrikus térrel ([7]), így elég ultrametrikus terekre belátni a tételt.

3.3.4. Tétel. *Legyenek A és B önhasonló halmazok az SSC-vel, és A legyen homogén. Tegyük fel, hogy $\dim_H(A) = \dim_H(B)$. Ekkor A-nak pontosan akkor létezik Lipschitz ráképezése B-re, ha A és B bilipschitz ekvivalens.*

Tétel 3.3.3 és Tétel 3.3.4 arra a kérdésre adnak választ, hogy egy önhasonló halmaz az SSC-vel mikor képezhető rá Lipschitz függvénnyel egy másik önhasonló halmazra az SSC-vel bizonyos feltételek teljesülésekor. Mivel Lipschitz leképezés a Hausdorff dimenziót nem növelheti, és az SSC-vel rendelkező önhasonló halmazokra a természetes dimenzió fogalmak mind megegyeznek a Hausdorff dimenzióval, így Tétel 3.3.3 alapján csak azok az esetek érdekesek amikor $\dim_H(A) = \dim_H(B)$. Erre az esetre ad részleges választ Tétel 3.3.4.

A következőkben ezen tételek bizonyítását írom le.

3.3.5. Definíció. (M, ρ) és (N, δ) metrikus terek, $\alpha > 0$, $C \geq 0$. Egy $f : M \to N$ függvény *α-C-Hölder*, ha

$$\delta(f(x), f(y)) \leq C(\rho(x, y))^{\alpha}$$

minden $x, y \in M$ pontra.

A bizonyítások során Hölder képek vizsgálatára is szükség lesz. Ehhez a következő két mennyiség nyújt segítséget, melyek intuitív értelme, hogy legalább mekkora intervallumba lehet beleképezni s-1-Hölderként az adott halmazt.

3.3.6. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér n pozitív egész, S_n a megfelelő permutációcsoport. Ekkor $x_1, ..., x_n \in X$ pontokra és $s > 0$-ra legyen

$$Z^s(x_1, ..., x_n) = \max\left\{\sum_{j=1}^{k-1}(d(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}))^s : 1 = i_1 < ... < i_k = n\right\},$$

$$\delta^s(X) = \sup\left\{\min_{\pi \in S_n} Z^s(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}) : x_1, ..., x_n \in X, n \geq 1\right\}.$$

3.3.7. Lemma. *Tetszőleges metrikus tér $x_1, ...x_n$ pontjaira*

$$Z^s(x_1, ...x_i) + Z^s(x_i, ..., x_n) \leq Z^s(x_1, ..., x_n),$$

$$Z^s(x_1, ..., x_n) - Z^s(x_1, ..., x_i) \geq Z^s(x_i, ..., x_n) \geq (d(x_i, x_n))^s.$$

Ez a definícióból nyilvánvaló.

3.3.8. Lemma. *Legyen (x, d) metrikus tér és $\alpha, l > 0$. Ekkor létezik kompakt $D \subset [0, l]$ és α-1-Hölder $g : D \to X$ ráképezés pontosan akkor, ha tetszőleges véges $V \subset X$ részhalmazra létezik véges $W \subset [0, l]$ és egy α-1-Hölder $h : W \to V$ ráképezés.*

Bizonyítás. (vázlat, teljes bizonyításhoz lásd [7])

Az egyik irányú implikáció világos, a másik irányhoz pedig egy megszámlálható sűrű halmazt kell venni X-en, majd ennek a véges kezdőszeleteit vizsgálva egy kompaktsági érveléssel adódik az állítás. □

3.3.9. Tétel. *Legyen X kompakt metrikus tér és $s > 0$. Pontosan akkor létezik kompakt $D \subset [0, 1]$ és egy $1/s$-Hölder $g : D \to X$ ráképezés, ha $\delta^s(X) < \infty$.*

Bizonyítás. (vázlat, teljes bizonyításhoz lásd [7])

A bizonyítás során a $[0, 1]$ helyett a $[0, l]$ intervallumra képzünk, és $1/s$-1-Hölder leképezést keresünk, és a végén átskálázással kapjuk a tétel szerinti függvényt. Ekkor könnyen belátható, hogy a Hölder tulajdonság implikálja, hogy $\delta^s(X) \leq l$.

A másik irányhoz azt kell észrevenni, hogy $\delta^s(X) = c$-ből könnyen következik, hogy X tetszőleges véges V részhalmazára létezik $h : V \to [0, c]$ $1/s$-1-Hölder leképezés, innen a Lemma 3.3.8 állítása alapján adódik a tétel. □

A következő tétel teremti meg a kapcsolatot a box-dimenzió és δ^s között.

3.3.10. Tétel. *Tetszőleges (X, d) kompakt metrikus térre igazak a következők:*

1. $\delta^s(X \leq \left(\frac{2\mathrm{diam}(X)}{u(1-u)}\right)^s \sum_{n=1}^{\infty} N(X,u^n)u^{ns}$, *ahol* $s > 0$ *és* $0 < u < 1$,

2. $s > \overline{\dim}_B X$ *implikálja, hogy* $\delta^s(X) \leq \infty$,

3. $\overline{\dim}_B X = \inf\{s > 0 : \delta^s(X) \leq \infty\}$,

4. $\overline{\dim}_B X = \inf\{s > 0 : \exists D \subset [0,1]$ és $1/s$-Hölder $g : D \to X$ ráképezés$\}$.

Ennek a bizonyítását itt nem részletezem, [7]-ben megtalálható.

3.3.11. Állítás. *Legyen A kompakt ultremetrikus tér pozitív t-dimenziós Hausdorff mértékkel és B kompakt metrikus tér, melyre $\delta^s(B) < \infty$. Ekkor létezik $A' \subset A$ kompakt halmaz és $f : A' \to B$ t/s-Hölder ráképezés.*

Bizonyítás. ([7]) Tetszőleges kompakt ultrametrikus tér pozitív t-dimenziós Hausdorff mértékkel ráképezhető $[0,1]$-re egy t-Hölder leképezéssel ([12]). A Tétel 3.3.9 alapján létezik $D \subset [0,1]$ kompakt halmaz és $f : D \to B$ $1/s$-Hölder ráképezés. A két leképezés kompozíciója megfelelő. □

3.3.12. Lemma. *Legyen (X,d) kompakt ultrametrikus tér és $A \subset X$ kompakt részhalmaz. Ekkor létezik 1-Lipschitz $g : X \to A$ retrakció.*

Bizonyítás. ([7]) Legyen $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$, ahol $x \in X$ és $r > 0$, továbbá legyen $\mathcal{S} = \{S(x,r) : x \in X, r > 0, S(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$. Legyen $p : \mathcal{S} \to \bigcup_{S\in\mathcal{S}}(S \cap A)$, $p(S) \in S \cap A$ kiválasztási függvény.

Ekkor tekintsük a $g : X \to A$ függvényt, amire $g(x) = x$, ha $x \in A$ és $g(x) = p(S(x, dist(x,A)))$, ha $x \notin A$. Kell még, hogy g 1-Lipschitz. Ha $x, y \in A$, akkor ez nyilvánvaló.

Ha $x \in A$, $y \notin A$, akkor

$$d(y, g(y)) = d(y, A) \leq d(y, x).$$

Mivel X ultrametrikus, így

$$d(g(x), g(y)) = d(x, g(y)) \leq d(y, x).$$

Az $x, y, g(y)$ háromszögre az ultrametrikus háromszögegyenlőtlenség miatt.

Ha $x, y \notin A$, akkor tegyük fel, hogy $d(x,y) < d(g(x), g(y))$. A g definíciójából

$$d(x, g(x)) = d(x, A) \leq d(x, g(y)), \text{ ugyanígy } d(y, g(y)) \leq d(y, g(x)).$$

Így az ultrametrikus tulajdonság alapján ($x, g(x), g(y)$ és $y, g(x), g(y)$ háromszögekre):

$$d(g(x), g(y)) \leq d(x, g(y)), \text{ és } d(g(x), g(y)) \leq d(y, g(x)).$$

Így a feltevés alapján

$$d(x,y) < d(x,g(y)), \text{ és } d(x,y) < d(y,g(x)).$$

Így az $x, y, g(y)$ és $x, y, g(x)$ háromszögekre tekintve az ultrametrikus tulajdonságot kapjuk, hogy

$$d(y,g(y)) = d(x,g(y)), \text{ és } d(x,g(x)) = d(y,g(x)).$$

Az eddigieket összevetve:

$$d(x,g(x)) \leq d(x,g(y)) = d(y,g(y)) \leq d(y,g(x)) = d(x,g(x)),$$

azaz

$$d(x,g(x)) = d(x,g(y)) = d(y,g(y)) = d(y,g(x)).$$

Legyen $d(x,A) = d(x,g(x)) = r$. Az eddigiek alapján $d(x,y) < d(g(x),g(y)) \leq d(x,g(y)) = r$. Az ultrametrikus tulajdonság miatt ekkor $S(x,r) = S(y,r)$, mert legyen $z \in S(x,r)$, ekkor az x, y, z háromszögre felírva az ultrametrikus tulajdonságot, adódik, hogy $d(y,z) = r$, fordítva ugyanígy. Így azt kapjuk, hogy $g(x) = p(S(x,r)) = p(S(y,r)) = g(y)$, de ekkor a $d(x,y) < d(g(x),g(y)) = 0$ feltevés ellentmondásra vezet. □

Innen Tétel 3.3.3 bizonyítása könnyen adódik.

Bizonyítás. Legyen A teljes ultrametrikus tér vagy önhasonló halmaz az SSC-vel és B kompakt metrikus tér, ahol $\dim_H(A) > \overline{\dim}_B(B)$. Legyen $\dim_H(A) > s > \overline{\dim}_B(B)$. Tétel 3.3.10 alapján $\delta^s(B) < \infty$. A Hausdorff-dimenzió definíciója miatt A-nak pozitív az s-dimenziós Hausdorff-mértéke. Így Következmény 3.3.11 alapján létezik $A' \subset A$ kompakt halmaz és $f : A' \to B$ Lipschitz ráképezés. Továbbá Lemma 3.3.12 alapján létezik $g : A \to A'$ 1-Lipschitz retrakció, de ekkor az $f \circ g : A \to B$ Lipschitz ráképezés. □

3.4. Lipschitz képek azonos Hausdorff-dimenzióra

Ebben a részben található a Tétel 3.3.4 bizonyítása, ehhez kisebb előkészületekre van szükség.

3.4.1. Lemma. *Legyen $q > 1$ egész, mely nem írható fel n^k alakban, ahol n és k egészek, és legyenek $r_1, ..., r_m$ racionális számok. Ekkor ha*

$$q^{r_1} + ... + q^{r_m} = 1,$$

akkor minden r_i egész.

Bizonyítás. ([7]) A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy valamelyik r_i nem egész. Legyen n a legkisebb pozitív egész, melyre minden r_i felírható $r_i = k_i + \dfrac{p_i}{n}$ alakban, ahol $k_i \in \mathbb{Z}$ és $p_i \in \{1, ..., n-1\}$ (a feltevés alapján $n > 1$). Tekintsük a következő racionális együtthatós polinomot:

$$R(x) = -1 + \sum_{i=1}^{m} q^{k_i} x^{p_i}.$$

Ekkor $z = q^{1/n}$-re $R(z) = 0$, és $\deg(R) < n$, így z $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomjának a foka kisebb, mint n.

Ugyanakkor ismert, hogy $Q(x) = x^u - v$ $(u, v \in \mathbb{Z})$ pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha tetszőleges $p|u$ prímre $v^{1/p} \notin \mathbb{Q}$, ami ekvivalens azzal, hogy $v^{1/p} \notin \mathbb{Z}$. Így $q \neq n^k$ választás miatt $P(x) = x^n - q$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és $P(z) = 0$, azaz P z minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Ez ellent mond annak, hogy a minimálpolinom foka kisebb, mint n. $\square$

Vezessük be a következő jelöléseket: A és B metrikus terekre legyen $F(A, B)$ a minimuma annak, hogy A-nak hány 1-Lipschitz képe fedi le B-t:

$$F(A, B) = \min\{k : \exists f_1, ..., f_k \text{ 1-Lipschitz függvények} : \bigcup_{i=1}^{k} f_i(A) = B\}.$$

Egy A metrikus térre rA, ahol $r > 0$ legyen az a metrikus tér, melynek pontjai A pontjai, távolságuk pedig r-szerese az A-beli távolságuknak.

3.4.2. Lemma. *Legyenek A és B metrikus terek, $r > 0$. Ha $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, ahol minden A_i izometrikus rA-val, akkor*

$$F(A, B) \geq \left\lceil \frac{F(rA, B)}{N} \right\rceil.$$

Továbbá, ha $d = (A_i, A_j) \geq \operatorname{diam}(B)$, minden $i \neq j$-re, akkor

$$F(A, B) = \left\lceil \frac{F(rA, B)}{N} \right\rceil.$$

3.4.3. Lemma. *Legyenek A és B metrikus terek. Ha $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, és tetszőleges $i \neq j$-re $d(B_i, B_j) \geq \operatorname{diam}(A)$, akkor*

$$F(A, B) = \sum_{j=1}^{n} F(A, B_j).$$

Ezek a definícióból könnyen adódnak (a bizonyításhoz lásd [7]).

3.4.4. Lemma. *Tetszőleges A és B kompakt metrikus terekre az $f(x) = F(xA, B)$ alulról félig folytonos a $(0, \infty)$ intervallumon.*

Bizonyítás. ([7]) Mivel f egész értékű, így alulról félig folytonossághoz elég belátni, hogy $z_n \to z$ és $f(z_n) \le k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(z) \le k$. Legyenek $f_{i,n} : z_n A \to B$ 1-Lipschitz függvények, melyekre $B = \bigcup_{i=1}^{k} f_{i,n}(A)$ minden n-re. Legyen $h_n : zA \to z_n A$ a természetes bijekció $z_n A$ és zA között. Mivel az $\{f_{i,n} \circ h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen ekvifolytonos (a Lipschitz konstans konvergál) és egyenletesen korlátos, így létezik egyenletesen konvergens részsorozata, ennek limesze legyen f_i. Ekkor az egyenletes folytonosságból, és abból, hogy $\bigcup_{i=1}^{k} (f_{i,n} \circ h_n)(zA) = B$ minden n-re könnyen következik, hogy $\bigcup_{i=1}^{k} f_i(zA) = B$. $\square$

Ezen lemmák felhasználásával bizonyítható Tétel 3.3.4 egy erősebb változata.

3.4.5. Tétel. *Legyen A egy homogén önhasonló halmaz az SSC-vel, azaz A a diszjunkt uniója q darab rA-val izometrikus halmaznak, ahol $q > 1$ egész, $r > 0$. Legyen k az a maximális egész, melyre $\sqrt[k]{q}$ egész. Legyen B önhasonló halmaz az SSC-vel, melyre $\dim_H(A) = \dim_H(B)$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) az A Lipschitz függvénnyel ráképezhető B-re,

(ii) a B minden hasonlósági aránya pozitív egész kitevős hatványa a $\sqrt[k]{r}$-nek,

(iii) továbbá A és B bilipschitz ekvivalensek.

Bizonyítás. ([7]) Ha $q = n^k$ valamely $n, k > 1$ egészekre, akkor könnyen belátható, hogy A bilipschitz ekvivalens egy A' homogén önhasonló SSC-vel rendelkező önhasonló halmazzal, melyre $A' = \bigsqcup_{i=1}^{n} f_i(A')$ úgy, hogy minden f_i hasonlósági aránya $\sqrt[k]{r}$. Így $k = 1$ feltehető.

Könnyen látható, hogy (ii)-ből következik (iii), és (iii) egyértelműen implikálja (i)-t. Így elég ha belátjuk, hogy (i)-ből következik (ii). Azaz tegyük fel, hogy A ráképezhető B-re egy Lipschitz függvénnyel, és be kell látni, hogy B összes hasonlósági aránya r egész kitevős hatványa.

Legyen $s = \dim_H(A) = \dim_H(B)$, $\beta_1, ..., \beta_m$ pedig B hasonlósági arányai. Ismert, hogy egy C SSC-vel rendelkező önhasonló halmazra a hasonlósági arányainak $\dim_H C$-ik hatványainak összege 1, így $qr^s = 1$ és $\sum_{i=1}^{m} \beta_i^s = 1$. Legyen $\alpha_i = -\log_q \beta_i^s > 0$, így $\beta_i^s = q^{-\alpha_i} = (r^{\alpha_i})^s$ és

$$q^{-\alpha_1} + ... + q^{-\alpha_m} = 1.$$

Be kell látni, hogy minden α_i egész, de ehhez Lemma 3.4.1 alapján elég belátni, hogy minden α_i racionális.

Legyenek $g_1, ..., g_m$ rendre a $\beta_1, ..., \beta_m$ hasonlósági arányú függvények melyekre $B = \bigsqcup_{j=1}^{m} g_j(B)$. Feltehető, hogy

$$\min_{i \neq j} d(g_i(B), g_j(B)) > \frac{\operatorname{diam}(A)}{r}. \tag{3.2}$$

(Mert B helyett vehető tetszőleges cB, $c > 0$, ez az állításokat nem befolyásolja). Legyen

$$z(t) = F(r^{-\{t\}}A, B)q^{\{t\}},$$

ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvény. Ekkor $z(t)$ 1-periodikus.

Megmutatjuk, hogy a következő egyenlőtlenség teljesül $z(t)$-re:

$$z(t) \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} z(t + \alpha_j).$$

Ennek bizonyítása a következő. Vegyük észre, hogy az $r^{\lfloor t \rfloor}A$ halmaz $N = q^{\lfloor t+\alpha_j \rfloor - \lfloor t \rfloor}$ darab $r^{\lfloor t+\alpha_j \rfloor}A$ halmazzal izometrikus halmaz uniója. Ekkor a Lemma 3.4.2 állítása és a tény, hogy $F(C, D) = F(rC, rD)$ tetszőleges C és D metrikus terekre adja, hogy

$$\begin{aligned} F(r^{\lfloor t \rfloor}A, r^t g_j(B))q^{\{t\}} &\geq q^{\lfloor t \rfloor - \lfloor t+\alpha_j \rfloor} F(r^{\lfloor t+\alpha_j \rfloor}A, r^t g_j(B))q^{\{t\}} \\ &= (r^{-\{t+\alpha_j\}}A, B)q^{\{t+\alpha_j\}-\alpha_j} \\ &= q^{-\alpha_j} z(t+\alpha_j). \end{aligned}$$

Ekkor (3.2) alapján alkalmazható a Lemma 3.4.3, és $r^t B = \bigsqcup_{j=1}^{m} r^t g_j(B)$ miatt

$$\begin{aligned} z(t) &= F(r^{-\{t\}}A, B)q^{\{t\}} = F(r^{\lfloor t \rfloor}A, r^t B)q^{\{t\}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} F(r^{\lfloor t \rfloor}A, r^t g_j(B))q^{\{t\}} \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} z(t+\alpha_j), \end{aligned}$$

ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk.

Legyen $\delta \in (0, 1)$ olyan, hogy minden $j = 1, ..., m$-re $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ implikálja, hogy $d(\alpha_j, \mathbb{Z}) > \delta$. A $z(t)$ alulról félig folytonos, így felveszi a minimumát a $[0, 1 - \delta]$ intervallumon, legyen u egy minimumhely, és $w = z(u)$.

Először tekintsük azt az esetet, amikor w minimum a teljes $\mathbb{R}$-en. Ekkor

$$w = z(u) \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} z(u+\alpha_j) \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} w = w,$$

így $z(u+\alpha_j) = w$ minden $j = 1, ..., m$-re. Ekkor, ha valamely α_j irracionális, akkor mivel z 1-periodikus, ezért ezt iterálva kapjuk, hogy z konstans w egy sűrű halmazon. Ez ellentmondás, mert $z(t)$ egy egész értékű függvény és $q^{\{t\}}$ szorzata.

Marad az az eset, amikor létezik $v \in (1-\delta, 1)$, melyre $z(v) < w$. Ekkor δ választása miatt minden $j = 1, ..., m$-re $\{v + \alpha_j\} \in [0, 1-\delta]$, így $z(v + \alpha_j) \geq w$. De ekkor a $w > z(v) \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} z(v+\alpha_j) \geq \sum_{j=1}^{m} q^{-\alpha_j} w = w$ ellentmondásra vezet.

Ezzel kész a tétel bizonyítása. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Juha Heinonen, Lectures on Lipschitz analysis, *Rep. Dept. Math. Stat.* **100** (2005), 1-10.

[2] David Fremlin, Kirszbraun's theorem, publikálatlan kézirat, 14.9.18 verzió, https://www1.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm.

[3] David Fremlin, Measure theory. Vol. 2. Broad foundations, corrected second printing of the 2001 original (2010), 285-294.

[4] J. Matoušek, On Lipschitz mappings onto a square, fejezet a *The mathematics of Paul Erdős I* könyvben, Springer, New York, NY (2013), 533-540, https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7258-2_33.

[5] Giovanni Alberti, Marianna Csörnyei, David Preiss, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (2011), 1379-1394.

[6] N. X. Uy, Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition, *Ark. Mat.* **17** (1979), 19-27.

[7] Richárd Balka, Tamás Keleti, Lipschitz images and dimensions, *Advances in Mathematics* **446** (2024) 109669, https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109669.

[8] Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M., The Banach-Alaoglu Theorem, fejezet a *Cellular Automata and Groups* könyvben, Springer, Berlin Heidelberg (2010), 383–385, https://doi.org/10.1007/978-3-642-14034-1_14.

[9] Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M., Nets and the Tychonoff Product Theorem, fejezet a *Cellular Automata and Groups* könyvben, Springer Berlin Heidelberg (2010), 343-349, https://doi.org/10.1007/978-3-642-14034-1_9.

[10] P. W. Jones, Rectifiable sets and the traveling salesman problem, *Invent. Math.* **102** (1990), no. 1, 1–15.

[11] K. Okikiolu, Characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$, *J. Lond. Math. Soc.* (2) **46** (2) (1992), 336–348.

[12] T. Keleti, A. Máthé, O. Zindulka, Hausdorff dimension of metric spaces and Lipschitz maps onto cubes, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2014** (2014), no. 2, 289–302.

[13] D. Preiss, kézirat (1992).

[14] Szűcs András, Topológia, egyetemi jegyzet, 79-96, https://szucsand.web.elte.hu/Top1-2.pdf.

[15] T. Szabó, G. Tardos, A multidimensional generalization of the Erdős-Szekeres lemma on monotone subsequences, *Combinatorics, Probability and Computing* **10** (2001), 557-565.

[16] D. Schleicher, Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises, *The American Mathematical Monthly* **114(6)** (2007), 509–528, https://doi.org/10.1080/00029890.2007.11920440.

NYILATKOZAT

Név: Földesi András János

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: JLQXU0

Szakdolgozat címe:
Lipschitz leképezések és önhasonló halmazok

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.06.04.

a hallgató aláírása