EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Fraktáldimenziók

Szakdolgozat

Szerző: Sidó Dávid

Matematika BSc

Matematikus szakirány

Témavezető: Buczolich Zoltán

egyetemi tanár

Analízis tanszék

Budapest, 2024.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék hálás köszönetet mondani témavezetőmnek, Buczolich Zoltán tanár úrnak, akinek a segítsége és szakmai iránymutatása nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Továbbá köszönöm szépen a családomnak, hogy mindvégig támogattak engem.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Már kisgyermekkorom óta lenyűgöz a természet csodálatos világa a benne található összetettségtől a legegyszerűbb dolgokig. A fraktálok szerkezetüket tekintve valahol a kettő közé esnek. Mivel mindenütt előfordulnak, ezért akárhol is jár az ember, léptennyomon beléjük botlik: ilyen például egy sziget partvonala, egy folyó vízgyűjtő hálózata, ér- és idegrendszerünk, tüdőnk hörgői, a felhők az égen, télen a szitáló hópehely, a pagodakarfiol vagy a fenyőtoboz, hogy csak néhányat említsek.

Ugyan a XX. század elején fedezték fel őket, matematikai leírásuk igen nehéznek bizonyult. 1975-ben Benoît Mandelbrot, a zseniális lengyel születésű francia matematikus és polihisztor közös tulajdonságukra hivatkozva (vélhetőleg a „törött" jelentésű latin *frāctus* szó után) a fraktál nevet adta e furcsa képződményeknek.

Hogy mi is ez a közös vonás? Elsőre a legszembetűnőbb az (esetenként részbeni) önhasonlóság, ami a legjobban talán a páfrány levelén látszik:

1. ábra. Páfránylevél[1]

Mélyebbre tekintve azonban kiderül, hogy ez nem kizárólagos, sőt inkább másodlagos jellemzőjük. A beszédes név elárulja, hogy a fő ismérv valójában a törtdimenzió.

Azt viszont, hogy a különböző fraktálok mennyire hasonlítanak önmagukra, a mindennapi életben intuitívan használt dimenziófogalom kiterjesztésével lehet jól mérni. Látni fogjuk, hogy egy konzisztens definíció megalkotása korántsem egyszerű feladat, de a problémák kiküszöbölésével áthidalható. Jelen dolgozatom elsősorban arra irányul, hogy szemléletes példákon keresztül bemutassa és összehasonlítsa a dimenzió különféle általánosításait, a Hausdorff-dimenziótól kezdve a dobozdimenzión át az Assouad-dimenzióig. Végkicsengésként a példákban tetten ért minta nyomán kimondjuk és igazoljuk a dolgozat fő eredményét, a nyílthalmaz-feltételt.

[1] https://www.123rf.com/clipart-vector/fern_frond.html

2. Mértékelméleti alapok

Mielőtt belekezdenénk a dimenzió formális tárgyalásába, bizonyítás nélkül közöljük a mértékelmélet alapvető tételeit, definícióit, amelyek ismerete és megértése kulcsfontosságú a következő fejezetek elsajátításához. [1]

Először megállapodunk abban, hogy egy A halmaz komplementumát $X \setminus A$ jelöli, ha az alaphalmaz egyértelmű, akkor pedig A^c. Részhalmaz jelölése a szokásos módon történik: $\subseteq$, valódi részhalmaz esetén azonban a $\subset$ jelet használom. Továbbá hatványhalmazra a 2^B helyett a $\mathcal{P}(B)$-t, diszjunkt unióra a kevésbé népszerű, de helytakarékos szögletes $\sqcup$ szimbólumot fogom alkalmazni. Végül kikötjük, hogy ragaszkodunk ahhoz a konvencióhoz, hogy a 0 is a természetes számok közé sorolandó.

Dióhéjban a mértékelmélet a matematika azon ága, amely a hagyományos értelemben vett méret (hossz, terület, térfogat) fogalmát terjeszti ki általánosabb érvényűvé, s mindezt anélkül, hogy az ezekkel kapcsolatos intuíciónk csorbát szenvedne. Például az ember jogosan várja el, hogy a $[7, 10]$ intervallum mértéke 3 legyen, szintúgy az $(1, 2) \cup (3, 5)$-é. Tehát szeretnénk egy olyan $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ halmazfüggvényt konstruálni, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- $\mu([0, 1]) = 1,$ normált;
- $\mu(x + A) = \mu(A), \quad A \in \mathbb{R}^k, \ \ x \in \mathbb{R},$ eltolásinvariáns;
- $\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad A_j \in \mathbb{R}^k,$ σ-additív.

A matematikusok megdöbbenésére az olasz VITALI 1905-ben a kiválasztási axióma segítségével (ZFC-ben) megmutatta, hogy a keresés reménytelen, mivel ilyen függvény nincs, vagyis létezik nem mérhető halmaz. A megoldás a feltételek észszerű gyengítésében rejlik. Az értelmezési tartomány megszorítása motiválta a σ-algebra koncepcióját.

2.1. Definíció. Az X alaphalmaz részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszerét σ-algebrának nevezzük, ha

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
- $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

A fentiekből könnyű látni, hogy $X \in \mathcal{F}$, illetőleg $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható metszetre. Ekkor az $(X, \mathcal{F})$ párost mérhető térnek, $\mathcal{F}$ részhalmazait mérhető halmazoknak nevezzük. Gyakori feladat egy $\mathcal{C}$ halmazcsaládhoz (például egy τ topológiához) olyan minimális σ-algebrát keresni, ami azt tartalmazza.

2.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{C}$ egy nemüres halmazcsalád X-ben. Ekkor*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F},\ \ \mathcal{F}\ \ \sigma\text{-}algebra\}$$

minimális (legdurvább) abban az értelemben, hogy ha $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$, akkor $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}$, ahol $\mathcal{G}$ egy másik $\mathcal{C}$-t tartalmazó σ-algebra. $\mathcal{C}$ elnevezése generátor, $\sigma(\mathcal{C})$ pedig a generátum.[2]

A későbbiekben fontos mérhető tér lesz az $(X, \sigma(\tau))$, amelyben a mérhető halmazok az úgynevezett BOREL-halmazok; $\mathbb{R}^k$-n ez a kanonikus σ-algebra. Ezek után szabatosan is kimondhatjuk a mindeddig pongyolán kezelt mérték definícióját.

2.3. Definíció. Tekintsünk egy $(X, \mathcal{F})$ mérhető teret. Ekkor a $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ halmazfüggvény mérték, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és μ σ-additív.[3]

Vegyük észre, hogy a Jordan-féle külső mértékkel szemben itt megengedünk végtelen mértékű halmazokat is. A mértékkel ellátott mérhető teret, vagyis az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ hármast mértéktérnek hívják. Most következzék néhány trivialitás.

2.4. Lemma. *Legyen $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér. Ekkor*

- $\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j), \quad \{A_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{F},$ *végesen additív;*
- $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B), \quad A, B \in \mathcal{F},$ *monoton;*
- $A \subseteq B$ *és* $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A), \quad A, B \in \mathcal{F}.$

Viszont a halmazok mértékterekké való átalakítása bonyolult feladat, ugyanis ehhez megfelelő σ-algebrát kell választani. Ezt úgy kerülik meg, hogy először külső mértéket konstruálnak, ami egy speciális, az összes részhalmazon definiált függvény. Ennek az az ára, hogy a külső mérték már csupán σ-szubadditív lesz.

[2] Téves az a megérzés, hogy $\sigma(\mathcal{C})$ megkonstruálható az összes lehetséges megszámlálható unió és komplementer hozzávételével. Mindazonáltal a konstruktív megközelítés transzfinit indukcióval megvalósítható. [2]

[3] Ha itt $\mathcal{F}$ nem σ-algebra, akkor elő- vagy premértékről beszélünk.

2.5. Definíció. Egy X halmazon értelmezett $\overline{\mu}: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ függvény külső mérték, ha kielégíti az alábbiakat:

- $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$;
- $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B), \quad A, B \in \mathcal{F},$ monoton;
- $\overline{\mu}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_j), \quad \{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X),$ σ-szubadditív.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{C}$ halmazcsalád fedi a $B \subseteq X$ részhalmazt, ha $B \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$. A következő tétel rávilágít arra, hogy ha X lefedhető egy $f: \mathcal{C} \to [0,\infty]$ függvénnyel ellátott halmazcsaláddal, akkor konstruálható rajta külső mérték.

2.6. Tétel. *Legyen adva egy X alaphalmaz egy X-et fedő $\mathcal{F}$ halmazcsaláddal és egy $f: \mathcal{F} \to [0,\infty]$ függvény. Ekkor létezik X-en egy egyértelmű $\overline{\mu}$ külső mérték úgy, hogy $\forall A \in \mathcal{F}$-re $\overline{\mu}(A) \leq f(A)$ és ha $\overline{\nu}$ egy másik ilyen külső mérték, akkor $\forall B \subseteq X$ esetén $\overline{\nu}(B) \leq \overline{\mu}(B)$. Sőt $\overline{\mu}$ előáll $\overline{\mu}(B) = \inf \sum_{A\in\mathcal{C}} f(A)$ alakban, ahol az infimumot B $\mathcal{F}$-beli halmazokkal való összes megszámlálható $\mathcal{C}$ fedésén vesszük.*

A fentire példa a valós számegyenes félig nyílt intervallumai az $f([a,b)) = b - a$ hosszfüggvénnyel. Kibővített eszköztárunk révén könnyen választható megfelelő σ-algebra és egy asszociált μ mérték a következőképp:

2.7. Tétel. *Legyen $\overline{\mu}$ külső mérték X-en. Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq X$ részhalmaz $\overline{\mu}$-mérhető, ha $\overline{\mu}$ minden részhalmazt jól vág ketté, azaz $\forall E \subseteq X$-re $\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \setminus A)$. Ekkor az összes $\overline{\mu}$-mérhető részhalmaz σ-algebrát alkot, amin $\overline{\mu}$ megszorítása, μ már valódi mérték.*

Mivel a későbbi fejezetekben főleg metrikus terekkel fogunk dolgozni, biztosítani szeretnénk, hogy a $\overline{\mu}$-mérhető részhalmazok tartalmazzák legalább a standard topológia generálta BOREL-halmazokat. Sajnos ez az eddigiek fényében nem mindig igaz automatikusan, de a 2.6. Tétel megváltoztatásával orvosolni tudjuk a helyzetet.

2.8. Tétel. *Legyen X valós metrikus tér, $\mathcal{F}$ pedig X részhalmazainak egy családja úgy, hogy $\forall x \in X$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists A \in \mathcal{F}$, amire $\operatorname{diam} A \leq \varepsilon$ és $x \in A$. Legyen $f: \mathcal{F} \to [0,\infty]$ egy függvény, $\mathcal{F}_\varepsilon := \{A \in \mathcal{F} : \operatorname{diam} A \leq \varepsilon\}$ egy halmazcsalád és $\overline{\mu}_\varepsilon$ az imént említett tétel alapján az általuk definiált külső mérték. Végül legyen*

$$\overline{\mu}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overline{\mu}_\varepsilon(B), \quad B \subseteq X.$$

Ekkor $\overline{\mu}$ olyan külső mérték X-en, hogy minden Borel-*halmaz mérhető.*

A tétel erejét mutatja, hogy ezzel az eljárással egy kezdeti függvényből és halmazcsaládból felépíthetünk egy, a Borel-halmazokat magában foglaló σ-algebrát a hozzátartozó mértékkel együtt.

Az első fejezet lezárásaként megjegyezzük, hogy ha ez utóbbi két tételt az

$$R = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}^k, \quad \forall i \;\; a_i < b_i$$

félig nyílt téglák szorzatára alkalmazzuk az $f(R) = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$ függvénnyel, akkor ez az eljárás lehetővé teszi az úgynevezett Lebesgue-mérték megkonstruálását, amely igen nagy jelentőséggel bír a matematika számos más területén (például a valószínűségszámításon) belül.

3. A dimenziófogalom kiterjesztése

Az iskolában mindenki azt tanulja, hogy a dimenzió az az egész szám, ami megmondja, hány koordinátára van szükségünk az egyes objektumok helyének meghatározásához. Ismeretes, hogy a pont 0, az egyenes 1, a sík 2, a tér háromdimenziós. De vajon lehet-e valaminek a dimenziója tört?

Ennek a fejezetnek a célja, hogy mértékelméleti oldalról közelítve kitágítsa a dimenzió fogalmát absztrakt metrikus terek részhalmazaira. Emlékeztetőül egy távolságfüggvénnyel ellátott vektorteret metrikus térnek nevezünk, ha ez a valós értékű $X \times X$-ből képező δ metrika nemnegatív, szeparáló, szimmetrikus és teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Euklideszi térben a standard metrikát a különbségvektor normája indukálja: $\delta(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$. Továbbá egy $A \subseteq X$ részhalmaz átmérőjén a $\operatorname{diam} A := \sup\{\delta(x, y) : x, y \in A\}$ szuprémumot (ha felvétetik, akkor maximum) értjük. Az x középű, r sugarú nyílt golyót végig $\mathbb{B}_r(x)$ fogja jelölni. Az alfejezetek forrása rendre az [1] és a [3] cikk.

3.1. A Hausdorff-dimenzió

Első lépésként definiálnunk kell a d-Hausdorff-féle külső mértéket.

3.1.1. Definíció. Legyen X valós metrikus tér ezzel a σ-algebrával: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. Minden $d > 0$-ra és $A \subseteq X$-re legyen $f_d : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ az $f(A) = (\operatorname{diam} A)^d$ hozzárendeléssel definiált függvény. Ekkor a d-Hausdorff-féle külső mértéket, $\overline{H}^d$-t a 2.8. Tétel alkalmazásával állítjuk elő.

Minden $\varepsilon, d > 0$-ra legyen $\mathcal{F}_\varepsilon = \{A \subseteq X : \operatorname{diam} A \leq \varepsilon\}$ részhalmazok egy családja és $f_d : \mathcal{F}_\varepsilon \to [0, \infty]$ halmazfüggvények, mint fent. Így megkonstruálható a

$$\overline{H}_\varepsilon^d(B) = \inf_{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_\varepsilon} \sum_{A \in \mathcal{C}} \operatorname{diam}(A)^d, \quad \forall B \subseteq X$$

külső mérték, ahol az infimumot B összes megszámlálható $\mathcal{C}$ ε-fedésén vesszük. Ekkor

$$\overline{H}^d(B) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{H}_\varepsilon^d(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{H}_\varepsilon^d(B) \in [0, \infty].$$

Annak ellenére, hogy a 2.8. Tétel garantálja, mégis belátjuk:

3.1.2. Állítás. *Minden d-re $\overline{H}^d$ külső mérték.*

Bizonyítás. Ha $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, akkor $\mathcal{F}_{\varepsilon_1} \subseteq \mathcal{F}_{\varepsilon_2}$, ezért $\overline{H}^d_{\varepsilon_2}$ definíciója szerint több megengedett fedés van, ami miatt az infimum csökken. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $B \subseteq X$-re $\overline{H}^d_{\varepsilon_2}(B) \leq \overline{H}^d_{\varepsilon_1}(B)$, s így $\overline{H}^d_{\varepsilon}(B)$ nem nő $\varepsilon \in (0, \infty)$-ben. Ha az $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sorozat 0-hoz tart, akkor $\{\overline{H}^d_{\varepsilon_n}(B)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton növő, azaz vagy egy nemnegatív valós számhoz konvergál, vagy divergens. Ezzel a jóldefiniáltságot igazoltuk.
Most megmutatjuk, hogy minden rögzített ε-ra $\overline{H}^d_{\varepsilon}$ valóban külső mérték. Az első két tulajdonság magától értetődő. A σ-szubadditivitáshoz tekintsünk egy, az X részhalmazaiból álló $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, és legyen $\gamma > 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$-re válasszuk B_n egy megszámlálható $\mathcal{C}_n$ ε-fedését úgy, hogy

$$\sum_{A\in\mathcal{C}_n} (\operatorname{diam} A)^d \leq \overline{H}^d_{\varepsilon}(B_n) + \frac{\gamma}{2^n}. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy

$$B_n \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{C}_n} A \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{C}_n} A,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\overline{H}^d_{\varepsilon}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \overline{H}^d_{\varepsilon}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{C}_n} A\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A\in\mathcal{C}_n} (\operatorname{diam} A)^d \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{H}^d_{\varepsilon}(B_n) + \frac{\gamma}{2^n}\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{H}^d_{\varepsilon}(B_n)\right) + \gamma,
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség a monotonitásból, a második a definícióból, a többi pedig (1)-ből következik. Mivel ez minden $\gamma > 0$-ra fennáll, ezért $\overline{H}^d_{\varepsilon}$-re teljesül a σ-szubadditivitás.
Végül belátjuk, hogy $\overline{H}^d$ szintén külső mérték. Az első két tulajdonság itt is nyilvánvaló. A σ-szubadditiviáshoz felhasználjuk az előzőt, illetve hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\overline{H}^d(B_n) =$

$\sup_{\varepsilon>0} \overline{H}^d_\varepsilon(B_n) \geq \overline{H}^d_\varepsilon(B_n)$. Ekkor

$$\overline{H}^d_\varepsilon\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{H}^d_\varepsilon(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{H}^d(B_n),$$

ahonnan $\varepsilon \to 0^+$ határátmenettel a bizonyítást befejeztük. □

Most, hogy tudjuk, $\overline{H}^d$ minden d-re külső mérték X-en, a 2.7. Tételt felhasználva megalkothatjuk a H^d mértéket a $\overline{H}^d$-mérhető halmazok σ-algebráján, amely a 2.8. Tétel értelmében magában foglalja a BOREL-halmazokat.

3.1.3. Megjegyzés. $\mathbb{R}^k$-n a k dimenziós LEBESGUE-mérték skalárszorzó erejéig ekvivalens a k dimenziós HAUSDORFF-mértékkel.

A következő lemma a HAUSDORFF-mérték skálázhatóságáról szól.

3.1.4. Lemma. *Legyen $B \subseteq \mathbb{R}^k$ és $S : B \to \mathbb{R}^l$ lipschitz, vagyis $\exists\lambda > 0$ úgy, hogy $\forall x, y \in B$-re $\|S(x) - S(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Ekkor*

$$\overline{H}^d(S(B)) \leq \lambda^d \overline{H}^d(B), \quad \forall d > 0,$$

ahol $S(B) := \{S(x) : x \in B\} \subseteq \mathbb{R}^l$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{C} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_\varepsilon$ B megszámlálható ε-fedése, akkor $\lambda\mathcal{C} = \{\lambda A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_{\lambda\varepsilon}$ megszámlálható $\lambda\varepsilon$-fedése $S(B)$-nek. Ennélfogva $\overline{H}^d_{\lambda\varepsilon}(S(B)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(\lambda A_n)^d = \lambda^d \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_n)^d$. Mivel ez B minden megszámlálható $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_\varepsilon$ ε-fedésére igaz, infimumot véve kapjuk, hogy $\overline{H}^d_{\lambda\varepsilon}(S(B)) \leq \lambda^d \overline{H}^d_\varepsilon(B)$, ahonnan $\varepsilon \to 0^+$ határátmenettel kész vagyunk. □

3.1.5. Következmény. *Legyen $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ hasonlóság, azaz $\exists\lambda > 0$ úgy, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$-ra $\|S(x) - S(y)\| = \lambda \|x - y\|$. Ekkor*

$$\overline{H}^d(S(B)) = \lambda^d \overline{H}^d(B), \quad \forall d > 0,\ \forall B \subseteq \mathbb{R}^k.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$-ra $\left\|S^{-1}(x) - S^{-1}(y)\right\| = \lambda^{-1} \|x - y\|$, és alkalmazzuk az előző lemmát. □

Mielőtt precízen definiálnánk a HAUSDORFF-dimenziót, vizsgáljuk meg $\overline{H}^d(B)$ viselkedését d függvényében.

3.1.6. Lemma. *Legyen X valós metrikus tér, $B \subseteq X$ és $0 < d_1 < d_2$. Ekkor*

- $\overline{H}^{d_1}(B) < \infty \Rightarrow \overline{H}^{d_2}(B) = 0$;
- $\overline{H}^{d_2}(B) > 0 \Rightarrow \overline{H}^{d_1}(B) = \infty$.

Bizonyítás. Minden $\varepsilon > 0$ és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén, amire $\operatorname{diam} A \leq \varepsilon$

$$|A|^{d_2} = |A|^{d_2-d_1} |A|^{d_1} \leq \varepsilon^{d_2-d_1} |A|^{d_1},$$

ahonnan $B \subseteq X$-re $\overline{H}_\varepsilon^{d_2}(B) \leq \varepsilon^{d_2-d_1} \overline{H}_\varepsilon^{d_1}(B)$. Ha $\overline{H}^{d_1}(B) < \infty$, akkor a kívánt eredmény $\varepsilon \to 0^+$ határátmenet után azonnal következik. A másik hasonlóan jön ki. □

Tehát minden $B \subseteq X$-re van egy kritikus d érték, amikor is $\overline{H}^d(B)$ ∞-ről 0-ra zuhan. Pontosabban egyértelműen létezik $c \in [0, \infty]$ úgy, hogy

$$\overline{H}^d(B) = \begin{cases} \infty, & d < c \\ 0, & d > c. \end{cases}$$

A $d = c$ eset lesz számunkra a legérdekesebb, hiszen ekkor $\overline{H}^d(B)$ bármilyen értéket képes felvenni 0 és ∞ között. Ezt fogjuk B HAUSDORFF-dimenziójának hívni.

3.1.7. Definíció. Legyen X valós metrikus tér és $B \subseteq X$. Ekkor

$$\dim_H B = \sup\{d : \overline{H}^d(B) = \infty\} = \inf\{d : \overline{H}^d(B) = 0\}.$$

Ez a definíció általánosítja a topológiai dimenzió fogalmát, s így a szokásos geometriai alakzatok (egyenes, sík, körlemez, kocka stb.) esetében megegyezik vele, azonban a halmazok kisebb léptékű részleteit is figyelembe veszi a metrika kiaknázásával. Mindezt úgy csinálja, hogy nemcsak egészekre, hanem tetszőleges $d > 0$ valós számra kiszámolja a d dimenziós „méretet”. Ebből kifolyólag gyakran tört, sőt irracionális értéket kapunk. Erre majd egy későbbi fejezetben láthatunk példákat.

3.1.8. Tétel. *A* HAUSDORFF-*dimenzió néhány kiemelkedő tulajdonsága a teljesség igénye nélkül:*

- $\dim_H B = 0$, *ha B megszámlálható;*

- $\dim_H \mathbb{R}^k = k$;

- $A \subseteq B \Rightarrow \dim_H A \leq \dim_H B$;

- $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_i(\dim_H A_i)$;

- $\dim_H f(B) \leq \dim_H B$, *ha* $f : B \to \mathbb{R}^l$ *lipschitz,* $\quad B \subseteq \mathbb{R}^k$;

- *ha* $B \subseteq \mathbb{R}^k$ *k dimenziós* LEBESGUE-*mértéke pozitív, akkor* $\dim_H B = k$.

3.2. Az ASSOUAD-dimenzió

Az ASSOUAD-dimenzió fogalmát a célból alkották meg az 1970-es években, hogy hasznos eszközt nyújtson a fraktálok homogenitásának tanulmányozásához. Elsőre azt lehet mondani, hogy az ASSOUAD-dimenzió inkább a halmazok durva struktúrájára érzékeny, s figyelmen kívül hagyja a kevésbé komplex részeket. Habár önmagában is érdekes, főként a kvázikonform leképezések és a beágyazhatósági problémák révén vált relevánssá. Ebben az alfejezetben tüzetesen górcső alá vesszük alaptulajdonságait és más dimenziókkal való viszonyát.

3.2.1. Definíció. Legyen X metrikus tér és tetszőleges nemüres $E \subseteq X$ részhalmazra, $r > 0$-ra jelölje $N_r(E)$ a legfeljebb r átmérőjű nyílt halmazok legkisebb számát, amellyel E lefedhető. Ekkor

$$\dim_A E = \inf \left\{ \alpha : \exists C, \rho > 0 : \forall 0 < r < R \leq \rho, \sup_{x \in E} N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E) \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha} \right\}.$$

Ennek van egy alsó dimenzió nevű duálisa, amelyet LARMAN népszerűsített *A new theory of dimension* című könyvében [4]. Sok ismérvük összefonódik, ám párjával ellentétben az alsó dimenzió képes a halmazok finomabb struktúráit azonosítani.

3.2.2. Megjegyzés. Kiszámítása is nagyon hasonlóan történik:

$$\dim_L E = \sup \left\{ \alpha : \exists C, \rho > 0 : \forall 0 < r < R \leq \rho, \inf_{x \in E} N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E) \geq C \left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha} \right\}.$$

Izolált ponttal rendelkező halmazok alsó dimenziója nulla, ezért az ilyen inhomogén esetekben nem ez a legalkalmasabb eszköz. Máskor pedig, például iterált függvényrendszerek attraktorainak vizsgálatára tökéletesen megfelel. Valójában az ASSOUAD- és az alsó dimenzió közti eltérés a homogenitás jó mérőszáma.

Elsőként megnézzük, hogyan viselkedik e kettő szorzatterekre. A szorzatmetrika sokfajta lehet $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$-on, de többségük ekvivalens ezzel:

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

3.2.3. Tétel (Szorzat). *Fennáll az alábbi egyenlőtlenségsor:*

$$\begin{aligned}\dim_L X + \dim_L Y \le \dim_L(X \times Y) &\le \dim_L X + \dim_A Y \\ &\le \dim_A(X \times Y) \le \dim_A X + \dim_A Y,\end{aligned}$$

valamint egyenlőség:

$$\dim_L X^k = k \dim_L X$$

Bizonyítás. Egyedül az első két egyenlőtlenséget látjuk be, a maradék analóg meggondolását az Olvasóra bízzuk. Jelölje $M_r(E)$ az E halmaz egy r-szeparált részhalmazának maximális számosságát, ahol r-szeparált halmaz alatt egy olyan halmazt értünk, amelyben bármely két pont távolsága szigorúan nagyobb r-nél. Vegyük észre, hogy minden $(x, y) \in X \times Y$ és $0 < r < R$ esetén

$$N_r(\mathbb{B}_R(x, y) \cap (X \times Y)) \le N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap X) N_r(\mathbb{B}_R(y) \cap Y) \tag{2}$$

és

$$M_r(\mathbb{B}_R(x, y) \cap (X \times Y)) \ge M_r(\mathbb{B}_R(x) \cap X) M_r(\mathbb{B}_R(y) \cap Y). \tag{3}$$

Az első egyenlőtlenség onnan jön, hogy ha $\{U_n\}_n$, $\{V_m\}_m$ tetszőleges r-fedése $\mathbb{B}_R(x) \cap X$-nek, illetőleg $\mathbb{B}_R(y) \cap Y$-nak, akkor $\{U_n \times V_m\}_{n,m}$ egy r-fedése $\mathbb{B}_R(x, y) \cap (X \times Y)$-nak. A második pedig onnan, hogy ha $\{u_n\}_n$, $\{v_m\}_m$ tetszőleges r-szeparált részhalmazai $\mathbb{B}_R(x) \cap X$-nek, illetőleg $\mathbb{B}_R(y) \cap Y$-nak, akkor $\{(u_n, v_m)\}_{n,m}$ egy r-szeparált részhalmaza $\mathbb{B}_R(x, y) \cap (X \times Y)$-nak.
Legyen $s < \dim_L X$ és $t < \dim_L Y$. Ekkor létezik C_X, C_Y, ρ_X, ρ_Y úgy, hogy minden

$0 < r < R < \rho_X$ és $x \in X$-re

$$M_r(\mathbb{B}_R(x) \cap X) \geq C_X \left(\frac{R}{r}\right)^s,$$

s minden $0 < r < R < \rho_Y$ és $y \in Y$-ra

$$M_r(\mathbb{B}_R(y) \cap Y) \geq C_Y \left(\frac{R}{r}\right)^t.$$

Ezért (3) miatt minden $0 < r < R < \min(\rho_X, \rho_Y)$ és $(x, y) \in X \times Y$ esetén

$$M_r(\mathbb{B}_R(x, y) \cap (X \times Y)) \geq C_X C_Y \left(\frac{R}{r}\right)^{s+t},$$

ami épp azt jelenti, hogy $\dim_L(X \times Y) \geq s + t$, ahonnan $s \uparrow \dim_L X$ és $t \uparrow \dim_L Y$ határátmenettel kapjuk az alsó korlátot.
Legyen $C, \rho > 0$, $s > \dim_L X$ és $t > \dim_L Y$. Ekkor létezik C_Y, ρ_Y úgy, hogy minden $0 < r < R < \rho_Y$ és $y \in Y$-ra

$$N_r(\mathbb{B}_R(y) \cap Y) \leq C_Y \left(\frac{R}{r}\right)^t$$

s létezik $r_X < R_X < \min(\rho, \rho_Y)$ és $x_X \in X$ úgy, hogy

$$N_{r_X}(\mathbb{B}_{R_X}(x) \cap X) < \frac{C}{C_Y} \left(\frac{R_X}{r_X}\right)^s.$$

Így (2) miatt minden $y \in Y$ esetén

$$N_{r_X}(\mathbb{B}_{R_X}\left(x_X, y\right) \cap (X \times Y)) < \frac{C}{C_Y} \left(\frac{R_X}{r_X}\right)^s C_Y \left(\frac{R_X}{r_X}\right)^t = C \left(\frac{R_X}{r_X}\right)^{s+t},$$

ami pont azt jelenti, hogy $\dim_L(X \times Y) \leq s + t$, amiből ismét $s \downarrow \dim_L X$ és $t \downarrow \dim_A Y$ határátmenettel kapjuk a felső korlátot.
Végül megmutatjuk, hogy ha $Y = X$, akkor a becslés éles, amivel tulajdonképpen belátjuk az egyenlőséget. Az, hogy $\dim_L X^n \geq n \dim_L X$ az előzőek szerint teljesül, tehát elegendő igazolnunk a másik irányt. Legyen $C, \rho > 0$ és $s > \dim_L X$. Ekkor léteznek

$0 < r < R < \rho$ és $x \in X$ úgy, hogy

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap X) < \sqrt[n]{C} \left(\frac{R}{r}\right)^s,$$

amiből a fentieket ismételten alkalmazva kapjuk, hogy

$$N_r(\mathbb{B}_R(x, \dots, x) \cap X^n) < \left(\sqrt[n]{C}\right)^n \left(\frac{R}{r}\right)^{ns} = C \left(\frac{R}{r}\right)^{ns},$$

ami az jelenti, hogy $\dim_L X^n \leq ns$, ahonnan $s \downarrow \dim_L X$ határátmenet után a bizonyítás végére értünk. □

3.2.4. Megjegyzés. Ugyanez igaz véges szorzatra is, amely indukcióval belátható. ASSOUAD eredetileg kevésbé pontos becslést adott:

$$\max(\dim_A X, \dim_A Y) \leq \dim_A(X \times Y) \leq \dim_A X + \dim_A Y.$$

Az alábbi tétel az unió dimenziójáról szól.

3.2.5. Tétel (Unió). *Minden $E, F \subseteq X$-re*

$$\min(\dim_L E, \dim_L F) \leq \dim_L(E \cup F) \leq \max(\dim_L E, \dim_A F).$$

Sőt ha a részhalmazok olyanok, hogy $\inf_{x \in E, y \in F} d(x, y) > 0$, *akkor*

$$\dim_L(E \cup F) = \min(\dim_L E, \dim_L F).$$

Bizonyítás. Legyen $E, F \subseteq X$. Az első egyenlőtlenség triviális, hiszen ha $x \in E$, akkor

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap (E \cup F)) \geq N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E),$$

ha pedig $x \in F$, akkor

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap (E \cup F)) \geq N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap F).$$

Most rögzítsünk C, ρ konstansokat és legyen $t > s > \max(\dim_L E, \dim_A F)$. Mivel

$s > \dim_A F$, ezért létezik $C_F, \rho_F > 0$ úgy, hogy minden $0 < r < R \leq \rho_F$ és $x \in X$-re

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap F) \leq C_F \left(\frac{R}{r}\right)^s = C_F \left(\frac{R}{r}\right)^{s-t} \left(\frac{R}{r}\right)^t. \tag{4}$$

Technikailag az ASSOUAD-dimenzió definíciója a fentit csak $x \in F$ esetben biztosítja, azonban feltehető, hogy $x \in X$, mert F metszete egy X-beli középpontú golyóval vagy üres, vagy tartalmazza egy F-beli középpontú dupla akkora sugarú golyó. Illetve mivel $t > \dim_L E$, létezik $0 < r < R < \min(\rho, \rho_F)$ és $x \in E$ úgy, hogy

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E) < \min\left(\frac{C}{2}, \left(\frac{2C_F}{C}\right)^{\frac{t}{s-t}}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^t. \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy

$$1 \leq N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E) \leq \left(\frac{2C_F}{C}\right)^{\frac{t}{s-t}} \left(\frac{R}{r}\right)^t,$$

s így

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{s-t} \leq \frac{C}{2C_F}. \tag{6}$$

Ekkor (4) és (5) miatt léteznek $0 < r < R \leq \rho$ és $x \in E \subseteq E \cup F$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap (E \cup F)) &\leq N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap E) + N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap F) \\ &< \min\left(\frac{C}{2}, \left(\frac{2C_F}{C}\right)^{\frac{t}{s-t}}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^t + C_F \left(\frac{R}{r}\right)^{s-t} \left(\frac{R}{r}\right)^t \\ &\underset{(6)}{\leq} \frac{C}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^t + C_F \frac{C}{2C_F} \left(\frac{R}{r}\right)^t \\ &= C \left(\frac{R}{r}\right)^t, \end{aligned}$$

ahonnan $\dim_L(E \cup F) \leq \max(\dim_L E, \dim_A F)$.

Végül tegyük fel, hogy E, F olyan, hogy $\inf_{x \in E, y \in F} d(x, y) = \eta > 0$. Ekkor nyilván bármely $E \cup F$-beli középpontú, $R < \eta$ sugarú golyó csupán az egyiküket metszheti, amiből $\dim_L(E \cup F) = \min(\dim_L E, \dim_L F)$. □

A lezárt esete kicsit más, ugyanis az ASSOUAD-, az alsó és a dobozdimenziókra stabil, de a HAUSDORFF-dimenzió esetében már nem.

3.2.6. Tétel (Lezárt). *Minden $F \subseteq X$-re*

$$\dim_L F = \dim_L \overline{F}.$$

Bizonyítás. Legyen $F \subseteq X$. Mivel az alsó dimenzió nem monoton, ezért azt kell igazolnunk, hogy $\dim_L F \leq \dim_L \overline{F}$ és $\dim_L F \geq \dim_L \overline{F}$. Most csak az elsőt látjuk be, a másik irány hasonló érveléssel következik.
Legyen $s > \dim_L \overline{F}$ és rögzítsük $C, \rho > 0$-t. Ekkor létezik $\bar{x} \in \overline{F}$ és $0 < r < R < \rho$ úgy, hogy

$$N_r(\mathbb{B}_R(\bar{x}) \cap \overline{F}) < 2^{-s} C \left(\frac{R}{r}\right)^s. \tag{7}$$

Legyen $\varepsilon \in \left(0, \frac{R}{2}\right)$ és válasszunk $x \in F \cap \mathbb{B}_\varepsilon(\bar{x})$-t. Ekkor

$$\mathbb{B}_{R-\varepsilon}(x) \cap F \subseteq \mathbb{B}_R(\bar{x}) \cap \overline{F}, \tag{8}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} N_r(\mathbb{B}_{R-\varepsilon}(x) \cap F) \leq N_r(\mathbb{B}_R(\bar{x}) \cap \overline{F}) &\underset{(7)}{<} 2^{-s} C \left(\frac{R}{r}\right)^s \\ &\leq 2^{-s} C \left(\frac{R}{R-\varepsilon}\right)^s \left(\frac{R-\varepsilon}{r}\right)^s \\ &\leq C \left(\frac{R-\varepsilon}{r}\right)^s, \end{aligned}$$

amiből $\dim_L F \leq s$, majd $s \downarrow \dim_L \overline{F}$ határátmenettel adódik a kívánt becslés.
A másik irányt csupán vázoljuk. Ez esetben válasszunk $x \in F$-et, aztán $\bar{x} \in \overline{X} \cap \mathbb{B}_\varepsilon(x)$-et. Ekkor

$$\mathbb{B}_{R-\varepsilon}(\bar{x}) \cap \overline{F} \subseteq \overline{\mathbb{B}_R(x) \cap F}.$$

Vegyük észre, hogy ha $\{U_i\}_i$ a $\mathbb{B}_R(x) \cap F$ zárt golyókkal való fedése, akkor $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}(\bar{x}) \cap \overline{F}$-nek is az, így N_r definíciójában ezúttal zárt golyókat kell használnunk. □

Végül tömören néhány szót ejtünk a MINKOWSKI- vagy dobozdimenzióról.

3.2.7. Definíció. Legyen $F \subset \mathbb{R}^k$ korlátos halmaz. Tekintsünk a térben egy r oldalhosszúságú téglákból álló hálót. Jelölje $N_r(F)$ azok számát, amelyeknek van közös pontjuk F-fel. Ekkor

$$\dim_B F = \lim_{r \to 0^+} \frac{\log N_r(F)}{-\log r},$$

amennyiben a jobb oldali határérték létezik. Ha mégsem, akkor limesz szuperior és inferior segítségével definiálható a (néha KOLMOGOROV nevével fémjelzett) felső, illetőleg alsó dobozdimenzió.

4. Konkrét példák és számítások

Elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy az eddig megszerzett tudásunkat példákon keresztül kamatoztassuk. A fraktálok előállítása sokféleképpen történhet, ezért típus szerinti bontásban vázoljuk őket úgy, hogy a kvalitatív ismertetést követően vagy kiszámoljuk, vagy csupán közöljük dimenzióikat.

4.1. Iterált függvényrendszerek (IFR)

4.1.1. Definíció. Az (X, δ) teljes metrikus tér felett egy iterált függvényrendszer egy olyan $\mathcal{S} = \{S_1, \dots S_m\}$ véges család, amelynek minden egyes tagja kontrakció (pl. affin kicsinyítés vagy centrális hasonlóság), azaz valamilyen $c_j \in [0, 1)$ konstansokra

$$\delta(S_j(x), S_j(y)) \leq c_j \delta(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Az ilyen fraktálokban felfedezhető, hogy az építőelemek az eredeti struktúra kicsinyített másai.

4.1.2. Definíció. Jelöljük X nemüres kompakt részhalmazait $\mathcal{K}(X)$-szel. Ekkor az

$$F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X), \quad F(A) = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(A)$$

leképezést HUTCHINSON-operátornak hívjuk.

4.1.3. Definíció. Legyen (X, δ) metrikus tér. Ekkor minden $A, B \subset X$ nemüres részhalmazra

$$\delta_H(A, B) := \max(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \delta(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \delta(a, b))$$

definiálja a HAUSDORFF-metrikát.

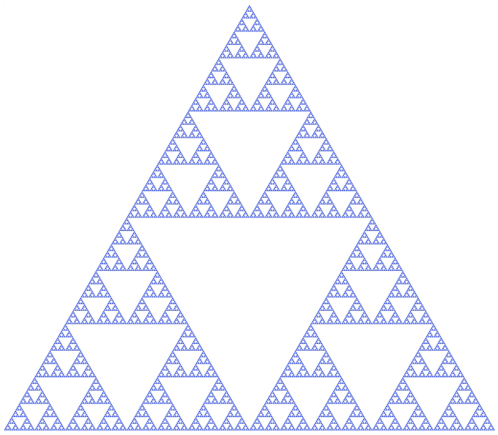
HUTCHINSON a BANACH-fixponttétel segítségével igazolta, hogy egyértelműen létezik egy attraktornak nevezett nemüres kompakt (korlátos és zárt) fixhalmaz, ami az alábbi módon jön létre:

$$T_{n+1} := \bigcup_{j=1}^{m} S_j(T_n)$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} T_n = \Lambda$ a Hausdorff-metrika szerint, amire

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(\Lambda).$$

4.1.4. Példa. Induljunk ki egy egységnyi oldalú szabályos háromszögből, amelyet jelöljünk Δ_0-val. Az oldalfelező pontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre, majd töröljük ki a középső rész belső pontjait, tehát az oldalakat megtartva. Az így nyert alakzat legyen Δ_1. Ezt a lépést ismételgetjük a fennmaradó egyre kisebb szabályos háromszögekkel. Ha az eljárást a végtelenségig folytatjuk, akkor az Δ határalakzatot Sierpiński[4]-háromszögnek hívjuk.



2. ábra. Sierpiński-háromszög[5]

4.1.5. Állítás.

$$\dim_H \Delta = \dim_B \Delta = \dim_A \Delta = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}585.$$

Bizonyítás. A Hausdorff- [5] és dobozdimenziót [6] rigorózusan bizonyítjuk, ellenben az Assouad-dimenzióra csupán heurisztikát adunk.
A 3.1.6. Lemma miatt elegendő igazolni, hogy $0 < \overline{H}^d \Delta < \infty$. Figyeljük meg, hogy Δ_n-et lefedi 3^n darab 2^{-n} átmérőjű teli háromszög. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $2^{-n} < \varepsilon$.

[4] Wacław Franciszek Sierpiński (Varsó, 1882. március 14. – Varsó, 1969. október 21.) lengyel matematikus tiszteletére.

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/SierpiÅĎski-hÃąromszÃűg

Ekkor

$$\overline{H}^d_\varepsilon \Delta \le \frac{3^n}{2^{nd}} = 1,$$

ahonnan $\varepsilon \to 0^+$ határátmenettel kapjuk a $\overline{H}^d\Delta \le 1 < \infty$ felső becslést.
Annak megmutatása, hogy $\overline{H}^d\Delta > 0$, kissé komplikáltabb. Először vegyük észre, hogy minden k-ra mind a 3^k darab bal alsó sarok Δ_k-ban Δ-hoz tartozik. Tegyük fel, hogy $\Delta \subset \bigcup_{j=1}^\infty F_j$, ahol diam $F_j < \varepsilon$. Azt akarjuk belátni, hogy létezik $c > 0$ úgy, hogy

$$\sum_j \operatorname{diam} F_j{}^d \ge c.$$

Mivel minden F_j-t tartalmazza egy legfeljebb $2 \operatorname{diam} F_j$ sugarú B_j golyó, valamint Δ kompakt, ezért elég, hogy ha $\Delta \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$ bármely $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^N$ fedés esetén, amire diam $B_j \le \varepsilon$, akkor teljesül a fenti egyenlőtlenség.
Legyen $c = \frac{c''}{c'}$, ahol $c' = \frac{9\pi}{4}$ és $c'' = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ekkor választható olyan k, hogy $2^{-k} \le \min_{1\le j\le N} \operatorname{diam} B_j < 2^{-k+1}$. Tegyük fel, hogy valamilyen $l \le k$-ra és B golyóra a fedésből $2^{-l} \le \operatorname{diam} B < 2^{-l+1}$. Azt állítjuk, hogy ekkor B legfeljebb $\frac{3^{k-l}}{c}$ darab bal alsó sarkot fedhet le a k-adik iterációban. Valóban, jelölje B^* a B-vel egyező középpontú, de nála háromszor nagyobb sugarú golyót, Δ_k azt a k-adik iterációbeli háromszöget, amelynek bal alsó sarka, v B-beli. Ha $\Delta_k \subset \Delta_l'$, akkor mivel diam $B \ge 2^{-l}$, ezért $v \in \Delta_k \subset \Delta_l' \subset B^*$. De mivel az l-iterációs háromszögek területe $4^{-l}c''$, B^*-é viszont $4^{-l}c'$, így legfeljebb $\frac{1}{c}$ darab l-iterációs háromszög van B^*-ban, amelyek mindegyike 3^{k-l} darab k-iterációsat tartalmaz. Ennek tükrében jelölje N_l a feltételt kielégítő $\mathcal{B}$-beli golyók számát. Ekkor

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{diam} B_j{}^d \ge \sum_l N_l 2^{-ld} = \sum_l N_l 3^{-l}.$$

A tökéletes fedéshez az kell, hogy

$$\frac{\sum_l N_l 3^{k-l}}{c} \ge 3^k,$$

ezért

$$\sum_l N_l 3^{-l} \ge c,$$

ahonnan kapjuk a kívánt $\overline{H}^d\Delta \ge c > 0$ alsó becslést.

A dobozdimenzió hasonlóan jön ki: $r_n = 2^{-n}$ választással

$$\dim_B \Delta = \lim_{r\to 0^+} \frac{\log N_r(F)}{-\log r} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log 3}{n\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Nem meglepően az ASSOUAD-dimenzióra ugyanennyi adódik:

$$N_r(\mathbb{B}_R(x) \cap \Delta) = 3^n = 2^{n\alpha} = \left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}.$$

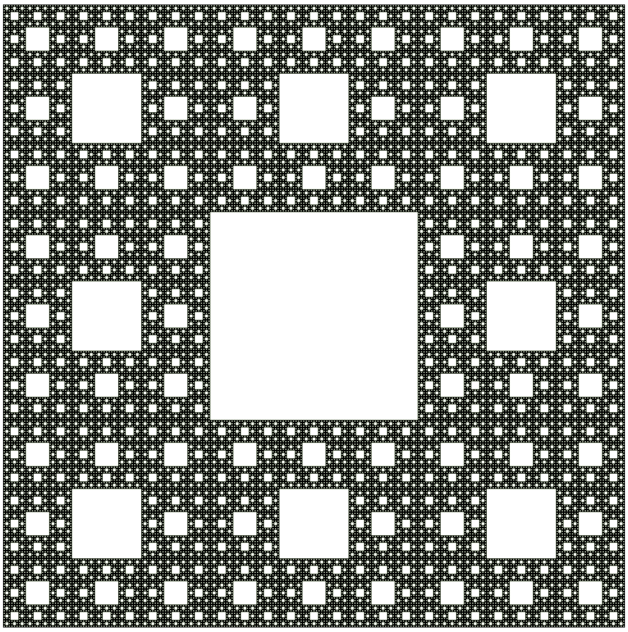
Más r, R és x értékek esetén is C korlátos marad, amiből α, avagy $\dim_A \Delta = \frac{\log 3}{\log 2}$. □

4.1.6. Megjegyzés. A SIERPIŃSKI-háromszög sokféleképpen is létrehozható, többek között káoszjátékkal. Címkézzük meg egy szabályos háromszög csúcsait: p_1, p_2, p_3, majd találomra válasszunk egy v_1 pontot. Legyen $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + p_{r_n})$, ahol r_n random módon veszi fel az $1, 2, 3$ indexeket. Ekkor $v_1 \in \Delta$ esetén minden n-re $v_n \in \Delta$, azonban ha $v_1 \notin \Delta$, akkor semelyik v_n sincs Δ-ban. Ráadásul a binomiális együtthatókat tartalmazó PASCAL-háromszögben is fellelhető, ha az egészet modulo 2 redukáljuk, és a 0 reprezentánsokat eltüntetjük. A természetben pedig a *Cymbiola innexa* nevet viselő kagyló héjának mintázata szintén rá emlékeztet.

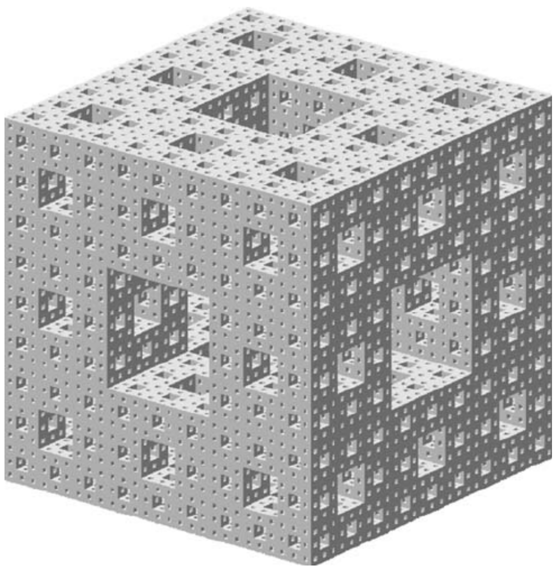
3. ábra. *Cymbiola innexa*[6]

4.1.7. Megjegyzés. Ha szabályos háromszög helyett négyzetből indulunk ki, akkor azonos lépések útján eljutunk a SIERPIŃSKI-szőnyeghez, amelynek dimenziója $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1{,}893$. Mindkettőnek van „térbeli" párja is: a SIERPIŃSKI-tetrix, ami egy tetraéderből készül, illetve a MENGER-szivacs, ami egy kockából. Az előbbinek kereken 2, az utóbbinak $\frac{\log 20}{\log 3} \approx 2{,}727$ a dimenziója.

[6] https://i.ebayimg.com/images/g/HusAAOSwJsljcuer/s-1400.jpg



4. ábra. SIERPIŃSKI-szőnyeg[7]



5. ábra. MENGER-szivacs[8]

[7]https://hu.wikipedia.org/wiki/SierpiÅĎski-szÅŚnyeg

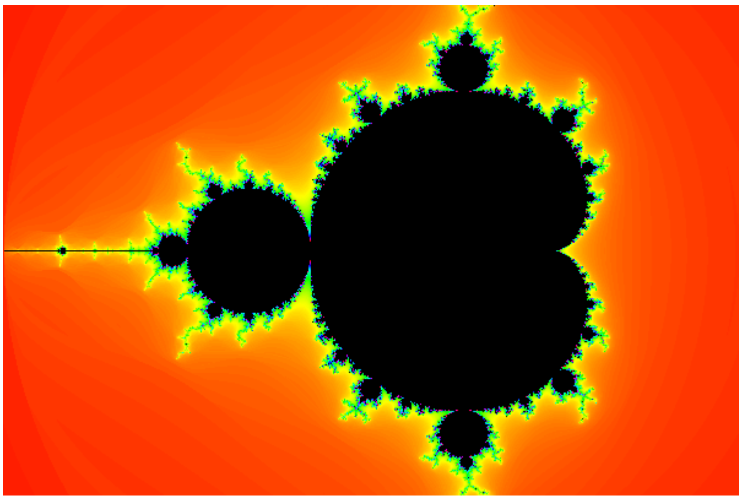
[8]https://www.researchgate.net/figure/The-iterative-structure-of-Menger-sponge_fig5_259828514

4.2. Komplex dinamikai rendszerek

A dinamikai rendszerek szoros kapcsolatban állnak az IFR-ekkel. Egyik válfajuk leegyszerűsítve úgy keletkezik, hogy a komplex számsíkon tekintünk egy komplex függvényt, és azt iterálva vizsgáljuk az egyes pontok trajektóriáját, vagyis hogy mely pontok stabilak, melyek instabilak, esetleg periodikusak. Nem túlzás azt állítani, hogy méltán leghíresebb képviselőjük az először 1978-ban megrajzolt MANDELBROT-halmaz.

4.2.1. Példa. Tekintsük az $f_c(z) = z^2 + c$ komplex függvényt, ahol $c \in \mathbb{C}$ egy komplex paraméter. Ezt iterálva elkészítjük a $z_{n+1} = f_c(z_n)$ rekurzív sorozatot, $z_0 = 0$ kezdőértékkel. Ekkor az M MANDELBROT-halmaz azon c számok halmaza, amelyekre a z_n sorozat korlátos marad.

Figyeljük meg, hogy minden ilyen számra muszáj, hogy $|c| \leq 2$ teljesüljön[9], tehát a divergencia ellenőrzésére elegendő mérni, hogy hányadik iterációnál hagyja el a sorozat valamely tagja az origó középű $r = 2$ sugarú kört. Ha aszerint színezzük egyre sötétedő árnyalatúra a pontokat, hogy mekkora a „szökési” szám, akkor szemünk elé tárul ez a gyönyörű számítógépes grafika:



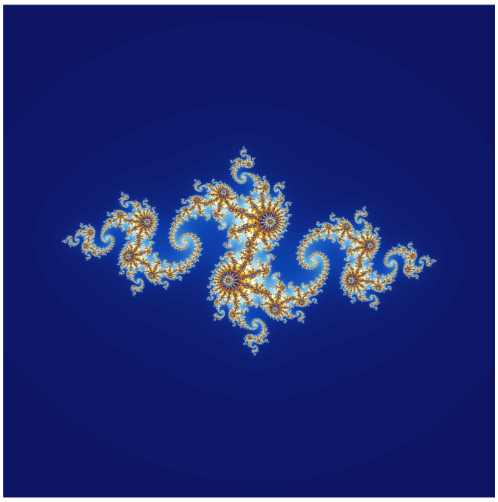
6. ábra. MANDELBROT-halmaz[10]

[9] Ha $|z| > |c|, 2$, akkor $\frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|z^2+c|}{|z|} \geq \frac{|z|^2-|c|}{|z|} = |z| - \frac{|c|}{|z|} > |z| - 1 > 1$. Ha $|c| \leq 2 < |z_n|$, akkor legyen $z \coloneqq z_n$. Ha $|c| > 2$, akkor pedig $|c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > 2$, s így $z \coloneqq z_2$ jó.

[10] https://www.codingame.com/playgrounds/2358/how-to-plot-the-mandelbrot-set/mandelbrot-set

4.2.2. Állítás. *A határ dimenziója aszimptotikusan* 2.[11]

4.2.3. Megjegyzés. Ha z helyett c-t rögzítjük, és úgy pásztázzuk végig a a síkot, akkor az úgynevezett JULIA-halmazokat kapjuk, amelyek pontosan a MANDELBROT-halmazbeli pontok esetén lesznek összefüggők. További érdekesség a MANDELBROT-halmaz kapcsán, hogy míg területe véges, hiszen $\mathbb{B}_2(0)$ fedi, nem rektifikálható, azaz kerülete végtelen hosszú. Legnagyobb része kirívóan szív alakú, innen a kardioid elnevezés.



7. ábra. JULIA-halmaz $c = -0{,}8 + 0{,}156i$-re[12]

4.3. Fraktálgörbék

NEWTON és LEIBNIZ infinitezimális kalkulusának idejében még mindenki úgy vélte, hogy nem létezhet olyan patologikus függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem deriválható. 1872-ben WEIERSTRASS, a modern analízis atyja erre durván rácáfolt.

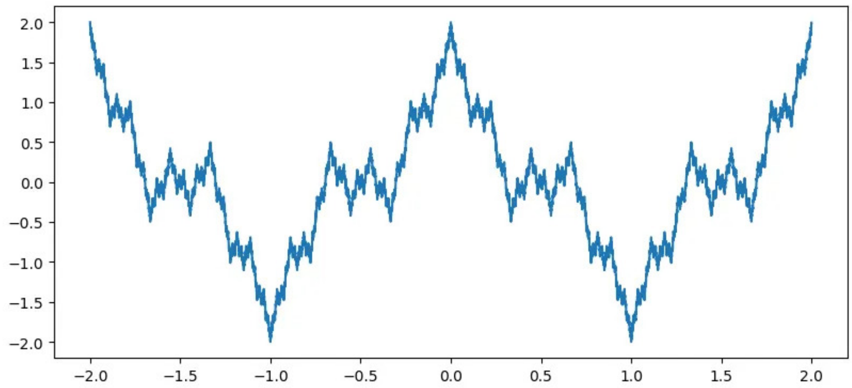
4.3.1. Példa. A WEIERSTRASS-függvényt az alábbi FOURIER-sor alakban szokás megadni:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x),$$

ahol $a \in (0, 1)$, b páratlan egész és $ab \geq 1$.

[11] Micuhiro Sisikura adott rá bizonyítást 1991-ben, a parabolikus bifurkáció módszere azonban túlmutat a dolgozat témáján.

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set



8. ábra. WEIERSTRASS-függvény $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$-ra[13]

4.3.2. Megjegyzés. Bebizonyosodott [7], hogy

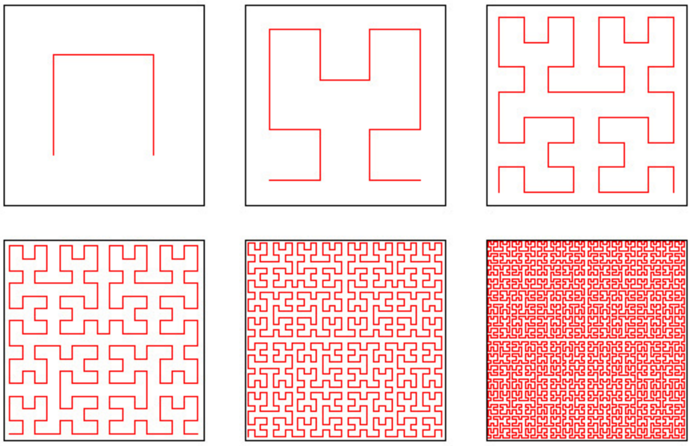
$$\dim_B W(x) = 2 + \frac{\log a}{\log b},$$

azonban egzakt HAUSDORFF-dimenziója általános esetben máig nyitott kérdés.

4.4. Térkitöltő görbék

A XIX. század végén a matematikustársadalmat az tartotta lázban, hogy vajon egy egydimenziós görbe képes-e teljes egészében kitölteni az n dimenziós teret. Két prominens matematikus hamar igenlő válasszal szolgált: PEANO, aki egy évvel megelőzte a géniuszt, DAVID HILBERTet, 1890-ben állt a nagyközönség elé egy olyan folytonos görbével, amely az egységintervallumot szürjektív (de nem injektív) módon ráképezi az egységnégyzetre. 1891-ben az ő ötletét finomította HILBERT. Mindkét görbe tetszőleges dimenziós hiperkockára kiterjeszthető, sőt azóta már találtak majdnem mindenhol differenciálhatóakat is. Lévén, hogy térkitöltők, dimenziójuk megegyezik a kitöltött térével.

[13] https://medium.com/@Melearning/weierstrass-function-in-python-6b1e6819df3a



9. ábra. 2D-s HILBERT-görbe első hat iterációja[14]

4.5. Véletlen fraktálok

Véletlen folyamatok szintén eredményezhetnek fraktálokat (pl. perkoláció, epidémia). Ebben az alfejezetben kettőt mutatunk be: az egyik tisztán matematikai, a másiknak viszont egy fizikai jelenség az alapja.

4.5.1. Példa. Ahhoz, hogy a randomizált CANTOR-halmazt megértsük, előbb meg kell ismerkednünk az egyszerűbb változatával. Kiindulási halmazunk most a $[0,1]$ zárt szakasz, jele C_0. Távolítsuk el a nyílt középső harmadot, vagyis az $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervallumot, így kapjuk C_1-et. Ezt minden egyes visszamaradó résszel külön-külön eljátsszuk. Ha az eljárást a végtelenségig folytatjuk, akkor a kapott határalakzat lesz a CANTOR-halmaz. Rekurzív formulával:

$$C \coloneqq \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

ahol

$$C_n \coloneqq \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right),$$

vagy explicite:

$$C \coloneqq [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{3^n-1} \left(\frac{3m+1}{3^{n+1}}, \frac{3m+2}{3^{n+1}}\right).$$

[14] https://www.bic.mni.mcgill.ca/~mallar/CS-644B/hilbert.html

A randomizált CANTOR-halmaz ([8] alapján) annyiban tér el, hogy minden iteráció előtt C_n-hez hozzárendelünk két valószínűségiváltozó-sorozatot, amelyek együtt határozzák meg, mi fog történni. Ez a következőképpen zajlik:

$$C_0 \mapsto (X_0, \theta_{0,k}), \quad 1 \le k \le X_0;$$
$$C_n \mapsto (X_{n,m_j}, \theta_{n,m_j,k}), \quad n = 1, \dots, \ 1 \le m_j \le X_{j-1,m_{j-1}}, \ 1 \le j \le n, \ 1 \le k \le X_{n,m_j},$$

ahol X_{n,m_j} arról dönt, hogy hány kisebb részre vágjuk szét az adott szakaszt, míg $\theta_{n,m_j,k}$ azt szabályozza, hogy az egyes részekből mennyi maradjon vissza. Ekkor a triadikus CANTOR-halmaz esetében $X_{n,m_j} = 3$ és $\theta_{n,m_j,k} = (1, 0, 1)$ determinisztikusan.

4.5.2. Állítás.

$$\dim_H C = \dim_B C = \dim_A C = \frac{\log \prod \mathbb{E}[X_{n,m_j}]}{-\log \prod \mathbb{E}[\theta_{n,m_j,k}]}.$$

10. ábra. CANTOR-halmaz első hat iterációja[15]

4.5.3. Megjegyzés. Néhány érdekfeszítő tény a CANTOR-halmazról:

- Számtanilag pontosan azon $[0,1]$-beli valós számok alkotják, amelyek ternáris (hármas számrendszerben kifejezett) alakja nem használja az 1-es jegyet.
- LEBESGUE-nullmértékű, hiszen $\lambda(C) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2/3}\right) = 0$.
- Ennek dacára számossága (a kiindulási intervallummal megegyezően) kontinuum.
- A legelső példa sehol sem sűrű perfekt (minden pontja torlódáspont) halmazra.
- Sokdimenziós analogonja a CANTOR-por, függvénye az ördöglépcső.[16]

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set
[16] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function

Az angol botanikus, ROBERT BROWN által 1827-ben felfedezett azon jelenséget, amikor gázokban és folyadékokban lebegő (szuszpendált) parányi részecskék (pl. virágpollen) véletlenszerűen ide-oda mozognak (diffúzió), matemakailag a WIENER-folyamat írja le. Alkalmazása sokrétű: a véletlen bolyongástól kezdve a potenciálelméleten át a martingálokkal bezárólag tulajdonképpen mindenhol előfordul, még a pénzügyben is.

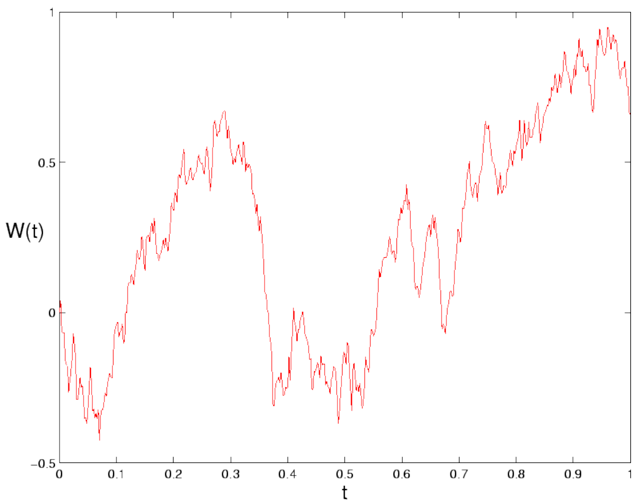
4.5.4. Példa. A WIENER-folyamat egy időfolytonos sztochasztikus folyamat, vagyis egy $W : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyet a lenti négy tulajdonság karakterizál:

- $W_0 = 0$ majdnem biztosan;
- W_t majdnem biztosan folytonos t-ben;
- $W_{t+u} - W_t \perp\!\!\!\perp W_s, \quad \forall t > 0, \ u \geq 0, \ s < t,$ független növekmények;
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall t \geq s \geq 0,$

ahol $\mathcal{N}(0, t - s)$ a zéró várható értékű, $t - s$ varianciájú normális vagy GAUSS-eloszlás.

4.5.5. Állítás. *A WIENER-folyamat grafikonjára [9]*

$$\dim_H \operatorname{gr}(W) = \dim_B \operatorname{gr}(W) = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5.$$



11. ábra. WIENER-folyamat[17]

[17] https://sites.me.ucsb.edu/~moehlis/APC591/tutorials/tutorial7/node2.html

5. A nyílthalmaz-feltétel

Bizonyára felmerült bennünk a kérdés, hogy mi az oka annak, hogy az IFR-ek címszó alatt taglalt fraktálok esetén a három fő dimenzió, a HAUSDORFF-, az ASSOUAD- és a dobozdimenzió egybeesik, míg egyéb típusú fraktáloknál nem. Ezen fejezetben azt tűzzük ki célul, hogy belátjuk az úgynevezett NYHF-t IFR-ekre [10]. Mostantól $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ jelölje kontrakciók egy családját, (X, δ) pedig legyen teljes metrikus tér.

5.1. Definíció. Jelölje $\langle j_1, \dots j_n \rangle \in \{1, \dots, N\}^n$ a rendezett szám-n-est. Ekkor legyen $C(N) = \prod_{n=1}^{\infty} \{1, \dots, N\}$ a $\beta : \mathbb{N}_+ \to \{1, \dots, N\}$ leképezések halmaza a $\prec$ lexikografikus rendezéssel felruházva. Továbbá ha $j \in \{1, \dots, N\}$ és $\beta = \langle j_1, \dots, j_n \rangle$, akkor $j\beta = \langle j, j_1, \dots, j_n \rangle$ a j és β konkatenációja (összefűzése). Hasonlóképp ha $\beta \in C(N)$, akkor $j\beta = j\beta_1 \dots \beta_n \dots$, valamint ha γ szám-m-es és β szám-n-es vagy $C(N)$-beli, akkor $\gamma\beta$-t a várt módon állítjuk elő. Végül a j-edik shiftoperátort $\sigma_j(\beta) = j\beta$ definiálja.

5.2. Definíció. Legyen J véges rendezett szám-n-esek véges halmaza. Azt mondjuk, hogy J feszes, ha minden $\beta \in C(N)$-hez egyetlen $\gamma \in J$ létezik úgy, hogy $\gamma \prec \beta$.

5.3. Jelölés. A továbbiakban a rövidség kedvéért a $K_{j_1 \dots j_p} = S_{j_1 \dots j_p}(K)$ jelölést használjuk, ahol $S_{j_1 \dots j_p}(K) = S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K)$. Az $S_{j_1 \dots j_p}$ fixpontját pedig $s_{j_1 \dots j_p}$ jelöli majd.

5.4. Definíció. Egy $f : X \to X$ függvény LIPSCHITZ-konstansának a

$$\operatorname{Lip} f = \sup_{x \neq y} \frac{\delta(f(x), f(y))}{\delta(x, y)}$$

mennyiséget hívjuk.

5.5. Definíció. Egy μ mérték tartója $\operatorname{supp} \mu \coloneqq \overline{\{A \in \mathcal{F} : \mu(A) \neq 0\}}$, ahol $\mathcal{F}$ σ-algebra X-en, valamint tömege $M(\mu) \coloneqq \mu(X)$.

5.6. Definíció. Jelölje $\mathcal{C}_b(X)$ a folytonos és korlátos halmazokon korlátos $f : X \to \mathbb{R}$ függvények vektorterét, $\mathcal{M}$ pedig a korlátos tartójú, véges tömegű BOREL-reguláris mértékek halmazát. Ekkor $\mu \in \mathcal{M}$ és $\phi \in \mathcal{C}_b(X)$-re legyen $\mu : \mathcal{C}_b \to [0, \infty)$ a $\mu(\phi) = \int \phi \, d\mu$ hozzárendeléssel definiálva.

Ha $f : X \to X$ folytonos és korlátos halmazt korlátosba küld, akkor legyen $f_\# : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ az $f_\#\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$, illetve az $f_\#\mu(\phi) = \mu(\phi \circ f)$ hozzárendeléssel értelemezve.

5.7. Definíció. Ha $\nu \in \mathcal{M}$, akkor legyen $(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j S_{j\#}\nu$. Ekkor

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu)(A) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j \nu(S_j^{-1}(A)).$$

5.8. Állítás. *Legyen* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$ *mérték, ahol* $\mathcal{M}^1 = \{\mu \in \mathcal{M} : M(\mu) = 1\}$. *Ekkor*

$$L(\mu, \nu) = \sup\{\mu(\phi) - \nu(\phi) \mid \phi : X \to \mathbb{R}, \ \operatorname{Lip}\phi \le 1\}$$

metrika $\mathcal{M}^1$*-en.*

Bizonyítás. Az egyetlen, ami nem nyilvánvaló, hogy $L(\mu, \nu) < \infty$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{supp}\mu \cup \operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{B}_R(a)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mu(\phi) - \nu(\phi) &= \mu(\phi - \phi(a) + \phi(a)) - \nu(\phi - \phi(a) + \phi(a)) \\ &= \mu(\phi - \phi(a)) - \nu(\phi - \phi(a)) \le \mu(R) + \nu(R) = 2R. \end{aligned}$$ □

5.9. Lemma. *Igazak az alábbiak:*

(i) $(\mathcal{S}, \rho) : \mathcal{M}^1 \to \mathcal{M}^1$ *kontrakció;*

(ii) egyértelműen létezik $(\mathcal{S}, \rho)$*-ra invariáns* $\mathcal{M}^1 \ni \mu = \sum_{j=1}^{N} \rho_j S_{j\#}\mu$.

Bizonyítás. A második azonnal következik az elsőből.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{Lip}\phi \le 1$ és legyen $r = \max_{1\le j\le N} r_j$. Ekkor $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$-re

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}, \rho)(\mu)(\phi) - (\mathcal{S}, \rho)(\nu)(\phi) &= \sum_{j=1}^{N}(\rho_j S_{j\#}(\mu))(\phi) - \sum_{j=1}^{N}(\rho_j S_{j\#}(\nu))(\phi) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \rho_j(\mu(\phi \circ S_j) - \nu(\phi \circ S_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \rho_j r(\mu(r^{-1}\phi \circ S_j) - \nu(r^{-1}\phi \circ S_j)) \\ &\le \sum_{j=1}^{N} \rho_j r L(\mu, \nu) = r L(\mu, \nu), \end{aligned}$$

mivel $\mathrm{Lip}(r^{-1}\phi \circ S_j) \leq r^{-1} \cdot 1 \cdot r_j \leq 1$. □

5.10. Állítás. *A fenti lemmában szereplő μ mértékre*

(i) $\mu = \pi_{\#}\tau$, *ahol* π *a* $\pi(\beta) = k_\beta$ *hozzárendeléssel adott* $\pi : C(N) \to K$ *leképezés,* τ *pedig a* $\rho(j) = \rho_j$ *által indukált szorzatmérték* $C(N)$*-en;*

(ii) $\mathrm{supp}\,\mu = K$.

Bizonyítás. A (ii) az (i) folyománya kiegészítve azzal, hogy $k_{j_1,\dots j_p\dots} = \lim_{p\to\infty} s_{j_1,\dots j_p}$. Az (i)-hez tekintsük a fejezet legelején definiált $\sigma_j : C(N) \to C(N)$ operátort. Világos, hogy $\pi \circ \sigma_j = S_j \circ \pi$ és τ invariáns $(\{\sigma_1, \dots \sigma_N\}, \rho)$-ra nézve. Ekkor $\sum \rho_j S_{j\#}(\pi_\# \tau) = \sum \rho_j \pi_\#(\sigma_{j\#}\tau) = \pi_\# \sum \rho_j(\sigma_{j\#}\tau) = \pi_\#\tau = \|\mathbb{S}, \rho\|$ az egyértelműség miatt. □

5.11. Jelölés. A fenti lemmában szereplő μ mértéket ezentúl $\|\mathbb{S}, \rho\| = \|\mathbb{S}\|$ jelöli.

5.12. Jelölés. $\mu|_A$ azt a mértéket jelenti, amire $\mu|_A(E) = \mu(A \cap E)$.

5.13. Definíció. Egy A halmaz x-beli alsó és felső d dimenziós sűrűsége

$$\theta^d_*(A, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{H^d(A \cap \mathbb{B}_r(x))}{\alpha_d r^d},$$

illetve

$$\theta^{*d}(A, x) = \limsup_{r\to 0} \frac{H^d(A \cap \mathbb{B}_r(x))}{\alpha_d r^d}.$$

Ha egyenlőek, akkor a közös $\theta^d(A, x)$ érték lesz az A halmaz d dimenziós sűrűsége. Hasonlóan egy μ mérték x-beli alsó és felső d dimenziós sűrűsége

$$\theta^d_*(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\alpha_d r^d},$$

valamint

$$\theta^{*d}(\mu, x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\alpha_d r^d}.$$

Egyenlőség esetén a közös $\theta^d(\mu, x)$ érték lesz a μ mérték d dimenziós sűrűsége.

5.14. Megjegyzés. A fenti képletekben α_d olyan normáló tényező, amire

- $\alpha_d = \mathcal{L}^d\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}, \;\; d \in \mathbb{Z}$,

- $\alpha_d = \frac{\Gamma(1/2)^d}{\Gamma(d/2+1)}$, $d \in \mathbb{R}$, ahol Γ az $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ improprius integrál által definiált meromorf függvény, a $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ faktoriális analitikus folytatása.

5.15. Definíció. K kompakt halmaz önhasonló ($\mathcal{S}$ szerint), ha

- invariáns $\mathcal{S}$-re, azaz $\mathcal{S}(K) = \bigcup_{j=1}^N S_j K = K$, és
- $H^d(K) > 0$, $H^d(K_n \cap K_m) = 0$, $n \neq m$, $\dim K = d$.

5.16. Definíció. Ha $S_j \in \mathcal{S}$ hasonlóságok, $\operatorname{Lip} S_j = r_j$ a LIPSCHITZ-konstansok és $\sum r_j^D = 1$, akkor D-t az $\mathcal{S}$ hasonlósági dimenziójának nevezzük. Később látni fogjuk, hogy ez gyakorta egybeesik K HAUSDORFF-dimenziójával.

5.17. Állítás. *A fenti D egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma(t) = \sum_{j=1}^N r_j^t$. Ekkor $\gamma(0) = N$ és $\gamma(t) \downarrow 0$, midőn $t \to \infty$. □

Mostantól fogva feltesszük, hogy létezik $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_N\} \in (0,1)^N$ úgy, hogy $\sum_{j=1}^N \rho_j = 1$. Ha S_j-k hasonlóságok (amit innentől hallgatólag feltesszünk), akkor $\rho_j = r_j^D$ természetes választás.

5.18. Állítás. *Legyen* $\dim K = d$*, $r_1 \leq \dots \leq r_N$ és S_j-k hasonlóságok. Ekkor*

(i) $H^D(K) < \infty$, s így $d \leq D$;

(ii) abból, hogy $0 < H^d(K) < \infty$, következik, hogy K pontosan akkor önhasonló, ha $d = D$.

Bizonyítás. (i) $K = \bigcup_{j_1,\dots,j_p} K_{j_1\dots j_p}$ és $\sum_{j_1,\dots,j_p} (\operatorname{diam} K_{j_1\dots j_p})^D = \sum_{j_1,\dots,j_p} r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_p}^D (\operatorname{diam} K)^D = (\sum_{j=1}^N r_j{}^D)^p (\operatorname{diam} K)^D = (\operatorname{diam} K)^D$. Továbbá figyeljük meg, hogy $\operatorname{diam} K_{j_1\dots j_p} \leq r_N^p \operatorname{diam} K$ és $r_N^p \operatorname{diam} K \to 0$, midőn $p \to \infty$.

(ii) Tegyük fel, hogy $0 < H^d(K) < \infty$ és K önhasonló, vagyis $H^d(K_n \cap K_m) = 0$, $n \neq m$. Ekkor $H^d(K) = \sum_{j=1}^N H^d(K_j) = \sum_{j=1}^N r_j^d H^d(K)$, amiből $\sum r_j^d = 1$, s ezért $D = d$.
Most tegyük fel, hogy $0 < H^D(K) < \infty$. Ekkor $H^D(K) \leq \sum_{j=1}^N H^D(K_j) = \sum_{j=1}^N r_j^D H^D(K)$. Mivel $\sum r_j^d = 1$, így $H^D(K) = \sum_{j=1}^N H^D(K_j)$, ahonnan $H^d(K_n \cap K_m) = 0$, $n \neq m$. □

5.19. Definíció. $\mathcal{S}$ kielégíti a nyílthalmaz-feltételt, ha létezik egy O nemüres nyílt halmaz úgy, hogy

- $\bigcup_{j=1}^{N} S_j O \subset O$;
- $S_n O \cap S_m O = \emptyset, \quad n \neq m.$

Íme néhány elemi következmény:

5.20. Következmény. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ kielégíti a NYHF-t O-val. Ekkor*

(i) $O \supset O_{j_1} \supset \ldots \supset O_{j_1,\ldots,j_p} \supset \ldots$;

(ii) $K_{j_1\ldots j_p} \subset \overline{O}_{j_1\ldots j_p}$;

(iii) $K_{n_1\ldots n_p} \cap O_{m_1\ldots m_p} = \emptyset, \quad (n_1 \ldots n_p) \neq (m_1 \ldots m_p)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}(A) \subset A$. Ekkor $A \supset \mathcal{S}(A) \supset \ldots \supset \mathcal{S}^p(A) \supset \ldots$. Sőt ha A nem üres és zárt, akkor $K \subset A$ és $K_{j_1,\ldots,j_p} \subset A_{j_1,\ldots,j_p}$, hiszen legyen $a \in A$. Ekkor $k_{j_1,\ldots,j_p\ldots} = \lim_{p\to\infty} S_{j_1,\ldots,j_p}(a) \in A$, vagyis $K \subset A$. Mindkét oldalra alkalmazva $S_{j_1,\ldots,j_p}$-t kapjuk, hogy $K_{j_1,\ldots,j_p} \subset A_{j_1,\ldots,j_p}$. Ezzel megmutattuk (i)-et és (ii)-t.
A (iii)-hoz tegyük fel, hogy $(n_1 \ldots n_p) \neq (m_1 \ldots m_p)$. De $K_{n_1\ldots n_p} \subset \overline{O}_{n_1\ldots n_p}$, s mivel $O_{n_1\ldots n_p} \cap O_{m_1\ldots m_p} = \emptyset$, így $\overline{O}_{n_1\ldots n_p} \cap O_{m_1\ldots m_p} = \emptyset$. □

5.21. Lemma. *Tegyük fel, hogy $0 < c_1 < c_2 < \infty$ és $0 < \rho < \infty$. Legyen $\{U_j\}$ diszjunkt nyílt halmazok egy családja. Továbbá tegyük fel, hogy mindegyik U_j tartalmaz egy ρc_1 sugarú golyót, és mindegyiket tartalmazza egy ρc_2 sugarú. Ekkor legfeljebb $(1+2c_2)^n c_1^{-n}$ darab $\overline{U}_j$ metszi $\mathbb{B}_\rho(0)$-t.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\overline{U}_j, \ldots, \overline{U}_k$ metszi $\mathbb{B}_\rho(0)$-t. Ekkor mindegyik részhalmaza $\mathbb{B}_{(1+2c_2)\rho}(0)$-nak. A megfelelő ρc_1 sugarú diszjunkt gömbök térfogatát összegezve azt kapjuk, hogy

$$k\alpha_n \rho^n c_1^n \leq \alpha_n (1 + 2c_2)^n \rho^n,$$

amit átrendezve adódik a lemma állítása. □

5.22. Lemma. *Ha J feszes, akkor $O_{\gamma \in J}$ páronként diszjunkt halmazok.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy J feszes és $\gamma \neq \beta \in J$. Legyen p a legnagyobb (talán 0) egész, amire $\langle j_1, \dots, j_p \rangle \prec \gamma, \beta$. Ekkor létezik $j_{p+1} \neq k_{p+1}$ úgy, hogy $\langle j_1, \dots, j_p, j_{p+1} \rangle \prec \gamma$ és $\langle j_1, \dots, j_p, k_{p+1} \rangle \prec \beta$. De 5.20. miatt $O_\gamma \subset O_{j_1 \dots j_p j_{p+1}}$ és $O_\beta \subset O_{j_1 \dots j_p k_{p+1}}$, ahonnan

$$O_\gamma \cap O_\beta \subset S_{j_1 \dots j_p}(O_{j_{p+1}} \cap O_{k_{p+1}}) = \emptyset. \qquad \square$$

Elérkeztünk az IFR-ekre vonatkozó tétel kimondásához és bizonyításához.

5.23. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ kielégíti a NYHF-t. Ekkor*

(i) létezik λ_1, λ_2 úgy, hogy

$$0 < \lambda_1 \leq \theta_*^D(K, x) \leq \theta^{*D}(K, x) \leq \lambda_2 < \infty, \quad \forall x \in K;$$

(ii) $0 < H^D(K) < \infty$, vagyis K önhasonló és $\dim K = D$*;*

(iii) $\|S\| = H^D(K)^{-1} H^D|_K$.

Bizonyítás. Legyen O a NYHF miatt létező nyílt halmaz és $\mu = \|\mathcal{S}\|$. Először azt látjuk be, hogy léteznek κ_1, κ_2 konstansok úgy, hogy

$$0 < \kappa_1 \leq \theta_*^D(\mu, x) \leq \theta^{*D}(\mu, x) \leq \kappa_2 < \infty, \quad \forall x \in K.$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\mu(K_{j_1,\dots,j_p}) \geq \mu_{j_1,\dots,j_p}(K_{j_1,\dots,j_p}) &= r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_p}^D \mu(S_{j_1,\dots,j_p}^{-1} K_{j_1,\dots,j_p}) \\ &= r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_p}^D \mu(K) = r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_p}^D.\end{aligned}$$

Legyen $x = x_{j_1 \dots j_p \dots}$ és válasszuk a legkisebb p-t, amire $K_{j_1,\dots,j_p} \subset \mathbb{B}_\rho(x)$. Ekkor $r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_p} \operatorname{diam} K \geq \rho r_1$, ahol feltehető, hogy $r_1 = \min\{r_j : 1 \leq j \leq N\}$. Ebből

$$\frac{\mu(\mathbb{B}_\rho(x))}{\alpha_D \rho^D} \geq \frac{\mu(K_{j_1,\dots,j_p})}{\alpha_D \rho^D} \geq \frac{r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_p}^D}{\alpha_D \rho^D} \geq \frac{r_1^D}{\alpha_D (\operatorname{diam} K)^D},$$

ahonnan $\theta_*^D(\mu, x) \geq r_1^D \alpha_D^{-1} (\operatorname{diam} K)^{-D}, \ \ \forall x \in K$.
Most megmutatjuk, hogy $\theta^{*D}(\mu, x)$ egyenletesen korlátos minden $x \in K$-ra. Tegyük fel,

hogy O tartalmaz c_1 sugarú golyót és tartalmazza egy c_2 sugarú. Minden $j_1, \dots, j_q \dots \in C(N)$-hez válasszuk a legkisebb q-t, amire $r_1\rho \le r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_q} \le \rho$. Legyen J az így válogatott $\langle j_1, \dots, j_q\rangle$-k halmaza. Vegyük észre, hogy J feszes. Ekkor az 5.22. Lemma miatt $\{O_{j_1 \dots j_q} : \langle j_1, \dots, j_q\rangle \in J\}$ diszjunkt nyílt halmazokból áll. Sőt mindegyik tartalmaz $r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_q} c_1$ sugarú golyót, tehát $r_1\rho c_1$ sugarút is, valamint mindegyiket tartalmazza egy $r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_q} c_2$ sugarú, tehát egy ρc_2 sugarú is. Az 5.21. Lemma miatt az $\overline{O}_{j_1 \dots j_q}$-kból legfeljebb $(1 + 2c_2)^n (r_1 c_1)^{-n}$ darab metszi $\mathbb{B}_\rho(x)$-et, így legfeljebb ugyanennyi $K_{j_1 \dots j_q}$ metszi. Továbbá tudjuk, hogy $\operatorname{supp} \mu_{j_1 \dots j_q} = K_{j_1 \dots j_q}$ és

$$\mu = \sum_{\langle j_1, \dots, j_q\rangle \in J} \mu_{j_1 \dots j_q}.$$

Végül $M(\mu_{j_1 \dots j_q}) = r_{j_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{j_q}^D \le \rho^D$, ahonnan

$$\frac{\mu(\mathbb{B}_\rho(x))}{\alpha_D \rho^D} \le \frac{(1 + 2c_2)^n}{r_1^n c_1^n} \cdot \frac{\rho^D}{\alpha_D \rho^D} = \frac{(1 + 2c_2)^n}{\alpha_D r_1^n c_1^n},$$

amiből $\theta^{*D}(\mu, x) \le (1 + 2c_2)^n (\alpha_D r_1^n c_1^n)^{-1}$.
(ii) egyszerűen következik abból, hogy ha $\mu \in \mathcal{M}$ és $0 < \mu(K) < \infty$, akkor $\theta^{*d}(\mu, x) \ge \lambda, \ \ \forall x \in K$-ra implikálja, hogy $H^d(K) \le \lambda^{-1}\mu(K)$ és $\theta^{*d}(\mu, x) \le \lambda, \ \ \forall x \in K$-ra implikálja, hogy $H^d(K) \ge 2^{-d}\lambda^{-1}\mu(K)$. Valóban, hiszen a képletből $\mu(\mathbb{B}_{r_j}(x_j)) \ge \lambda \alpha_d r_j^d$, ahonnan $\mu(K) \ge \lambda \alpha_d \sum_j r_j^d$, illetve $H^d(K) \le 2^d \sum_j r_j^d$. A másik ugyanígy adódik.
(iii) pedig onnan, hogy mivel K önhasonló és $H^D(K_n \cap K_m) = 0, \ \ n \neq m$, ezért

$$H^D|_K = \sum_{j=1}^N H^D|_{K_j} = \sum_{j=1}^N r_j^D S_{j\#}(H^D|_K).$$

Ha $\tau = H^D(K)^{-1} H^D|_K$, akkor $\tau = \sum_{j=1}^N r_j^D S_{j\#}(\tau)$ és $M(\tau) = 1$. Az egyértelműség miatt $\tau = \mu$.
Most már tudjuk, hogy $\theta_*^D(K, x) = \theta_*^D(H^D|_K, x) = H^D(K)^{-1}\theta_*^D(\mu, x)$, hasonlóan θ^{*D}-re. Ezzel beláttuk (i)-t is, és a bizonyítás végére értünk. $\square$

6. Kitekintés

„I have ideas and reasons,
Know theories in all their parts,
And never reach the heart.”

— FERNANDO PESSOA

A rendelőben tett látogatás során az orvos feljegyzi a páciensek vérnyomását és pulzusát. A Harvard Egyetem egyik professzora, ARY GOLDBERGER szerint figyelembe kellene venni az EKG-görbe mint fraktál dimenzióját is. Meghökkentő kutatási eredményei arról tanúskodnak, hogy a fraktálgeometria döntő szerephez juthat a különféle szívbetegségek, az epilepszia és a PARKINSON-kór elleni küzdelemben. Még a legegyszerűbb nemlineáris rendszerek is könnyedén okozhatnak kaotikus viselkedést, és az érrendszert szabályozó mechanizmus nem igazán mondható egyszerűnek. Sőt inkább „hihetetlenül bonyolult, éppen ezért az egészséges szív ritmusa multifraktál. Ez merőben ellentétes a szinuszos közfelfogással” – vallja GOLDBERGER. A túlzott szívverés viszont utalhat atriális fibrillációra, míg a sima szinuszoid alakú pangásos szívelégtelenség jele lehet.

GOLDBERGER és csapata olyan módszereket fejlesztett ki a kardiológusok számára, amelyek megkönnyíthetik a helyes diagnózis felállítását. Az egyik ilyen metódus, a DFA az alaptendenciától való átlagos eltérést (fluktuációt) méri, és segítségével sikerült fényt deríteniük arra, hogy betegség vagy öregedés hatására a szívritmus komplexitása csökken. Egy másik monitorozási technikával azt demonstrálták, hogy ugyanezen hatások a rendszer entrópiáját is befolyásolják, és információvesztéssel járnak. „Még hosszú út áll előttünk a célig, az orvosok nincsenek hozzászokva a fraktálokhoz, noha naponta foglalkoznak velük.” [11]

Hivatkozások

[1] Satvik Singh, A brief discourse on Hausdorff dimension and self-similarity, *The American Mathematical Monthly*, **129** (9) (2022), 831–845. DOI: 10.1080/00029890.2022.2105117

[2] René L. Schilling, *Measurers, Integral and Martingales*, Cambridge University Press, (2005). DOI: 10.1017/CBO9780511810886

[3] Jonathan M. Fraser, Assouad type dimensions and homogeneity of fractals, *Transactions of the American Mathematical Society*, **366** (12) (2014), 6687–6733. DOI: 10.1112/S0025579314000242

[4] D. G. Larman, A new theory of dimension, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **17** (1) (1967), 178–192. DOI: 10.1112/plms/s3-17.1.178

[5] Elias M. Stein & Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces*, Princetone University Press, (2005), 333–337. DOI: 10.1515/9781400835560

[6] Gombos Kitti Kata, Fraktálok a tőzsdén, (2010), 4–21.

[7] Brian R. Hunt, The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126** (3) (1998), 791–800.

[8] Sudesh Kumari, Renu Chugh, Jinde Cao & Chuangxia Huang, On the construction, properties and Hausdorff dimension random Cantor one p^{th} set, *AIMS Mathematics*, **5** (4) (2020) 3138–3155. DOI: 10.3934/math.2020202

[9] Peter Mörters & Yuval Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, (2010), 110. DOI: 10.1017/CBO9780511750489

[10] John E. Hutchinson, Fractals and self similarity, *Indiana University Mathematics Journal*, **30** (5) (1981) 713–747. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30055

[11] Barry A. Cipra, A healthy heart is a fractal heart, *SIAM News*, **36** (7) (2003).

[12] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd, (2003). DOI: 10.1002/0470013850