Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Abel kategóriák

Tregele Máté

Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens

BSc diplomamunka
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2023.

Köszönetnyílvánitás

Szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Zábrádi Gergelynek, aki szakértelmével és segítőkészségével kiemelkedő iránymutatást nyújtott a szakdolgozatom elkészítése során.
Köszönöm családomnak és barátaimnak a támogatást.

Bevezetés

A kategória elmélet hasznos ahhoz, hogy sok matematikai struktúráról gyorsan tudjunk meg alap tulajdonságokat. Az egyik nagyon hasznos kategória család az Abel kategóriák, melyek sok tulajdonságban hasonlítanak az Abel csoportokhoz és az R-modolusokhoz. 1960-ban Lubkin [3] belátta, hogy minden Abel kategória beágyazható egzaktul az Abel csoportok kategóriájába, de ez a beágyazás nem teljes, ezért morfizmusok létezését nem biztosítja. 1964-ben Mitchell [4] belátta hogy minden Abel kategóriához létezik egy R gyűrű úgy, hogy van teljes egzakt beágyazás az R-modulusok kategóriájába.
A szakdolgozat során ezt a Mitchell-féle beágyazási tételt fogjuk belátni, és közben bejárjuk az Abel kategóriák tulajdonságait. A szakdolgozat szorosan követi Freyd [1] könyvét.
Az 1. fejezetben a kategória elmélet alapjai szerepelnek. A 2. fejezetben áttérünk az Abel kategóriák főbb tulajdonságaira. A 3. fejezetben funktorok főbb tulajdonságaival találkozunk, és megjelennek speciális tulajdonságokkal rendelkező objektumok, (pl. injektív/projektív objektumok, generátor/kogenerátor objektumok) amiket később sokat használunk. A 4. fejezetben elkezdünk a Mitchell tételéhez építeni, megnézzük milyen feltételek mellett lesz egy diagram egzakt/kommutatív egy kategóriában, és ezeket mikor tartja meg egy funktor. Belátjuk Mitchell tételét olyan teljes Abel kategóriákra amikben van projektív generátor. Az 5.-7. fejezetben a funktor kategóriákkal foglalkozunk, belátjuk végül, hogy minden Abel kategória beágyazható teljesen és egzaktul egy olyayn teljes Abel kategóriába, amiben van projektív generátor, ezzel a 4. fejezetbeli tétel alkalmazható minden Abel kategóriára.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Alapok

Ezt a fejezetet főként Maclane [2] és Weibel [5] könyveiből vettem.

1.1. Kategória elméleti definíciók

1.1.1. Definíció. Egy **kategória** $\mathcal{C}$ a következőkből áll:

- Egy objektum osztály $obj(\mathcal{C})$
- Egy morfizmus halmaz $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ minden (A, B) rendezett objektum párhoz
- Egy identitás morfizmus $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ minden A objektumhoz
- Egy kompozíció függvény $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ minden (A, B, C) rendezett objektum hármashoz

$f : A \to B$-vel jelöljük, hogy az f morfizmus $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$-ben van, és gf-vel vagy $g \circ f$-vel jelöljük $f : A \to B$ kompozícióját $g : B \to C$-vel A fenti adatokra a további 2 axióma teljesül:

- Asszociatívitás axióma: $(hg)f = h(gf)$ minden $f : A \to B$, $g : B \to C$,$h : C \to D$
- Egység axióma: $id_B \circ f = f = f \circ id_A$ minden $f : A \to B$

1.1.2. Definíció. Egy kategória **kicsi**, ha $obj(\mathcal{C})$ egy halmaz

1.1.3. Definíció. Egy morfizmus $f : B \to C$ **izomorfizmus** $\mathcal{C}$-ben, ha van egy $g : C \to B$ úgy, hogy $gf = id_B$ és $fg = id_C$

Az izomorfizmusokat gyakran f^{-1}-vel jelöljük. Egy izomorfizmus a halmazok kategóriájában (Set) egy bijekció, a topologikus terek kategóriájában (Top) pedig egy homeomorfizmus.

1.1.4. Definíció. $A \to B$ egy **monomorfizmus** akkor és csak akkor ha
$C \xrightarrow{x} A$, $C \xrightarrow{y} A$ morfizmusokra, ha
$C \xrightarrow{x} A \to B = C \xrightarrow{y} A \to B$ akkor $x = y$
$A \to B$ egy **epimorfizmus** akkor és csak akkor ha
$B \xrightarrow{x} C$, $B \xrightarrow{y} C$ morfizmusokra, ha
$A \to B \xrightarrow{x} C = A \to B \xrightarrow{y} C$ akkor $x = y$

1.1.5. Megjegyzés. *Ha $A \to B \to C$ egy monomorfizmus, akkor $A \to B$ is az. Ha $A \to B$ és $B \to C$ monomorfizmusok, akkor $A \to B \to C$ is az. Hasonlóan: Ha $A \to B \to C$ egy epimorfizmus, akkor $B \to C$ is az. Ha $A \to B$ és $B \to C$ epimorfizmusok, akkor $A \to B \to C$ is az.*

1.1.6. Állítás. *Egy izomorfizmus egyszerre monomorfizmus és epimorfizmus.*

Bizonyítás. Ha $A \xrightarrow{a} B$ egy izomorfizmus akkor $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a^{-1}} A = id_A$ egy monomorfizmus, tehát $A \xrightarrow{a} B$ is az, és $B \xrightarrow{a^{-1}} A \xrightarrow{a} B = id_B$ epimorfizmus, tehát $A \xrightarrow{a} B$ is az. $\square$

1.1.7. Megjegyzés. *Izomorfizmusok kompozíciója izomorfizmus.*

1.1.8. Definíció. Minden $\mathcal{C}$ kategóriának van duális kategóriája $\mathcal{C}^*$. $\mathcal{C}^*$ objektumai ugyanazok mint $\mathcal{C}$ objektumai, de a morfizmusok (és a kompozíció) fordítva mennek úgy, hogy van egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $f \mapsto f^*$ $f : B \to C$ $\mathcal{C}$-beli morfizmusok és $f^* : C \to B$ $\mathcal{C}^*$-beli morfizmusok között.

Ha f monic, akkor f^* epi; ha f epi, akkor f^* monic. Hasonlóan a duális magot komagba visz. Ha P egy kategória morfizmusain definiált tulajdonság, akkor P^* tulajdonság definiálható "x-re igaz $P^* \iff x^*$-ra igaz P." Látni fogjuk, hogy az Abel kategóriák axiómái duálisaik egymásnak, ezért ha egy tétel az axiómák következménye, akkor van hozzá egy duális tétel, amiben minden tulajdonságot a duálisára cserélünk.

1.1.9. Definíció. Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ függvény **funktor** a $\mathcal{C}$ kategóriából a $\mathcal{D}$ kategóriába, ha

- minden $C \in \mathcal{C}$ objektumhoz egy $F(C) \in \mathcal{D}$ objektumot rendel.
- minden $f : C_1 \to C_2$ morfizmushoz $F(f) : F(C_1) \to F(C_2)$ $\mathcal{D}$-beli morfizmust rendel.
- F megtartja az egységeket: $F(id_C) = id_{F(C)}$
- F megtartja a kompozíciót: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Ha $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ egy másik funktor, akkor a kompozíciójuk nyilvánvaló módon definiáljuk: $(GF)(C) = G(F(C))$ és $(GF)(f) = G(F(f))$

1.1.10. Definíció. Az előző definícióban **kovariáns** funktort definiáltunk. Egy **kontravariáns** simán egy kovariáns funktor $\mathcal{C}^*$-ból $\mathcal{D}$-be, azaz

- minden C $\mathcal{C}$-beli objektumhoz egy $F(C)$ $\mathcal{D}$-beli objektumot rendel.
- minden $f : C_1 \to C_2$ morfizmushoz $F(f) : F(C_2) \to F(C_1)$ $\mathcal{D}$-beli morfizmust rendel.
- F megtartja az egységeket: $F(id_C) = id_{F(C)}$
- F megfordítja a kompozíciót: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

1.1.11. Példa. *Legyen $\mathcal{S}$ a halmazok kategóriája, $\mathcal{A}$ egy tetszőleges kategória, és A egy objektum $\mathcal{A}$-ban. Ekkor az $(A, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ definiálható a következő képpen:*

Minden $B \in \mathcal{A}$-ra, $(A, -)(B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ (Az A-ból B-be menő morfizmusok halmaza)

Minden $B_1 \xrightarrow{x} B_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(B_1, B_2)$-re, $(A, -)(x) = (A, B_1) \xrightarrow{(A,x)} (A, B_2)$, ahol $[(A, x)](A \xrightarrow{y} B_1 = A \xrightarrow{y} B_1 \xrightarrow{x} B_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B_2)$ Ez egy kovariáns funktor. Egy kontravariáns funktor a $(-, A)$ ami hasonlóan definiálható.

1.1.12. Definíció. Adott két funktor F és G $\mathcal{C}$-ből $\mathcal{D}$-be. Egy **természetes transzformáció** $\eta : F \implies G$ ha minden $C \in \mathcal{C}$-hez egy $\eta_C : F(C) \to G(C)$ $\mathcal{D}$-beli morfizmust rendel úgy hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(C)} & F(C') \\ \eta\big\downarrow & & \big\downarrow\eta \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

Ha minden η_C egy izomorfizmus, akkor η egy **természetes izomorfizmus**, és $\eta : F \cong G$

1.2. Részobjektum és hányados objektum

1.2.1. Definíció. Két monomorfizmus $A_1 \to B$ és $A_2 \to B$ **ekvivalensek**, ha léteznek $A_1 \to A_2$ és $A_2 \to A_1$ morfizmusok úgy hogy

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A_2 \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr] & \\ A_2 \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad \text{kommutálnak}$$

B-nek egy **részobjektuma** a B-be menő monomorfizmusok ekvivalencia osztálya. Azt mondjuk, hogy az $A_1 \to B$ által reprezentált részobjektum **tartalmazza** az $A_2 \to B$ által reprezentált részobjektumot, ha van egy olyan $A_2 \to A_1$ morfizmus hogy

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr] & \\ A_2 \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

1.2.2. Megjegyzés. *$A_2 \to A_1$-nek monomorfizmusnak kell lennie és egyértelmű. Ezért ha A_1 tartalmazza A_2-t és A_2 tartalmazza A_1-et akkor A_1 és A_2 izomorfak.*

1.2.3. Definíció. Két epimorfizmus $B \to C_1$ és $B \to C_2$ **ekvivalensek**, ha léteznek $C_1 \to C_2$ és $C_2 \to C_1$ morfizmusok úgy hogy

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \arrow[d] \\ & C_2 \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \\ & C_2 \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{kommutálnak.}$$

B-nek egy **hányados objektuma** B-ből menő epimorfizmusok ekvivalencia osztálya. Azt mondjuk, hogy a $B \to C_1$ által reprezentált hányados objektum **kisebb** a $B \to C_2$ által reprezentált hányados objektumnál, ha van egy olyan $C_2 \to C_1$ morfizmus hogy

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \\ & C_2 \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

1.3. Különbségi mag és komag

1.3.1. Definíció. Adott $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{y} B$ morfizmusokra $K \to A$ egy **különbségi magja** x-nek és y-nak ha

1. $K \to A \xrightarrow{x} B = K \to A \xrightarrow{y} B$, azaz nem tudja megkülönböztetni x-et és y-t
2. Minden $X \to A$ morfizmushoz, amelyre $X \to A \xrightarrow{x} B = X \to A \xrightarrow{y} B$ létezik egy egyértelmű $X \to K$ morfizmus úgy, hogy

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ K \arrow[r] & A \end{tikzcd} \quad \text{kommutál,}$$

azaz a különbségi mag univerzális tulajdonságú

x és y különbségi magját $Ker(x-y)$-val jelöljük.

1.3.2. Állítás. *$Ker(x-y)$ monomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $C \xrightarrow{a} K \to A = C \xrightarrow{b} K \to A = C \xrightarrow{c} A$. Ekkor $C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{x} B = C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{y} B$ a különbségi mag 1.-es tulajdonsága miatt, a 2.-es tulajdonság miatt pedig a K-n átvezetés egyértelmű, azaz $a = b$. $\square$

1.3.3. Definíció. Adott $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{y} B$ morfizmusokra $B \to F$ egy **különbségi komagja** x-nek és y-nak, ha

1. $A \xrightarrow{x} B \to F = A \xrightarrow{y} B \to F$
2. Minden $B \to X$ morfizmushoz, amelyre $A \xrightarrow{x} B \to X = A \xrightarrow{y} B \to X$ létezik egy egyértelmű $F \to X$ morfizmus úgy, hogy

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

x és y különbségi magját $Cok(x-y)$-val jelöljük.

1.3.4. Állítás. *$Cok(x-y)$ epimorfizmus.*

Bizonyítás. 1.3.2 duálisa. $\square$

1.4. Szorzatok és összegek

1.4.1. Definíció. Adott A,B objektum párhoz azt mondjuk, hogy P A és B **szorzata**, ha léteznek morfizmusok $P \xrightarrow{p_1} A$ és $P \xrightarrow{p_2} B$ úgy, hogy minden $X \to A$ és $X \to B$ morfizmus párhoz létezik egy egyértelmű $X \to P$ úgy hogy a következő diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

A és B szorzatát $A \times B$-vel jelöljük.

1.4.2. Állítás. *Ha P és P' is A és B szorzata, akkor P és P' izomorfak.*

Bizonyítás. Legyenek $P \xrightarrow{p_1} A$, $P \xrightarrow{p_2} B$, $P' \xrightarrow{p_1'} A$, $P' \xrightarrow{p_2'} B$ azon morfizmusok, amik a szorzat definíciójában szerepelnek. Ekkor van olyan $P \to P'$ és $P' \to P$ morfizmusok, hogy a következő diagramok kommutálnak:

$$\begin{tikzcd} & A \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "p_2"'] & P' \arrow[u, "p_1'"'] \arrow[d, "p_2'"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & A \\ P' \arrow[ur, "p_1'"] \arrow[r] \arrow[dr, "p_2'"] & P \arrow[u, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Ekkor a $P \to P' \to P = P \xrightarrow{X} P$ kompozíció és az 1_P mindketten teljesítik azt hogy a következő diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd} & A \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "p_2"'] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Ekkor a szorzatok definíciójában szereplő egyértelműség miatt $x = 1_P$. Hasonlóan $P' \to P \to P'$ is identitás. $\square$

A szorzat duálisa az összeg:

1.4.3. Definíció. Adott A,B objektum párhoz azt mondjuk, hogy S A és B **összege**, ha léteznek morfizmusok $A \xrightarrow{u_1} S$ és $B \xrightarrow{u_2} S$ úgy, hogy minden $A \to X$ és $B \to X$ morfizmus párhoz létezik egy egyértelmű $S \to X$ úgy hogy a következő diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr] & \\ S \arrow[r] & X \\ B \arrow[u, "u_2"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A és B összegét $A + B$-vel jelöljük.

Adott $X \xrightarrow{x_1} A$ és $X \xrightarrow{x_2} B$ morfizmusokhoz azt az egyértelmű $X \to A \times B$ morfizmust ami tudja, hogy

$$X \to A \times B \xrightarrow{p_1} A = X \xrightarrow{x_1} A$$
$$\text{és}$$
$$X \to A \times B \xrightarrow{p_2} B = X \xrightarrow{x_2} B$$

úgy fogjuk jelölni hogy $X \xrightarrow{(x_1,x_2)} A \times B$. Hasonlóan, legyen $A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X$ az az egyértelmű morfizmus, amire igaz, hogy

$$A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X = A \xrightarrow{x_1} X$$
$$\text{és}$$
$$B \xrightarrow{u_2} A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X = B \xrightarrow{x_1} X$$

Az összeg és a szorzat definícióját ki lehet terjeszteni 2 elem helyett indexelt halmaznyi objektumra is.

1.4.4. Definíció. Egy kategória **bal-teljes**, ha minden morfizmus párnak van különbség magja, és minden indexelt objektum halmaznak van szorzata. Duálisan, egy kategória **jobb-teljes**, ha minden morfizmus párnak van különbség komagja, és minden indexelt objektum halmaznak van összege. Ha egy kategória egyszerre bal- és jobb-teljes, akkor **teljes**.

1.5. Nulla objektum, mag, és komag

1.5.1. Definíció. Egy **nulla objektum** egy objektum amiből és amibe pontosan egy morfizmus megy minden objectből, azaz $Hom(O, A)$ és $Hom(A, O)$ egy elemű halmazok minden A-ra. Ha a kategóriának van nulla objektuma, akkor **nulla morfizmusnak** hívjuk az egyértelmű $A \to O \to B$ morfizmust, és $A \xrightarrow{0} B$-vel jelöljük.

1.5.2. Definíció. $A \xrightarrow{x} B$ **magja** $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{0} B$ különbségi magja, azaz ha $K \to A$ $A \xrightarrow{x} B$ magja, akkor

1. $K \to A \xrightarrow{x} B = K \xrightarrow{0} B$

2. Minden $X \to A$-ra, amire

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd} \quad \text{kommutál}$$

létezik egy egyértelmű $X \to K$, hogy

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ K \arrow[r] & A \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

$Ker(x)$ jelöli x magját.

1.5.3. Definíció. Duálisan, $A \xrightarrow{x} B$ **komagja** $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{0} B$ különbségi komagja. x komagját $Cok(x)$-vel jelöljük.

2. fejezet

Abel kategóriák alapjai

2.1. Tételek Abel kategóriákhoz

2.1.1. Definíció. Az $\mathcal{A}$ kategória Abel, ha

1. $\mathcal{A}$-nak van nulla objektuma.
2. Minden objektum párnak van szorzata.
3. Minden objektum párnak van összege.
4. Minden morfizmusnak van magja.
5. Minden morfizmusnak van komagja.
6. Minden monomorfizmus valamilyen morfizmus magja.
7. Minden epimorfizmus valamilyen morfizmus komagja.

Innentől ha nem mondjuk külön, akkor minden kategória Abel.

2.1.2. Tétel. *Ha f egy monomorfizmus, akkor $f = Ker(Cok(f))$. Duálisan, ha f epimorfizmus, akkor $f = Cok(Ker(f))$*

Bizonyítás. Legyen $A' \xrightarrow{f} A$ egy monomorfizmus. A 6. axióma miatt ez valamilyen $A \to B$ morfizmus magja. Legyen $A \xrightarrow{g} F$ f komagja, és legyen $K \xrightarrow{k} A$ g magja. $A' \xrightarrow{f} A \to B = 0$, mert f $A \to B$ magja. $A' \xrightarrow{f} A \to F = 0$, mert f komagja g. Mivel f komagja g, illetve g magja k, ezért az univerzális tulajdonság miatt léteznek $F \to B$ és $A' \to K$, amik kommutatívvá teszik a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & F \arrow[d] \\ K \arrow[ur, "k"] & & B \end{tikzcd}$$

Ekkor $K \to A \to B = K \to A \to F \to B = 0$, tehát létezik $K \to A'$, hogy kommutatív az alábbi diagram:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr] & \\ K \arrow[u] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Tehát a részobjektum amit $A' \to A$ és $K \to A$ reprezentálnak tartalmazzák egymást, tehát egyenlőek, azaz f magja $g = Cok(f)$-nek. $\square$

2.1.3. Tétel. *Ha egy morfizmus egyszerre mono és epi, akkor izomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $A \xrightarrow{a} B$ mono és epi. Látszik, hogy $A \xrightarrow{a} B$ komagja $B \to O$. Az előző tétel alapján $A \xrightarrow{a} B$ magja $B \to O$-nak, de az is világos, hogy $B \xrightarrow{1} B$ is magja $B \to O$-nak. Ezért van egy $B \xrightarrow{b_1} A$ morfizmus, amire $a \circ b_1 = 1_B$. Duálisan, $O \to A$ magja a-nak, emiatt a komagja $O \to A$-nak, és $A \xrightarrow{1} A$ szintén komagja $O \to A$-nak, tehát létezik $B \xrightarrow{b_2} A$ morfizmus úgy, hogy $b_2 \circ a = 1_A$. Ekkor látjuk, hogy a izomorfizmus. $\square$

2.1.4. Definíció. Részobjektumokon van egy részben rendezés a tartalmazás alapján. Két részobjektum **metszete** a legnagyobb alsó korlátja ezen részbenrendezés szerint.

2.1.5. Tétel. *Minden részobjektum párnak van metszete.*

Bizonyítás. Legyen $A_1 \xrightarrow{a_1} A$ és $A_2 \xrightarrow{a_2} A$ monomorfizmusok, a_1 komagja $A \xrightarrow{f} F$, és $A_2 \xrightarrow{a_2} A \xrightarrow{f} F$ magja $K \xrightarrow{k} A_2$. Mivel $f \circ a_2 \circ k = 0$ és $f \circ a_1 = 0$ ezért létezik $K \to A_1$ úgy hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, "a_2"] & \\ A_1 \arrow[r, "a_1"] & A \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

Legyen $X \to A_1$ és $X \to A_2$ olyanok, hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, "a_2"] \\ A_1 \arrow[r, "a_1"] & A \end{tikzcd}$$

Azt szeretnénk megmutatni, hogy létezik egy egyértelmű $X \to K$, úgy hogy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & K \arrow[d] \\ & A_1 \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & K \arrow[d] \\ & A_2 \end{tikzcd} \quad \text{kommutálnak.}$$

Ekkor ugyanis, ha X részobjektuma A-nak, akkor K tartalmazza őt.
$X \to K$ létezik, hiszen $X \to A_2 \to F = X \to A_1 \to F = 0$ és $K \to A_2 = Ker(f)$. Emiatt $X \to K \to A_2 = X \to A_2$.
A másik egyenlőség pedig következik abból hogy $X \to K \to A_1 \to A = X \to A_2 \to A = X \to A_1 \to A$, és abból hogy a_1 mono. $\square$

2.1.6. Megjegyzés. *Duálisan, minden hányados objektum párnak is van legnagyobb alsó korlátja, és mível Ker és Cok rendezés fordító függvények, és egymás inverzei, ezért minden részobjektum párnak van legkisebb felső korlátja is.*

2.1.7. Tétel. *Minden $A \xrightarrow{x} B$, $A \xrightarrow{y} B$ morfizmus párnak van különbségi magja.*

Bizonyítás. Vegyük $A \xrightarrow{(1,x)} A \times B$ és $A \xrightarrow{(1,y)} A \times B$ monomorfizmusokat. (Valóban azok, mert ha még p_1-et is ráengedjük, akkor a kompozíció mono) Ekkor a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & A \arrow[d, "{(1,y)}"] \\ A \arrow[r, "{(1,x)}"'] & A \times B \end{tikzcd}$$

Ha használjuk p_1-et, akkor azt kapjuk hogy $k_1 = k_2$, és ha p_2-t használjuk, akkor azt látjuk, hogy $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{x} B = K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{y} B$. Legyen X olyan, hogy $X \to A \xrightarrow{x} B = X \to A \xrightarrow{y} B$. Ekkor

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "{(1,y)}"] \\ A \arrow[r, "{(1,x)}"'] & A \times B \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

2.1.5 bizonyítása alapján pedig $X \to A$ egyértelműen átvezethető $K \to A$-n keresztül. $\square$

2.1.8. Megjegyzés. *Duálisan, minden morfizmus párnak van különbségi komagja.*

2.1.9. Definíció. A következő kommutatív diagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

egy **pullback** diagram, ha minden $X \to A$, $X \to B$ morfizmus párhoz, amire

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd} \text{ kommutatív,}$$

van egy egyértelmű $X \to P$ úgy hogy $X \to P \to A = X \to A$ és $X \to P \to B = X \to B$. A 2.1.5 tétel bizonyításában igazából azt mutattuk meg, hogy a diagram egy pullback diagram.

2.1.10. Tétel. *Minden* $\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$ *diagramot ki lehet bővíteni pullback diagrammá.*

Bizonyítás. Nézzük $A \times B$-t és az $A \times B \xrightarrow{p_1} A \to C$ és $A \times B \xrightarrow{p_2} B \to C$ morfizmusokat, és legyen $K \to A \times B$ a különbségi magjuk. Legyen

$$K \to A = K \to A \times B \xrightarrow{p_1} A$$

$$K \to B = K \to A \times B \xrightarrow{p_2} B.$$

Könnyű belátni, hogy

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

egy pullback diagram. $\square$

2.1.11. Állítás. *Ha* $\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$ *és* $\begin{tikzcd} P' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$ *mindketten pullback diagramok, akkor P és P' izomorfak, azaz létezik egy* $P \to P'$ *izomorfizmus úgy, hogy*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ A & & B \\ & P' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutatív.

Bizonyítás. Lényegében ugyanaz, mint 1.4.2. $\square$

2.1.12. Definíció. A következő kommutatív diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

egy **pushout** diagram, ha minden $B \to X$, $C \to X$ morfizmus párhoz, amire

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & X \end{array} \text{ kommutatív,}$$

van egy egyértelmű $P \to X$ úgy hogy $B \to P \to X = B \to X$ és $C \to P \to X = C \to X$.

2.1.13. Tétel. *Minden* $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$ *diagram kiegészíthető pushout diagramá és izomorfizmus erejéig egyértelműen.*

2.1.14. Definíció. Egy $A \to B$ morfizmus **képe** a legkisebb részobjektuma B-nek, amire $A \to B$ egyértelműen átvezethető a reprezentáló monomorfizmusokon. $A \xrightarrow{x} B$ képét $Im(A \xrightarrow{x} B)$ vagy $Im(x)$ jelöli.

2.1.15. Tétel. *$A \to B$-nek van képe, és a kép egyenlő $Ker(Cok(A \to B))$-vel*

Bizonyítás. $Cok(A \to B)$ a legnagyobb hányados objektum, amire $A \to B \to F = 0$, ezért $KerCok(A \to B)$ a legkisebb részobjektum, amire $A \to B$ átvezethető rajta, azaz ő $A \to B$ képe. □

2.1.16. Tétel. *$A \to B$ epi akkor és csak akkor ha $Im(A \to B) = B$, vagyis akkor és csak akkor ha $Cok(A \to B) = O$.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Világos.
$\Leftarrow$: Ha $Cok(A \to B) = O$, akkor az előző tétel szerint $Im(A \to B) = B$. Tegyük fel, hogy $A \to B \xrightarrow{x} C = A \to B \xrightarrow{y} C$. Az kell, hogy $x = y$. Legyen $Ker(x - y) \to B$ a különbségi magja x-nek és y-nak. Ekkor van egy $A \to Ker(x - y)$ úgy, hogy $A \to B = A \to Ker(x - y) \to B$ a különbségi mag univerzális tulajdonsága miatt. Emiatt $Ker(x - y)$ tartalmazza $B = Im(B)$-t, mert $Im(B)$ a legkisebb részobjektum ami átvezethető $A \to B$-n. Ugyanakkor B legnagyobb részobjektuma B, tehát $Ker(x - y) = B$ vagyis $x = y$. □

2.1.17. Tétel. *$A \xrightarrow{x} Im(x)$ epi.*

Bizonyítás. Ha $Cok(A \xrightarrow{x} Im(x)) \neq O$, akkor $A \to Im(x)$ átvezethető $Im(x)$ egy valódi részobjektumán ($KerCok(A \xrightarrow{x} Im(x))$), ami ellentmond $Im(x)$ definíciójának. □

2.1.18. Definíció. A kép duálisa a **kokép**. $A \to B$ koképe a legkisebb hányados objektum A-ban, amin átvezethető $A \to B$.
Jelölés: $Coim(A \to B)$,$Coim(x)$

2.1.19. Tétel. *$Coim(A \to B) = CokKer(A \to B)$*

2.1.20. Tétel. *$A \to B$ mono akkor és csak akkor ha $Coim(A \to B) = A$ akkor és csak akkor ha $Ker(A \to B) = 0$*

2.1.21. Tétel. *$Coim(x) \xrightarrow{x} B$ mono.*

2.2. Egzakt sorozatok

2.2.1. Tétel. *$A \to B \to C$-re a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $Im(A \to B) = Ker(B \to C)$

(2) $Coim(B \to C) = Cok(A \to B)$

(3) $A \to B \to C = 0$ *és* $K \to B \to F = 0$, *ahol* $K = Ker(B \to C)$ *és* $F = Cok(A \to B)$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (3): Az világos, hogy $A \to B \to C = 0$. $K = Im(A \to B) = KerCok(A \to B) = Ker(B \to F)$. Tehát $K \to B \to F = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (1):Legyen $I \to B$ a magja $B \to F$-nek, és ezért egyben $A \to B$ képe is. Mivel $K \to B \to F = 0$, ezért $Ker(B \to C) \subset Im(A \to B)$. Ugyanakkor mivel $A \to B \to C = 0$, ezért $Im(A \to B) \subset Ker(B \to C)$
(2) $\Leftrightarrow$ (3) bizonyítása duálisan megy. □

2.2.2. Megjegyzés. *Egy* $\cdots \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots$ *sorozat egzakt, ha minden* i*-re* $Im(A_{i-1} \to A_i) = Ker(A_i \to A_{i+1})$

2.2.3. Állítás. *Sok Abel kategóriai tulajdonság megfogalmazható egzaktsággal:*

$$
\begin{array}{rl}
O \to K \to A & \textit{egzakt} \Leftrightarrow K \to A \textit{ mono.} \\
O \to K \to A \to B & \textit{egzakt} \Leftrightarrow K \to A \textit{ a magja } A \to B\textit{-nek} \\
B \to F \to O & \textit{egzakt} \Leftrightarrow B \to F \textit{epi.} \\
A \to B \to F \to O & \textit{egzakt} \Leftrightarrow B \to F \textit{ komagja } A \to B\textit{-nek.} \\
O \to A \to B \to O & \textit{egzakt} \Leftrightarrow A \to B \textit{ izomorfizmus.} \\
A \to B \xrightarrow{1} B & \textit{egzakt} \Leftrightarrow A \to B \textit{ a nulla morfizmus.} \\
O \to A \to B \to C \to O & \textit{egzakt} \Leftrightarrow A \to B \textit{ mono és } B \to C \textit{ komagja } A \to B\textit{-nek.}
\end{array}
$$

2.3. Az Abel kategóriák additív struktúrája

2.3.1. Tétel. *A* $O \to A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \to O$ *sorozat egzakt.*

Bizonyítás. u_1 nyilván mono, mert $\binom{0}{1} \circ u_1$ is az, továbbá az is látszik, hogy $\binom{0}{1} \circ u_1 = 0$. Az univerzális tulajdonság ellenőrzéséhez legyen $A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X$ olyan morfizmus, amelyre $A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X = 0$. Ekkor $x = 0$ és $A + B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X = A + B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \xrightarrow{y} X$. □

2.3.2. Tétel. *A* $O \to A \xrightarrow{(1,0)} A \times B \xrightarrow{p_2} B \to O$ *sorozat egzakt.*

2.3.3. Tétel. $A \xrightarrow{u_1} A + B$ *és* $B \xrightarrow{u_2} A + B$ *metszete* O*.*

Bizonyítás. Következik a metszet konstrukciójából. □

2.3.4. Tétel. *Duálisan, a legnagyobbb alsó korlátja* $A \times B \xrightarrow{p_1} A$*-nak és* $A \times B \xrightarrow{p_2} B$*-nek* O*.*

2.3.5. Definíció. Ha adott egy összeg $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ és egy szorzat $B_1 \times \cdots \times B_m$, akkor minden morfizmus a szorzatból az összegbe egyértelműen reprezentálható az (x_{ij}) mátrixxal, ahol

$$A_i \xrightarrow{x_{ij}} B_j = A_i \xrightarrow{u_i} A_1 + \cdots + A_n \to B_1 \times \cdots \times B_m \xrightarrow{p_j} B_j$$

2.3.6. Tétel. $A_1 + A_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A_1 \times A_2$ *egy izomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ magja $K \to A_1 + A_2$. Ekkor $K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A_1 \times A_2 \xrightarrow{p_2} A_2 = K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{0}{1}} A_2$ és $A_1 \xrightarrow{u_1} A_1 + A_2$ tartalmazza $K \to A_1 + A_2$-t. Hasonlóan $A_2 \xrightarrow{u_2} A_1 + A_2$ is tartalmazza, tehát a metszetük is, ami nulla. Tehát $K = O$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mono. Duálsian epi, tehát izomorfizmus. □

2.3.7. Definíció. Innentől $A \bigoplus B$ jelöli az $A + B$ összeget és az $A \times B$ szorzatot, és **direkt összegnek** fogjuk hívni.

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A = A \xrightarrow{(1,1)} A + A \text{ a „diagonális leképezés”}$$

$$A \oplus A \xrightarrow{\sigma} A = A \times A \xrightarrow{\binom{1}{1}} A \text{ az „összegző leképezés”}$$

2.3.8. Definíció. Adott $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{y} B$ morfizmusokhoz definiáljuk

$$A \xrightarrow[L]{x+y} B = A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B$$

$$A \xrightarrow[R]{x+y} B = A \xrightarrow{(x,y)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B$$

2.3.9. Állítás. *$0 \underset{L}{+} x = x = x \underset{L}{+} 0$; $0 \underset{R}{+} x = x = x \underset{R}{+} 0$*

Bizonyítás. $A \xrightarrow[L]{0+x} B = A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\binom{0}{x}} B = A \xrightarrow{\delta} A + A \xrightarrow{p_2} A \xrightarrow{x} B = A \xrightarrow{x} B$
$A \xrightarrow[R]{0+x} B = A \xrightarrow{(0,x)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{u_2} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = A \xrightarrow{x} B$ □

2.3.10. Állítás. *$B \xrightarrow{u} C$-re, $(ux \underset{L}{+} uy) = u(x \underset{L}{+} y)$ és $C \xrightarrow{z} A$-ra, $(xz \underset{R}{+} yz) = (x \underset{R}{+} y)z$*

Bizonyítás. $A + A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B \xrightarrow{u} C = A + A \xrightarrow{\binom{ux}{uy}} C$ □

2.3.11. Tétel. *$\underset{L}{+}$ és $\underset{R}{+}$ ugyanazon $+$ operátor, és ez az összeadás asszociatív és kommutatív.*

Bizonyítás. Vegyük $A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B$ morfizmust. Vegyük észre, hogy $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \left(\binom{w}{y}, \binom{x}{z}\right)$. Ekkor

$$A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} \underset{R}{+} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right],$$

ezért

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}\delta \underset{R}{+} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\delta\right] = \left[(w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} z)\right].$$

Ugyanakkor

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B = [(w, y) \underset{L}{+} (y, z)],$$

ezért

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = (w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z)$$

Vagyis $(w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z) = (w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} z)$. Ha $x = y = 0$ azt kapjuk, hogy $w \underset{L}{+} z = w \underset{R}{+} z$. Innentől $\underset{R}{+}$ és $\underset{L}{+}$ ugyanaz a "+". Ezzel az egyenlet újraírható: $(u + x) + (y + z) = (u + y) + (x + z)$. Ha $y = 0$, akkor $(u + x) + z = u + (x + z)$, ha pedig $u = z = 0$, akkor $x + y = y + x$. □

Innen be lehet látni a mátrix szorzás szokásos szabályait.

2.3.12. Tétel. *$Hom(A, B)$ egy Abel csoport a $+$ operátorral.*

Bizonyítás. Az előző tételek miatt már csak annyi hiányzik, hogy minden elemnek van inverze. Adott $A \xrightarrow{x} B$-hez vegyük az $A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$ morfizmust. A magja $K \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B$ olyan, hogy $0 = K \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = K \xrightarrow{(a,xa+b} A \oplus B$, ezért $a = 0$, $b = 0$, vagyis $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mono. Duálisan epi, vagyis izomorfizmus, ezért létezik inverze. Felsőháromszög mátrix inverze $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú, ahol $y + x = 0$. □

2.3.13. Megjegyzés. *A rövidség kedvéért $Hom(A, B)$ helyett csak (A,B)-t írunk, és halmaz helyett mindig csoportként tekintünk rájuk. Egy A obejktum endomorfizmusai pedig egységelemes gyűrűt alkotnak.*

2.4. Direkt összeg rendszerek felismerése

2.4.1. Definíció. Négy morfizmus, $A_1 \xrightarrow{u_1} S$, $A_2 \xrightarrow{u_2} S$, $S \xrightarrow{p_1} A_1$, $S \xrightarrow{p_2} A_2$ **direkt összeg rendszert** alkotnak, ha $S = A_1 \oplus A_2$, és $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $p_1 = \binom{1}{0}$, $p_2 = \binom{0}{1}$.

2.4.2. Tétel. *Ha u_1, u_2, p_1, p_2 olyanok, hogy:*

- $A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 1_{A_1}$
- $A_1 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_2} A_1 = 1_{A_1}$
- $A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_1 = 0$
- $A_1 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 0$
- $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_S$

akkor u_1, u_2, p_1, p_2 direkt összeg rendszert alkotnak

Bizonyítás. Legyen $X \xrightarrow{x}_1 A_1$ és $X \xrightarrow{x}_2 A_2$ tetszőleges morfizmus pár. Definiáljuk $X \xrightarrow{x} S = u_1x_1 + u_2x_2$. Ekkor $p_1x = p_1(u_1x_1 + u_2x_2) = p_1u_1x_1 + p_1u_2x_2 = x_1$ és $p_2x = p_2(u_1x_1 + u_2x_2) = p_2u_1x_1 + p_2u_2x_2 = x_2$. Ahhoz, hogy p_1, p_2 szorzat legyen az kell még, hogy $x = u_1x_1 + u_2x_2$ az egyetlen morfizmus amire $p_1x = x_1, p_2x = x_2$. De minden ilyen x-re

$$x = 1_Sx = (u_1p_1 + u_2p_2)x = u_1x_1 + u_2x_2$$

Duálisan u_1, u_2 összeg. □

2.4.3. Tétel. *Ha u_1, u_2, p_1, p_2 olyanok, hogy $A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 1_{A_1}$, $A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_2} A_2 = 1_{A_2}$, és $A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2$ és $A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A_1$ egzaktak, akkor u_1, u_2, p_1, p_2 direkt összeg rendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Mint az előző tételben, itt is megmutatható, hogy minden $X \xrightarrow{x_1} A_1, X \xrightarrow{x_2} A_2$ párhoz van olyan $X \xrightarrow{x} S$ morfizmus, amelyre $p_1x = x_1, p_2x = x_2$. Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy x' is olyan, hogy $p_1x' = x_1, p_2x' = x_2$. Legyen $z = x - x'$ és jegyezzük meg, hogy $p_1z = 0, p_2z = 0$. Kell hogy $z = 0$. $O \to A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2$ egzakt, mert u_1 mono (p_1u_1 mono). Ezért létezik egy olyan $X \to A_1$ morfizmus, hogy a következő diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl] \arrow[d, "z"] & \\
O \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "u_1"'] & S \arrow[r, "p_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

Ekkor $X \to A_1 = X \to A_1 \xrightarrow{1} A_1 = X \to A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = X \xrightarrow{z} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 0$. Tehát $X \xrightarrow{z} S = X \xrightarrow{0} A_1 \to S = 0$ □

2.5. Pullback és pushout tételek

2.5.1. Állítás. *($Ker(x - y) = Ker(x - y)$)*
Adott $A \xrightarrow{x} B$ és $A \xrightarrow{y} B$ morfizmusokhoz, legyen $z = x - y$. Ekkor $Ker(z)$ x és y különbségi magja.

2.5.2. Tétel. *Legyen*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

egy pullback diagram, és $K \to P$ egy magja $P \to B$-nek. Ekkor $K \to P \to A$ magja $A \to C$-nek. Különösen, $P \to B$ mono akkor és csak akkor ha $A \to C$ az.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $X \to A$ olyan, hogy $X \to A \to C = 0$. Ekkor a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, és létezik egy egyértelmű $X \to P$ morfizmus, amelyre $X \to P \to A = X \to P$ és $X \to P \to B = 0$. Emiatt kapunk egy egyértelmű $X \to K$ morfizmust úgy, hogy $X \to K \to P \to A = X \to A$ $\square$

2.5.3. Tétel. *Ha*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

egy pullback diagram és $B \to C$ epi akkor $P \to A$ is epi.

A duálisát fogjuk bizonyítani:

2.5.4. Tétel. *Ha*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\bar{b}"] \\ B \arrow[r, "\bar{a}"] & P \end{tikzcd}$$

egy pushout diagram és $C \xrightarrow{a} A$ mono, akkor $B \xrightarrow{\bar{a}} P$ is mono.

Bizonyítás. A feltétel miatt a $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\frac{\bar{b}}{-a}\right)} P \to O$ egzakt és $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B$ mono, mivel $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{p_1} A$ mono. Ekkor a diagram egy pullback diagram ezért 2.5.2 alkalmazható. $\square$

3. fejezet

Speciális funktorok és részkategóriák

3.1. Additívitás és egzaktság

3.1.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kategóriák. Adott $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktorhoz, és bármely két A_1,$A_2 \in \mathcal{A}$ objektumokhoz, F indukál egy függvényt:

$$(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2)).$$

Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Abel kategóriák. F **additív**, ha az $(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2))$ függvény egy csoporthomomorfizmus minden A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$-ra.

3.1.2. Tétel. *$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Abel kategóriákhoz a funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additív akkor és csak akkor, ha direkt összeg rendszereket direkt összeg rendszerekbe visz.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: A 2.4.2 tétel feltételeit megtartják az additív funktorok.
$\Leftarrow$:Legyen $A \xrightarrow{u}_1 A \oplus A, A \xrightarrow{u}_2 A \oplus A, A \oplus A \xrightarrow{p}_1 A, A \oplus A \xrightarrow{p}_2 A$ egy direkt összeg rendszer $\mathcal{A}$-ban. Ekkor a feltevés alapján $F(u_1), F(u_2), F(p_1), F(p_2)$ szintén direkt összeg rendszer $\mathcal{B}$-ben. Legyen $x, y \in (A, B)$. Ekkor a 2.3-ban szereplő $+$ definíciója alapján $A \xrightarrow{x+y} B = A \xrightarrow{(1,1)} A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B$. Innen $F(x+y) = F(A) \xrightarrow{F((1,1))} F(A \oplus A) \xrightarrow{F(\binom{x}{y})} F(B) = F(A) \xrightarrow{(1,1)} F(A) \oplus F(A) \xrightarrow{\binom{F(x)}{F(y)}} F(B) = F(x) + F(y)$ □

3.1.3. Definíció. Egy **bal-egzakt** sorozat egy $O \to A_1 \to A_2 \to A_3$ alakú egzakt sorozat. Egy **bal-egzakt funktor** Abel kategóriák között egy olyan funktor, ami bal-egzakt sorozatokat bal-egzakt sorozatokba visz. (Ekvivalens: magot magba visz.)

3.1.4. Tétel. *A bal-egzakt funktorok additívak.*

Bizonyítás. A 2.4 tétel feltételei megőrződnek bal-egzakt funktor hatása után. □

3.1.5. Példa. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Abel kategória, $A \in \mathcal{A}$-ra $(A, -) : \mathcal{A} \to G$ egy funktor, ami egy Abel kategóriához Abel csoportot rendel. $(A, -)(B) = (A, B)$ $(A, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ bal-egzakt.*

3.1.6. Definíció. Egy **jobb-egzakt** sorozat egy $A_1 \to A_2 \to A_3 \to O$ alakú egzakt sorozat. Egy **jobb-egzakt funktor** Abel kategóriák között egy olyan funktor, ami jobb-egzakt sorozatokat jobb-egzakt sorozatokba visz.

3.1.7. Tétel. *A jobb-egzakt funktorok additívak.*

3.1.8. Definíció. Egy **egzakt-funktor** egy olyan funktor, ami egzakt sorozatokat egzakt sorozatokba visz.

3.1.9. Állítás. *Egy funktor egzakt $\Leftrightarrow$ bal-egzakt és jobb-egzakt.*

3.2. Beágyazások

3.2.1. Definíció. Egy $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor **beágyazás**, ha bármely két $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$-ra $(A_1, A_2) \xrightarrow{F} (F(A_1), F(A_2))$ kölcsönösen egyértelmű.

3.2.2. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kategóriák, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy additív funktor. A következők ekvivalensek:*

1. *F beágyazás*
2. *F nemkommutatív diagramokat nemkommutatív diagramokba visz*
3. *F nemegzakt sorozatokat nemegzakt sorozatokba visz*

Bizonyítás. 1.$\Leftrightarrow$2.: Triviális.
3. $\Rightarrow$ 1.: Legyen $A_1 \xrightarrow{x} A_2 \neq 0$. Ekkor $A_1 \xrightarrow{1} A_1 \xrightarrow{x} A_2$ nem egzakt. Ezért $F(A_1) \xrightarrow{1} F(A_1) \xrightarrow{F(x)} F(A_2)$ sem egzakt, vagyis $F(x) \neq 0$.
1. $\Rightarrow$ 3.: Legyen $A' \to A \to A''$ egy nemegzakt sorozat. Legyen $O \to K \to A \to A''$ és $A' \to A \to G \to O$ egzaktak. 2.2.1 miatt vagy $A' \to A \to A'' \neq 0$ vagy $K \to A \to G \neq 0$. Ezért $F(A') \to F(A) \to F(A'') \neq 0$ vagy $F(K) \to F(A) \to F(G) \neq 0$.
Az első esetben világos hogy $F(A') \to F(A) \to F(A'')$ nem egzakt. Tehát tegyük fel, hogy $F(K) \to F(A) \to F(G) \neq 0$. Legyen $O \to B' \to F(A) \to F(A'')$ és $F(A') \to F(A) \to B'' \to O$ egzaktak $\mathcal{B}$-ben. $K \to A \to A'' = 0$ miatt $F(K) \to F(A) \to F(A'') = 0$, és $O \to B' \to F(A)$ egzaktsága miatt létezik $F(K) \to B'$ úgy hogy $F(K) \to B' \to F(A) = F(K) \to F(A)$. $F(A) \to B'' \to O$ egzaktsága miatt pedig létezik egy $B'' \to F(G)$ úgy, hogy $F(A) \to B'' \to F(G) = F(A) \to F(G)$. Ekkor ha $F(A') \to F(A) \to F(A'')$ egzakt lenne, akkor $B' \to F(A) \to B'' = 0$ és emiatt $F(K) \to B' \to F(A) \to B'' \to F(G) = 0$, ellentmondás. □

Ezért ha $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy egzakt beágyazás, akkor az egy $\mathcal{A}$-beli diagram egzaktsága és kommutatívitása ekvivalens az F szerinti kép diagram egzaktságával és kommutatívitásával.

3.3. Speciális objektumok

3.3.1. Definíció. Egy P objektum az $\mathcal{A}$ Abel kategóriában **projektív** akkor és csak akkor, ha a funktor $(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ egzakt.

3.3.2. Állítás. *P projektív akkor és csak akkor, ha minden epi $A \to A''$ és $P \to A''$ morfizmushoz van egy $P \to A$ úgy, hogy $P \to A \to A'' = P \to A''$*

3.3.3. Állítás. *Ha $\{P_i\}$ projektív objektumok egy családja $\mathcal{A}$ Abel kategóriában, akkor a direkt összegük $\sum P_i$ (ha létezik) is projektív.*

3.3.4. Definíció. Egy $G \in \mathcal{A}$ **generátor** akkor és csak akkor, ha a funktor $(G, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ egy beágyazás.

3.3.5. Állítás. *G generátor akkor és csak akkor, ha minden $A \to B \neq 0$-hoz létezik egy $G \to A$ úgy, hogy $G \to A \to B \neq 0$.*

3.3.6. Állítás. *G generátor akkor és csak akkor, ha A minden valódi részobjektumához van egy $G \to A$ morfizmus, aminek a képe nincs tartalmazva az adott részobjektumban.*

3.3.7. Állítás. *G generátor egy $\mathcal{A}$ jobb-teljes Abel kategóriában akkor és csak akkor, ha minden $A \in \mathcal{A}$-re a $\sum_{(G,A)} G \to A$ epi, ahol $\sum_{(G,A)} G \to A$ olyan hogy minden $x \in (G, A)$-ra*

$$G \xrightarrow{u_x} \sum_{(G,A)} G \to A = G \to A$$

3.3.8. Definíció. A duális fogalmak:
egy Q objektum **injektív**, ha a kontravariáns funktor $(-, Q)$ egzakt sorozatokat egzakt sorozatokba visz, habár fordított irányítással.
egy C objektum **kogenerátor**, ha a kontravariáns funktor $(-, C)$ egy beágyazás.

3.3.9. Állítás. *G egy generátor akkor és csak akkor, ha minden $A \to B \neq 0$-ra van egy $G \to A$ morfizmus úgy, hogy $G \to A \to B \neq 0$.*
G egy generátor akkor és csak akkor, ha A minden valódi részobjektumához van egy $G \to A$ morfizmus, aminek a képe nincs tartalmazva az adott réészobjektumban.

3.3.10. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy bal-teljes Abel kategória generátor objektummal. Ekkor minden objektum beágyazható egy injektív objektumba akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$-nak van injektív kogenerátora.*

Bizonyítás. [1] 69-70. oldalon megtalálható. □

3.4. Részkategóriák

3.4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória. $\mathcal{S}$ egy **részkategóriája** $\mathcal{C}$-nek ha

- $obj(\mathcal{S}) \subseteq obj(\mathcal{C})$
- $hom(\mathcal{S}) \subseteq hom(\mathcal{C})$
- Minden $X \in obj(\mathcal{S})$-re $id_X \in hom(\mathcal{S})$
- Minden $x \in (X, Y)$-ra $X, Y \in obj(\mathcal{S})$
- Minden $x, y \in hom(\mathcal{S})$-re $x \circ y \in hom(\mathcal{S})$, ha definiált.

3.4.2. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Abel kategória, $\mathcal{A}'$ egy részkategória. $\mathcal{A}'$ egy **egzakt részkategória**, ha $\mathcal{A}'$ Abel, és a beágyazó funktor egzakt.

3.4.3. Definíció. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy **teljes funktor**, ha minden $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$-ra az indukált $(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2))$ függvény szürjektív.
Egy **teljes részkategória** egy olyan részkategóira, aminek a beágyazó funktora teljes.

3.4.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ egy Abel kategória, $\mathcal{A}$ egy nemüres teljes részkategória. Ekkor $\mathcal{A}$ egy egzakt részkategória akkor és csak akkor, ha minden $A_1 \xrightarrow{x} A_2 \in \mathcal{A}$-ra ban egy $\mathcal{B}$-magja x-nek, $\mathcal{B}$-komagja x-nek, és $\mathcal{B}$-direkt összege A_1-nek és A_2-nek, mind $\mathcal{A}$-ban.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen $\mathcal{A}$ egy egzakt teljes részkategóriája $\mathcal{B}$-nek. Ekkor $\mathcal{A}$ Abel, és $A_1 \xrightarrow{x} A_2$-nek van $\mathcal{A}$-magja, K, és $\mathcal{A}$-komagja, F $\mathcal{A}$-ban. A beágyazó funktor egzaktsága miatt K egy $\mathcal{B}$-magja x-nek, és F egy $\mathcal{B}$-komagja x-nek. Hasonlóan ha S egy $\mathcal{A}$-direkt összege A_1-nek és A_2-nek, akkor a beágyazó funktor additívitása miatt $\mathcal{B}$-direkt összeg is.
$\Leftarrow$:Legyen $\mathcal{A}$ egy nemüres teljes részkategóira ami zárt a ($\mathcal{B}$-ben definiált) mag képzésre, komag képzésre, és direkt összegre. Meg kell mutatnunk hogy $\mathcal{A}$ Abel. Vegyük az axiómák felét (a másik fele duálisan következik).

1. Axióma: $\mathcal{A}$ nemüres. Legyen $A \xrightarrow{1} A \in \mathcal{A}$ és legyen $O \to A \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$-magja 1_A-nak. Ekkor O nulla objektuma $\mathcal{A}$-nak.

2. Axióma: Legyen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, és $S \xrightarrow{p_1} A_1$, $S \xrightarrow{p_2} A_2$ egy $\mathcal{B}$-direkt összeg, ahol $S \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ teljessége miatt S egy $\mathcal{A}$-direkt összeg.

3. Axióma: Legyen $A_1 \to A_2 \in \mathcal{A}$ és $O \to K \to A_1 \to A_2$ egzakt $\mathcal{B}$-ben. Ekkor $\mathcal{A}$ teljessége miatt K egy $\mathcal{A}$-magja $A_1 \to A_2$-nek.

4. Axióma: Egy $A_1 \to A_2$ morfizmus $\mathcal{A}$-mono pontosan akkor ha $\mathcal{B}$-mono. Ezért ha $A_1 \to A_2$ egy $\mathcal{A}$-monomorfizmus, akkor legyen $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to O$ egzakt $\mathcal{B}$-ben, $A_3 \in \mathcal{A}$. Ekkor $A_1 \to A_2$ egy $\mathcal{A}$-magja $A_2 \to A_3$-nak.

A beágyazó funktor egzaktsága világos. □

3.5. bifunktorok

Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kategóriák, akkor $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ is egy kategória, ahol $obj(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) = obj(\mathcal{A})\times obj(\mathcal{B})$, $Hom_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = Hom_{\mathcal{A}}\times Hom_{\mathcal{B}}$.

3.5.1. Állítás. *Legyen $F : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ egy függvény. F egy funktor akkor és csak akkor, ha:*

1. *Minden $1_A \in \mathcal{A}$-ra a $F(1_A, -) : \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ függvény egy funktor.*
2. *Minden $1_b \in \mathcal{B}$-re a $F(-, 1_B) : \mathcal{A}\to\mathcal{C}$ függvény egy funktor.*
3. *Bármely $A_1 \xrightarrow{x} A_2 \in \mathcal{A}$, $B_1 \xrightarrow{y} B_2 \in \mathcal{B}$-re a*

$$\begin{tikzcd} F(A_1,B_1) \arrow[r, "F(x,1_{B_1})"] \arrow[d, "F(1_{A_1},y)"'] \arrow[dr, "F(x,y)"] & F(A_2,B_1) \arrow[d, "F(1_{A_2},y)"] \\ F(A_1,B_1) \arrow[r, "F(x,1_{B_2})"] & F(A_2,B_2) \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Egy bifunktor lehet kovariáns az egyik változójában és kontravariáns a másikban. Egy $F : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$-ből $G : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$-be egy természetes transzformáció egy olyan $\eta : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ függvény, ami teljesíti a természetes transzformációk tulajdonságát.

3.5.2. Állítás. *$\eta : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ egy természetes transzformáció F-ből G-be, akkor és csak akkor ha:*

1. *$\eta(A, B) \in (F(A, B), G(A, B))$.*
2. *Minden $A \in \mathcal{A}$-ra $\eta(A, -) : \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ egy természetes transzformáció $F(A, -)$-ból $G(A, -)$-be.*
3. *Minden $B \in \mathcal{B}$-re $\eta(-, B) : \mathcal{A}\to\mathcal{C}$ egy természetes transzformáció $F(-, B)$-ból $G(-, B)$-be.*

Legyen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, és $\mathcal{C}$ Abel kategóriák, F egy funktor $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$-ből $\mathcal{C}$-be. F egy bifunktor, ha:

1. Minden $A \in \mathcal{A}$-ra $F(A, -) : \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ additív.
2. Minden $B \in \mathcal{B}$-ra $F(-, B) : \mathcal{A}\to\mathcal{C}$ additív.

3.5.3. Állítás. *Hom:$\mathcal{A}^*\times\mathcal{A}\to\mathcal{G}$ egy bifunktor, ahol $Hom(A, B)$ az (A, B) morfizmusok csoportja.*

4. fejezet

Metatételek

4.1. Nagyon Abel kategóriák

4.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{B}$ Abel kategória **nagyon Abel**, ha minden $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kis egzakt részkategóriához van egy egzakt beágyazás $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$. A 7. fejezet 7.1.5 tételében belátjuk, hogy minden Abel kategória nagyon Abel.

Szeretnénk leírni olyan állításokat amik igazak minden nagyon Abel kategóriában akkor és csak akkor ha igazak $\mathcal{G}$-ben. Első megközelítésnek tekintsünk egy diagram kommutatívitásáról és egzaktságáról szóló állításokat. Ehhez először formalizálnunk kell mi egy diagram.

4.1.2. Definíció. Egy **egyszerű diagrammatikus állítás** egy olyan állítás, ami egy diagram egzaktságáról és kommutatívitásáról szól. Egy **összetett diagrammatikus állítás** pedig $P \to Q$ alakú, ahol P és Q egyszerű diagrammatikus állítások.

4.1.3. Definíció. Egy **diagram séma** egy kis kategória, és egy **diagram** $\mathcal{A}$-ban egy funktor a diagram sémából $\mathcal{A}$-ba. Az **egzaktsági feltételek** halmaza egy a sémában lévő morfizmusokból álló rendezett párok halmaza. Adott séma (kategória) S, egzaktsági feltételek halmaza E, és egy diagram D (funktor) S-ből $\mathcal{A}$-ba, akkor azt mondjuk, hogy D eleget tesz az egzaktság feltételeknek, ha minden $(x, y) \in E$-re igaz hogy $(D(x), D(y))$ egy egzakt sorozat $\mathcal{A}$-ban.

4.1.4. Példa. *Meglepően sokat lehet elmondani egy diagramról az egzaktsági feltételek alapján. Legyen $D : S \to \mathcal{A}$ egy diagram ami eleget tesz egy E egzaktsági feltételek halmazának. Ekkor*

$$D(A) = O \qquad \textit{ha} \qquad (A \xrightarrow{1} A, A \xrightarrow{1} A) \in E$$

$$D(A \to B) = 0 \qquad \textit{ha} \qquad (A \to B, B \xrightarrow{1} B) \in E$$

$$\begin{array}{rcr} D(A_1 \xrightarrow{u_1} S), D(A_2 \xrightarrow{u_2} S) & & A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 1 \\ D(S \xrightarrow{p_1} A_1), D(S \xrightarrow{p_1} A_2) & \textit{ha} & A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_2} A_1 = 1 \\ \textit{egy direkt összeg rendszert alkot} & & (A_1 \xrightarrow{u_1} S, S \xrightarrow{p_2} A_2) \in E \\ & & (A_2 \xrightarrow{u_2} S, S \xrightarrow{p_1} A_2) \in E. \end{array}$$

Ha ezeket feltételeket bővítjük, akkor a kommutatívitási feltételeket is kiszabhatjuk egzaktsági feltételeken keresztül.

4.1.5. Definíció. Adott S séma és 2 egzaktsági feltétel halmaz E_1, E_2, azt mondjuk, hogy az összetett diagrammatikus állítás (S, E_1, E_2) igaz $\mathcal{A}$-ban, ha minden diagram $D : S \to \mathcal{A}$ ami eleget tesz E_1 egzaktsági feltételeknek, az szintén eleget tesz E_2 feltételeinek.

4.1.6. Megjegyzés. *Ha $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy egzakt beágyazás, akkor (S, E_1, E_2) igaz $\mathcal{B}$-ben, ha igaz $\mathcal{A}$-ban.*

4.2. Az első metatétel

4.2.1. Állítás. *Minden A_{iI} Abel kategória beli objektum halmazhoz van egy kis teljes egzakt részkategória $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ úgy, hogy $A_i \in \mathcal{A}'$ minden i-re.*

Bizonyítás. Legyenek

- K: (Morfizmusok $\mathcal{A}$-ban) $\to$ (Objektumok $\mathcal{A}$-ban)
- F: (Morfizmusok $\mathcal{A}$-ban) $\to$ (Objektumok $\mathcal{A}$-ban)
- S: (Objektum párok $\mathcal{A}$-ban) $\to$ (Objektumok $\mathcal{A}$-ban)

függvények olyanok, hogy

- $K(x)$ egy magja x-nek
- $F(x)$ egy komagja x-nek
- $S(A, B)$ egy direkt összege A-nak és B-nek.

Adott teljes részkategória $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ esetén legyen $C(\mathcal{B})$ az a teljes részkategória, amit $\mathcal{B}$, $K(\mathcal{B})$, $F(\mathcal{B})$ és $S(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ generálnak. Ha $\mathcal{B}$ kicsi volt, akkor $C(\mathcal{B})$ is az. Legyen $C^{n+1}(\mathcal{B}) = C(C^n(\mathcal{B}))$. $C^\infty(\mathcal{B}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n(\mathcal{B})$ a 3.4.4 tétel alapján egy teljes egzakt részkategória és $C^\infty(\mathcal{B})$ kicsi ha $\mathcal{B}$ kicsi. $\square$

4.2.2. Tétel. *(Metatétel) Minden összetett diagrammatikus állítás ami igaz $\mathcal{G}$-ben igaz minden nagyon Abel kategóriában.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy (S, E_1, E_2) igaz $\mathcal{G}$-ben. Legyen $D : S \to \mathcal{A}$ egy diagram egy $\mathcal{A}$ nagyon Abel kategóriában, ami teljesíti E_1 egzaktsági feltételeket. Legyen $\mathcal{A}'$ egy kis egzakt részkategória $\mathcal{A}$-ban úgy, hogy a D képe A'-ben fekszik. Ekkor D teljesíti E_1-et $\mathcal{A}'$-ben is, és teljesíti E_2-t A'-ben akkor és csak akkor ha teljesíti $\mathcal{A}$-ban E_2-t. Legyen $F : \mathcal{A}' \to \mathcal{G}$ egy egzakt beágyazás. $FD : S \to \mathcal{G}$ teljesíti E_1-et, és teljesíti E_2-t akkor és csak akkor, ha $D : S \to \mathcal{A}'$ teljesíti E_2-t. $\square$

4.3. Teljesen Abel kategóriák

Fontos tétel a kígyó lemma, ami egy specifikus diagram esetén biztosít nekünk egy összekötő morfizmust. Sajnos viszont az első metatétel nem mond nekünk semmit morfizmusok létezéséről. Erre szolgál majd a teljes beágyazás tétel amit az utolsó fejezetben bizonyítunk, és azt állítja, hogy minden kis Abel kategóriához van egy R gyűrű és egy egzakt teljes beágyazás az R-modolusok kategóriájába.

4.3.1. Definíció. Egy S séma **leképezés kiterjesztése** egy S' séma együtt egy bijektív $G : S \to S'$ funktorral. Adott S séma, $S \to S'$ leképezés kiterjesztés, és egzaktsági feltételek E S-re, és E' S'-re, akkor a **teljes összetett diagrammatikus állítás** $(S \to S', E, E')$ igaz $\mathcal{A}$-ban, ha minden $D : S \to \mathcal{A}$ diagram ami teljesíti E-t, arra létezik egy $D' : S' \to \mathcal{A}$ diagram ami teljesíti E'-t, és $D' = D \circ G$

4.3.2. Definíció. Egy Abel kategória $\mathcal{A}$ **teljesen Abel**, ha minden $A' \subset A$ teljes kis egzakt részkategóriára van egy R gyűrű és egy teljes egzakt beágyazása A'-nek az R-modolusok kategóriájába.

4.3.3. Tétel. *(A teljes metatétel) Ha egy teljes összetett diagrammatikus állítás igaz minden R-modulus kategóriában akkor igaz minden teljesen Abel kategóriában is.*

Bizonyítás. Hasonló az előzőhöz. $\square$

4.4. Mitchell tétele

Ahhoz, hogy jól lehessen diagramokat vadászni, nincs másra szükség, mint egy projektív generátorra.

4.4.1. Állítás. *Egy Abel kategória amiben van projektív generátor nagyon Abel.*

De tudunk ennél erősebbet is mondani

4.4.2. Tétel. *(Mitchell) Egy teljes Abel kategóra amiben van projektív generátor teljesen Abel.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}'$ egy kicsi teljes egzakt részkategóriája egy teljes $\mathcal{A}$ Abel kategóriának, és $\bar{P}$ egy projektív generátora $\mathcal{A}$-nak. Minden $A \in \mathcal{A}'$-re fontoljuk meg a következő epimorfizmust:

$$\sum_{(\bar{P},A)} \bar{P} \to A$$

Ha vesszük $I = \cup_A \in \mathcal{A}'(\bar{P}, A)$, és definiáljuk $P = \sum_I \bar{P}$ akkor egy olyan projektív generátort kapunk, hogy minden $A \in \mathcal{A}'$-re van egy epi $P \to A$.
Legyen R P endomorfizmusainak gyűrűje. Minden $A \in \mathcal{A}$-ra a (P, A) Abel csoportnak kanonikus R-modulus struktúrája van: $P \xrightarrow{x} A \in (P, A)$-ra és $P \xrightarrow{r} P \in R$-ra legyen $rx \in (P, A)$ a $P \xrightarrow{r} P \xrightarrow{x} A$ leképezés.
Adott $A \xrightarrow{y} B \in \mathcal{A}$ leképezésre az indukált $(P, A) \xrightarrow{\bar{y}} (P, B)$ leképezés egy R-homomorfizmus ($\bar{y}(rx) = P \xrightarrow{r} P \xrightarrow{x} A \xrightarrow{y} B = r(\bar{y}(x))$). Definiáljuk $F : \mathcal{A} \to \mathcal{G}^R$ ($\mathcal{G}^R$ az R-modolusok kategóriája) úgy hogy $F(A) = (P, A)$, a kanonikus R-modulus struktúrával. F egy egzakt beágyazás, mert P egy projektív generátor. $F \mid \mathcal{A}'$-ről tudjuk hogy egzakt beágyazás, ezért már csak annyi kell, hogy teljes. Adott $A, B \in \mathcal{A}'$ és $F(A) \xrightarrow{\bar{y}} F(B) \in \mathcal{G}^R$ leképezésre szeretnénk találni egy $A \xrightarrow{y} B \in \mathcal{A}'$ leképezést úgy, hogy $F(y) = \bar{y}$. Legyen $O \to K \to P \to A \to O$ és $P \to B \to O$ egzakt sorozatok $\mathcal{A}$-ban. Vegyük észre, hogy $F(P) = R$. A következő diagramot kapjuk $\mathcal{G}^R$-ben:

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & F(K) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & O \\ & & & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar{y}} & & \\ & & & & R & \longrightarrow & F(B) & \longrightarrow & O \end{array}$$

ahol f létezését az garantálja, hogy R projektív $\mathcal{G}^R$-ben. Mivel R egy gyűrű, ezért bármely endomorfizmus R-en ekvivalens egy R-beli elemmel jobbról szorzással. Feltesszük, hogy $f(s) = sr$ minden $s \in R$-ra.
Visszatérve $\mathcal{A}$-ra, a diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & O \\ & & & & \big\downarrow{\scriptstyle r} & & & & \\ & & & & P & \longrightarrow & B & \longrightarrow & O \end{array}$$

olyan, hogy $K \to P \xrightarrow{r} P \to B = 0$, mivel $F(K) \to R \xrightarrow{f} R \to F(B) = 0$ és F egy beágyazás. Ezért létezik egy $A \xrightarrow{y} B$ leképezés úgy, hogy a következő diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow{\scriptstyle r} & & \big\downarrow{\scriptstyle y} \\ P & \longrightarrow & B \end{array}$$

Ezért

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & F(A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(y)} \\ R & \longrightarrow & F(B) \end{array}$$

is kommutál, és mivel $R \to F(A)$ epi, ezért $F(y) = \bar{y}$. □

Ezzel a tétellel annak a bizonyítása, hogy minden Abel kategória teljesen Abel a következőre csökkent: Adott egy $\mathcal{A}$ kis Abel kategóriára kell keresni egy $\mathcal{B}$ teljes Abel kategóriát, amiben van projektív generátor, és egy egzakt teljes beágyazás $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

5. fejezet

Funktor kategóriák

5.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$

5.1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy kis Abel kategória, $\mathcal{G}$ az Abel csoportok kategóriája. $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ fogja jelölni az $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{G}$-be menő addítív funktorok kategóriáját. Az objektumok funktorok, a morfizmusok természetes transzformációk.

5.1.2. Tétel. $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ *egy Abel kategória.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük az axiómákat:

1. Axióma (Nulla elem): A konstans nulla funktor jó.
2. Axióma (Direkt összeg): Adott $F_1, F_2 \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$-re legyen $F_1 \oplus F_2$ az a funktor, amelyre $(F_1 \oplus F_2)(A) = F_1(A) \oplus F_2(A)$, és
$$(F_1 \oplus F_2)(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 \\ 0 & F_2(x) \end{pmatrix}$$
3. Axióma (Mag): Legyen $F_1 \to F_2 \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$. Minden $A \in \mathcal{A}$-ra legyen $O \to K(A) \to F_1(A) \to F_2(A)$ egzakt. Adott $A \xrightarrow{x} B \in \mathcal{A}$-ra van egy egyértelmű $K(x) : K(A) \to K(B)$ úgy, hogy az alábbi diagram kommutál:
$$\begin{tikzcd} K(A) \arrow[r] \arrow[d, "K(x)"] & F_1(A) \arrow[d, "F_1(x)"'] \\ K(B) \arrow[r] & F_1(B) \end{tikzcd}$$
Ekkor K egy funktor, és $K \to F_1$ egy természetes transzformáció. Mivel $K(A) \to F_1(A)$ magja $F_1(A) \to F_2(A)$-nak, minden $A \in \mathcal{A}$-ra, ezért $K \to F_1$ is magja $F_1 \to F_2$-nek
4. Axióma (Monomorfizmus magja): A felső konstrukcióból az is látszik, hogy $F_1 \to F_2$ mono $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ban akkor és csak akkor, ha $F_1(A) \to F_2(A)$ mono $\mathcal{A}$-ban minden A-ra. 3. Axióma duálisának konstrukciójából pedig kijön hogy $F_1 \to F_2$ magja a komagjának, mert minden $A \in \mathcal{A}$-ra $F_1(A) \to F_2(A)$ magja a komagjának.

Duális axiómákat hasonlóan be lehet látni. □

A felső konstrukcióból az is látszik, hogy egy $F' \to F \to F''$ sorozat egzakt $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ban, akkor és csak akkor ha $F'(A) \to F(A) \to F''(A)$ egzakt minden $A \in \mathcal{A}$-ra

5.1.3. Definíció. A **kiértékelő funktor** $E_A : (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$-t úgy definiáljuk, hogy $E_A(F_1 \xrightarrow{\eta} F_2) = F_1(A) \xrightarrow{\eta(A)} F_2(A)$. Ez egy egzakt funktor minden $A \in \mathcal{A}$-ra. A szorzat
$$\left(\prod_{\mathcal{A}} E_A\right) : (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G},$$
amit $(\prod_{\mathcal{A}} E_A)(F) = \prod_{\mathcal{A}} E_A(F)$-vel definiálunk, pedig egy egzakt beágyazás.

5.1.4. Állítás. *$(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ egy teljes Abel kategória.*

Bizonyítás. Legyen ${F_i}_I$ funktorok egy családja $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ban. $\prod_I F_i$ és $\sum_I F_i$-t pontonként konstruáljuk:

$$\left(\prod_I F_i\right)(A) = \prod_I F_i(A)$$

$$\left(\sum_I F_i\right)(A) = \sum_I F_i(A)$$

□

5.2. Grothendieck kategóriák

5.2.1. Definíció. Egy $\mathcal{A}$ teljes kategória **Grothendieck kategória**, ha minden $A \in \mathcal{A}$ objektumra, ha veszünk benne egy $\{A_i\}_I$ lineárisan rendezett részobjektumok családját, és egy B részobjektumot, akkor $B \cap \bigcup A_i = \bigcup (B \cap A_i)$.

5.2.2. Állítás. *$(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ egy Grothendieck kategória*

Bizonyítás. Tudjuk csoportelméletből, hogy $\mathcal{G}$ egy Grothendieck kategória, továbbá megfigyelhetjük, hogy egy adott $\{F_i\}_I$ részfunktor halmazhoz a metszetük és uniójuk pontonként tudjuk konstruálni: $(\bigcup F_i)(A) = \bigcup (F_i(A)) \subset F(A)$. Tehát adott lineárisan rendezett $\{F_i\}_I$ családhoz és $H \subset F$ részfunktorhoz, $(H \cap \bigcup F_i)(A) = H(A) \cap \bigcup F_i(A) = \bigcup [H(A) \cap F_i(A)] = [(\bigcup (H \cap F_i))](A)$. □

5.3. A reprezentáló funktor

5.3.1. Definíció. A **reprezentáló funktort** úgy definiáljuk, hogy legyen az a kontravariáns $\mathcal{A} \xrightarrow{H} (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ funktor, amelyre $H(A) = (A, -) \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$, $H(A \xrightarrow{x} B) = (B, -) \xrightarrow{(x,-)} (A, -)$. Amikor $(A, -)$-ra úgy gondolunk mint egy objektum $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ben akkor H^A-val jelöljük. Adott $A \xrightarrow{x} B \in \mathcal{A}$ morfizmushoz tartózó transzformációt érdemes $H^B \xrightarrow{H^x} H^A$-vel jelölni.

5.3.2. Állítás. *$\mathcal{A} \xrightarrow{H} (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ jobb-egzakt sorozatokat bal-egzakt sorozatokba visz.*

5.3.3. Definíció. Adott $A \in \mathcal{A}$, $F \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$-hez nézzük a (H^A, F) természetes transzformációk csoportját. Legyen $\eta \in (H^A, F)$. Ha A-nál kiértékelünk, akkor egy $\eta_A \in (H^A(A), F(A))$ csoporthomomorfizmust kapunk. Ha $1_A \in (A, A) = H^A(A)$-nál értékelünk ki, akkor egy $\eta_A(1_A) \in F(A)$ elemet kapunk. A $y : (H^A, F) \to F(A)$ **Yoneda** függvényt úgy definiáljuk, hogy $y(\eta) = \eta_A(1_A)$. Világos hogy y egy csoporthomomorfizmus, viszont az is igaz hogy természetes transzformáció.

5.3.4. Állítás. *A Yoneda függvény egy természetes transzformáció.*

Bizonyítás. Először is kell hogy mik között természetes transzformáció. Definiálunk két csoport értékű funktort D-t és E-t, mindkettő két változós, az egyik változó $\mathcal{A}$-ból, a másik $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ből. D a következő kompozíció:

$$\mathcal{A} \times (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \xrightarrow{(HxI)} (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \times (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \xrightarrow{Hom} \mathcal{G}$$

Azaz $D(A, F) = (H^A, F) \in \mathcal{G}$.
$E : \mathcal{A} \times (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$, a "kiértékelő funktort" pedig úgy definiáljuk, hogy

$$E(A, F) = F(A)$$

$$E(A, F_1 \xrightarrow{\eta} F_2) = F_1(A) \xrightarrow{\eta_A} F_2(A)$$

$$E(A_1 \xrightarrow{x} A_2, F) = F(A_1) \xrightarrow{F(x)} F(A_2).$$

3.5.2 szerint elég azt megmutatni hogy
(1) minden $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$-re az alábbi diagram kommutatív

$$\begin{array}{ccc} (H^A, F_1) & \xrightarrow{(H^A,F_1)} & (H^A, F_2) \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ F_1(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F_2(A) \end{array},$$

és
(2) minden $A_1 \xrightarrow{x} A_2$-re az alábbi diagram kommutatív

$$\begin{array}{ccc} (H^{A_1}, F) & \xrightarrow{(H^x,F)} & (H^{A_2}, F) \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ F(A_1) & \xrightarrow{F(x)} & F(A_2) \end{array}.$$

(1) könnyű: Kiindulva egy $\eta \in (H^A, F_1)$-ből, jobbra indulva azt kapjuk, hogy $\eta \to \alpha\eta \to (\alpha\eta)_A(1_A)$; lefelé irányban pedig $\eta \to \eta_A(1_A) \to (\alpha_A\eta_A(1_A))$. De $(\alpha\eta)_A$ a kompozíciója α_A-nak és η_A-nak, tehát mindkét irányban $F_2(A)$-nak ugyanazt az elemét kapjuk.
A (2) feltételhez kezdetnek vegyünk egy $\alpha \in (H^{A_1}, F)$-et, és jobbra irányban haladva azt kapjuk, hogy

$$\alpha \to \alpha H^x \to (\alpha H^x)_{A_2}(1_{A_2}) = \alpha_{A_2}(x, A_2)(1_{A_2}) = \alpha_{A_2}(x).$$

Másik irányban pedig azt kapjuk hogy

$$\alpha \to \alpha_{A_1}(1_{A_1}) \to F(x)[\alpha_{A_1}(1_{A_1})].$$

Ahhoz hogy azt lássuk, hogy $\alpha_{A_2}(x) = F(x)[\alpha_{A_1}(1_{A_1})]$ használjuk azt a tényt, hogy α egy természetes transzformáció, ezért az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccc} (A_1, A_1) & \xrightarrow{(A_1,x)} & (A_1, A_2) \\ {\scriptstyle \alpha(A_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(A_2)} \\ F(A_1) & \longrightarrow & F(A_2) \end{array}$$

Kiindulva $1_{A_1} \in (A_1, A_1)$-ből, és jobbra indulva azt kapjuk, hogy

$$1_{A_1} \to x \to \alpha_{A_2}(x)$$

lefelé indulva pedig

$$1_{A_1} \to \alpha_{A_1}(1_{A_1}) \to F(x)(\alpha_{A_1}(1_{A_1}))$$

□

5.3.5. Tétel. *A Yoneda transzformáció $y : D \to E$ egy természetes ekvivalencia.*

Bizonyítás. Elsőnek nézzük megy hogy injektív. Legyen $\alpha \in (H^A, F)$, és $0 = y(\alpha) = \alpha_A(1_A)$. Meg kell mutatnunk, hogy α a nulla transzformáció. Legyen $A_2 \in \mathcal{A}$ és $x \in (A, A_2) = H^A(A_2)$, Az előző tétel bizonyításának végén megmutattuk, hogy $\alpha_{A_2}(x) = F(x)(\alpha_A(1_A))$. Ezért ha $y(\alpha) = \alpha_A(1_A) = 0$, akkor $\alpha_{A_2}(x) = 0$ és $\alpha = 0$.
Ahhoz hogy megmutassuk, hogy y szürjektív, legyen $z \in F(A)$. Minden $B \in \mathcal{A}$-ra definiáljuk az $\alpha_B : (A, B) \to F(B)$ függvényt úgy, hogy $\alpha_B(x) = (F(x))(z)$ minden $x \in (A, B)$-re. F additívitása miatt α_B egy csoporthomomorfizmus. Ha az α_B-k egy α természetes transzformációt alkotnak, akkor világos, hogy y szürjektív, hisz $y(\alpha) = z$.
Ahhoz, hogy lássuk hogy α természetes, meg kell mutatnunk hogy bármely $B_1 \xrightarrow{w} B_2$-re az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} (A, B_1) & \xrightarrow{(A,w)} & (A, B_2) \\ {\scriptstyle \alpha_{B_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{B_2}} \\ F(B_1) & \xrightarrow{F(w)} & F(B_2) \end{array}$$

Kiindulva egy $x \in (A, B_1)$-ből, jobbra indulva azt kapjuk, hogy

$$x \to wx \to \alpha_{B_2}(wx) = [F(wx)](z);$$

Lefelé:

$$x \to \alpha_{B_1}(x) \to [F(w)](\alpha_{B_1}(x)) = F(w)[F(x)(z)].$$

Mivel F egy funktor, ezért $F(wx) = F(w)F(x)$, tehát α természetes. □

5.3.6. Tétel. $\sum_{\mathcal{A}} H^A$ *egy projektív generátor* $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$*-ban*

Bizonyítás. $(\sum H^A, -) : (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ természetesen ekvivalens $(\prod E_A) : (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$-vel. □

5.3.7. Tétel. *A reprezentáló funktor* $\mathcal{A} \xrightarrow{H} (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ *egy kontravariáns teljes beágyazás.*

Bizonyítás. $(H^A, H^B) = (B, A)$. □

6. fejezet

Injektív burkok

Ebben a fejezetben minden kategória Abel.

6.1. Bővítések

Emlékezzünk, hogy egy E objektum injektív, ha a kontravariáns funktor $(-, E) : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ egzakt.

6.1.1. Definíció. Egy adott $A \in \mathcal{A}$ objektumhoz az $A \to B$ monomorfizmust A **bővítésének** hívjuk, és néha B-t is bővítésnek hívjuk.
Egy objektum **triviális bővítése** egy olyan $A \to B$ monomorfizmus, ami hasad, vagyis van egy olyan $B \to A$ hogy $A \to B \to A = A \xrightarrow{1} A$. (Ekvivalensen $A \to B$ egy triviális bővítés, ha van egy olyan C hogy $B = A \oplus C$.)

6.1.2. Állítás. *Egy E objektum injektív akkor és csak akkor ha csak triviális bővítései vannak.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: 3.3.9 duálisa.
$\Leftarrow$: Legyen $A \to B$ egy monomorfizmus, és $A \to E$ bármilyen morfizmus. Vegyük a következő pushout diagramot:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & P \end{array}$$

A 2.5.4 pushout tétel szerint $E \to P$ mono. A feltevés szerint tehát P triviális bővítése E-nek. Legyen $P \to E$ olyan, hogy $E \to P \to E = E \xrightarrow{1} E$, és legyen $B \to E = B \to P \to E$. Ekkor $A \to B \to E = A \to E$. □

6.1.3. Definíció. Egy **lényeges bővítés** egy olyan $A \to B$ monomorfizmus, amelyre minden nemnulla $B' \to B$ monomorfizmusnak az $A \to B$-vel vett (a képeknek a) metszete nemnulla.
Ekvivalensen, $A \to B$ lényeges, ha minden $B \to F$, amire $A \to B \to F$ mono, arra $B \to F$ is mono.

6.1.4. Tétel. *Egy Grothendieck kategóriában egy objektum injektív akkor és csak akkor, ha nincs valódi lényeges bővítése.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ha E injektív, akkor az egyetlen valódi bővítései triviálisak, tehát nyilván nem lényegesek.
$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy E-nek nincs valódi lényeges bővítése, és vegyünk egy $E \to B$ bővítést. Meg kell mutatnunk, hogy ez egy triviális bővítés.
Legyen $\mathcal{F}$ egy B részobjektumainak részben rendezett családja, amikre $E \to B$ képével vett metszetük nulla. A Grothendieck kategória tulajdonságai miatt, ha $\{B_i\}$ egy növekvő lánc $\mathcal{F}$-ben, akkor $\bigcup B_i$ is $\mathcal{F}$-ben van. Ekkor használhatjuk a Zorn lemmát, $\mathcal{F}$-nek van egy maximális $B' \subset B$ eleme. Ekkor a megfelelő B hányados objektumaiból álló $\mathcal{F}^*$ ($B \to F \in \mathcal{F}^* \Leftrightarrow E \to B \to F$) családnak van minimális eleme: $B \to B''$. Továbbá B'' minimális természete biztosítja nekünk azt, hogy $E \to B''$ lényeges, hiszen ha $B'' \to F$ olyan, hogy $E \to B \to B'' \to F$ mono, akkor $B \to B'' \to F$ koképe egy olyan elemet ad $\mathcal{F}^*$-ban, ami nem kisebb B''-nél, tehát egyenlő vele.
A feltétel szerint E-nek nincs *valódi* lényeges bővítése, ezért $E \to B \to B''$ egy izomorfizmus, és $E \to B$ egy triviális bővítés. □

6.1.5. Tétel. *Legyen R egy gyűrű. Ha egy A bal R-modulusnak megvan az a tulajdonsága, hogy minden $I \subset R$ bal ideálra a $(R, A) \to (I, A)$ leképezés epi, akkor A injektív a bal R-modulusok kategóriájában.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján elég megmutatnunk, hogy A-nak nincs valódi lényeges bővítése. Tegyük fel, hogy $A \subset B$, és legyen $x \in B$, de $x \notin A$. Legyen $R \xrightarrow{x} B$ az a morfizmus, ami x-be küldi az 1-et, és legyen

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

egy pullback diagram. Legyen $y \in A$ olyan, hogy $I \to R \xrightarrow{y} A = I \to A$. Az $x - y$ elem nem triviális, és B-nek egy olyan részmodolusát generálja, ami A-val csak triviálisan találkozik. B nem lényeges. □

6.2. Burkok

6.2.1. Definíció. Egy A-nak egy **injektív burka** egy injektív lényeges bővítése. Azaz egy $A \to E$ lényeges bővítés, ahol E injektív

A következő két lemma biztosítja nekünk, hogy Grothendieck kategóriában tetszőleges objektumok injektív burkát konstruáljuk:

6.2.2. Lemma. *Egy lényeges bővítés lényeges bővítése lényeges.*

6.2.3. Lemma. *Legyen $A \to E$ egy bővítése A-nak egy Grothendieck kategóriában, és legyen $\{E_i\}$ egy részobjektumok növekvő lánca A-nak a képe és E között. Ha E_i lényeges bővítése A-nak minden i-re, akkor $\bigcup E_i$ egy lényeges bővítése A-nak.*

Bizonyítás. Legyen S egy tetszőleges nemnulla részobjektuma $\bigcup E_i$-nek. Ekkor $S = S \cap \bigcup E_i = \bigcup (S \cap E_i)$ és $S \cap E_i \neq O$ valamennyi i-re. Mivel E_i lényeges bővítése A-nak, ezért következik hogy $Im(A) \cap S \neq O$. □

A következő tétel azt mutatja, hogy Grothendieck kategóriában minden növekvő bővítés beágyazható egy közös bővítésbe.

6.2.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória, I egy rendezett halmaz, és $\{E_i \to E_j\}_{i<j}$ monomorfizmusok egy olyan családja, hogy $i < j < k$-ra $E_i \to E_j \to E_k = E_i \to E_k$. Ekkor létezik egy olyan $E \in \mathcal{B}$ objektum, és $\{E_i \to E\}$ monomorfizmusok családja, hogy $i < j$-re*

$$E_i \to E_j \to E = E_i \to E.$$

Bizonyítás. Legyen $S = \sum_I E_i$ és minden $i \in I$-re legyen $E_i \xrightarrow{u_i} S$ a hozzá tartozó morfizmus. Minden $j \in I$-re legyen $h_j : S \to S$ az az egyértelmű leképezés amire

$$E_i \to S \xrightarrow{h_j} S = \begin{cases} E_i \to E_j \xrightarrow{u_j} S & \text{ha } i \leq j \\ E_i \xrightarrow{u_i} S & \text{ha } j \leq i \end{cases}$$

Legyen $S \xrightarrow{h} E$ egy olyan epimorfizmus, hogy $Ker(h) = \bigcup Ker(h_j)$. Vegyük észre, hogy $\{Ker(h_j)\}$ egy növekvő család, mert ha $j \leq j'$,

$$S \xrightarrow{h_{j'}} S = S \xrightarrow{h_j} S \xrightarrow{h_{j'}} S.$$

Ahhoz, hogy belássuk hogy $E_i \xrightarrow{u_i} S \xrightarrow{h} E$ egy monomorfizmus, elég belátni, hogy $Im(E_i \to S) \cap \bigcup (Ker(h_j)) = O$. A Grothendieck tulajdonság miatt, tehát elég megmutatni, hogy $Im(E_i \to S) \cap Ker(h_j) = O$ minden j-re, vagyis $E_i \to S \xrightarrow{h_j} S$ egy monomorfizmus. De ez rögtön következik h_j definíciójából. □

Legyen $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória, és a kiválasztási axiómát használva legyen $E : (\mathcal{B}\text{ objektumai}) \to (\mathcal{B}\text{ monomorfizmusai})$ olyan, hogy $E(A) = (A \to B)$, ahol B egy valódi lényeges bővítése A-nak, kivéve, ha A injektív, amikor pedig $B = A$. Legyen $E^\gamma(A)$ minden γ rendszámra úgy, hogy

$$E^{\gamma+1}(A) = A \to E^\gamma(A) \to E(E^\gamma(A)),$$

és α limesz rendszámra legyen $E^\alpha(A)$ a minimális lényeges bővítés minden $E^\gamma(A)$, $\gamma < \alpha$-ra, amit az előző tétel biztosít.
Ekkor az $\{E^\gamma(A)\}$ sorozat megáll csak akkor, ha eléri A injektív burkát.
Csupán annyit kell megmutatnunk, hogy $\{E^\gamma(A)\}$ megáll, és tudni fogjuk hogy

6.2.5. Tétel. *Ha $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória generátorral, akkor minden objektumnak van injektív burka.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória egy G generátor elemmel, és legyen $\{E_\gamma\}$ egy lényeges bővítések sorozata. Szeretnénk megmutatni, hogy a sorozat egy idő után megáll.
$\alpha > \gamma$ rendszámokra és $G' \to G$ monomorfizmusra legyen $(G', E_\gamma)|_\alpha = \{G' \xrightarrow{x} E_\gamma |$ van $G \xrightarrow{\gamma} E_\alpha$ úgy, hogy $G' \to G \xrightarrow{\gamma} E_\alpha = x\}$. Adott γ-ra és G'-re kapunk egy $\{(G', E_\gamma)|_\alpha\}_{\alpha>\gamma}$ (G', E_γ) részhalmazainak növekvő családját. Ennek a családnak stabilizálódnia kell, és mivel csak halmaznyi részhalmaza van G-nek, ezért létezik egy $F(\gamma)$ rendszám, amire $(G', E_\gamma)|_{F(\gamma)} \supset (G', E_\gamma)|_\alpha$ minden $\alpha > \gamma$, $G' \subset G$-re. Elég $\{E_\gamma\}$ olyan részsorozatát venni, amiben minden α-ra van olyan E_γ elem, hogy $E_\alpha \subset E_\gamma$, és elég erről a részsorozatról belátni, hogy megáll, ezért feltehető, hogy a sorozat olyan, hogy $F(\gamma) = \gamma + 1$. Legyen Ω az első olyan számosság rendszáma, ami nagyobb mint G részhalmazainak száma. Megmutatjuk, hogy $E_{\Omega+1} = E_\Omega$.
Tegyük fel ellenkezőleg, hogy van egy $G \xrightarrow{x} E$, aminek a képe nincs benne $E_\Omega \to E_{\Omega+1}$ képében.
Minden $\gamma < Omega+1$-re, azonosítjuk E_γ-t az $E_\gamma \to E_{\Omega+1}$ képével, azaz feltesszük, hogy részobjektuma $E_{\Omega+1}$-nek. G részobjektumainak családja, $\{x^{-1}(E_\gamma)\}$, egy növekvő család, és Ω választása miatt még Ω előtt stabilizálódnia kell. Tehát létezik egy $\gamma < \Omega$, hogy $x^{-1}(E_\gamma) = x^{-1}(E_\Omega)$. Ekkor amiatt, hogy $F(\gamma) = \gamma + 1$ kapunk egy olyan $G \xrightarrow{y} E_{\Omega+1}$ leképezést, amire

$$x^{-1}(E_\Omega) \to G \xrightarrow{y} E_\Omega \to E_{\Omega+1} = x^{-1}(E_\Omega) \to G \xrightarrow{x} E_{\Omega+1}.$$

Legyen $z = x - y$, $H = z^{-1}(E_\Omega)$. Ekkor $x(H) = (z+y)(H) \subset z(H) + y(H) \subset E_\Omega$ és $H \subset x^{-1}(E_\Omega)$. Ezért $z(H) = 0$, és $Im(z) \cap E_\Omega = 0$. $\square$

7. fejezet

Beágyazási tételek

Visszatérünk az $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ funktor kategóriához. Láttuk az 5. fejezetben, hogy ez egy Grothendieck kategória generátorral, és a 6. fejezetben ilyen kategóriáknak construáltunk injektív burkot.

7.1. Első beágyazás

7.1.1. Állítás. *Ha egy $E \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ injektív, akkor jobb-egzakt funktor.*

Bizonyítás. Legyen $A' \to A \to A'' \to O$ egy egzakt sorozat $\mathcal{A}$-ban. Alkalmazva a H reprezentációs funktort azt kapjuk, hogy

$$O \to H^{A''} \to H^A \to H^{A'} \text{egzakt}(\mathcal{A}, \mathcal{G})\text{-ben.}$$

A $(-, E) : (\mathcal{A}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ egy egzakt funktor. Tehát a következő egzakt sorozatot kapjuk

$$(H^{A'}, E) \to (H^A, E) \to (H^{A''}, E) \to O\mathcal{G}\text{-ben.}$$

A Yoneda lemma alapján ez izomorf $E(A') \to E(A) \to E(A'') \to O$-val, vagyis E jobb-egzakt. □

7.1.2. Definíció. Egy jobb-egzakt funktor pontosan akkor egzakt, ha monomorfizmusokat monomorfizmusokba visz. Legyen egy **mono funktor** olyan funktor, ami megtartja a monomorfizmusokat. Tehát egy injektív mono funktor egy egzakt funktor.

7.1.3. Tétel. *(Lényeges lemma)*
Legyen $M \to E$ egy lényeges bővítés $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ben. Ha M mono funktor, akkor E is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E nem egy mono funktor. Ekkor létezik egy $A' \to A$ monomorfizmus $\mathcal{A}$-ban, amire $E(A') \to E(A)$ nem mono $\mathcal{G}$-ben. Legyen $0 \neq x \in E(A')$ olyan, hogy

$$[E(A') \to E(A)](x) = 0.$$

Konstruálunk egy $F \subset E$ részfunktort, amit x "generál". Legyen

$$F(B) = \{y \in E(B) \mid \text{van } A' \to B \in \mathcal{A} \text{ úgy, hogy } [E(A') \to E(B)](x) = y\}.$$

Ekkor következik, hogy $B' \to B$-re

$$[E(B') \to E(B)](F(B')) \subset F(B)$$

és definiálhatjuk $F(B' \to B)$-t megszorítással. F nyilván egy halmaz-értékű funktor. Ahhoz hogy lássuk, hogy csoport-értékű funktor, kell az hogy, $F(B)$ részcsoportja $E(B)$-nek, de ez látszik. (F a képe annak a transzformációnak, hogy $H^A \xrightarrow{\eta} E$, ahol $\eta(1_A) = x$.)
Mivel $x \in F(A') \subset E(A')$, tudjuk, hogy $F \neq O$. Mivel $M \subset E$ lényeges, $F \cap M \neq O$. Speciálisan ekkor létezik

egy B objektum, amire $F(B) \cap M(B) \neq O$. Legyen $0 \neq y \in F(B) \cap M(B)$. Ekkor F konstrukciója miatt van egy $A' \to B$ amire $y = [E(A') \to E(B)](x)$. Legyen

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P \end{array}$$

egy pushout diagram. A pushout tétel szerint $B \to P$ mono. Mivel M egy mono funktor

$$[M(B) \to M(P)](y) \neq 0,$$

és ezért

$$\begin{aligned} 0 \neq [E(B) \to E(P)](y) &= [E(B) \to E(P)][E(A') \to E(B)](x) \\ &= [E(A') \to E(P)](x) \\ &= [E(A) \to E(P)][E(A') \to E(A)](x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ellentmondás. □

7.1.4. Következmény. *Egy csoport-értékű funktort be leget ágyazni egy egzakt funktorba pontosan akkor, ha mono funktor.*

7.1.5. Tétel. *(Első beágyazási tétel)*
Minden kis Abel kategória izomorf $\mathcal{G}$ egy egzakt részkategóriájával. Ekvivalensen, minden $\mathcal{A}$ kis Abel kategóriához van egy $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$ egzakt beágyazó funktor. A 4. fejezet terminológiájával élve, minden Abel kategória nagyon Abel.

Bizonyítás. Vegyük a $G = \sum_{A \in \mathcal{A}} H^A$ csoport-értékű funktort. G egy mono funktor. Legyen E az injektív burka. 7.1.4 miatt E egy egzakt funktor. Mivel G egy beágyazás, ezért G bármely bővítése is beágyazás. Tehát E egy egzakt beágyazás. □

7.2. Egy absztrakció

Legyen $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ azon részkategóriája $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-nek, amely a mono funktorokból, és azok közötti transzformációkból áll.
$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ egy teljes részkategóriája $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-nek.
$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ zárt egyes operációkra: részobjektumra, szorzatra, és lényeges bővítésre.

7.2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória injektív bővítésekkel, és legyen $\mathcal{M}$ egy teljes részkategória ami zárt részobjektumra, szorzatra, és lényeges bővítésre. Az $\mathcal{M}$-beli objektumokat **mono objektumoknak** fogjuk hívni.

7.2.2. Állítás. *Bármely $B \in \mathcal{B}$-re van maximális hányados objektum $\mathcal{M}$-ben, $B \to M(B)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}$ a mono hányadosai B-nek, és legyen $M(B)$ a

$$B \xrightarrow{h} \prod_{B' \in \mathcal{F}} B'$$

koképe, ahol minden komponense h-nak a nyilvánvaló epimorfizmus. Ekkor $M(B) \in \mathcal{M}$, mert $\prod B' \in \mathcal{M}$ és $M(B)$ részobjektuma $\prod B'$-nek. Továbbá adott $B \to B''$ epimorfizmusra, ahol $B'' \in \mathcal{M}$, találhatunk olyan $M(B) \to B''$-t, hogy

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & M(B) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B'' & \end{array} \quad \text{kommutál,}$$

úgy, hogy $M(B) \to B''$-t úgy definiáljuk, hogy $M(B) \to \prod B' \xrightarrow{p} B''$. ☐

7.2.3. Állítás. *Legyen $B \in \mathcal{B}$, $M \in \mathcal{M}$, és $B \to M$ bármely morfizmus. Ekkor van egy egyértelmű $M(B) \to M$, amelyre*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & M(B) \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd} \quad \textit{kommutál.}$$

Bizonyítás. Legyen $B \to B''$ a koképe $B \to M$-nek. Mivel $\mathcal{M}$ zárt a részobjektumokra, $B'' \in \mathcal{M}$, és $M(B)$ maximalitása a mono hányadosok között biztosítja az $M(B) \to B''$ morfizmust amelyre $B \to M(B) \to B'' = M \to B''$. Ezért definiálhatjuk $M(B) \to M$-et úgy, hogy $M(B) \to B'' \to M$, ahol $B'' \to M$ olyan, hogy $B \to B'' \to M = B \to M$. Az egyértelműség következik abból, hogy $B \to M(B)$ epi. ☐

Adott $B' \to B$-re kapunk egy egyértelmű $M(B') \to M(B)$ morfizmust amire

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d] & M(B') \arrow[d] \\ B \arrow[r] & M(B) \end{tikzcd}$$

kommutatív. Az egyértelműség miatt M egy additív funktor. A $B \to M(B)$ epimorfizmusok egy természetes transzformációhoz vezetnek $\mathcal{B}$ identitásából M-be.

7.2.4. Állítás. *Az $I \to M$ transzformáció egy természetes ekvivalenciához vezet. $(M(A), B) \to (I(A), B)$ minden $A \in \mathcal{B}$,$B \in \mathcal{M}$-re.*

Bizonyítás. Az előző állítás újrafogalmazva. ☐

7.2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $T \in \mathcal{B}$ egy **torzió objektum**, ha minden $M \in \mathcal{M}$, $(T, M) = O$. Ekvivalensen, T torzió, ha $M(T) = O$.

7.2.6. Állítás. *$Ker(B \to M(B))$ a maximális torzió részobjektuma B-nek.*

Bizonyítás. Világos, hogy minden T torzió objektumhoz és $T \to B$ morfizmushoz a $T \to B$ képe $Ker(B \to M(B))$-ben van, ezért ha $Ker(B \to M(B))$ torzió, akkor maximális.
Tegyük fel, hogy $B'' \in \mathcal{M}$, $K \to B''$ bármely morfizmus, és $O \to K \to B \to M(B) \to O$ egzakt. Legyen $B'' \to E$ az injektív burka B''-nek.
Tudjuk, hogy $E \in \mathcal{M}$. Legyen $B \to E$ olyan, hogy

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & M(B) \arrow[r] \arrow[dl] & O \\ & B'' \arrow[r] & E \end{tikzcd} \quad \text{kommutatív,}$$

ahol $M(B) \to E$ az a morfizmus, amit 7.2.3 garantál nekünk. Ekkor világos, hogy $K \to B'' = 0$, és K torzió. ☐

Általában $\mathcal{M}$ nem Abel kategória. Nem minden $\mathcal{M}$-beli monomorfizmus jelenik meg mint egy $\mathcal{M}$-beli morfizmus magja.

7.2.7. Definíció. Egy $M' \subset M \in \mathcal{M}$ **tiszta**, ha a $O \to M' \to M \to M/M' \to O$ egzakt sorozat $\mathcal{M}$-ban van, azaz ha M/M' mono. Egy mono objektum **abszolút tiszta** pontosan akkor, ha bármikor amikor egy mono objektum részobjektumaként jelenik meg, akkor tiszta részobjektum.

A torzió-mentes modulusok esetében tényleg csak abszolút tiszta objektumaink vannak, viszont mono funktorok esetében egy mono funktor abszolút tiszta akkor és csak akkor, ha bal-egzakt.

7.2.8. Lemma. *Ha $O \to M_1 \to B \to M_2 \to O$ egzakt $\mathcal{B}$-ben, és $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, akkor $B \in \mathcal{M}$.*

Bizonyítás. Legyen $M_1 \to E$ egy injektív burok, és $B \to E$ egy bővítése $M_1 \to E$-nek. Ekkor $B \to E \oplus M_2$ mono. $\square$

7.2.9. Lemma. *Egy abszolút tiszta részobjektum tiszta részobjektuma abszolút tiszta.*

Bizonyítás. Legyen A abszolút tiszta, $P \to A$ tiszta A-ban, és $P \to M$ bármilyen monomorfizmus egy M mono objektumba. Legyen

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ M \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

egy pushout diagram, és legyen

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\ O \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & P/A \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & P/A \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & M/P \arrow[r] \arrow[d] & R/A \arrow[r] \arrow[d] & O & \\ & O & O & & \end{tikzcd}$$

egy egzakt kommutatív diagram. Mivel M és P/A mono, ezért R mono. Ezért R/A és M/P mono. Tehát P abszolút tiszta. $\square$

7.2.10. Tétel. *Egy mono funktor $M \in (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ abszolút tiszta pontosan akkor, ha bal-egzakt.*

Bizonyítás. Mivel M beágyazható egy olyan funktorba, ami egyszerre abszolút tiszta és bal-egzakt, speciálisan az injektív burkába, ezért elég azt belátni, hogy egy bal-egzakt funktor tiszta részfunktora bal-egzakt.
Legyen $O \to M \to E \to F \to O$ egzakt $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ben, E bal-egzakt, F mono. Legyen $O \to A' \to A \to A''$ egzakt $\mathcal{A}$-ban. Vegyük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] \\ O \arrow[r] & M(A') \arrow[r] \arrow[d] & M(A) \arrow[r] \arrow[d] & M(A'') \arrow[d] \\ O \arrow[r] & E(A') \arrow[r] \arrow[d] & E(A) \arrow[r] \arrow[d] & E(A'') \\ O \arrow[r] & F(A) \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \arrow[d] & \\ & O & O & \end{tikzcd}$$

Ekkor F mono pontosan akkor, ha M bal-egzakt. $\square$

7.2.11. Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ egy Grothendieck kategória, $\mathcal{M}$ egy teljes részkategória, ami zárt részobjektumra, szorzatra, és lényeges bővítésre. Legyen $\mathcal{L}$ az abszolút tiszta objektumok teljes részkategóriája.
Adott $M \in \mathcal{M}$-re azt mondjuk, hogy $M \to R$, $R \in \mathcal{L}$ egy **tükörképe** M-nek $\mathcal{L}$-ben, ha minden $M \to L$, $L \in \mathcal{L}$-re van egy egyértelmű $R \to L$ morfizmus, amire

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[d] \\ & L \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

7.2.12. Tétel. *(Felismerési tétel) Ha a $O \to M \to R \to T \to O$ sorozat egzakt $\mathcal{B}$-ben, M mono, R abszolút tiszta, T torzió, akkor $M \to R$ egy tükörképe M-nek $\mathcal{L}$-ben.*

Bizonyítás. Vegyük bármely $M \to L$, $L \in \mathcal{L}$. Legyen $L \to E$ egy injektív burok, $E \to F$ a komagja $L \to E$-nek. Nézzük a következő kommutatív diagrammot, ahol a sorok egzaktak:

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & L \arrow[r] & E \arrow[r] & F \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

ahol $R \to E$ bármelyik kommutatív morfizmus, amit E injektívsége biztosít, $T \to F$ pedig a kommutatív morfizmus, ami a sorok egzaktságából adódik
E mono a lényeges tétel 7.1.3 miatt, F mono, mivel L abszolút tiszta. Tehát $T \to F = 0$ és $Im(R \to E) \subset L$. Ezzel kapunk egy $R \to L$ morfizmust, amire

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[d] \\ & L \end{tikzcd} \quad \text{kommutál.}$$

Az egyértelműség következik, ha veszünk $M \to L$-nek 2 bővítését. A különbségük $R \xrightarrow{\delta} L$ olyan, hogy $M \to R \xrightarrow{\delta} L = 0$, ezért $R \xrightarrow{\delta} L$ átvezethető $R \to T$-n. De T egy torzió, L mono, ezért $\delta = 0$. □

7.2.13. Tétel. *Minden $M \in \mathcal{M}$ mono objektumhoz van egy $M \to R$ monomorfizmus, ami M tükörképe $\mathcal{L}$-ben.*

Bizonyítás. Ágyazzuk be M-et egy abszolút tiszta E objektumba (pl az injektív burkába).
Konstruáljuk meg a következő egzakt kommutatív diagramot

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\ O \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & O \\ & O \arrow[r] & M(F) \arrow[r] \arrow[d] & M(F) \arrow[r] \arrow[d] & O \\ & & O & O & \end{tikzcd}$$

kezdve a középső sorral, majd a jobb oszloppal, majd az alsó sorral, majd a felső sorral (9. lemma) T torzió, R tiszta részobjektuma egy abszolút tiszta objektumnak, tehát abszolút tiszta. A felső sor az előző tételt teljesíti. □

Választva egy $M \to R(M)$ tükörképet $\mathcal{L}$-ból minden $M \in \mathcal{M}$-hoz, kapunk egy additív $\mathcal{M} \xrightarrow{R} \mathcal{L}$ funktort, és egy természetes transzformációt az $\mathcal{M}$ identitás funktorából $I \to R$ indukál egy $(I(M), L) \to (R(M), L)$ izomorfizmust minden $M \in \mathcal{M}$, $L \in \mathcal{L}$.

7.3. Az abszolút tiszta objektumok kategóriájának Abelsége, és bal-egzakt funktorok

7.3.1. Tétel. *$\mathcal{L}$ Abel, és minden objektumnak van injektív burka.*

Bizonyítás. 1. Axióma (nulla objektum): triviális.

2. Axióma (szorzat/összeg): $M \in \mathcal{M}$-ra $M \in \mathcal{L}$ pontosan akkor, ha $M \to R(M)$ egy izomorfizmus. R egy additív funktor, tehát $\mathcal{L}$ zárt szorzatra és összegre.

3. Axióma (Mag): A 7.2.9 lemma szerint $(L_1 \to L_2) \in \mathcal{L}$ $\mathcal{B}$-magja $\mathcal{L}$-ban van, tehát $\mathcal{L}$-nek vannak magjai. Továbbá egy $\mathcal{L}$-beli morfizmus $\mathcal{L}$-mono pontosan akkor ha $\mathcal{B}$-mono.

4. Axióma (Monomorfizmus): Adott $L_1 \to L_2 \in \mathcal{L}$ monomorfizmusra legyen $O \to L_1 \to L_2 \to M \to O$ egzakt $\mathcal{B}$-ben. L_1 abszolőt tisztasága miatt $M \in \mathcal{M}$. Ekkor $L_1 \to L_2 = Ker(L_2 \to M \to R(M))$.

5. Axióma (komag): Legyen $L_1 \to L_2 \in \mathcal{L}$ és $L_1 \to L_2 \to F \to O$ egzakt $\mathcal{B}$-ben. Ekkor $L_2 \to F \to M(F) \to R(M(F)) = Cok(L_1 \to L_2)$.

6. Axióma (epimorfizmus): A felső konstrukció mutatja, hogy egy $L_1 \to L_2 \in \mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-epi pontosan akkor ha a $\mathcal{L}B$-komagja $L_1 \to L_2$-nek torzió. Legyen $L_1 \to L_2$ egy $\mathcal{L}$-epimorfizmus, $M \to L_2$ a $\mathcal{L}B$-képe $L_1 \to L_2$-nek, és $O \to M \to L_2 \to T \to O$ egzakt $\mathcal{B}$-ben. T torzió és a felismerési tétel 7.2.12 szerint $L_2 = R(M)$. Ezért ha $L_0 \to L_1 = Ker(L_1 \to M)$, akkor $Cok(L_0 \to L_1) = L_1 \to M \to R(M)$ és minden $\mathcal{L}$-epimofizmus egy $\mathcal{L}$-komag.

Mivel a monomorfizmusok ugyanazok $\mathcal{B}$-ben és $\mathcal{L}$-ben, ezért ha E egy $\mathcal{B}$-injektív burka egy $\mathcal{L}$-objektumnak, akkor az injektív $\mathcal{L}$-ben. ☐

Visszatérve $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-hez, legyen $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ a bal-egzakt funktorok teljes részkategóriája. Az előző tétel szerint $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ egy Abel kategória injektív burkokkal. A $H : \mathcal{A} \to (\mathcal{A}, \mathcal{G})$ reprezentációs funktor átvezethető $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-n.

7.3.2. Tétel. *$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ teljes, és van injektív kogenerátora.*

Bizonyítás. A szorzatok konstrukciója $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban egyszerű. Az összegek konstrukciója szintén egyszerű. Adott $\{F_i\}$ bal-egzakt funktorok családjára az összegük $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-ban már eleve bal-egzakt, ezért lehet az az összeg $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban. A $\{H^A\}_{A \in \mathcal{A}}$ funktorok szorzata szintén bal-egzakt és generátor $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban. 3.3.10 szerint $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-nak van injektív kogenerátora. ☐

7.3.3. Tétel. *$H : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ egy egzakt beágyazás.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy H egy teljes beágyazás (5.3.7). Legyen $O \to A' \to A \to A'' \to O$ egzakt $\mathcal{A}$-ban. Meg szeretnénk mutatni, hogy $O \to H^{A''} \to H^A \to H^{A'} \to O$ egzakt $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban. Ez a helyzet pontosan akkor, ha a $O \to (H^{A'}, E) \to (H^A, E) \to (H^{A''}, E) \to O$ egzakt ha E egy injektív kogenerátor $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban. A Yoneda tétel szerint 5.3.5 az utolsó sorozat izomorf

$$O \to E(A') \to E(A) \to E(A'') \to O$$

sorozattal, és ez a sorozat egzakt pontosan akkor, ha E egy egzakt funktor. E egzaktságát láttuk a 7.1.3lényeges lemmánál. ☐

7.3.4. Tétel. *(Mitchell) Minden Abel kategória teljesen Abel.*

Bizonyítás. Az előző tétel mutatja, hogy minden kis Abel kategóriához van egy egzakt teljes kontravariáns beágyazás egy teljes Abel kategóriába amiben van injektív kogenerátor. A képtér kategória duálisát véve azt kapjuk, hogy minden kis Abel kategóriához van egy egzakt teljes kovariáns beágyazás egy teljes Abel kategóriába, amiben van projektív generátor. 4.4.2 tétel szerint tehát minden kis Abel kategóriához van egy egzakt teljes beágyazás modulusok kategóriájába. ☐

Irodalomjegyzék

[1] Peter Freyd. *Abelian Categories.* Harper & Row, 1964. Elérhető:http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/TAC/reprints/articles/3/tr3.pdf.

[2] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathmatician.* Springer, 1971. Elérhető:http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-2/maclanecat.pdf.

[3] Saul Lubkin. Imbedding of abelian categories. 1960. Elérhető:https://www.researchgate.net/publication/273041221_Imbedding_of_Abelian_Categories.

[4] Barry Mitchell. The full imbedding theorem. 1964. Elérhető:https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/notice18.pdf.

[5] Charles A. Weibel. An introduction to homological algebra. 1994. Elérhető:https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/weibel-hom.pdf.

NYILATKOZAT

Név: TREGELE MÁTÉ

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: L304L7

Szakdolgozat címe: ABEL KATEGÓRIÁK

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 20

Tregele Máté

a hallgató aláírása