Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Analízis Tanszék

# Mértékelméleti paradoxonok

Szakdolgozat

Varga Luca Borbála

Matematika BSc

Témavezető:

Kós Géza

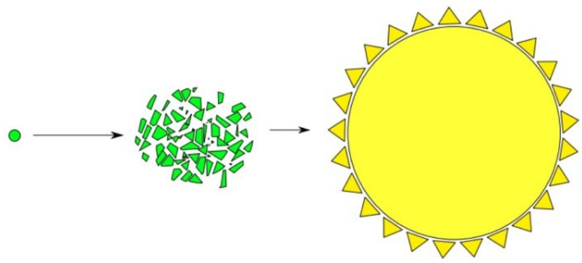
adjunktus

2024

# Tartalomjegyzék

# 1. Kedvcsináló

Egy borsószem szétvágható véges sok olyan diszjunkt darabkára, amelyek izometriák segítségével átmozgathatóak úgy, hogy egy Nap méretű tömör gömböt alkossanak. Ez a meglepő állítás a Banach-Tarski paradoxon erős alakja, és ahogy ebben dolgozatban is látni fogjuk: hihetetlen, de igaz.



1. ábra. Banach-Tarski paradoxon, erős alak [MaWa, 1.1.Ábr.]

Amikor a "paradoxon" kifejezést használjuk, általában ellentmondást értünk alatta. Van azonban a szónak egy másik jelentése is: paradoxonnak nevezünk minden olyan matematikai állítást, ami bár helyes, ellentmond az intuíciónknak. Dolgozatomban ez utóbbi értelemben vett matematikai paradoxonokkal fogok foglalkozni.

A legkorábbi és egyben az egyik legfontosabb példa ilyen állításra a 'végtelen paradoxona', amit Galileo Galilei fedezett fel. Ez azt mondja ki, hogy egy végtelen halmaz injektíven beleképezhető egy valódi részhalmazába.

Felix Hausdorff és Neumann János az 1914 és 1929 közötti időszakban Galilei állításának számos geometriai variációját fedezte fel, és ezzel egy különösen gazdag matematikai terület indult virágzásnak. A paradoxonok vizsgálatában a halmaz- és mértékelmélet, az algebra, a geometria és a diszkrét matematika találkozik.

Hausdorff, Banach, Tarski és Neumann felfedezte, hogy az általuk vizsgált paradoxonok összefüggésbe hozhatók bizonyos invariáns (például eltolás-invariáns) mértékek létezésével. A Hausdorff paradoxont például azért alkották meg, hogy bizonyítsa: a gömbön nem léteznek végesen additív invariáns mértékek. Azokat a paradoxonokat, amelyeknek fontos mértékelméleti következményei vannak, mértékelméleti paradoxonoknak nevezzük.

Dolgozatomban összegyűjtöttem és alaposan megvizsgáltam a leghíresebb mértékelméleti paradoxonokat. Azokra a kérdésekre kerestem választ, hogy miért léteznek matematikailag szabályosan megkettőzhető, paradox halmazok, hogyan lehet karakterizálni a paradox csoportokat és hogy miért és hogyan hozhatók összefüggésbe ezek a meglepő eredmények egyes invariáns mértékek nemlétével.

Egy rövid csoportelméleti bevezető után körbejárjuk az egymásbadarabolhatóság és a paradox tulajdonság fogalmát. Látni fogunk pár fontos példát és bebizonyítjuk Hausdorff paradoxonát, melynek segítségével belátjuk a Banach-Tarski paradoxon két ekvivalens alakját. Végül az amenábilitás fogalmát vizsgáljuk meg, aminek segítségével kapcsolatot teremtünk a paradox halmazok és az invariáns mértékek nemléte között. A dolgozatot Tarski híres tételével fejezem be, ami karakterizálja a paradox csoportokat.

## 2. Csoportelméleti bevezető

Ahogy a Kedvcsináló fejezetben említettem, a paradox tulajdonság vizsgálatához nem csupán mértékelméletre lesz szükségünk. Ahhoz, hogy megérthessük ezt a fogalmat, mindenek előtt csoportelméleti ismeretekre kell szert tennünk. Kiss Emil: Bevezetés az algebrába [KisEm] című alapművét sokat forgattam alapszakos éveim során, ehhez a rövid csoportelméleti bevezetőhöz is főként ezt a könyvet hívtam segítségül. A lentebb szereplő definíciók és példák a [KisEm], a [MetSp] és a [ParLac] forrásokból származnak. Ezeken kívül még a [StanWag] és az [Isom] forrásokat használtam fel.

**2.1. definíció.** (Csoport [KisEm, 2.2.13.Def.])
Egy $G$ nemüres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy * művelet a következő tulajdonságokkal:

1. a * művelet asszociatív, tehát $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $G$-nek van neutrális eleme a $*$ művelet szerint (ezt $e$-vel fogom jelölni), tehát $\forall g \in G$ : $e * g = g * e = g$
3. $G$ minden elemének van inverze a $*$ művelet szerint, tehát $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G : g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Az egész számok halmaza, az összeadás művelettel ellátva csoportot alkot, hiszen $\mathbb{Z}$-n az összeadás asszociatív, neutrális eleme a 0, és minden egész számnak van ellentettje, ami ebben az esetben az inverzének felel meg. Ezt a csoportot $(\mathbb{Z}, +)$-al szokás jelölni. Ugyanezen érvelés miatt $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}, +)$ is csoportok.

Egy csoport elemeinek halmazát (a csoport művelete nélkül) szokás a csoport alaphalmazának is nevezni. Például a $(\mathbb{Z}, +)$ csoport alaphalmaza a $\mathbb{Z}$.

**2.2. definíció.** (Abel-csoport, [KisEm, 32.old.])
Ha a $G$ csoport $*$ művelete kommutatív, tehát $\forall g, h \in G : g * h = h * g$, akkor $G$-t Abel-csoportnak nevezzük.

Az imént említett csoportok mind Abel-csoportok. Vizsgálódásaink során félcsoportok is érdekelni fognak minket, amikor enyhíteni akarjuk majd a feltételeinket bizonyos problémák esetén.

**2.3. definíció.** (Félcsoport, [KisEm, 2.2.12.Def.])
$X$ nemüres halmaz félcsoport, ha értelmezett rajta egy asszociatív művelet.

**2.4. definíció.** (Részcsoport, [KisEm, 2.2.15.Def.])
A $G$ csoport egy $H$ részhalmazát a $G$ részcsoportjának nevezzük, és $H \leq G$-vel jelöljük, ha $H$ maga is csoport a $G$-beli műveletre nézve.

A $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$, hiszen a halmazok egymás részhalmazai, és az összeadás műveletre nézve mind csoport.

A csoportokat általában szeretnénk kapcsolatba hozni az alaphalmazon kívül más halmazokkal is. Ezt az motiválja, hogy sok olyan csoport létezik (nemsokára egy fontos példát is látni fogunk rá a 2.8. definícióban), ahol a csoportelemek leképezések, a csoport művelete pedig a kompozíció. Mivel ezeket a leképezéseket más halmazokon is szeretnénk végrehajtani bizonyos szabályok szerint, szükségünk van egy újabb definícióra.

**2.5. definíció.** (Csoporthatás, $G$-halmaz [KisEm, 4.5.12.Def.])
Azt mondjuk, hogy a $G$ csoport az $X$ halmazon hat, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van a $g * x \in X$ elem úgy, hogy bármely $g, h \in G$ és $x \in X$ esetén

- $g * (h * x) = (g * h) * x$, (azaz $G$ elemeinek szorzata kompozícióként hat)

és ha $e$ jelöli $G$ egységelemét, akkor bármely $x \in X$ esetén

- $e * x = x$, (vagyis az egységelem identikusan hat $X$-en).

Azt is mondhatjuk, hogy $X$ egy $G$-halmaz, gyakran fogom használni ezt az elnevezést.

Minden csoport hat a saját alaphalmazán, mert a csoporthatáshoz szükséges két feltétel ebben az esetben automatikusan teljesül. Ezzel a definícióval azonban már tudunk beszélni például a síkbeli eltolások, origó körüli forgatások csoportjainak hatásairól az $\mathbb{R}^2$-n, ami egy új perspektívát jelent.

**2.6. definíció.** (Pálya, tranzitív hatás [KisEm, 4.5.14.Def.])
Legyen $G$ az $X$ halmazon ható csoport. Az $x \in X$ pont pályája, vagy $G$-pályája:

$$Gx := \{gx \mid g \in G\}.$$

Azt mondjuk, hogy $G$ hatása $X$-en tranzitív, ha csak egyetlen pálya van, azaz ha $X$ bármely két eleme egymásba átvihető $G$ egy elemével.

A síkbeli eltolások csoportja tranzitívan hat az $\mathbb{R}^2$-n, mert bármely két ponthoz találhatunk olyan eltolást, ami egymásba viszi őket. Az origó körüli forgatások csoportja nem hat tranzitívan a síkon, mert a pályák az origó, illetve az origó körüli koncentrikus körök lesznek.

**2.7. definíció.** (Elem rendje [KisEm, 4.3.9.Def.])
Legyen $G$ egy csoport. A $g \in G$ elem rendje a $g$ különböző hatványainak a száma (ami vagy egy pozitív egész szám, vagy pedig $\infty$).

A síkbeli origó körüli forgatások csoportjában a 180°-os forgatás egy másodrendű elem, egy irracionális szöggel való forgatás rendje pedig $\infty$. Minket leginkább a távolságtartó leképezések fognak érdekelni $\mathbb{R}^n$-en.

**2.8. definíció.** (Izometria, egybevágóság, halmazok egybevágósága [MetSp, 1.4.1.Def.], [ParLac, 160.old.]) Tegyük fel, hogy $(X, d)$ és $(Y, e)$ metrikus terek (azaz valamilyen formában értelmezve van rajtuk egy távolságfogalom). A $\Phi : X \longrightarrow Y$ leképezés izometria $\iff$ $e(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b)\ \forall a, b \in X$.
A bijektív távolságtartó leképezéseket, azaz a bijektív izometriákat egybevágóságnak nevezzük.
Az $A \subseteq X$ és a $B \subseteq Y$ részhalmazokat egybevágónak nevezzük, ha létezik közöttük távolságtartó bijekció. Jelölése: $A \cong B$.

Tehát az izometriák: a távolságtartó leképezések. Bármely két $(X, d) \longrightarrow (X, d)$ izometria kompozíciója is izometria, illetve minden ilyen izometria invertálható, és az inverzük is izometria. Ebből adódik, hogy az $(X, d) \longrightarrow (X, d)$ izometriák, a kompozíció műveletével ellátva, csoportot alkotnak, ahogy azt reméltük. Az alábbbi csoport nagyon fontos szerepet fog játszani a későbbiekben.

**2.9. állítás.** ($G_n$ csoport)
Az $\mathbb{R}^n$-ről $\mathbb{R}^n$-re képező izometriák csoportot alkotnak ($n \geq 1$). Ezt a csoportot innentől kezdve $G_n$-nel jelölöm.

**2.10. állítás.** ($M_n$ csoport)
Az $\mathbb{R}^n$-ről $\mathbb{R}^n$-re képező irányítástartó izometriák csoportot alkotnak ($n \geq 1$). Ezt a csoportot innentől kezdve $M_n$-nel jelölöm. $M_n$-t szokás az $\mathbb{R}^n$ mozgásainak nevezni.

Bizonyos típusú mátrixok is alkothatnak csoportokat. A segítségükkel könnyebb karakterizálni az $G_n$ és a $M_n$ csoportok elemeit.

**2.11. definíció.** ($GL(n), O(n), SO(n)$ csoportok [KisEm, 4.1.24.Def., 4.1.26.Def.])
Az $\mathbb{R}^n$ test feletti $n \times n$ -es invertálható mátrixok csoportját a szorzásra nézve általános lineáris csoportnak nevezzük, és $GL(n)$-nel jelöljük.
Az ortogonális $GL(n)$-beli mátrixok (azon mátrixok, amelyek inverze megegyezik a transzponáltjukkal) részcsoportot alkotnak $GL(n)$-ben, jelölésük: $O(n)$. Az $O(n)$-beli mátrixok determinánsa $\pm 1$. $O(n)$-hez tartoznak $\mathbb{R}^n$ izometriái (2.12. állítás).
Azok a mátrixok, melyek determinánsa $+1$, részcsoportot alkotnak $O(n)$-ben (így $GL(n)$-ben is). Ennek neve speciális ortogonális csoport, jele $SO(n)$. $SO(n)$-hez tartoznak $\mathbb{R}^n$ irányítástartó egybevágósági transzformációi, másnéven $\mathbb{R}^n$ mozgásai (2.13. álítás).

A különbség $O(n)$ és $SO(n)$ között az, hogy míg az előbbiben vannak $n-1$ dimenziós hipersíkra való tükrözések, az utóbbiban nincsenek.

**2.12. állítás.** ($G_n$ felbontása [Isom, 3.6.tétel])
A $G_n$ minden eleme egyértelműen írható az alábbi alakban:
$h_{A,w}(v) = Av + w = (t_w A)(v)$, ahol $h_{A,w} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$ és $w \in \mathbb{R}^n$.

Ez alapján nem meglepő, hogy az $M_n$ is hasonló formában írható.

**2.13. állítás.** ($M_n$ felbontása)
Az $M_n$ minden eleme egyértelműen írható az alábbi alakban:
$f_{A,w}(v) = Av + w = (t_w A)(v)$, ahol $f_{A,w} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \in SO(n)$ és $w \in \mathbb{R}^n$.

A későbbiekben szükségünk lesz a csoportelmélet egy bonyolultabb elemére, a szabad csoport fogalmára is. Az eredeti, homomorfizmusokat használó definíció a [KisEm, 4.10.1.Def.].

Én a következő eljárás segítségével fogom "definiálni" az $X$ halmaz által generált szabad csoportot. Ez a konstrukció az alábbi tétel bizonyításában található meg, a [KisEm]-ben, de kevésbé részletesen a [StanWag]-ben is szerepel.

**2.14. tétel.** [KisEm, 4.10.2.Tétel]
Minden $X$ halmazhoz létezik egy olyan csoport, amelyet $X$ szabadon generál, és ez a csoport izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott. Az $X$ által generált szabad csoportot $F(X)$-szel fogom jelölni.

**2.15. konstrukció.** (Az $X$ halmaz által generált szabad csoport megkonstruálása)

$\forall x \in X$ elemhez készítsünk el egy $x^{-1}$ elemet úgy, hogy ezek az $X$ elemeitől és egymástól is különbözzenek. Legyen $S$ az összes olyan véges szó, amik az $\{x, x^{-1} : x \in X\}$ betűkből állnak, beleértve az üres szót is (ez lesz a csoport neutrális eleme, jelölése: 1). Ha $X = \{x, y\}$, akkor egy ilyen „szó" például a következő lehet: $xxy^{-1}y^{-1}x^{-1}yyy$.

Ezek után $\forall x \in X$-re azonosítjuk az $xx^{-1}$ és az $x^{-1}x$ betűpárost az 1-el. Ezzel elértük, hogy $x$ és $x^{-1}$ egymás inverzei legyenek. Emiatt például az $xyy^{-1}x^{-1}x$ és az $y^{-1}yx$ szavak is egyenlővé válnak, hiszen ha mindkettőből kihúzzuk az egymás melletti „inverzeket", akkor mindkettő az $x$ szóvá egyszerűsödik. Az olyan szót, amiben nem szerepel ilyen típusú betűpár, redukált szónak nevezzük. Ezt a "kihúzást", azaz az $xx^{-1}$ vagy $x^{-1}x$ alakú betűpárok eltörlését, és ugyanígy a "betoldását" is, elemi átalakításnak nevezzük (bármely $x \in X$-re).

Bevezetünk egy $\sim$ relációt az $S$ elemeire a következőképpen: az $s$ és $t$ szavak legyenek relációban, ($s \sim t$), ha véges sok elemi átalakítás segítségével megkaphatjuk $s$-ből $t$-t.

**2.16. állítás.** [KisEm, 157.Old.]
A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Az $F(X)$ csoport elemei legyenek a $\sim$ ekvivalenciarelációhoz tartozó partíciók osztályai. Minden osztályt egyértelműen reprezentál a hozzá tartozó redukált szó, így feltehető, hogy $F(X)$-et az összes redukált szó alkotja. Mostantól úgy tekintjük, hogy minden szó redukált.

$F(X)$-en a csoportművelet a szavak összefűzése (konkatenációja), azaz egymás után írása lesz. Például ha $s = xyx$ és $t = xy$, akkor $s * t = st = xyxxy$. Ez asszociatív művelet, amelyre nézve az 1 (kétoldali) neutrális elem.

**2.17. állítás.** [StanWag, 5.Old.]
Egy szabad csoport bármely két generáló halmazának ugyanaz az elemszáma, ezt a csoport rangjának nevezzük.

**2.18. állítás.** [StanWag, 5.Old.]
Két azonos rangú szabad csoport izomorf. Bármely csoport, amely izomorf egy szabad csoporttal, szabad.

Az $n$ rangú szabad csoportot innentől $\mathbb{F}_n$ jelöli.

**2.19. tétel.** (Nielsen–Schreier-tétel [KisEm, 4.10.6.Tétel])
Szabad csoport minden részcsoportja is szabad.

Ebből az állításból következik, hogy egy szabad csoport minden elemének rendje $\infty$.

A továbbiakban főként az izometria-csoportokra és a 2-rangú szabad csoportra lesz majd szükségünk.

# 3. Az egymásbadarabolhatóság és a paradox tulajdonság

Már ebben a fejezetben szükségünk lesz az imént összegyűjtött csoportelméleti ismeretekre, hiszen az alábbiakban megismerkedünk két új fogalommal: a $G$-egymásbadarabolhatósággal és a $G$-paradox tulajdonsággal. Mindkét fogalmat egy tetszőleges $G$ csoportra nézve értelmezzük, és csak akkor hagyjuk el a csoport külön jelölését, ha nem adódik ebből félreértés, vagy ha általánosságban beszélünk a fogalmakról. A paradox tulajdonságot az egymásbadarabolhatóság segítségével fogom definiálni, tehát elsőként ezt járjuk körbe.

## 3.1. Egymásbadarabolhatóság

Ebben az alfejezetben az lesz a fő célunk, hogy definiáljuk két halmaz egymásbadarabolhatóságát, illetve kiderítsük ennek a tulajdonságnak néhány egyszerű, de lényeges jellemzőjét. A legfontosabb ezek közül az lesz, hogy egy adott $G$ csoportra és $A$ $G$-halmazra az egymásbadarabolhatóság egy ekvivalenciareláció a $\mathscr{P}(A)$ halmazcsaládon. Ezt a részt a [MaWa] forrás alapján írtam.

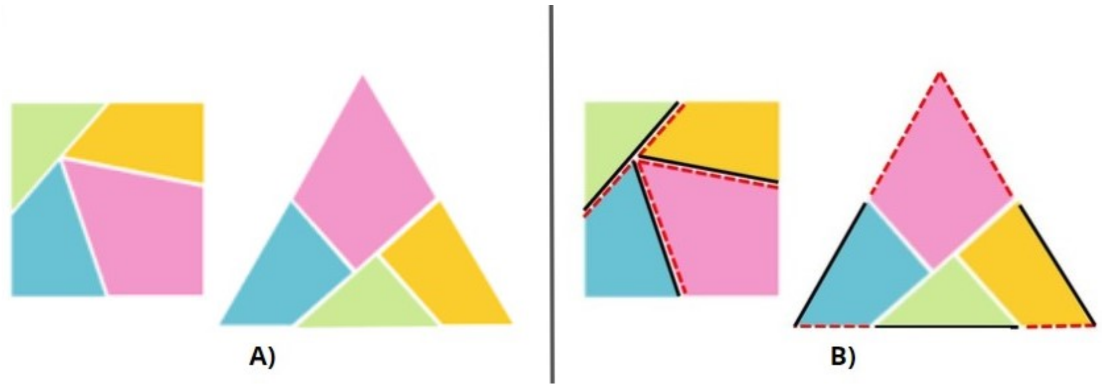
**3.1. definíció.** (Partíció, felbontás [MaWa, 2.7.Def.])
Az $A$ halmaz egy partíciója az a nemüres, páronként diszjunkt $A' \subseteq A$ részhalmazokból álló $P$ család, melyre $A = \bigcup\limits_{A' \in P} A'$. Ha a halmazokat az utóbbi alakban, unió formájában írjuk, akkor az $A$ egy felbontásának is nevezzük őket.

Általában véges sok részhalmazból álló partíciókról fogunk beszélni. Fontos, hogy egy-egy halmaz felbontásában szereplő részhalmazok mindig páronként diszjunktak, ez hozzátartozik a felbontás definíciójához.

**3.2. definíció.** ($G$-egymásbadarabolhatóság [MaWa, 2.8.Def.])
Legyen $G$ egy csoport, ami az $X$ halmazon hat. Az $A, B \subseteq X$ részhalmazok $G$-egymásbadarabolhatóak, ha léteznek ugyanannyi tagból álló véges partíciók: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ és $g_i \in G$ csoportelemek $(i = 1, ..., n)$, hogy $B_i = g_i(A_i)$, minden $i = 1, ..., n$ esetén. Jelölése: $A \sim_G B$.

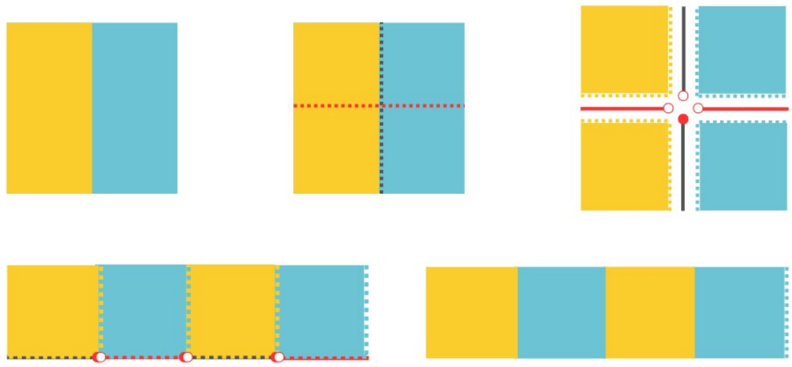
Tehát két halmaz egymásbadarabolhatósága azt jelenti, hogy mindkettő felvágható néhány olyan darabra, hogy a két halmaz darabjai páronként áttranszformálhatók egymásba bizonyos csoportelemek segítségével. Ha a vizsgált csoport például a $G_2$, azaz a síkbei izometriák csoportja, akkor két $G_2$-egymásbadarabolható halmaz felbontásban szereplő darabjai egybevágóak, hiszen az izometriák megtartják a távolságot.

A legtöbb cikkben a 2/A) ábrához hasonló rajzot találhatunk az egymásbadarabolhatóság illusztrációjaként. Ez a darabolás figyelmen kívül hagyja az egyes részek határait - ahogy azt a B) ábra szemlélteti - pedig a definíció szerint ezt nem tehetjük meg, tehát ez nem egy precíz egymásbadarabolás. A 2/A) ábrán egy úgynevezett átdarabolást láthatunk, ami annyiban különbözik az egymásbadarabolhatóságtól, hogy ott megfeledkezhetünk a darabok határairól. Erről a fogalomról több szó fog esni a Banach-Tarski paradoxon című fejezetben. A két fogalom a síkon nagyon hasonlót jelent, ezért is használják széles körben a 2. ábrát.




2. ábra. Fontos, hogy az egymásbadarabolásnál minden pont, így a határpontok is számítanak. A piros vonal a nyílt, a fekete a zárt határokat jelöli. A kép forrása: `https://matemateca.ime.usp.br/acervo/equidecomponibilidade_ingles.html`

A 3. ábra már egy egymásbadarabolást ír le. Minden vágásnál külön darabként kezeltem a határvonalakat (piros és fekete szakaszok), és megkülönböztettem a négyzet középső pontját is (piros színű pont), így elértem, hogy semelyik pontot se számítsuk kétszer a darabolás során.



3. ábra. Egy négyzet egymásbadarabolható egy jobbról nyílt téglalappal. A szaggatott vonalak a nyílt, a teli vonalak a zárt határokat jelölik. Az üres piros karikák a szakaszok nyílt végeit jelölik. A teli piros pont a négyzet középső pontja.

Vizsgáljuk meg most az egymásbadarabolhatóság néhány fontos tulajdonságát. Világos, hogy a $G$ csoport neutrális, identikus eleme miatt egy $G$-halmaz bármely részhalmaza egymásbadarabolható saját magával. Mivel minden definícióbeli $g_i$-nek van inverze, $g_i^{-1}B_i = A_i$ teljesül, ahol $i = 1, ..., n$. Ebből következik az alábbi állítás.

**3.3. állítás.** (Az egymásbadarabolhatóság szimmetrikus és reflexív [MaWa, 2.9.Áll.]) Legyen $G$ egy csoport, és $X$ egy $G$-halmaz. Ekkor $\forall A, B \subseteq X$ részhalmazra teljesül, hogy

- $A \sim A$, azaz a $G$-egymásbadarabolhatóság reflexív,
- ha $A \sim B$ akkor $B \sim A$, azaz a $G$-egymásbadarabolhatóság szimmetrikus.

Az a célunk, hogy belássuk: az egymásbadarabolhatóság ekvivalenciareláció. Ehhez már csak a tranzitivitás igazolására van szükségünk. Ennek érdekében bevezetjük a darabonkénti függvények fogalmát, ami megkönnyíti a két halmaz egymásbadarabolhatóságát leíró felbontások, hatások megértését, elképzelését. Egy egyszerű módját fogják adni a tranzitivitás bizonyításának.

**3.4. definíció.** (Darabonkénti függvény egy csoportban [MaWa, 2.15.Def.])
Legyen $A$ és $B$ két $G$-egymásbadarabolható halmaz. Ekkor a definíció szerint létezik valamely $n$-re egy-egy felbontása $A$-nak és $B$-nek: $A = A_1 \cup ... \cup A_n$, $B = B_1 \cup ... \cup B_n$ és $g_i \in G$ minden $i = 1, ..., n$, hogy $A_i = g_i B_i$ minden $i = 1, ..., n$.
Egy ekvivalens módja a két halmaz közti egymásbadarabolhatóság megadásának egy darabonként-definiált $f : A \longrightarrow B$ bijekció:

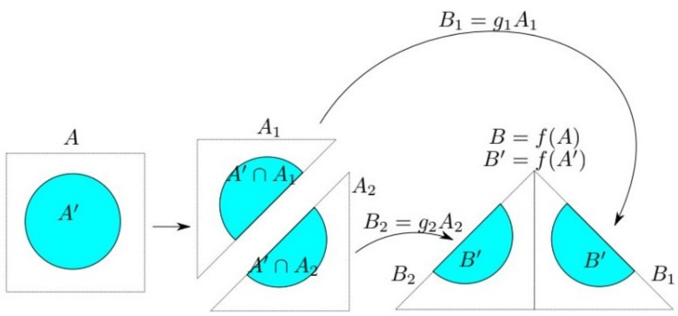
$$f(x) = \begin{cases} g_1 x & \text{ha } x \in A_1 \\ g_2 x & \text{ha } x \in A_2 \\ ... & \\ g_n x & \text{ha } x \in A_n \end{cases}$$

És fordítva: ha létezik olyan bijekció, amelyet egy $G$ csoport elemei definiálnak egy halmaz partícióján, akkor ez a bijekció a particionált halmaz és képe közötti egymásbadarabolhatóságot írja le.

Ez a forma megkönnyíti az egymásbadarabolhatóság néhány tulajdonságának észrevételét és bebizonyítását. Például az első két tulajdonság bizonyításánál a reflexivitást az $f := e$ adja, és ha a $g$ függvény reprezentálja $A \sim B$-t, akkor a $g^{-1}$ adja meg a szimmetriát.

Továbbá azonnal látjuk azt a fontos tulajdonságot is, hogy azok a felbontások és hatások, amelyek két halmaz egymásbadarabolhatóságát írják le, megszoríthatóak azok részhalmazaira is.

**3.5. állítás.** (Részhalmazok egymásbadarabolhatósága [MaWa, 2.16.Áll.])
Ha $A \sim_G B$, akkor minden $A' \subseteq A$ részhalmaz $G$-egymásbadarabolható $B$ egy részhalmazával. Ha $f : A \longrightarrow B$ írja le $A$ és $B$ egymásbadarabolhatóságát (ahogy az előző definícióban), akkor azt kapjuk, hogy $A' \sim f(A')$.




4. ábra. Részhalmazok egymásbadarabolhatósága [MaWa, 2.2.Ábr.]

Az egymásbadarabolhatóság függvény-alapú leírása megengedi nekünk a tranzitivitás könnyebb bizonyítását is.

**3.6. állítás.** (Az egymásbadarabolhatóság tranzitív [MaWa, 2.17.Áll.])
Ha $A \sim_G B$ és $B \sim_G C$ valamely $G$ csoportra, akkor $A \sim_G C$.

*Bizonyítás.* [MaWa, 2.17.Biz.] Legyen $A$, $B$ és $C$ mint az állításban, ahol az egymásbadarabolgatóságot az $f : A \longrightarrow B$ és a $g : B \longrightarrow C$ darabonkénti függvények írják le. Legyen $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ az $A$ felbontása $A \sim_G B$ -hez és legyen $B = B_1 \cup ... \cup B_m$ a $B$ felbontása a $B \sim_G C$ - hez.
Mivel $f$ és $g$ bijekciók, a $h := g \circ f$ egy $h : A \longrightarrow C$ bijekció lesz. Tudjuk, hogy $h(A) = g(f(A)) = C$, és mivel a $G$ csoport művelete tranzitív, $h$ $A$ minden elemét $G$ egy elemének segítségével képzi $C$-be. Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy $h$ $A$ egy véges partícióján van-e értelmezve.
Azt állítom, hogy $A$-nak ez az új felbontása legfeljebb $n \cdot m$ részből áll. $A$ új felbontása explicit módon definiálható úgy, hogy elmetsszük $A$ felbontását a $B$ felbontásának $f$-szerinti őségképeivel. Definiálja ezeket a $D_{i,j} := A_i \cap f^{-1}(B_j)$ minden $i = 1, ..., n$, $j = 1, ...m$. Néhány, de nem minden $D_{i,j}$ lehet, hogy üres, ezeket elhagyhatjuk. Marad legfeljebb $n \cdot m$ nemüres, diszjunkt halmaz, és ezzel megkaptuk $A$ felbontását $h$-hoz, és így az $A \sim_G C$ egymásbadarabolhatósághoz. □

A tranzitivitás fontos szerepet fog betölteni számos bizonyításban.

**3.7. következmény.** (Az egymásbadarabolhatóság ekvivalenciareláció [MaWa, 2.18.Áll.])
Egy $G$ csoportra és egy $A$ $G$-halmazra az egymásbadarabolhatóság egy ekvivalenciareláció $\mathscr{P}(A)$-n, az $A$ halmaz összes részhalmazának családján.

Mivel egy halmaz triviális felbontása maga a halmaz, $B \sim_G gB$ bármely $g \in G$-re. Ez a triviális felbontás és a $g^{-1}$ csoportelem segítségével könnyen ellenőrizhető. Ha ezen kívül még a tranzitivitást is felhasználjuk, az alábbi állítást kapjuk.

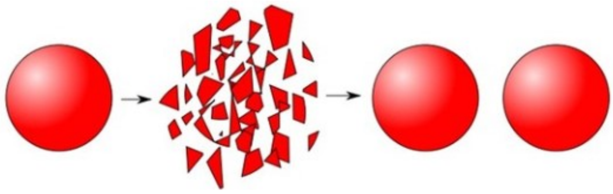
**3.8. következmény.** (Az egymásbadarabolhatóság transzformáció-invarianciája [MaWa, 2.12.Áll.])
Ha $A \sim_G B$ akkor $A \sim_G gB$ minden $g \in G$-re.

Könnyen belátható az a speciális és hasznos tulajdonság is, hogy az $\mathbb{R}^3$ mozgásainak csoportjára, az $M_3$-ra vett egymásbadarabolhatóság átskálázás-invariáns. Ez azt jelenti, hogy megnyújthatjuk a két vizsgált halmazt egy nemnulla valós számmal, ez a változtatás nem fogja befolyásolni azt, hogy a darabjaik átmozgathatóak-e egymásba.

## 3.2. Paradox tulajdonság

Ebben az alfejezetben körbejárjuk egy halmaz paradox tulajdonságának meglepő fogalmát, az egymásbadarabolhatósággal való kapcsolatát, és a Banach-Schröder-Bernstein tétel segítségével mutatunk rá egy könnyebben kezelhető ekvivalens definíciót is. Az itt leírtak a [MaWa], a [ParKat] és a [StanWag] forrásokból származnak.

**3.9. definíció.** ($G$-paradox tulajdonság [MaWa, 2.19.Def.])
Legyen $G$ egy csoport, $X$ pedig egy $G$-halmaz. Az $E \subseteq X$ halmazt $G$-paradoxnak vagy $G$-paradox tulajdonságúnak nevezzük, ha léteznek $A, B \subseteq E$ részhalmazok, hogy $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ és $E \sim_G A$, $E \sim_G B$.



5. ábra. Paradox tulajdonság [MaWa, 1.1.Ábr.]

Egy halmaz paradox tulajdonsága tehát azt jelenti, hogy a halmaz felvágható két darabra úgy, hogy ez a két darab lényegében ugyanolyan, mint az eredeti, legalábbis egy megfelelő transzformáció segítségével darabonként egymásbavihetőek az eredeti halmazzal. Valamilyen értelemben meg lehet kettőzni a paradox halmazokat.

Ha egy előző példával élünk: egy síkbeli halmaz $G_2$-paradoxsága azt jelentené, hogy felvágható két diszjunkt darabra úgy, hogy a két darab darabonként egybevágó legyen az eredetivel. Ez a tulajdonság ellentmond az intuíciónknak, pedig nem is kell annyira messzire menni ahhoz, hogy paradox tulajdonságú halmazokat találjunk. Ahogy végtelen számosságokkal, mondjuk a természetes vagy egész számok halmazával kezdünk foglalkozni, máris felütik a fejüket hasonló furcsaságok. Galileo megfigyelése, miszerint a pozitív egész számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek a négyzetszámoknak, nagyon hasonlít a paradox tulajdonság definíciójához. Valamilyen értelemben itt is halmazt kettőztünk, hiszen találtunk egy pontosan ugyanakkora, valódi részhalmazt, mint az eredeti. Ez a megfigyelés megjósolta azokat a huszadik századi kutatásokat, amik a végtelen mennyiségek behatóbb vizsgálatával, hasonló paradoxonok felfedezésével foglalkoztak. Az első lépcsőfokok között volt azon konstrukciók sorában, amik a paradox tulajdonság definíciójához vezettek.

3.10. *megjegyzés.* Vannak más definíciók is a $G$-paradoxonságra, például, hogy a részhalmazoknak csak diszjunktaknak kell lenniük, az uniójukra nem teszünk megszorításokat. Ez ekvivalens az általunk használt definícióval, ahogy azt a Banach-Schröder-Bernstein tétel segítségével látni fogjuk.

Egy halmaz paradox tulajdonságát "visszavetíthetjük" magára a csoportra, csoporthatásra is.

**3.11. definíció.** (Paradox hatás, paradox csoport [ParKat, 0.1.1.Def.])
Egy $G$ csoport hatását az $X$ halmazon paradoxnak nevezzük, ha $X$ $G$-paradox.
A csoportot magát akkor hívjuk paradoxnak, ha a saját magán vett hatása baloldali szorzásként paradox.

Mivel a paradox tulajdonságot az egymásbadarabolhatóság fogalmának segítségével definiáltuk, könnyen megfogalmazhatjuk pár jellemzőjét eddigi tudásunk alapján. Az egymásbadarabolhatóság transzformáció-, és átskálázás-invarianciájának, illetve a paradox tulajdonság definíciójának közvetlen következményeként kapjuk az alábbi két állítást.

**3.12. állítás.** (A paradox tulajdonság transzformáció-invarianciája [MaWa, 2.22.Köv.])
Ha $A$ $G$-paradox, akkor $gA$ is $G$-paradox minden $g \in G$-re.

**3.13. állítás.** (A paradox tulajdonság átskálázás-invarianciája [MaWa, 2.23.Köv.])
Ha $A \subseteq \mathbb{R}^3$ $M_3$-paradox, akkor $cA$ is $M_3$-paradox minden $c \in \mathbb{R}, c > 0$-ra.

A következő állítás egy fontos kapcsolatot ír le a két vizsgált fogalom között: ha két halmaz egymásbadarabolható, akkor a paradox tulajdonságuk öröklődik.

**3.14. lemma.** [MaWa, 2.24.Lem.]
Legyen $A$ és $B$ két $G$-egymásbadarabolható halmaz valamilyen $G$ csoportra. Ekkor $B$ $G$-paradox $\iff$ $A$ $G$-paradox.

*Bizonyítás.* [MaWa, 2.24.Biz.] Legyen a $B_1, B_2$ a $B$ paradox felbontása: $B_1 \sim_G B$ és $B_2 \sim_G B$, ahol $B = B_1 \cup B_2$ és $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
Mivel $A \sim_G B$, létezik egy $f : B \longrightarrow A$ bijekció, ami a két halmaz egymásbadarabolhatóságát írja le, a 3.4 definíció szerint.
Az $f$ bijekciót megszorítva a $B$ részhalmazaira $A$-nak egy-egy, $B_1$-el illetve $B_2$-vel egymásbadarabolható részhalmazát kapjuk: legyen $A_1 := f(B_1)$ és $A_2 := f(B_2)$.
Mivel $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, illetve $f$ bijekció, következik, hogy az $A_1$, $A_2$ részhalmazok partícionálják $A$-t: $A = A_1 \cup A_2$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
A konstrukció miatt $A_1 \sim_G B_1$. Tudjuk, hogy $B_1 \sim_G B$ és $B \sim_G A$, amiből az egymásbadarabolhatóság tranzitivitása miatt következik, hogy $A_1 \sim_G A$. Hasonlóan $A_2 \sim_G A$, tehát beláttuk, hogy $A$ $G$-paradox. $\square$

Elérkeztünk a fejezet legfontosabb tételéhez és eddigi legbonyolultabb bizonyításunkhoz. Az eredmény, amit Banach publikált, a klasszikus halmazelméleti Schröder-Bernstein tétel egy általánosítása. A Banach-Tarski paradoxonról szóló fejezetben egy rövidebb, általánosabb bizonyítást is látni fogunk, de a mélyebb megértés érdekében előbb egy konstruktívabb bizonyítást hoztam.

**3.15. tétel.** (Banach-Schröder-Bernstein tétel [MaWa, 2.26.Tét.])
Legyen $G$ egy csoport, $X$ egy $G$-halmaz, és $A, B \subseteq X$ valamilyen részhalmazok.
Ha $A$ $G$-egymásbadarabolható a $B$ egy részhalmazával, és $B$ $G$-egymásbadarabolható az $A$ egy részhalmazával, akkor $A$ és $B$ $G$-egymásbadarabolható.

*Bizonyítás.* [MaWa, 2.26.Biz.] Legyen $A' \subseteq A$ és $B' \subseteq B$ a tételben szereplő két részhalmaz, tehát $A \sim_G B'$ és $B \sim_G A'$. Legyen $f : A \longrightarrow B'$ és $g : B \longrightarrow A'$ az $A \sim_G B'$ és $B \sim_G A'$ egymásbadarabolhatóságokat leíró bijekciók.
$f^{-1}$ és $g^{-1}$ pontosan a $B'$-n illetve az $A'$-n van definiálva. Úgy tekintjük az $f^{-1}$ és $g^{-1}$ függvényeket, mint $A$ és $B$ közötti injekciókat, amik nem feltétlenül szürjektívek.
Első lépésként felbontjuk $A$-t és $B$-t három-három páronként diszjunkt részhalmazra, amik között új bijekciókat fogunk keresni.

- Ezek a részhalmazok az egyes elemek őspépeinek segítségével lesznek definiálva: minden $a \in A$ elemnek van egy $g$ szerinti ősképe: $g^{-1}(a)$ feltéve, hogy $a \in A'$. Ez az őskép a $B$-nek egy olyan eleme, amelyet a $g$ az $a$-ba képez. A $B$ ősképeit hasonlóképpen definiáljuk, az $f$ leképezéssel. Mivel minden egyes ősképnek lehet egy ősképe a másik

leképezés szerint, minden $A$, illetve $B$ halmazbeli elem esetében beszélhetünk az ősképek számáról. Az első ősképet szülőnek hívjuk. Az ősképeket, az ősképek ősképeit, azok ősképeit (és így tovább) együtt ősöknek nevezzük. Mivel $f$ és $g$ injektívek, minden elemnek legfeljebb egy szülője van (az $f$ vagy a $g$ leképezés szerint, attól függően, hogy melyik halmazban van).
Most már partícionálhatjuk $A$-t és $B$-t három-három részhalmazra, aszerint, hogy a tartalmazott elemeknek hány őse van: $A_0$, $A_1$, $A_\infty$ a páros, páratlan illetve végtelen sok őssel rendelkező elemeket tartalmazzák. Az ősök közé a szülők is beleszámítanak. Hasonlóan definiáljuk $B$-re a $B_0$, $B_1$, $B_\infty$ halmazokat.

Második lépésként konstruálunk egy megfelelő bijekciót, ami az $A_\infty$ és a $B_\infty$ egymásbadarabolhatóságát mutatja.

- Az $A_\infty$ halmazra igaz, hogy minden elemének van pontosan 1 $g$ szerinti szülője $B$-ben (hiszen $g$ bijektív), tehát $\forall a \in A_\infty\ \exists b \in B : g^{-1}(a) = b$. Legyen $S := \{b \in B \mid \exists a \in A_\infty : g^{-1}(a) = b\} \subseteq B$ ezen $g$ szerinti szülők halmaza. Ekkor, mivel az $A_\infty$ minden elemének $\infty$ sok őse van, teljesül, hogy $\forall b \in S\ \exists a \in A : f^{-1}(b) = a$, azaz $S$ minden elemének van pontosan 1 $f$ szerinti szülője $A$-ban, és $A_\infty$ definíciójának következtében ez az $f$ szerinti szülő az $A_\infty$ halmaz egy eleme. Azt szeretnénk belátni, hogy $S = B_\infty$ és $f^{-1}(S) = A_\infty$. Ezt indirekt fogom bizonyítani.
  Tegyük fel, hogy $\exists a^* \in f^{-1}(S) \setminus A_\infty$. Ekkor $\exists b \in S : f^{-1}(b) = a^*$, és $S$ definíciója szerint $\exists a \in A_\infty : g^{-1}(a) = b$, de ha $a^* \notin A_\infty$, akkor $a \notin A_\infty$, ami ellentmondás. Így megkaptuk, hogy $f^{-1}(S) = A_\infty$.
  Világos, hogy $S \subseteq B_\infty$. Tegyük fel, hogy $\exists b^* \in B_\infty \setminus S$. Ekkor $\exists f^{-1}(b^*) = a \in A_\infty$, hiszen $b^*$-nak $\infty$ sok őse van. De $A_\infty = f^{-1}(S)$ és mivel $f$ bijekció, $b^* \in S$ teljesül, így $S = B_\infty$.
  Tehát $f$-et megszorítva $A_\infty$-re megkapjuk azt a bijekciót, ami az $A_\infty \sim_G B_\infty$ egymásbadarabolhatóságot írja le.

Harmadik lépésként az $A_0$ és a $B_1$ egymásbadarabolhatóságát mutatjuk meg, amiből könnyen megkapjuk az $A_1 \sim_G B_0$ igazolására szolgáló konstrukciót is.

- Minden $B_1$-beli elemnek nemnulla őse van, tehát van legalább egy őse $A$-ban. Amelyeknek 1 őse van, az ő szüleik pontosan azok az elemek $A$-ban, amelyeknek 0 ősük van. Így ezek a szülők az $A_0$-ban vannak. Hasonlóan, a $B_1$ 3 őssel rendelkező elemei az $A_0$ 2 őssel rendelkező elemeit kapják szülőként. És így tovább, minden $B_1$-beli elemnek van egy szülője $A_0$-ban. Látjuk, hogy az $f$ $A_0$ néhány elemét a $B_1$ összes elemébe képzi, ami azt jelenti, hogy $f$ egy bijekció megszorítva $A_0 \longrightarrow B_1$-re (mert $f$ bijektív volt). Még egyszer használva a részhalmazok egymásbadarabolhatóságára vonatkozó állítást, láthatjuk, hogy ez az $A_0 \sim_G B_1$-t írja le.

- Hasonlóan ha a $g$ bijektív leképezést megszorítjuk a $B_0 \longrightarrow A_1$-re, akkor megkapjuk az $A_1 \sim B_0$ egymásbadarabolhatóságot. Ugyanezt a $g^{-1}$-el is leírhatjuk.

Összefoglalva az eddigi eredményeket, megkapjuk a keresett darabonkénti függvényt.

- Ezek a függvények és részhalmazok együtt definiálnak egy új darabonkénti $h : A \longrightarrow B$ leképezést, az alábbi módon:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in A_0 \cup A_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{ha } x \in A_1 \end{cases}$$

  Láthatjuk, hogy ez darabonkénti $G$-ben: a bijekciók darabonkéntiek $G$-ben, és a partíciók együtt egy új, véges partícióját adják $A$-nak.

A darabonkénti függvény definíciójából következik, hogy $h$ igazolja $A$ és $B$ $G$-egymásbadarabolhatóságát, amivel a bizonyításunkat befejeztük. $\square$

Az alábbi következmény egyszerűbbé tesz nekünk néhány bizonyítást, és a kívánt ekvivalens definíciót fogja eredményezni.

**3.16. következmény.** [MaWa, 2.27.Köv.]
Legyen $G$ egy, az $X$ halmazon ható csoport, és legyen $A \subseteq X$. Ha $A$ tartalmaz két diszjunkt részhalmazt, amelyek egymásbadarabolhatóak $A$-val, akkor az $A$ $G$-paradox.

*Bizonyítás.* [MaWa, 2.27.Biz.] Legyen $A_1, A_2 \subseteq A$ az állításban szereplő két diszjunkt részhalmaz. Ekkor az egymásbadarabolhatóság reflexivitása miatt teljesül, hogy az $A \setminus A_1 =: B$ egymásbadarabolható saját magával, azaz az $A$ egy részhalmazával. Az $A$ egymásbadarabolható az $A_2$-vel, a $B$ egy részhalmazával. Ekkor a Banach-Schröder-Bernstein tételből következik, hogy $A \sim_G B$.
Mivel $A_1$ és $B = A \setminus A_1$ diszjunktak és $A = A_1 \cup (A \setminus A_1)$ egy paradox felbontását adja az $A$-nak, az állítás egyből következik a paradox tulajdonság definíciójából. $\square$

Ez az eredmény megengedi nekünk, hogy enyhítsük a paradox tulajdonság definícióját a következőképpen.

**3.17. definíció.** ($G$-paradox tulajdonság ekvivalens definíció)
Az $E \subseteq X$ halmazt $G$-paradoxnak vagy $G$-paradox tulajdonságúnak nevezzük, ha léteznek $A, B \subseteq E$ részhalmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$ és $E \sim_G A$, $E \sim_G B$.

Ez könnyebbé teszi egy halmaz paradoxságának bizonyítását, mivel nem kell megvizsgálnunk a részhalmazok unióját.

# 4. Példák paradox halmazokra és paradox csoportokra

Ebben a fejezetben különböző meglepő eredményeket gyűjtöttem össze, Stan Wagon ebben a témában írt könyvéből ([StanWag]). A legtöbb érdekesség bizonyítását nem írtam le, mert a kutatásom során ezen paradox eredmények általános, mélyebb okainak nagyobb figyelmet szenteltem. Fontosnak tartottam azonban, hogy néhányat ezek közül beemeljek a szakdolgozatomba, mert a terület fontos eredményeit, mérföldköveit jelentik, és egyes tételeket - ezeknek a bizonyítását is leírtam - még használni fogunk. A [StanWag] forrásban minden itt szereplő állítás bizonyítása megtalálható.

## 4.1. Paradox halmazok

Amikor először láttam példát paradox halmazra, el sem akartam hinni, amit látok. Időre volt szükségem, hogy megbarátkozzak a gondolattal. Ezért első példaként Galileo megfigyelésének modern formáját írom le, ami egy jó bemelegítés az az után következő megszámlálhatóan paradox tulajdonság megvizsgálásához. Megismerkedünk a kiválasztási axiómával is, és először gondolkozhatunk el arról, hogy vajon mekkora szerepet is játszik a paradoxonok létrejöttében.

**4.1. axióma.** (A kiválasztási axióma [MaWa, 1.Ax.])
Diszjunkt nemüres halmazok bármely nemüres családjára létezik olyan halmaz, amely pontosan egy elemet tartalmaz a halmazcsalád minden tagjából.

Az alábbi két halmazhoz a következő megszokott jelöléseket fogom használni.

**4.2. definíció.** (Az egységgömb és az egységgömb-felület)
Az origó-középpontú, $\mathbb{R}^n$-beli $S^n$ egységgömb-felületet és a $B^n$ egységgömböt az alábbi képlet definiálja:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \text{ és } B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

A következő tétel, amely azt mutatja, hogy bármely végtelen halmaz paradox tulajdonságú a saját permutációcsoportjára nézve, Galileo egész számokról szóló megfigyelésének modern formája. Nem bizonyítjuk.

**4.3. tétel.** [StanWag, 1.4.Tét.]
Jelölje $|X|$ az $X$ halmaz számosságát, és legyen $G$ az a csoport, amely a $g : X \longrightarrow X$ bijekciókból áll ($G$-t az $X$ permutációcsoportjának hívjuk). Ekkor a következők ekvivalensek:
**a)** $|X| = 2|X|$,
**b)** $X$ $G$-paradox,
**c)** $X$ végtelen (vagy üres).

A tétel bizonyításában a kiválasztási axiómát is használni kell.

A következő példához a paradoxság definícióját kibővítjük megszámlálhatóan sok részhalmazra is.

**4.4. definíció.** (Megszámlálhatóan $G$-paradox tulajdonság [StanWag, 7.old.])
Az $E$ $G$-halmaz megszámlálhatóan $G$-paradox, ha

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i B_i,$$

ahol az $\{A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..\}$ páronként diszjunkt $E$-részhalmazok megszámlálható családja, $g_i$ illetve $h_i \in G$ csoportelemek, $i = 1, 2, ....$

Vitali következő tétele egy megszámlálhatóan paradox halmazról szól. A Vitali paradoxon, ami egy óriási lökést adott a terület kibontakozásának, mértékelméleti következményekkel is bír. Ezeket a következő fejezetben fogom leírni és bebizonyítani. Mivel hasonló konstrukciók gyakran előfordulnak a paradoxonokban, a tétel bizonyítási módszerét is érdemes átgondolni. A kiválasztási axiómát ismét használni fogjuk. Ne feledjük: $S^1$ jelöli az egységkört, $SO(2)$ pedig a a kör forgatásainak csoportját.

**4.5. tétel.** (Vitali paradoxon, 1905 [StanWag, 1.5.Tét.])
$S^1$ megszámlálhatóan $SO(2)$-paradox. Máshogy mondva: ha az $X = [0, 1)$ intervallum és $G$ jelöli az eltolások csoportját $X$-en modulo 1, akkor az $X$ halmaz megszámlálhatóan $G$-paradox.

*Bizonyítás.* [StanWag, 1.5.Biz.] Definiáljuk az $S^1$-en a következő $\sim$ ekvivalenciarelációt: két pontot akkor nevezünk ekvivalensnek, ha az egyik pont elérhető a másikból egy origó körüli $q\pi$ szögű forgatással, valamilyen $q \in \mathbb{Q}$ racionális számra.
Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható, ezeket a forgatásokat felsorolhatjuk a $\{\rho_i : i = 1, 2, ...\}$ halmaz segítségével. A kiválasztási axióma segítségével definiáljuk az $M$ halmazt: legyen $M$ a $\sim$ ekvivalenciaosztályainak halmaza. Legyen $M_i := \rho_i(M)$. Ekkor az $\{M_i\}$ halmazrendszer partícionálja az $S^1$-et. Mivel minden $M_i$ egymásba vihető egy megfelelő $SO(2)$-beli forgatással, a páros indexű $M_i$-k egyenként forgathatóak úgy, hogy minden $M_i$-t lefedjenek (például úgy, hogy minden $M_i$-t az $M_{i/2}$ indexű halmazba forgatunk), és így kiadják az egész $S^1$-et. Ugyanez igaz a páratlan indexűekre is. Ezzel beláttuk, hogy az $S^1$ megszámlálhatóan $SO(2)$-paradox.
Ez a konstrukció egyszerűen alkalmazható a $[0, 1)$ intervallumra is, a $(\cos(\Phi), \sin(\Phi)) \mapsto \Phi/2\pi$ bijekció alkalmazásával, ami egy alkalmas megfeleltetést indukál az $SO(2)$ és a $G$ csoportok között. □

Ezt a tételt könnyebb megérteni és elfogadni, mint azokat a konstrukciókat, ahol klasszikus paradox halmazokról van szó, mert a végtelen fogalmának paradox természetű tulajdonságaival már találkoztunk, jobban ismerjük őket.

Viszont valamiért mégiscsak szükség volt a paradox tulajdonság definiálására - gondolhatjuk, jogosan. Kell lennie konkrét példáknak a véges esetben is! Az intuíciónk azt sugallja, hogy ezek a paradoxonok biztosan csak magasabb dimenziókban, valamilyen különleges csoportra érvényesek, amiket már úgysem tud senki elképzelni. Alacsonyabb dimenziókra, a síkra, a térre, vagy akár az izometriacsoportokra nem is gondolnánk, sőt, egyenesen lehetetlennek tartjuk az ötletet. Nem úgy, mint Sierpinski és Mazurkiewicz, akik nem engedték, hogy megtévesszék őket a megérzéseik.

**4.6. tétel.** (Sierpinski - Mazurkiewicz paradoxon [StanWag, 1.7.Tét.])
Létezik az $\mathbb{R}^2$ síknak nemüres, $G_2$-paradox részhalmaza.

Bizony, már a síkon lehetséges olyan paradoxonokat konstruálni, amelyek csak véges sok darabot igényelnek, és amelyek izometriákat, azaz távolságtartó leképezéseket alkalmaznak. Ráadásul anélkül, hogy a bizonyítás során a kiválasztási axiómát használnunk kellene!

Ilyen síkbeli részhalmaz létezésének az oka az, hogy a sík $G_2$ izometriacsoportja tartalmaz egy szabad nem-Abel részfélcsoportot, aminek a hatása különösen szép. Erről a következő alfejezetben több szó esik majd, ki fog derülni, hogy milyen kapcsolat van a $G$-paradox tulajdonság és $G$ szabad részcsoportjai, részfélcsoportjai között.

A fentebb felsorolt 3 példa még csak a kezdet. Azt gondolnánk, hogy az 1, 2 és 3 dimenziós terek között nincs érdemi különbség a paradoxonok szempontjából. Az alábbi tételek cáfolják ezt a megérzést.

**További kedvcsináló, fontos eredmények:** [StanWag, 10.Old.]

- Az $\mathbb{R}^1$-nek nincs nemüres paradox részhalmaza.
- Vannak az $\mathbb{R}^2$-ben megszámlálhatatlan, paradox részhalmazok.
- Nem létezik $\mathbb{R}^2$-nek korlátos, nemüres belsejű, paradox részhalmaza.
- $\mathbb{R}^n$-ben ($n \geq 3$) minden korlátos nemüres belsejű halmaz paradox (Banach-Tarski paradoxon általánosítása).

*"Több dolgok vannak földön és égen, Horatio, mintsem, bölcselmetek álmodni képes. De jerünk tovább (...)"*[1]

## 4.2. Paradox csoportok

Külön figyelmet kell szentelnünk a paradox csoportoknak is, mert egy csoport paradoxsága összefüggésbe hozható azon halmaz paradox tulajdonságával, amelyen a csoport hat. Érdemes mindkét irányból vizsgálódnunk, hogy megértsük ezt a kapcsolatot. Mivel a Banach-Tarski paradoxon -féle konstrukciók ilyesfajta csoportok alkalmazásaira épülnek, alaposabban is fogunk a foglalkozni velük, az Amenábilitás című fejezetben. Első nekifutásra keresünk egy példát és követjük az abból fakadó megérzéseinket.

Emlékeztető: egy csoportot akkor hívtunk paradoxnak, ha a saját magán vett hatása baloldali szorzásként paradox (3.11 definíció). Az $\mathbb{F}_n$ jelölte az $n$ rangú szabad csoportot.

Ebben a részben látni fogjuk, hogy az $\mathbb{F}_2$ egy paradox csoport. Megvizsgáljuk a 2-rangú szabad félcsoportot is és megpróbáljuk karakterizálni a paradox csoportokat. Megsejthetjük, hogy ez egy nagyobb feladat, mint amilyennek elsőre mutatkozott.

**4.7. tétel.** [StanWag, 1.2.Tét.]
$\mathbb{F}_2$ a baloldali szorzásra, mint csoporthatásra nézve $\mathbb{F}_2$-paradox.

*Bizonyítás.* [StanWag, 1.2.Biz.] Legyen $\sigma, \tau$ az $\mathbb{F}_2$ csoport szabad generátorai, és jelölje 1 a csoport egységelemét. Ha $\rho$ a $\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}$ valamelyike, akkor legyen $W(\rho)$ az $\mathbb{F}_2$ azon elemeinek

[1] Shakespeare, William, 1564-1616 author. The Tragedy of Hamlet, Prince of Denmark. [London] :The Folio Society, 1954. Arany János fordítása

halmaza, amelyek a $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ betűkből kirakott szavak, és a bal első betűjük $\rho$. Ekkor $\mathbb{F}_2 = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\tau) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau^{-1})$, és ezek a részhalmazok páronként diszjunktak (mert feltettük, hogy $\mathbb{F}^2$-ben csak redukált szavak vannak a 2.15 konstrukció szerint). Továbbá $W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) = \mathbb{F}_2$ és $W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1}) = \mathbb{F}_2$. Mert ha $h \in \mathbb{F}_2 \setminus W(\sigma)$, akkor $\sigma^{-1}h \in W(\sigma^{-1})$, és $h = \sigma(\sigma^{-1}h) \in \sigma W(\sigma^{-1})$, és ezzel a tételt beláttuk. Jegyezzük meg, hogy itt csak 4 részt használtunk. $\square$

Az előző bizonyítás továbbfejleszthető úgy, hogy a paradox felbontás 4 halmaza ne csak az $\mathbb{F}_2 \setminus \{1\}$-et fedje, hanem magát az $\mathbb{F}_2$-t (3.15).

Joggal érdekelhetnek minket egy $S$ félcsoport $X$ halmazon vett hatásai is. Az inverz hiánya miatt egy $\sigma \in S$ elem által indukált függvény $X$-en nem biztos, hogy bijektív, ezért a paradox tulajdonságot itt máshogy kell definiálnunk. Mindenesetre vannak hasonlóságok az előző esettel.

A $T$ halmaz által generált szabad félcsoport egyszerűen az a halmaz, amely az összes $T$-beli betűből kirakható szóból áll, és ugyanúgy a konkatenáció a félcsoport művelete. A rangot hasonlóan definiáljuk, mint egy csoport esetén.

**4.8. tétel.** [StanWag, 1.3.Áll.]
Az $S$ szabad 2-rangú félcsoport, a $\tau$ és $\rho$ szabad generátorelemekkel. Ekkor $S$ tartalmaz két diszjunkt részhalmazt, $A$-t és $B$-t, amelyekre $\tau S = A$ és $\rho S = B$. Tehát, minden olyan csoport, amelynek van szabad 2-rangú részfélcsoportja, tartalmaz nemüres paradox halmazokat.

*Bizonyítás.* [StanWag, 1.3.Biz.] Legyen $A$ azon halmaz, ami a $\tau$-val, és $B$, ami a $\rho$-val kezdődő szavakból áll. Ha $S$ be van ágyazva egy $G$ csoportba, azaz részcsoport a $G$-ben, akkor $S$ maga egy paradox halmaza a $G$-nek, mert $S = \tau^{-1}A = \rho^{-1}B$. $\square$

Ez egy nagyon biztató eredmény, azt remélhetjük, hogy e mentén további paradox csoportokat fedezhetünk fel, és ez így is van, ehhez hasonló ötletekre lesz szükségünk.

Az következő állítás a paradox halmazok és a paradox csoportok közötti kapcsolatról szól, következményként pedig a paradox csoportok egy konkrét típusát adja meg. Belátni a következő fejezetben fogom, mert a Hausdorff paradoxon bizonyításához fogom felhasználni. A könnyebb megfogalmazás érdekében előtte kimondok egy definíciót.

**4.9. definíció.** (Szabad hatás [StanWag, 11.Old.])
Azt mondjuk, hogy egy $G$ csoport az $X$ halmazon szabadon, vagy nemtriviális fixpontok nélkül hat, ha teljesül, hogy a csoport egyik nemidentitás eleme sem hagy fixen egy halmazbeli pontot sem: $\forall g \in G$, $g \neq e$, $\forall x \in X$: $gx \neq x$.

**4.10. állítás.** [StanWag, 1.10.Áll.]
Legyen $G$ egy paradox csoport, $X$ pedig egy $G$-halmaz. Ha a $G$ az $X$-en szabadon hat, akkor $X$ $G$-paradox. Speciálisan $X$ $\mathbb{F}_2$-paradox tulajdonságú bármikor, amikor az $\mathbb{F}_2$ az $X$-en szabadon hat.

Így ha sikerülne meghatározni a paradox csoportokat, akkor - feltéve, hogy szabadon hatnak rajtuk - sok paradox halmazt is felfedeznénk.

Mivel egy $G$ csoport tetszőleges $H$ részcsoportja $G$-n nemtriviális fixpontok nélkül hat baloldali szorzásként, az alábbi állítás közvetlen következménye az előzőnek.

**4.11. következmény.** [StanWag, 1.11.Köv.]
Ha egy $G$ csoportnak van paradox részcsoportja, akkor $G$ paradox. Így speciálisan bármely olyan csoport, aminek részcsoportja az $\mathbb{F}_2$ (például bármely nem-Abel szabad csoport), paradox tulajdonságú.

Tehát hogyha egy csoport részcsoportként tartalmaz szabad nem-Abel részcsoportot, akkor az paradox tulajdonságú, hiszen ezek részcsoportként tartalmazzák az $\mathbb{F}_2$ paradox csoportot. A $G_1$ és a $G_2$ izometriacsoportok például nem tartalmaznak szabad nem-Abel részcsoportot, ami miatt ők kivételes esetnek számítanak majd a következő fejezetben.

Felmerülhet a kérdés: vajon csak ezek a paradox csoportok léteznek? Precízebben: vajon csak azok a paradox csoportok, amelyek részcsoportként tartalmazzák a 2-rangú szabad csoportot, az $\mathbb{F}_2$-t? Ezt a kérdést először Neumann János vetette fel 1929-ben, és a terület hosszas fejlődése után végül 1980-ban került megválaszolásra, Ol'shanskii által. A paradox csoportok halmaza bővebb, mint azt képzeltük volna.

**4.12. tétel.** [StanWag, 1.12.Tét.]
Létezik olyan paradox csoport, amelynek nincs végtelen rendű eleme, és így bármilyen rangú szabad részcsoportja sincs.

Ezek szerint az imént meghatározott paradox csoportokon kívül vannak még, amiket nem fedtünk le. A paradox csoportokat az első megérzésünket követve tehát nem sikerült teljes mértékben karakterizálnunk, ebben a fejezetben legalábbis. Ehhez egy új definíció bevezetésére, az amenábilitás fogalmára lesz szükségünk. Ennek egy külön fejezetet szántam.

# 5. Hausdorff paradoxon

Az előző részben beláttuk, hogy szabad nem-Abel csoportokat arra is használhatunk, hogy paradoxonokat generáljunk velük. Ebből kiindulva szeretnénk olyan csoportokat találni, amelyek tartalmaznak ilyen típusú részcsoportokat. Nagy meglepetésünkre az első felkínálkozó lehetőség erre a $G_3$ izometriacsoport. Az alábbiakban megkonstruáljuk a $G_3$ szabad $\mathbb{F}_2$ részcsoportját, és megvizsgáljuk a paradox felbontást, amit eredményez. Belátjuk a 4.10 állítást, aminek segítségével bebizonyítjuk Hausdorff híres paradoxonát. Mivel a Hausdorff paradoxonnak fontos mértékelméleti következményei vannak, a Vitali paradoxonnal együtt ez is az úgynevezett mértékelméleti paradoxonok közé tartozik. Mivel a következményeit is szeretném alaposan megvizsgálni, ezt a fejezetet egy mértékelméleti bevezetővel kezdem.

Az ebben a fejezetben leírtak a [StanWag], [EquLac], [ParMe] és a [KósG] forrásokból származnak.

## 5.1. Mértékelméleti bevezető

A gimnáziumból az egyetemre kerülve azonnal megértettem, hogy minden, amit eddig a matematikában alkalmaztam, minden szabály és definíció egy-egy általánosabb fogalom speciális esete. Amikor összeadtam két számot, igazából a valós számok testén végeztem el a kommutatív csoportműveletet. Egy háromszög területének kiszámolásakor egy euklideszi metrika szerinti 2-dimenziós térfogatot számoltam. Mintha addig egy burokban éltem volna, úgy tágult ki a látóköröm az egyetemi éveim alatt.

Minden alkalommal, amikor azt hittem, hogy egy adott fogalomkört tovább általánosítani már nem lehet, mindig jött a következő analízis tárgy, amely megcáfolta ezt: ez a terület mindig tudott újat mutatni. Analízis órákon - sok egyéb mellett - főképp az integrálás és a térfogatszámítás fogalmát szerettük volna kibővíteni. Ha valaminél elakadtunk, a következő félévben mindent kezdtünk elölről, hogy még több halmaznak értelmezhessük és kiszámíthassuk a területét, térfogatát. Ebből a törekvésből született meg a mértékelmélet, a térfogat fogalmának általánosításaként pedig mérték.

A mértékelméleti bevezetőben szereplő definíciókat Kós Géza Analízis 4 jegyzetéből ([KósG]) gyűjtöttem össze, mert ezt a tárgyat tőle tanultam. Felhasználtam még a [StanWag], [EquLac], [ParMe] jegyzeteket is, az invariáns mértékek fogalmának bevezetéséhez.

Elsőként felépítjük a mérhető halmazok rendszerét, amelyek egy úgynevezett $\sigma$-algebrát fognak alkotni. A könnyebb megértés érdekében ehhez elsőként a halmazgyűrű, halmazalgebra és a $\sigma$-gyűrű struktúrákat definiálom. $\mathscr{P}(X)$ jelöli az $X$ halmaz összes részhalmazából álló halmazcsaládot.

**5.1. definíció.** (Halmazgyűrű [KósG, 35.Old.])
Az $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer egy halmazgyűrű, ha

- $\emptyset \in \mathscr{R}$,
- bármely $A, B \in \mathscr{R}$ esetén $(A \cup B) \in \mathscr{R}$, $(A \cap B) \in \mathscr{R}$ és $(A \setminus B) \in \mathscr{R}$.

**5.2. definíció.** (Halmazalgebra [KósG, 35.Old.])
Az $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer egy halmazalgebra, ha olyan halmazgyűrű, ami zárt a komplementerképzésre is:

- $\emptyset \in \mathscr{A}$ és $X \in \mathscr{A}$;
- bármely $A, B \in \mathscr{A}$ esetén $(A \cup B) \in \mathscr{A}$, $(A \cap B) \in \mathscr{A}$, $(A \setminus B) \in \mathscr{A}$ és $(X \setminus A) \in \mathscr{A}$.

**5.3. definíció.** ($\sigma$-gyűrű [KósG, 36.Old.])
Az $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer egy $\sigma$-gyűrű, ha olyan halmazgyűrű, ami a megszámlálható unióra is zárt: bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ esetén $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{R}$.

Bárhogy is definiáljuk majd nemsokára a mérték és a mérhető halmazok fogalmát, egy adott mérték szerint mérhető halmazok $\sigma$-algebrát alkotnak.

**5.4. definíció.** ($\sigma$-algebra [KósG, 36.Old.])
Az $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer egy $\sigma$-algebra, ha olyan halmazalgebra, ami a megszámlálható unióra is zárt: bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ esetén $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Megtettük az előkészületeket a mérhető halmazok rendszerének felépítéséhez. Most a mértéket szeretnénk definiálni, ami egy speciális halmazfüggvény lesz: minden halmazhoz az adott halmaz mértékét, azaz egy számot rendel. Leírom az additív és a $\sigma$-additív halmazfüggvény fogalmát, ami már elég lesz ahhoz, hogy megértsük a mérhető tér, a mérték és a mértéktér definícióját. Először bevezetem az alábbi megszokott és praktikus jelölést, az átláthatóság kedvéért.

**5.5. definíció.** ($\overline{\mathbb{R}}$)
Jelölés: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

**5.6. definíció.** (Additív és $\sigma$-additív halmazfüggvények [KósG, 42.Old.])
Legyen $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer, $\emptyset \in \mathscr{A}$, $\alpha : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ vagy $\alpha : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$, és $\alpha(\emptyset) = 0$.

- Az $\alpha$ halmazfüggvény (végesen) additív, ha bármely olyan, páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ halmazokra, amelyekre $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \in \mathscr{A}$,
$$\alpha\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$
Ebbe beleértjük, hogy az összeg mindig létezik, tehát a tagok között nem szerepelhet a $-\infty$ és a $+\infty$ érték is.

  Ha $\mathscr{A}$ halmazgyűrű, akkor az additivitást elég $n = 2$-re megkövetelni.
- Az $\alpha$ halmazfüggvény $\sigma$-additív, ha bármely olyan, páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ halmazokra, amelyekre $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \in \mathscr{A}$,
$$\alpha\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$
Ebbe beleértjük, hogy az összeg mindig létezik, és sorrendfüggetlen is.

5.7. *megjegyzés.* [KósG, 43.Old.] A $\sigma$-additivitásból következik az additivitás, mert a véges unióhoz hozzávehetünk végtelen sok üres halmazt.

**5.8. definíció.** (Mérhető tér [KósG, 43.Old.])
$(X, \mathscr{M})$ mérhető tér, ahol $X \neq \emptyset$ a tér alaphalmaza, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(X)$ egy $\sigma$-algebra, a "mérhető" halmazok rendszere.

**5.9. definíció.** (Mérték [KósG, 44.Old.])
Legyen $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér.

- A $\sigma$-additív $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty]$ függvényeket ($\mu(\emptyset) = 0$) mértékeknek nevezzük.
- A $\sigma$-additív $\vartheta : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvények ($\vartheta(\emptyset) = 0$) az előjeles mértékek.
- A $\sigma$-additív $\vartheta : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ függvények ($\vartheta(\emptyset) = 0$) a komplex mértékek.

**5.10. definíció.** (Mértéktér [KósG, 44.Old.])

- $(X, \mathscr{M}, \mu)$ mértéktér, ha $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér, és $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ mérték.
- $(X, \mathscr{M}, \vartheta)$ előjeles mértéktér, ha $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér, és $\vartheta : \mathscr{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték.
- $(X, \mathscr{M}, \vartheta)$ komplex mértéktér, ha $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér, és $\vartheta : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ komplex mérték.

Neves matematikusok különböző érdekes és szép mértékeket konstruáltak és vizsgáltak. Hoztam pár egyszerű bevezető példát, hogy könnyebb legyen elképzelni őket.

5.11. *példa.* [KósG, 45.Old.]

- Konstans nulla mérték:
$$\mu \equiv 0$$
- Konstant $\infty$:
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{ha } A = \emptyset \\ \infty & \text{ha } A \neq \emptyset \end{cases}$$
- Tetszőleges $X$ alaphalmaz esetén a $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ függvény számlálómérték vagy számosságmérték, ha $A \subseteq X$ esetén
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{ha } |A| \quad \text{véges} \\ \infty & \text{ha } A \quad \text{végtelen} \end{cases}$$
- Tetszőleges $X$ alaphalmaz és $x_0 \in X$ esetén a $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ függvény a Dirac-mérték vagy az $x_0$-ra koncentrált mérték, ha $A \subseteq X$ esetén
$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_0 \in A \\ 0 & \text{ha } x_0 \notin A \end{cases}$$

Az integrálás és a térfogat fogalmát először Riemann-integrálként és Jordan-mértékként általánosítottuk az analízis órákon, majd a mértékelméletben tovább terjesztettük ezeket a fogalmakat a Lebesue-mérték segítségével, hogy még több halmazt meg tudjunk mérni. A mértékelméleti paradoxonok területén általában a Lebesgue-mértéket vesszük alapul, és az aszerint mérhető halmazokat vizsgáljuk. Először a Lebesgue-féle külső mértéket és a Lebesgue-mérhetőséget definiálom.

**5.12. definíció.** (Lebesgue-féle külső mérték [KósG, 33.Old.])
Egy $A \subseteq \mathbb{R}^p$ halmaz Lebesgue-féle külső mértéke

$$\overline{\lambda}(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(R_k) : \ R_1, R_2, \ldots \text{ tengelypárhuzamos téglák, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k. \right\}.$$

**5.13. definíció.** (Lebesgue-mérhetőség [KósG, 52.Old.])
$A \subseteq \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető, ha bármely $H \subseteq \mathbb{R}^p$ esetén $\overline{\lambda}(H) = \overline{\lambda}(H \cap A) + \overline{\lambda}(H \setminus A)$.

**5.14. tétel.** [KósG, 52.Old.]
A Lebesgue-mérhető halmazok $\sigma$-algebrát alkotnak, és ezen a külső Lebesgue-mérték $\sigma$-additív.
A Lebesgue-mérhető halmazok $\sigma$-algebráját $L$ vagy $L_p$ jelöli, magát a mértéket $\lambda(...)$ vagy $\lambda_p(...)$.

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi mértékelméleti definíciókra, elnevezésekre is.

**5.15. definíció.** (Totális mérték)
Legyen $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér. A $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty]$ mérték totális mértékén a $\mu(X) \in [0, \infty]$ számot értjük.

**5.16. definíció.** (Normalizál)
Legyen $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty]$ mérték normalizál egy $A \in \mathscr{M}$ halmazt, ha $\mu(A) = 1$.

**5.17. definíció.** (Valószínűségi mérték)
Legyen $(X, \mathscr{M})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty]$ mérték valószínűségi mérték, ha a totális mértéke 1, vagy máshogy mondva, ha $\mu$ normalizálja az $X$ halmazt.

**5.18. definíció.** (Nullmértékű halmaz [KósG, 52.Old.])
$A \subseteq \mathbb{R}^p$ nullmértékű vagy Lebesgue-nullmértékű, ha $\overline{\lambda}(A) = 0$.

Most már megvannak a kellő mértékelméleti ismereteink. A következő definíciók megteremtik a kapcsolatot a csoport- és a mértékelmélet között.

Ha egy mérték valamilyen értelemben invariáns, akkor ez általában azt jelenti, hogy egy adott művelet/hatás/transzformáció hatására a halmazok mértéke nem változik.

**5.19. definíció.** (Invariáns mérték egy $G$ csoporton [EquLac, 148-149.Old.])
Legyen $G$ egy csoport. Azt mondjuk, hogy $\mu : \mathscr{P}(G) \longrightarrow [0, \infty]$ invariáns mérték a $G$-n, ha $\mu(gA) = \mu(A)$, minden $A \subseteq G$ és $g \in G$ esetén.

Ez a definíció kiterjeszthető minden $G$-halmazra.

**5.20. definíció.** ($G$-invariáns mérték [ParMe, 92.Old.])
Legyen $X$ egy $G$-halmaz és $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ egy $\sigma$-algebra. A $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty]$ mértéket $G$-invariánsnak nevezzük, ha $g(A) \in \mathscr{A}$ és $\mu(g(A)) = \mu(A)$ minden $g \in G$ és $A \in \mathscr{A}$ esetén.

Az invariáns mérték alaphalmaza $G$, a $G$-invariáns mértéké pedig egy $G$-halmaz. Ha a szóhasználatból nem derül ki egyértelműen, hogy az "invariáns" mérték alatt a fentebbi két definíció közül melyiket értjük, a mérték alaphalmazából mindig látszani fog, hogy épp melyikről van szó.

A továbbiakban a $G_n$ izometria-csoportra nézve invariáns mértékeket egyszerűen izometria-invariáns mértékeknek fogjuk hívni, ugyanígy a forgatás- illetve eltoláscsoportokra invariáns mértékeket is forgatás- illetve eltolás-invariáns mértékeknek nevezzük.

Újdonsült definícióinkat rögtön használni is fogjuk, egy kis bemelegítésként a Hausdorff-paradoxon bebizonyítása előtt. A 4.5 számú Vitali paradoxon bizonyításakor beláttuk, hogy az $S^1$ megszámlálhatóan $SO(2)$-paradox. Ennek látjuk be most pár fontos mértékelméleti következményét.

**5.21. következmény.** [StanWag, 1.6.Köv.]
1) Nem létezik olyan forgatás-invariáns, $S^1$ összes részhalmazán definiált mérték, aminek a totális mértéke 1.
2) Nem létezik olyan eltolás-invariáns, az $\mathbb{R}^n$ összes részhalmazán definiált mérték, ami normalizálná a $[0,1]^n$ egységkockát.
3) Létezik a $[0,1]$ intervallumnak olyan részhalmaza, ami nem Lebesgue-mérhető.

*Bizonyítás.* [StanWag, 1.6.Biz.]
1) Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy ilyen $\mu$ mérték. Ekkor, ha $A = \cup\{M_i|\ i \text{ páros}\}$ és $B = \cup\{M_i|\ i \text{ páratlan}\}$ ($M_i$ : mint a 4.5 tétel bizonyításában), akkor $1 = \mu(S^1) = \mu(A) + \mu(B) \geq \mu(S^1) + \mu(S^1) = 2$, ami ellentmondás.
2) $n = 1$-re ilyen mérték nem létezhet, mert a $[0,1]$ intervallum részhalmazaira vett megszorítása invariáns lenne az eltolásokra modulo 1, ami ellentmond a 4.5 tételnek. Ha lenne ilyen $\mathbb{R}^n$-beli mérték magasabb dimenziókban, az az $\mathbb{R}$ részhalmazain is indukálna egy ugyanilyet, ami ellentmondás.
3) ez a 2)-ből következik, például az $\{\alpha \in [0,1)|\ (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in M\}$ ($M$ mint a 4.5 tétel bizonyításában) halmaz nem Lebesgue-mérhető. $\square$

Az 5.1 következmény az első olyan tétel, ami a paradox hatások és az invariáns mértékek között kapcsolatot teremt. Megkaptuk, hogy nem létezik izometria-invariáns, $\mathbb{R}^n$ összes részhalmazán definiált mérték, ami normalizálná az egységkockát. Ez ahhoz a kérdéshez vezetett, hogy vajon létezik-e olyan mérték $\mathbb{R}^n$ összes részhalmazán, ami egy kicsit gyengébb feltételeket teljesít. Így született meg a Hasudorff paradoxon.

## 5.2. Hausdorff paradoxon

Amikor egy mérték feltételeit enyhíteni szeretnénk, egy lehetséges irány az, hogy a $\sigma$-additivitást véges additivitásra cseréljük, ezért természetes feltenni a kérdést, hogy létezik-e a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$-en végesen additív, izometria-invariáns mérték. Ez a kérdés motiválta Hausdorffot, hogy megalkossa az $S^2$-n való paradox konstrukcióját. Ezt fel tudta használni arra, hogy az $n = 1, 2$ kivételével minden dimenzióban választ adjon a kérdésre.

Először egy fontos állítást látunk be, amit a Hausdorff paradoxon bizonyításához fogunk használni.

Az itt leírtak a [StanWag], a [ParLac] és a [ParKat] forrásból származnak.

**5.22. tétel.** [StanWag, 1.10.Áll.]
Legyen $G$ egy paradox csoport, $X$ pedig egy $G$-halmaz. Ha $G$ az $X$-en szabadon hat, akkor $X$ $G$-paradox. Speciálisan $X$ $\mathbb{F}_2$-paradox bármikor, amikor az $\mathbb{F}_2$ az $X$-en szabadon hat.

*Bizonyítás.* [StanWag, 1.10.Biz.] Tegyük fel, hogy az $A_i, B_j \subseteq G$ részhalmazok és a $g_i, h_j \in G$ elemek mutatják, hogy $G$ paradox. A kiválasztási axiómát használva létezik egy $M$ halmaz, ami pontosan egy-egy elemet tartalmaz minden $X$-beli $G$-pályából. Ekkor $\{g(M)|\ g \in G\}$ az $X$ egy partíciója, a halmazcsalád páronkénti diszjunktsága a nemtriviális fixpontok hiányából könnyen adódik. Most legyen $A_i^* = \cup\{g(M)|\ g \in A_i\}$ és $B_j^* = \cup\{g(M)|\ g \in B_j\}$. Ekkor $\{A_i^*\} \cup \{B_j^*\}$ páronként diszjunkt részhalmazi az $X$-nek (mert $\{A_i\} \cup \{B_j\}$ páronként diszjunkt), és mivel $G = \cup g_i A_i = \cup h_j B_j$, következik, hogy $X = \cup g_i A_i^* = \cup h_j B_j^*$.
Az $\mathbb{F}_2$-re vonatkozó állítás abból adódik, hogy $\mathbb{F}_2$ paradox.
Jegyezzük meg, hogy az $X$ felbontásához használt részhalmazok számát $G$ adta meg. □

Mivel a két generátorú szabad csoport minden szabad hatása paradox hatásokat eredményez, felmerült a kérdés, hogy milyen egyszerű forgatás- vagy izometriacsoportok tartalmaznak ilyen szabad részcsoportokat. Meglepetésünkre nem kell nagyon messzire menni, mert az $SO(3)$ forgatáscsoport már egy alkalmas példa lesz erre. Ezt fogjuk felhasználni a paradoxon bizonyításában.

Az első explicit konstrukciója az $SO(3)$-beli $\mathbb{F}_2$ részcsoportnak Hausdorffhoz nyúlik vissza. Itt egy egyszerűsített Swierczkowski-konstrukciót adunk meg.´

**5.23. definíció.** (Független részhalmaz [StanWag, 15.Old.])
A $G$ csoport $S$ részhalmaza független, ha $S$ szabadon generálja $G$ egy $H$ részcsoportját. Ekkor $H$ egy $|S|$ rangú szabad csoport.

**5.24. tétel.** (2 elemű szabad csoport az $SO(3)$-ban [StanWag, 2.1.Tét.])
Létezik az $SO(3)$-ban két forgatás, amely a 2 elemű szabad csoportot generálja. Másképp mondva: létezik $SO(3)$-ban egy kételemű független részhalmaz, ami két $\mathbb{R}^3$-beli, origón átmenő tengely körüli forgatást tartalmaz. Így ha $n \geq 3$, $SO(n)$ részcsoportként tartalmazza az $\mathbb{F}_2$-t.

*Bizonyítás.* [StanWag, 2.1.Tét.], [ParKat, 0.2.1.Tét.] Explicit módon fogjuk definiálni ezeket a forgatásokat, az alábbi mátrixok segítségével:

$$\Phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ezek az $\arccos(\frac{1}{3})$ szögű forgatások a $z$- illetve az $x$-tengely körül.
Azt kell megmutatnunk, hogy nincs nemtriviális redukált szó a $\Phi^{\pm 1}$, $\rho^{\pm 1}$ által generált szavak között, ami egyezne az identitással. Mivel a $\Phi$-vel való konjugálás nem hat arra, hogy egy szó eltűnik-e, megszoríthatjuk a vizsgálatunkat azokra a szavakra, amik jobb oldalt $\Phi^{\pm 1}$-el végződnek. Indirekt feltesszük, hogy $\omega$ egy ilyen szó, és $\omega$ az egységelem.
Azt állítjuk, hogy

$$\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix},$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b$ nem osztható 3-mal, és $k$ az $\omega$ szó hossza. Ez egy ellentmondás az indirekt feltevésünkhöz, erről kell belátnunk tehát, hogy igaz. Ahhoz, hogy megmutassuk ezt, $\omega$ hossza szerinti indukciót fogunk használni. Ha $|\omega|= 1$, akkor $\omega = \Phi^{\pm 1}$, és

$$\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Most legyen $\omega$: $\Phi^{\pm 1}\omega'$, vagy $\rho^{\pm 1}\omega'$ alakú, ahol $\omega'$ kielégíti az

$$\omega' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix}$$

egyenletet. A fent definiált mátrixok alkalmazásával könnyen látszik, hogy

$$\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}$$

,

ahol vagy $a = a' \mp 4b'$, $b = b' \pm 2a'$, $c = 3c'$, vagy $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$, $c = c' \pm 4b'$, aszerint, hogy $\omega$ $\Phi^{\pm 1}$-el vagy $\rho^{\pm 1}$-el kezdődik. Így $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Csak azt kell még belátnunk, hogy $b$ nem osztható 3-mal.
Most $\omega$: $\Phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, $\rho^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v$, $\Phi^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v$ vagy $\rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$ alakban írható, valamely $v$ szóra, ami lehet az üres is. Így 4 esetet kell megvizsgálnunk:

1. $\omega = \Phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$. Ebben az esetben $b = b' \mp 2a'$ és $a'$ osztható 3-mal. A feltételek szerint $b'$ nem osztható 3-mal, és így $b$ sem.

2. $\omega = \rho^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v$. Ebben az esetben $b = b' \mp 2c'$, és így $c'$ 3-mal osztható. De $b'$ nem osztható 3-mal, így $b$ sem.

3. $\omega = \Phi^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v$. A feltételek szerint $v(1, 0, 0) = \frac{1}{3^{k-2}}(a", \sqrt{2}b", c")$. Ebből következik, hogy $b = b' \pm 2a' = b \pm 2(a" \mp 4b") = b' + b" \pm 2a" - 9b" = 2b' - 9b"$. Emiatt $b$ nem osztható 3-mal.

4. $\omega = \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$. Ez az eset hasonló az előzőhöz.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

**5.25. tétel.** (Hausdorff paradoxon [StanWag, 2.3.Tét.])
Létezik az $S^2$-nek olyan megszámlálható részhalmaza, amelynek a komplementere $S^2$-n $SO(3)$-paradox.

*Bizonyítás.* [StanWag, 2.3.Tét.] A forgatáscsoport szabad $\mathbb{F}_2$ részcsoportjának minden eleme fixen hagy egy egész $\mathbb{R}^3$-beli egyenest, így $S^2$-n minden nemidentitás $\mathbb{F}_2$-beli elem fixen hagy 2 pontot, a gömb és az egyenes metszéspontjait. Így nem tudjuk rögtön alkalmazni az 5.22. tételt.
Rögzítsük az $SO(3)$-nak egy szabad 2-rangú részcsoportját. Jelölje $D$ az $S^2$ azon pontjait, amiket a szabad részcsoport valamely eleme fixen hagy. Mivel $\mathbb{F}_2$ megszámlálható halmaz, így $D$ is az. Most, ha $P \in S^2 \setminus D$ és $g \in \mathbb{F}_2$, akkor $g(P)$ szintén az $S^2 \setminus D$-ben fekszik: ha valamely $h \in G$ fixálná $g(P)$-t, akkor $P$ lenne a $g^{-1}hg$ csoportelem fixpontja. Így az $\mathbb{F}_2$ paradox csoport az $S^2 \setminus D$ halmazon nemtriviális fixpontok nélkül hat, amire már alkalmazható az 5.22 tétel, és ezzel beláttuk a Hausdorff paradoxont. □

Mivel az $S^2$ megszámlálható halmaza lehet sűrű, az állítás paradox természete nem látszik azonnal. A következő fejezetben azonban látni fogjuk, hogy $D$ elég kicsi ahhoz, hogy megfeledkezhessünk róla, és beláthassuk: $S^2$ $SO(3)$-paradox. De a $D$ eltüntetése nélkül is van a Hausdorff paradoxonnak egy jelentős mértékelméleti következménye.

Először adunk egy definíciót és egy állítást, amely precízen fogalmazza meg az alapvető összefüggést a paradox darabolások és a végesen additív mértékek nemléte között.

**5.26. definíció.** ($G$-elhanyagolható halmaz [StanWag, 2.4.Def.])
Legyen $G$ egy csoport, ami az $X$ halmazon hat, és legyen $E \subseteq X$. $E$ $G$-elhanyagolható halmaz, ha minden olyan $\mu$ végesen additív, $G$-invariáns, a $\mathscr{P}(X)$-en értelmezett mértékre, amelyre $\mu(E) < \infty$, teljesül, hogy $\mu(E) = 0$.

A következő állítás megfordítását használni fogjuk az utolsó fejezetben, az amenábilis csoportokról szóló első fontos eredmény bebizonyításához.

**5.27. állítás.** [StanWag, 2.5.Áll.]
Legyen $G$ egy csoport, ami az $X$ halmazon hat, és legyen $E \subseteq X$. Ha $E$ $G$-paradox, akkor $E$ $G$-elhanyagolható.

*Bizonyítás.* [StanWag, 2.5.Biz.] Tegyük fel, hogy $\mu$ végesen additív, $G$-invariáns, a $\mathscr{P}(X)$-en értelmezett mérték, amelyre $\mu(E) < \infty$. $E$ $G$-paradoxságát mutassa $A_i, g_i, B_j, h_j$. Ekkor $\mu(E) \geq \sum \mu(A_i) + \sum \mu(B_j) = \sum \mu(g_i A_i) + \sum \mu(h_j B_j) \geq \mu(\cup g_i A_i) + \mu(\cup h_j B_j) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E)$. Mivel $\mu(E) < \infty$, következik, hogy $\mu(E) = 0$. □

A Hausdorff paradoxon és az előbbi állítás fontos következménye az alábbi tétel.

**5.28. következmény.** [StanWag, 2.6.Tét.]
$S^2$ $SO(3)$-elhanyagolható. Ezért nem létezik végesen additív, forgatás-invariáns, $\mathscr{P}(S^2)$-n definiált mérték, amelynek totális mértéke 1. Továbbá igaz minden $n \geq 3$-ra, hogy nem létezik végesen additív, izomteria-invariáns, $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$-n definiált mérték, ami normalizálná az egységkockát.

*Bizonyítás.* [StanWag, 2.6.Biz.] Tegyük fel, hogy $\mu$ egy végesen additív, $SO(3)$-invariáns, $\mathscr{P}(S^2)$-n definiált mérték úgy, hogy $\mu(S^2) < \infty$. Ha $D$ a Hausdorff paradoxonban szereplő megszámlálható halmaz, akkor az előző állítás miatt $\mu(S^2 \setminus D) = 0$, mert $S^2 \setminus D$ $SO(3)$-paradox. Ezért elegendő megmutatni, hogy $\mu(D) = 0$. Legyen $l$ egy origón átmenő egyenes,

ami diszjunkt a $D$ halmaztól. Jelölje $L_\Theta$ az $l$ egyenes körüli, $\Theta$-szögű forgatást. Minden $P \in D$ pontra legyen $A(P) := \{\Theta \mid L_\Theta(P) \in D\}$, azaz azon szögek halmaza, amivel $P$-t az $l$ körül forgatva szintén $D$-beli pontot kapunk. $D$ megszámlálhatósága miatt $A(P)$ is megszámlálható, és így az $A = \cup\{A(P) | \ \mathbb{P} \in D\}$ halmaz is megszámlálható. Ha $\rho$ egy olyan szöggel való forgatás $l$ körül, ami nincs benne az $A$ halmazban, akkor teljesül, hogy $\rho(D) \cap D = \emptyset$. Ebből következik, hogy $\mu(S^2) \geq \mu(D \cup \rho(D)) = \mu(D) + \mu(\rho(D)) = \mu(D) + \mu(D)$, tehát $\mu(D) \leq \mu(S^2)/2$.
Ugyanezt az érvelést eljátszhatjuk a $D$ helyett az ugyancsak megszámlálható $D \cup \rho(D)$ halmazra, ami egy $\rho'$ forgatást eredményezne úgy, hogy $D \cup \rho(D)$ diszjunkt lenne a $\rho'(D \cup \rho(D))$-től. Így $\mu(S^2) \geq \mu(D \cup \rho(D)) + \mu(\rho'(D) \cup \rho'\rho(D)) = 4\mu(D)$, tehát $\mu(D) \leq \mu(S^2)/4$. Ezt így folytatva $\mu(D) \leq \mu(S^2)/2^k \ \forall k \in \mathbb{N}$, így $\mu(D) = 0$, ahogy akartuk. Így $\mu(S^2) = 0$, tehát $S^2$ $SO(3)$-elhanyagolható.
Hogy az $\mathbb{R}^n$-re vonatkozó állítást igazoljuk, elég az $n = 3$ esetet nézni, mivel egy magasabbb dimenzió-beli mérték indukál egyet $\mathbb{R}^3$-ben is. Most, ha $\mu$ egy izometria-invariáns mérték az $\mathbb{R}^3$-ben, ami az egységkockát normalizálja, akkor a $\mu$ eltűnik az egyelemű halmazokon. Ez amiatt van, hogy bármely két egyelemű halmaz egybevágó, ezért a mértékük is ugyanannyi, és ha a mértékük pozitív lenne, az egységkocka mértéke végtelen lenne. Továbbá az eltolás-invarianciából következik, hogy minden kockának véges, nemnulla mértéke van, és ebből következik, hogy $0 < \mu(B) < \infty$, ahol $B$ jelöli az egységgolyót. Definiálja a $\nu$ mértéket a $\mathscr{P}(S^2)$-n a következő: $\nu(A) = \mu\{\alpha P \mid P \in A, 0 < \alpha \leq 1\}$. Mivel $\mu(\{0\}) = 0$, $\nu(S^2) = \mu(B)$. Továbbá $\nu$ végesen additív és $SO(3)$-invariáns, mert $\mu$ az volt. Ez ellentmond $S^2$ $SO(3)$-elhanyagolhatóságának. □

Később közvetett úton, Tarski jelentős tételének segítségével belátjuk, hogy az alacsonyabb dimenziós euklideszi izometria-csoportok nem tartalmazzák részcsoportként az $\mathbb{F}_2$-t. Emiatt a Hausdorff paradoxon nem alkalmas arra, hogy eldöntse, létezik-e izometria-invariáns, végesen additív mérték a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^1)$-n és a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$-n. $G_1$ és $G_2$ ezen tulajdonsága szoros összefüggésben lesz azzal, hogy a két csoport feloldható, és ebből kifolyólag amenábilis.
Mielőtt azonban csoportelméleti szempontból kezdenénk el vizsgálódni, kimondjuk Banach erre vonatkozó tételét és annak két fontos következményét. A Banach mértékek tételét az Amenábilitás fejezetben bizonyítom.

**5.29. tétel.** (Banach mértékek [ParLac, 2.2.Tét.])
A Lebesgue-mérték $n = 1$ és $n = 2$ esetén kiterjeszthető az $\mathbb{R}^n$ minden részhalmazára végesen additív és izometria-invariáns mértékként. Ezeket a kiterjesztéseket Banach-mértékeknek nevezzük.

**5.30. következmény.** [ParLac, 2.3.Tét.]
Legyen $n = 1$ vagy $n = 2$. Ha a Lebesgue-mérhető $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ egymásbadarabolható, akkor $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$.

*Bizonyítás.* [ParLac, 2.3.Tét.] Valóban, legyen $A = \cup A_i$ és $B = \cup B_i$ partíciók úgy, hogy $A_i \cong B_i$ $i = 1, ..., k$. Ha $\mu$ a Banach-mérték, akkor $\lambda_n(A) = \mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(B_i) = \mu(B) = \lambda_n(B)$. □

**5.31. következmény.** [ParLac, 163.Old.]
Ha az $A \subseteq \mathbb{R}^2$ egy Lebesgue-mérhető paradox halmaz, akkor $\lambda_2(A) = 0$ vagy $\lambda_2(A) = \infty$, ami az 5.27 állítás speciális esete.

*Bizonyítás.* [ParLac, 163.Old.] Legyen $A = A_1 \cup A_2$, ahol $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ és $A \sim A_1 \sim A_2$. Ekkor $\lambda_2(A) = \mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2\mu(A) = 2\lambda_2(A)$, így $\lambda_2(A) = 0$ vagy $\lambda_2(A) = \infty$. □

A helyzet drasztikusan megváltozik magasabb dimenzióban, ahogy azt a Banach-Tarski paradoxon is mutatni fogja a következő fejezetben.

# 6. A Banach-Tarski paradoxon

Ebben a fejezetben a leghíresebb mértékelméleti paradoxont, a Banach-Tarski paradoxont fogom bebizonyítani. Mielőtt ebbe belekezdenénk, megvizsgáljuk az egymásbadarabolhatóság fogalmának eredetét, a klasszikus geometriai átdarabolhatóságot. Foglalkozni fogunk a Banach-Schröder-Bernstein tétel egy új bizonyításával és néhány következményével is. A fejezet végén egy rövid kitekintés erejéig megnézzük, hogy a kiválasztási axiómának milyen szerepe van a paradoxonok létrejöttében. Az alábbiak a [StanWag], a [HaiHu], a [MaWa] a [ParLac] és a [WaBoGe] forrásokból származnak.

## 6.1. Átdarabolhatóság

Először vizsgáljuk meg az egymásbadarabolhatóság általános fogalmának eredetét. A klasszikus geometriai átdarabolásokat már a görögök is vizsgálták, egyes síkbeli alakzatok területének kiszámítására. Az átdarabolások során nem vették figyelembe az egyes darabok határait, ami egy markáns különbség az egymásbadarabolhatóság halmazelméleti megközelítéséhez képest.

**6.1. definíció.** (Átdarabolhatóság [WaBoGe, 2.1.Def.])
A $P, Q$ sokszögek a síkon átdarabolhatóak (vagy átdarabolhatóan kongruensek), ha a $P$-hez és a $Q$-hoz létezik véges sok $\{P_1, ..., P_m\}$ illetve $\{Q_1, ..., Q_m\}$ sokszög úgy, hogy

- ezek a sokszögek legfeljebb csak a határukon metszik egymást (azaz $P_i \cap P_j \subseteq (\partial P_i \bigcup \partial P_j)$, $Q_i \cap Q_j \subseteq (\partial Q_i \bigcup \partial Q_j)$ $\forall i, j \in \{1, ..., m\}$) és
- $\bigcup_{i=1}^{m} P_i = P$ és $\bigcup_{i=1}^{m} Q_i = Q$, és $P_i \cong Q_i$ $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$

Boltianskii az alábbi tulajdonságot bizonyította be az átdarabolhatóságról.

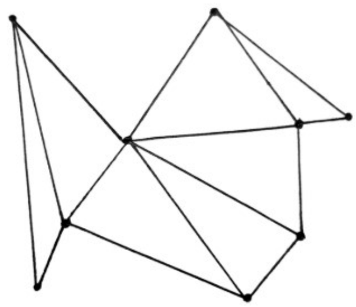
**6.2. állítás.** [StanWag, 21.Old.]
Az átdarabolhatóság ekvivalenciareláció.

**6.3. tétel.** (Wallace-Bolyai-Gerwien tétel [WaBoGe, 2.2.Tét.])
Két sokszög pontosan akkor átdarabolható a síkon, ha a területük megegyezik.

Világos, hogy ha átdarabolhatóak, akkor a területük egyenlő, így csak az ellenkező irányt kell megmutatnunk. A bizonyításhoz 4 lemma segítségére lesz szükségünk.

**6.4. lemma.** [WaBoGe, 2.3.Lem.]
Bármely sokszög feldarabolható véges sok háromszöglapra.

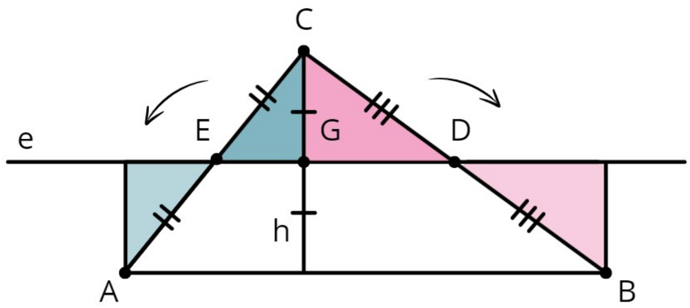
*Bizonyítás.* [WaBoGe, 2.3.Biz.] Válasszunk egy tetszőleges csúcsot és húzzunk belőle a sokszögen belül haladó, egyenes vonalakat azokba a csúcsokba, amelyekbe ez lehetséges. Ha nem tudjuk tovább folytatni ezt a darabolást, akkor vagy kész vagyunk, vagy pedig maradt a sokszögnek egy olyan része, ami szintén sokszög, de még nem háromszög. Válasszuk ki ennek a részsokszögnek az egyik csúcsát és ismételjük meg az előző procedúrát. Ezt addig iteráljuk, amíg az eredeti sokszöget nem bontottuk háromszögekre. Mivel minden sokszögnek véges sok csúcsa van, ez a folyamat csak véges sok lépést igényel, és véges sok háromszöget eredményez. □



6. ábra. Sokszög átdarabolása háromszöglapokba [WaBoGe, 1.Ábr.]

**6.5. lemma.** [WaBoGe, 2.4.Lem.]
Bármely $T$ háromszög átdarabolható egy olyan tégalalapba, amelynek az egyik oldala megegyezik a háromszög egyik oldalával.

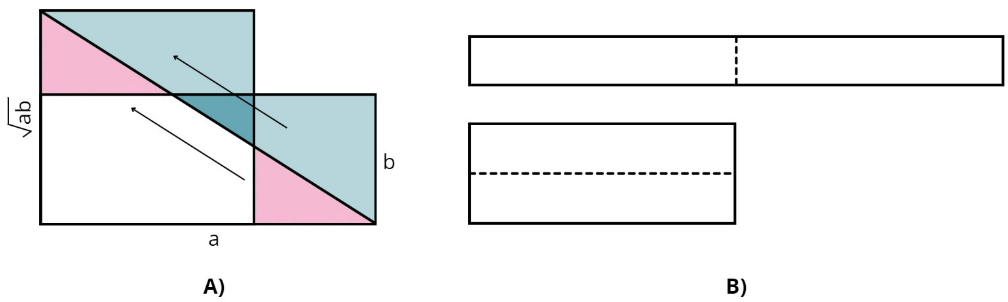
*Bizonyítás.* [WaBoGe, 2.4.Biz.] Legyen a $T$ háromszög három csúcsa $A, B$ és $C$, legyen a $h$ a háromszög magasságvonala, $e$ pedig a $h$-ra merőleges, a magasságot felező egyenes, azaz az $AB$ oldallal párhuzamos középvonal. Jelölje a $h$ és az $e$ metszéspontját $G$, az $e$ $AC$ illetve $BC$ oldalakkal vett metszéspontjait pedig $E$ és $D$. Ekkor $|EC| = |AE|$ és $|CD| = |DB|$, mert az $ECD$ és az $ABC$ háromszögek hasonlóak, az oldalaik aránya $\frac{1}{2}$.
Az $EGC\measuredangle = DGC\measuredangle = 90°$, így az $EGC$ és a $DGC$ háromszögeket az $E$ illetve a $D$ csúcs körül $+180°$-kal illetve $-180°$-kal elforgatva, ahogy az ábrán is látszik, megkapjuk a kívánt téglalapot. A két kis háromszög $GC$ oldala közös, de ez az átdarabolás definíciója szerint megengedett. $\square$




7. ábra. Háromszög átdarabolása téglalapba [WaBoGe, 2.Ábr.]

**6.6. lemma.** [StanWag, 3.2.Biz.]
Ha adott egy $a, b$ oldalú $T$ téglalap, akkor $T$ átdarabolható egy $ab$ területű négyzetté.

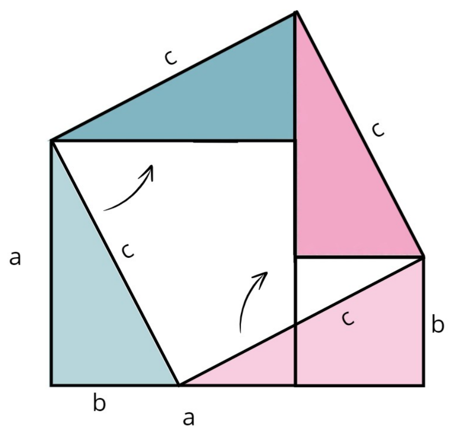
*Bizonyítás.* [StanWag, 3.2.Biz.] Először tegyük fel, hogy $a \leq b < 4a$. Vegyünk fel úgy egy $\sqrt{ab}$ oldalú négyzetet, mint az ábrán. Ekkor a 8/A) ábrán jelölt háromszögeket eltolva megkapjuk a kívánt átdarabolást.
Ha $b$ a hosszabbik oldal, de $b \geq 4a$, akkor daraboljuk a téglalapunkat az alábbi módszerrel (8/B)) addig, amíg egy előző típusú téglalapot kapunk, amire már tudjuk a bizonyítást. $\square$




8. ábra. Téglalap átdarabolása négyzetté [StanWag, 3.1.Ábr.]

**6.7. lemma.** [StanWag, 3.2.Biz.]
Véges sok négyzet átdarabolható egy négyzetté.

*Bizonyítás.* [StanWag, 3.2.Biz.] Először nézzük azt az esetet, amikor két négyzetünk van. A Pitagorasz-tételt úgy is bizonyíthatjuk, hogy közben egy módszert kapjunk két négyzet egy négyzetté való átdarabolásához. Az alábbi ábra egyszerre mutatja, hogy $a^2 + b^2 = c^2$ illetve azt, hogy alkalmas forgatással a rózsaszín és kék háromszögek segítségével hogy kapjuk meg a kívánt darabolást.
Ha több mint két négyzetünk van, akkor a fenti eljárást ismételhetjük, és ezzel bizonyítottuk az állítást. □




9. ábra. Két négyzet átdarabolása egy négyzetté [StanWag, 3.1.Ábr.]

*Bizonyítás.* (A Wallace-Bolyai-Gerwien tétel bizonyítása) [StanWag, 3.2.Biz.]
Tehát ha van egy sokszögünk, azt fel tudjuk bontani $n$ darab háromszögre, amikből $n$ darab téglalapot, majd $n$ darab négyzetet konstruálunk, végül ebből az $n$ darab négyzetből egy, az eredeti sokszög területével megegyező területű négyzetet kapunk. Minden lépésben véges sok sokszöget használtunk a darabolásokhoz. Tehát ha van két egyenlő területű sokszögünk a síkban, akkor mindkettő átadarabolható a vele megegyező területű négyzetté. Mivel az átdarabolhatóság ekvivalenciareláció, ezzel a tételt beláttuk. □

A geometriai darabolások elmélete magasabb dimenziókban számos kérdést - köztük Hilbert híres listájának harmadik problémáját is - vet fel. Hilbert kérdése az volt, hogy vajon egy háromdimenziós tetraéder feldarabolható-e háromdimenziós politópokra úgy, hogy a darabokat újra átrendezve egy ugyanolyan térfogatú kockát kapjunk. Dehn 1900-ban nemleges választ adott erre a kérdésre.

Viszont ha megfelelően általánosítjuk az átadarabolhatóság fogalmát, és tetszőleges darabokat engedünk meg, már kockásítható lesz a tetraéder. Az átdarabolhatóság fogalmának egyfajta általánosítására nagyszerű lehetőségnek bizonyult az egymásbadarabolhatóság bevezetése. Az alábbi, már megismert definíciókat és állításokat használni fogjuk ebben a fejezetben is.

**6.8. definíció.** ($G$-egymásbadarabolhatóság [MaWa, 2.8.Def.])
Legyen $G$ egy csoport, ami az $X$ halmazon hat. Az $A, B \subseteq X$ részhalmazok $G$-egymásbadarabolhatóak, ha léteznek ugyanannyi tagból álló véges partíciók: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ és $g_i \in G$ csoportelemek ($i = 1, ..., n$), hogy $B_i = g_i(A_i)$, minden $i = 1, ..., n$ esetén. Jelölése: $A \sim_G B$.

**6.9. definíció.** ($G$-paradox tulajdonság [MaWa, 2.19.Def.])
Legyen $G$ egy csoport, $X$ pedig egy $G$-halmaz. Az $E \subseteq X$ halmazt $G$-paradoxnak vagy $G$-paradox tulajdonságúnak nevezzük, ha léteznek $A, B \subseteq E$ részhalmazok, hogy $E = A \bigcup B$, $A \cap B = \emptyset$ és $E \sim_G A$, $E \sim_G B$.

**6.10. lemma.** [MaWa, 2.24.Lem.]
Legyen $A$ és $B$ két $G$-egymásbadarabolható halmaz valamilyen $G$ csoportra. Ekkor $B$ $G$-paradox $\iff$ $A$ $G$-paradox.

Ha van $\sim$ egy ekvivalenciarelációnk az $X$ halmaz részhalmazainak családján, akkor definiálhatunk egy $\preceq$ relációt úgy, hogy $A \preceq B \iff \exists B' \subseteq B : A \sim B'$. Ekkor $\preceq$ egy reflexív, tranzitív reláció az ekvivalenciaosztályokon. A halmazelméleti Schröder-Bernstein tétel azt állítja, hogy ha a számossági relációt használjuk - azaz $A \sim B \iff \exists f : A \longrightarrow B : f$ bijekció - akkor a $\preceq$ reláció antiszimmetrikus is, azaz ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A$ és $B$ számossága megegyezik.

Banach felfedezte, hogy ez a tétel általánosabb kontextusba is helyezhető, így megfogalmazhatjuk például a $G$-egymásbadarabolhatóságra is.

Mostantól bevezetjük: $A \preceq B \iff \exists B' \subseteq B : A \sim_G B'$, azaz $A$ $G$-egymásbadarabolható a $B$ egy részhalmazával.

**6.11. tétel.** (Banach-Schröder-Bernstein tétel) Legyen $X$ egy $G$-halmaz, és $A, B \subseteq X$. Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A \sim_G B$.

*Bizonyítás.* A bizonyítás lényege azon múlik, hogy a $\sim_G$ (a továbbiakban csak $\sim$-el jelölöm) reláció teljesíti az alábbi két feltételt:

**a)** ha $A \sim B$ akkor $\exists g : A \longrightarrow B$ bijekció úgy, hogy $C \sim g(C)$ $\forall C \subseteq A$ részhalmazra,
**b)** ha $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, $A_1 \sim B_1$ és $A_2 \sim B_2$, akkor $A_1 \bigcup A_2 \sim B_1 \bigcup B_2$.

A $\sim_G$ egy olyan ekvivalenciareláció a $\mathscr{P}(X)$-en, ami teljesíti **a)**-t és **b)**-t.
Legyen $f : A \longrightarrow B_1$, $g : A_1 \longrightarrow B$ bijekciók, ahol $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ az **a)** rész alapján. Legyen $C_0 := A \setminus A_1$ és indukcióval legyen $C_{n+1} := g^{-1}f(C_n)$. Legyen $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Ekkor könnyű ellenőrizni, hogy $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, és így a $g$ választásából következik, hogy $(A \setminus C) \sim (B \setminus f(C))$. De az $f$ választása miatt $C \sim f(C)$ és a **b)** tulajdonság miatt $(A \setminus C) \bigcup C \sim (B \setminus f(C)) \bigcup f(C)$, azaz $A \sim B$, ahogy akartuk.
Mivel a bizonyítás során csak azt használtuk ki, hogy a $\sim_G$ ekvivalenciareláció teljesíti az **a)** és a **b)** tulajdonságot, a bizonyítás minden ilyen típusú ekvivalenciareláció esetén működik. Például a számosság is ilyen, tehát ez a bizonyítás a klasszikus Schröder-Bernstein tétel igazolására is jó. □

Korábban már láttuk, hogy ez a tétel radikálisan leegyszerűsíti az egymásbadarabolhatóság ellenőrzését, hiszen nem kell a részhalmazok unióját megvizsgálnunk.

**6.12. definíció.** ($G$-paradox tulajdonság ekvivalens definíció)
Az $E \subseteq X$ halmazt $G$-paradoxnak vagy $G$-paradox tulajdonságúnak nevezzük, ha léteznek $A, B \subseteq E$ részhalmazok, hogy $A \cap B = \emptyset$ és $E \sim_G A$, $E \sim_G B$.

A tétel egy másik, igencsak meglepő következménye az alábbi tétel.

$\mathbb{R}^n$-ben a hasonlóságok csoportját az izometriák és az origóból való középpontos nagyítások (azaz az $f(P) = \alpha P$, $\alpha \neq 0$ függvények) generálják.

**6.13. következmény.** [StanWag, 3.7.Köv.]
$\mathbb{R}^n$ bármely két korlátos, nemüres belsejű $X, Y$ részhalmaza felbontható $X = X_1 \bigcup X_2$, $Y = Y_1 \bigcup Y_2$ alakra úgy, hogy $X_1, Y_1$ illetve $X_2, Y_2$ hasonlóak.

*Bizonyítás.* [StanWag, 3.7.Biz.] Az $X, Y$ tulajdonságai miatt léteznek olyan $g_1, g_2$ hasonlóságok, hogy $g_1(X) \subseteq Y$ és $g_2(Y) \subseteq X$. Egyszerűen csak össze kell zsugorítani $X$-et, hogy beleférjen az $Y$-ba, és fordítva. Emiatt $X \preceq Y$ és $Y \preceq X$ a hasonlóságokat használó egymásbadarabolhatóságra nézve. Mivel véges sok részhalmazt használunk, alkalmazhatjuk a Banach-Schröder-Bernstein tételt. □

A következő eredmény összeköti az egymásbadarabolhatóság halmazelméleti definícióját a klasszikus geometriai átdarabolásokéval. Nem bizonyítjuk.

**6.14. tétel.** [StanWag, 3.8.Tét.] Ha a $P_1, P_2$ sokszögek a síkon átdarabolhatók, akkor egymásbadarabolhatók is.

Ez azért meglepő, mert az átdarabolásnál az egyes részhalmazok határait gyakran "duplán számítjuk", amikor elmozgatjuk és újra egymáshoz illesztjük őket. Az egymásbadarabolhatóságnál viszont minden egyes pont számított, így a határvonalak pontjait nem számíthatjuk egyszerre két részhalmazhoz is. A tétel bizonyítása egy úgynevezett "elnyelős" bizonyítás, hiszen épp azt mutatja meg, hogy hogyan lehet megfeledkezni egy problémás halmazról, hogyan lehet ezt elnyelni. A Banach-Tarski paradoxonhoz vezető tételeknél fontos szerepet fognak játszani az ilyen típusú bizonyítások.

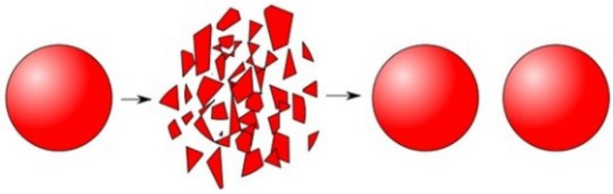
## 6.2. Banach-Tarski paradoxon

Ebben a részben belátjuk a híres paradoxon erős és gyenge alakját, és megvizsgáljuk egy általánosítását, következményét is.

A Banach-Tarski paradoxonra gyakran úgy hivatkoznak, hogy először 1924-ben, Stefan Banach és Alfred Tarski által lett publikálva. Kevésbé közismert tény, hogy ennek egy ekvivalens verzióját 10 évvel korábban Felix Hausdorff már közzétette.

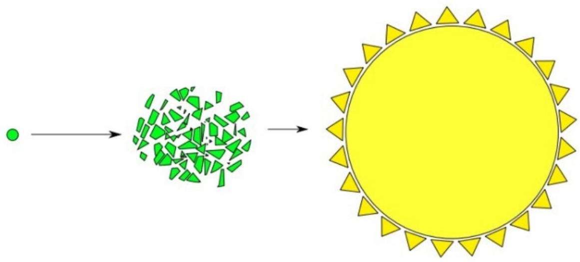
Továbbra is Banach és Tarski tűnik azonban az erős verzió megalkotóinak.

**6.15. tétel.** (Banach-Tarski paradoxon, gyenge alak [MaWa, 3.2.Tét.])
$B^3$, az $\mathbb{R}^3$-beli tömör egységgolyó, $G_3$-paradox.



10. ábra. Banach-Tarski paradoxon, gyenge alak [MaWa, 1.1.Ábr.]

**6.16. tétel.** (Banach-Tarski paradoxon, erős alak [MaWa, 3.1.Tét.])
Ha $A$ és $B$ két korlátos, nemüres belsejű részhalmaza az $\mathbb{R}^3$-nek, akkor $A$ és $B$ egymásba-darabolhatók.



11. ábra. Banach-Tarski paradoxon, erős alak [MaWa, 1.1.Ábr.]

Ahogy a paradox tulajdonság transzformáció- illetve átskálázás-invarianciájából is látszik, ez az eredmény triviálisan általánosítható bármilyen sugarú és helyzetű 3-dimenziós golyóra.

A Banach-Tarski-paradoxon mindkét alakja nagyon bizarr. Egy meghatározott térfogatú golyót véges sok olyan darabra vághatunk szét, amelyek forgatással átrendezhetők úgy, hogy 2, vagy akár 100 ugyanakkora golyót kapjunk? Egy borsót véges sok darabra vágva és ezeket átrendezve megkaphatunk egy Nap méretű tömör gömböt? Nem véletlenül hívják paradoxonnak: az intuíciónknak teljesen ellentmondanak ezek az állítások, hiszen a használt transzformációk megőrzik a térfogatot.

A trükk az, hogy a daraboknak nincs térfogata, amelyet a mozgatások megőrizhetnének: a szétbontásban szereplő darabok nem-Lebesgue mérhetőek.

Újabb meglepő eredmény, hogy bár az erős alak sokkal jelentősebbnek tűnik, valójában a paradoxon két alakja ekvivalens.

**6.17. tétel.** [MaWa, 3.4.Áll.]
A Banach-Tarski paradoxon erős és gyenge alakja ekvivalens.

*Bizonyítás.* [MaWa, 3.4.Biz.] Az erős alakból következik a gyengébb, mert a 3-dimenziós golyó belseje nem üres, és könnyedén felvághatjuk két nemüres belsejű darabra. Az erős alakból következik, hogy mindkettő egymásbadarabolható a golyóval, amiből következik, hogy a golyó paradox tulajdonságú.
Most tegyük fel a gyengébb alakot, és legyen az $A, B$ a tételbeli halmazok. Mivel nemüres a belsejük, mindkettő belsejében van nyílt golyó, és így zárt is van, nevezzük mondjuk az $A$-belit $K$-nak.
A paradox tulajdonság transzformáció-invarianciája illetve átskálázás-invarianciája miatt alkalmazhatjuk a $K$-ra a gyenge Banach-Tarski paradoxont még úgy is, hogy $K$ nem origó-középpontú, és nem egység-sugarú, így $K$ $G_3$-paradox. Ez azt jelenti, hogy duplikálható: van két részhalmaza, amelyek egymásbadarabolhatóak az eredeti $K$ golyó másolatával. Ezt a duplikálást megismételhetjük az új golyókon, és így tetszőleges véges számú $K_1, ..., K_n$ golyót készíthetünk.
Továbbá, mivel a golyók korlátosak és az eltolások benne vannak a $G_3$-ban, tekinthetjük a golyókat páronként diszjunktnak, az egymásbadarabolhatóság transzformáció-invarianciájának és tranzitivitásának köszönhetően. Így azt kapjuk, hogy az uniójuk egymásbadarabolható az eredeti $K$ golyóval: $K \sim_{G_3} \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.
Mivel $B$ korlátos, létezik egy elég nagy $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy a $K_1, ..., K_n$ golyók megfelelő eltolásokkal rendezhetőek úgy, hogy teljesen lefedjék $B$-t. Legyenek ezek a megfelelő eltolások $g_1, ..., g_n \in G_3$, $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i$. Mivel ezek a fedő labdák lehet, hogy átfedésben vannak, ez nem egy egymásbadarabolhatóságot ír le $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i$ és $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ között.
Mindazonáltal tudjuk definiálni a $K_i' \subseteq K_i$ részhalmazokat úgy, hogy eltávolítjuk az összes felesleges pontot, amik a $B$ ugyanazon pontjaira vannak leképezve, annak érdekében, hogy ezeket a részhalmazokat diszjunkttá tegyük az eltolások után. Továbbá, az uniójuk egymásbadarabolhatóvá tehető $B$-vel, ha csak azokat a pontokat vesszük figyelembe, amik a $B$-be lettek képezve. Vegyük a $B$ azon pontjait, amik benne vannak a $g_1 K_1$ halmazban és toljuk vissza őket a $K_1$ egy részhalmazába: $K_1' := g_1^{-1}(B \cap g_1 K_1)$. Ezt megismételjük a $K_2$-re és a $B$ maradék pontjaira, $B \setminus g_1 K_1$-re: $K_2' := g_2^{-1}((B \setminus g_1 K_1) \cap g_2 K_2)$, és így tovább, $K_n' := g_n^{-1}((B \setminus (g_1 K_1 \bigcup ... \bigcup g_{n-1} K_{n-1})) \cap g_n K_n)$.
A $K_1', ..., K_n'$ halmazok páronként diszjunktak, és ugyanez igaz a $g_1 K_1', ..., g_n K_n'$ eltoltjaikra is, amikre teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i' = B$. Így a $B$ egymásbadarabolható az $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i'$-vel, ami a $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i$ részhalmaza, ami egymásbadarabolható a $K \subseteq A$ golyóval. A részhalmazok egymásbadarabolhatóságáról szóló állítást alkalmazva: ha $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i \sim_G K$, akkor $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i$-ra $\exists K' \subseteq K : K' \sim_G \bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i'$, ahol $\bigcup_{i=1}^{n} g_i K_i' = B$ és $K' \subseteq A$, ezért $B$ egymásbadarabolható az $A$ egy részhalmazával.
Ezt az eljárást fordított szereposztással megismételve az is belátható, hogy $A$ egymásbadarabolható a $B$ egy részhalmazával, így a Banach-Schröder-Bernstein tétel miatt kész a bizonyítás. □

Ezek szerint elegendő a gyengébb alakot bizonyítanunk. Ehhez több lemmára és tételre lesz szükségünk.

**6.18. lemma.** (Általánosított irracionális forgatás [MaWa, 5.1.Lem.])
Legyen a $D \subseteq \mathbb{R}^3$ egy megszámlálható halmaz. Ha létezik egy $L$ egyenes, ami nem megy át a $D$ halmazon, akkor létezik egy $\rho \in G_3$, az $L$ tengely körüli forgatás úgy, hogy $A := \bigcup \rho^n D$-re: $\rho A = A \setminus D$. Ha $L$ átmegy az origón, akkor $\rho \in SO(3)$.

Ha $L$ nem megy át az origón, akkor a nagyobb $G_3$ csoportra lesz szükségünk, ami eltolásokat is tartalmaz, és így megenged bármely pont körüli forgatásokat.

*Bizonyítás.* [MaWa, 5.1.Biz.] Legyen $\rho_\Theta$ egy $L$ körüli, $\Theta$ szögű forgatás, ahol ha $L$ átmegy az origón, akkor $\rho_\Theta \in SO(3)$, egyébként $\rho_\Theta \in G_3$. Tekintsük a $\Theta \in (0, 2\pi]$ értékeket, amikor a $\rho_\Theta$-t alkalmazzuk a $D$-re.
Először figyeljük meg, hogy csak megszámlálható sok szög adhatja a $\rho_\Theta D \cap D \neq \emptyset$. Ez azért van, mert minden $D$-beli ponthoz csak megszámlálható sok szög van, amire $\rho_\Theta$ ezt a pontot $D$ egy másik pontjába viszi. Vegyük minden $D$-beli pontra az ilyen szögek halmazát. Ezek összessége is megszámlálható halmaz lesz.
Ez az eredmény kiterjeszthető ismételt forgatásokra: csak megszámlálható sok szög adja a $\rho_\Theta^n D \cap D \neq \emptyset$ valamely $n = 1, 2, ...$ esetén. Megismételve az előző érvezlést $\rho_\Theta$ helyett $\rho_\Theta^n$-re minden $n = 1, 2, ...$-re megszámlálható családját kapjuk olyan halmazoknak, amik megszámlálható sok szöget tartalmaznak. Ezek összessége is megszámlálható.
Mivel megszámlálhatatlanul sok szög közül választhatunk, megválaszthatjuk a $\Theta$-t úgy, hogy különbözzön az előzőleg kiválogatott megszámlálható sok szögtől, és legyen $\rho := \rho_\Theta$ erre a $\Theta$ szögre. Ez azt jelenti, hogy $\rho^n D \cap D = \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ugyancsak $\rho^n D \cap \rho^{n+m} D = \emptyset$ minden $n = 0, 1, ...$ és $m = 1, 2, ...$-re, hiszen ha nem így lenne, mindkét oldalra alkalmazva a $\rho^{-n}$-t, ellentmondást kapnánk. Így a $\{\rho^n D\}$ halmazok diszjunktak. Legyen $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n D$, és a diszjunktság miatt $\rho A = \rho(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1} D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n D = (\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n D) \setminus D = A \setminus D$. □

**6.19. következmény.** [MaWa, 5.2.Köv.]
Legyen az $X \subseteq \mathbb{R}^3$, és a $D$ az $X$ egy megszámlálható részhalmaza. Ha létezik egy $L$ egyenes, ami nem megy át a $D$ egyik pontján sem, és bármely $L$ tengely körüli forgatás után teljesül, hogy $D \subseteq X$, akkor $X \setminus D \sim_{G_3} X$. Ha $L$ átmegy az origón, akkor $X \setminus D \sim_{SO(3)} X$.

*Bizonyítás.* [MaWa, 5.2.Köv.] Legyen $X, D$ és $L$ mint az állításban, és legyen a $\rho$ az az $L$ körüli forgatás, amit az előző állítás adott: $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n D$ -re $\rho A = A \setminus D$. Mivel $\rho^n D \subseteq X$ minden $n = 1, 2, ...$ következik, hogy $A \subseteq X$.
Most legyen $B := X \setminus A$, tehát az $A, B$ az $X$ egy partíciója. Mivel $\rho A = A \setminus D$ és $B \cap D = \emptyset$, $\rho A \cup B = X \setminus D$, és így megmutattuk a kívánt egymásbadarabolhatóságot. Ha $L$ átmegy az origón és $\rho \in SO(3)$, akkor $SO(3)$-, egyébként csak $G_3$-egymásbadarabolhatóságról beszélünk. □

**6.20. állítás.** [MaWa, 5.3.Áll.]
$S^2$, az $\mathbb{R}^3$-beli origó-középpontú egységgömbfelület $SO(3)$-paradox.

*Bizonyítás.* [MaWa, 5.3.Biz.] Legyen $D$ egy megszámlálható részhalmaza az $S^2$-nek. A Hausdorff-paradoxon miatt tudjuk, hogy $S^2 \setminus D$ $SO(3)$-paradox. Legyen az $L$ egy olyan, origón átmenő egyenes, ami nem metsz bele a $D$ halmazba. Ilyen egyenes mindig létezik, hiszen $D$ megszámlálható.
Mivel a $D$ halmazt az $L$ tengely körül forgatva nem változik a pontjainak az origótól vett távolsága, az elforgatott halmaz is benne marad az $S^2$-ben. Az előző állítást az $S^2, D$ és $L$-re alkalmazva kapjuk, hogy $S^2 \setminus D \sim_{SO(3)} S^2$. Mivel $S^2 \setminus D$ $SO(3)$-paradox, alkalmazva egy korábbi állítást kapjuk, hogy $S^2$ ugyancsak $SO(3)$-paradox tulajdonságú. □

**6.21. állítás.** [MaWa, 5.4.Áll.]
Legyen $B^3$ a tömör, origó-középpontú, $\mathbb{R}^3$-beli egységgolyó. Ekkor a $B^3 \setminus \{0\}$ $SO(3)$-paradox.

*Bizonyítás.* [MaWa, 5.4.Áll.] Most már tudjuk, hogy $S^2$ $SO(3)$-paradox. Az $S^2$ minden $E$ részhalmazára definiáljuk az alábbi „kúp alakot”:
$c(E) := \{tx |\ x \in E, t \in (0, 1]\}$.
Figyeljük meg, hogy $B^3 \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ 0 < ||x|| \leq 1\}$. Tehát $c(S^2) = B^3 \setminus \{0\}$ és $c(E) \subseteq B^3 \setminus \{0\}$ minden $E \subseteq S^2$ részhalmazra.
Bármely két diszjunkt $A, B \subseteq S^2$ részhalmazra teljesül, hogy a $c$ leképezés szerinti képük diszjunkt marad. Ez általánosítható bármely véges sok, páronként diszjunkt részhalmazra.
Mivel $S^2$ paradox, legyen $S^2 = C \cup D$ a paradox felbontás, ahol $C, D$ diszjunktak, és $SO(3)$-egymásbadarabolhatóak az $S^2$-vel. Ennek segítségével megkapjuk a $B^3 \setminus \{0\}$ egy darabolását is: $c(S^2) = c(C \cup D) = c(C) \cup c(D)$. Megmutatjuk, hogy ezek a részhalmazok $SO(3)$-egymásbadarabolhatóak a $c(S^2)$-vel, és így $B^3 \setminus \{0\}$ $SO(3)$-paradox.
Mivel $S^2$ és a $C$ részhalmaza egymásbadarabolhatóak, létezik egy $f : S^2 \longrightarrow C$ darabonkénti függvény. Ezt használva definiálhatunk egy $g$ függvényt is: $g : c(S^2) \longrightarrow c(C)$ úgy, hogy kiterjesztjük az $f$-nél használt hatásokat a „kúp alakokra”: $g(x) := ||x|| \cdot f(x/||x||)$, ami szintén darabonkénti lesz, ugyanazokkal a csoporthatásokkal, amiket az $f$ függvény esetén is használtunk. $g$ bijektív is: szürjektív, mert
$g(c(S^2)) = \{tf(x) |\ x \in S^2, 0 < t \leq 1\} = \{ty |\ y \in C, 0 < t \leq 1\} = c(C)$. Az injektivitás abból következik, hogy ha $g(x) = g(y)$ bármely nemnulla $x, y$ esetén, akkor $||x|| = ||y||$, és $f(x/||x||) = f(y/||y||)$, ami miatt $x/||x|| = x/||y|| = y/||y||$ és ebből következik, hogy $x = y$.
Így tehát megkaptuk, hogy a $c(S^2) = B^3 \setminus \{0\}$ egymásbadarabolható a $c(C)$-vel, és ugyanezen érvelés miatt a $c(D)$-vel is. Ebből következik, hogy $B^3 \setminus \{0\}$ paradox tulajdonságú. □

Végül, ugyanazokat a lépéseket követve, mint a 6.20 állításban, a gömb középpontját ugyanúgy elnyelhetjük, mint egy megszámlálható halmazt az $S^2$-n.

**6.22. tétel.** (A Banach-Tarski paradoxon, gyenge alak [MaWa, 3.2.Tét.])
$B^3$, az $\mathbb{R}^3$-beli tömör egységgolyó, $G_3$-paradox.

*Bizonyítás.* [MaWa, 3.2.Biz.] Tudjuk, hogy $B^3 \setminus \{0\}$ $SO(3)$-paradox. Legyen $L$ egy olyan egyenes, ami az origótól $\frac{1}{2}$ távolságra van (tehát nem metszi el): például egy, a $z$ tengellyel párhuzamos egyenes, ami átmegy az $\{\frac{1}{2}, 0, 0\}$ ponton. Legyen a $D := \{0\}$.
Jegyezzük meg, hogy a $D$ bármely $L$ körüli forgatása esetén $D \subseteq B^3$ marad. Ezek a forgatások $G_3$-beliek, mivel az $L$ nem megy át az origón. A $B^3, D$ és $L$-re alkalmazva a 6.19. állítást

kapjuk, hogy a $B^3$ és a $B^3 \setminus \{0\}$ $G_3$-egymásbadarabolhatók. Mivel $B^3 \setminus \{0\}$ $SO(3)$-paradox, $G_3$-paradox is. Tehát $B^3$ ugyancsak $G_3$-paradox. □

Ezzel tehát beláttuk a Banach-Tarski paradoxon gyenge, és így az erős alakját is:

**6.23. tétel.** (Banach-Tarski paradoxon, erős alak [MaWa, 3.1.Tét.])
Ha $A$ és $B$ két korlátos, nemüres belsejű részhalmaza az $\mathbb{R}^3$-nek, akkor $A$ és $B$ egymásbadarabolhatók.

6.24. *megjegyzés.* 1947-ben megmutatták, hogy csak 5 darabra van szükség a labda duplikálásához, míg ennél kevesebbel lehetetlen.

6.25. *megjegyzés.* Beszélhetünk folytonosan egymásbadarabolható halmazokról is, ahol ahelyett, hogy közvetlenül a $G$ elemeivel képeznénk egymásba a részhalmazokat, $G$-beli pályákat használunk. A $G_3$-ban ez a részhalmazok mozgatásának és elforgatásának teljes folyamatát írja le, ellentétben azzal, amikor a részhalmazok helyzetét csak a mozgatás előtt és után tudnánk. Figyelemreméltó az a 2005-ös eredmény, amely megmutatja, hogy a gyenge Banach-Tarski paradoxonban szereplő gömb paradoxságát mutató egymásbadarabolás elvégezhető folytonos egymásbadarabolhatóságként is, átfedések nélkül.
Más szóval: a gömb véges számú darabra bontható, amelyeket aztán elmozdítunk és újra összerakunk a gömb két példányává, anélkül, hogy a darabok valaha is metszenék egymást.

Vizsgáljuk meg a Banach-Tarski paradoxon egy következményét és egy lehetséges általánosítását.

**6.26. következmény.** [HaiHu, 1.18.Köv.]
$\mathbb{R}^3$ $SO(3)$-paradox.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 1.18.Biz.] Ha a 6.21 állításban az $S^2$-t nem a $B^3 \setminus \{0\}$-val, hanem az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$-val feleltetjük meg a kúp alak segítségével, akkor hasonló érveléssel az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ egy paradox felbontását kapjuk meg. Pontosan úgy, mint az egységgolyó esetén, belátható, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ és $\mathbb{R}^3$ egymásbadarabolhatóak, tehát $\mathbb{R}^3$ $SO(3)$-paradox. □

**6.27. tétel.** (Banach-Tarski paradoxon $\mathbb{R}^n$-ben, $n \geq 3$ [HaiHu, 1.21.Tét.])
$S^{n-1}$ $SO(n)$-paradox bármely $n \geq 3$ esetén. Ha $n \geq 3$, az $\mathbb{R}^n$-beli egységgolyó $SO(n)$-paradox, és így $\mathbb{R}^n$ is az.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 1.21.Biz.] A Banach-Tarski paradoxon miatt az állítás igaz $n = 3$ esetén. Indukcióval fogunk bizonyítani. Vizsgáljuk az $S^n$-t $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Tegyük fel, hogy $A_i, B_j \subseteq S^{n-1}$ és $\sigma_i, \tau_j \in SO(n)$ mutatták, hogy $S^{n-1}$ paradox tulajdonságú. Definiáljuk az $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_j$ partícióját az $S^n \setminus \{(0, ..., 0, \pm 1)\}$ halmaznak úgy, hogy az $(x_1, ..., x_n, z)$ vektor aszerint kerüljön az $\tilde{A}_i$ vagy a $\tilde{B}_j$ halmaz valamelyikébe, hogy $A_i$ és $B_j$ közül melyik halmaz tartalmazta az $(x_1, ..., x_n)/|(x_1, ..., x_n)|$ lenormált vekort. Terjesszük ki a $\sigma_i, \tau_j$ függvényeket a $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\tau}_j$ függvényekké úgy, hogy hagyják helyben az új tengelyt. Mátrixos alakban írva:

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \sigma_i & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_j$, $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\tau}_j$ megadják az $S^n \setminus \{(0,...,0 \pm 1)\}$ halmaz paradox darabolását. Tudjuk, hogy $S^n \setminus \{(0,...,0 \pm 1)\} \sim S^n$ - hasonlóan kell bizonyítani, mint a $B^3 \sim B^3 \setminus \{0\}$-t - így az indukció működik és $S^n$ paradox tulajdonságú. A tétel maradék része ugyanúgy következik, mint az előbb említett állításnál. $\square$

## 6.3. Kitekintés

Ez a rész Laczkovich Miklós Paradoxical Decompositions: A Survey of Recent Results című cikkéből származik [ParLac, 165-166.Old.].

A kiválasztási axióma, amelyet Zermelo 1904-ben fogalmazott meg, már a kezdetektől fogva sok vitát váltott ki. A *Bulletin de la Société mathématique de France* már 1905-ben közölte Baire, Borel, Hadamard és Lebesgue vitáját Zermelo axiómájáról, és ugyanebben az évben a *Mathematische Annalen* több cikke is foglalkozott a témával. Az axiómát leghevesebben Baire, Borel és Lebesgue ellenezte. Nem vették észre, hogy maga az általuk kidolgozott elmélet is tartalmaz nem konstruktív elemeket, mivel a Lebesgue-mérték $\sigma$-additivitása nem bizonyítható pusztán a ZF-ben (a Zermelo-Fraenkel axiómarendszerben).

A nem mérhető halmazok létezése és a paradoxonok felerősítették a kritikát, és ezeket a felfedezéseket "bizonyítékként" használták a kiválasztási axióma ellen. Szigorúan véve ez nem indokolt, hiszen vagy alapvető és filozófiai ellenvetéseink vannak a kiválasztási axióma ellen (mint a korai ellenzőknek), és akkor nem igazán számít, hogy milyen tényleges következményei vannak az axiómának, vagy elfogadjuk az axiómát, és akkor a következményeket is el kell fogadnunk. Jogos vagy sem, ez a kritika motiválta a Banach-Tarski-paradoxon és a kiválasztás axiómája közötti pontos kapcsolat meghatározására irányuló vizsgálatokat.

E vizsgálatokról (1986-ig) Stan Wagon: The Banach Tarski Paradox című könyvének [StanWag] utolsó fejezetében olvashatunk átfogó beszámolót.

Itt csak a legfontosabb tényeket említjük. Először is, R. M. Solovay egyik tétele alapján a Banach-Tarski-paradoxon létezése független a Zermelo-Fraenkel-axiómáktól. Pontosabban, Solovay bebizonyította, hogy a ZF-fel konzisztens, hogy létezik a Lebesgue-mértéknek egy izometria-invariáns és megszámlálhatóan additív kiterjesztése az $\mathbb{R}^n$ összes részhalmazára; sőt, ha feltételezzük a megszámlálható halmazcsaládokra vonatkozó kiválasztási axiómát (vagy még egy kicsit erősebb állítást, amit a függő választás axiómájának nevezünk), akkor egy ilyen mérték létezése még mindig konzisztens marad. Nyilvánvaló, hogy a Lebesgue-mérték izometria-invariáns kiterjesztése lehetetlenné teszi a Banach-Tarski-paradoxont. Így a Banach-Tarski-paradoxon "konzisztencia-erőssége" a ZF felett nem kisebb, mint a függő választás axiómájáé.

Mint M. Foreman, F. Wehrung és J. Pawlikowski nemrég megmutatták, ez a konzisztencia-erősség felülről a következőképpen becsülhető. A kiválasztási axiómát teljes erejében szinte soha nem használják az analízisben. Néhány gyengébb állításra azonban számos alkalmazásban szükség van. Ilyen állítások például a Boole-féle prímideál-tétel, és az az állítás, hogy tetszőleges számú kompakt Hausdorff-tér szorzata kompakt. Ismeretes, hogy ezek az állítások a ZF-ben ekvivalensek, és szigorúan gyengébbek, mint a kiválasztási axióma. Még gyengébb állítás a Hahn-Banach kiterjesztési tétel, amely viszont ekvivalens azzal az állítással, hogy minden Boole-algebrának van $[0, 1]$ értékű végesen additív mértéke. 1989-ben M. Foreman és F. Wehrung a következőket bizonyította.

**6.28. tétel.** [ParLac, 3.1.Tét.]
A ZF axiómák a Hahn-Banach tétellel együtt azt eredményezik, hogy léteznek nem-Lebesgue mérhető halmazok.

Néhány ötletüket felhasználva J. Pawlikowski a következő javítást adta.

**6.29. tétel.** [ParLac, 3.2.Tét.]
A ZF axiómákból és a Hahn-Banach tételből együttesen következik a Banach-Tarski-paradoxon.

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy a Banach-Tarski-paradoxon elvetése esetén el kellene vetnünk a Hahn-Banach-tételt és a Boole-féle prímideál-tételt is, a topológia és a funkcionálanalízis nagy részével együtt. De még a kiválasztás axiómájának teljes tagadása sem menthetne meg minket teljesen a paradoxonoktól. A paradox síkhalmazok létezése ugyanis a kiválasztási axióma nélkül is bizonyítható. Bár ezek "csak" megszámlálható halmazok, a ZF-ben olyan paradoxonokat is lehet bizonyítani a $\mathbb{R}^3$ nyílt részhalmazaira vonatkozóan, amelyek ugyanolyan meglepőek, mint a Banach-Tarski-paradoxon.

# 7. Amenábilitás

Az amenábilis csoport fogalma az invariáns mértékek további vizsgálatához rendkívül hasznos eszköz. Ahhoz, hogy az amenábilis csoportokat behatóbban tudjuk vizsgálni, az eddigieknél mélyebb csoportelméleti ismeretekre van szükségünk.

## 7.1. A csoportelméleti építkezés folytatása

Az ebben a fejezetben szereplő definíciók, állítások, tételek és példák Kiss Emil: Bevezetés az algebrába című könyvéből származnak ([KisEm]).

**7.1. definíció.** (Mellékosztály [KisEm, 4.4.6.Def.])
Legyen $G$ csoport, $H \leq G$ és $g \in G$. A $gH$ halmazt (a $H$ részcsoport szerinti) bal oldali mellékosztálynak nevezzük. Ugyanígy a $Hg$ halmaz jobb oldali mellékosztály.

A mellékosztályok fogalmát legegyszerűbben a maradékosztályokkal lehet elképzelni. Vegyük a $G = (\mathbb{Z}, +)$ csoportot, tehát az egész számok halmazát, az összeadás csoportművelettel ellátva. $G$-ben részcsoportot alkotnak az 5-tel osztható számok, mert bármely két 5-tel osztható szám összege és különbsége is 5-tel osztható, és a 0, az összeadás művelet egységeleme is osztható 5-tel. Legyen tehát $H := \{n \in \mathbb{Z} |\ n \text{ osztható 5-tel } \}$. A $H$ szerinti bal oldali mellékosztályokat (amik a művelet kommutativitása miatt egyben a jobb oldaliak is) a $g + H$ képlet definiálja, ahol $g \in G$ egy egész szám. Ha hozzáadok egy egész számot $H$ összes eleméhez, $H$ minden elemének 5-ös maradéka ugyanannyival változik. Összesen 5 különböző 5-ös maradék van, és például a $g = 0, 1, 2, 3, 4$ elemek segítségével meg is kapjuk mind az 5 mellékosztályt. Tehát ebben az esetben a $H$ részcsoport szerinti mellékosztályok: a maradékosztályok modulo 5. Absztraktabb eseteknél is érdemes maradékosztályokként tekinteni a mellékosztályokra.

Van, aki a normálosztó fogalmát egy, az alábbival ekvivalens módon, egy alkalmas homomorfizmus magjaként definiálja. Én szeretem a következő alakot használni, mert számomra ez többet jelent.

**7.2. definíció.** (Normálosztó [KisEm, 4.7.11.Tét.])
A $G$ csoport $N$ részcsoportja normálosztó, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, tehát minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Jele: $N \lhd G$.

Az előző példában a $H$ részcsoport (az 5-tel osztható egész számok) normálosztója volt a $G$-nek, mert $\mathbb{Z}$-ben az összeadás kommutatív. Például: mindegy, hogy $1 + H$, vagy $H + 1$ alakban írjuk, mindkét módon az 5-tel osztva 1 maradékot adó egész számok mellékosztályát kapjuk.

**7.3. állítás.** [KisEm, 4.7.12.Áll.]
Legyen a $G$ csoport normálosztója $N$. Álljon a $K$ halmaz az $N$ szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a $(g_1N) * (g_2N) = g_1g_2N$ képlettel.
Ekkor $K$ csoport lesz, melynek egységeleme az $N = 1 * N$ mellékosztály, a $gN$ inverze pedig $g^{-1}N$. Az a $\Psi : G \longrightarrow K$ leképezés, ami $g$-hez $gN$-et rendeli, homomorfizmus lesz, melynek képe $K$, magja $N$.

Láttuk, hogy a $G = (\mathbb{Z}, +)$ csoport normálosztója a $H$. $K := \{g_i + H \mid g_i = i,\ i \in \mathbb{Z}\}$. Legyen $(g_i+H)*(g_j+H) := (g_i+g_j)+H$. Mivel $K$ csak 5 maradékosztályból áll, vehetjük a $g_i$-ket és ezek összegét modulo 5. Így egy 5 elemű csoportot kaptunk, aminek egy-egy eleme a különböző 5-ös maradékok egy-egy reprezentánsa. Az egységelem a $0+H = H$ lesz, $g_i+H$ inverze pedig $-g_i+H$. Az a leképezés, ami egy egész számhoz az 5-ös maradékát rendeli, egy olyan homomorfizmus, aminek a képe pont a $K$ 5 eleme, magja (amit a 0-ba küld), pedig a $H$ részcsoport. $K$ az úgynevezett faktorcsoport.

**7.4. definíció.** (Faktorcsoport [KisEm, 4.7.15.Def.])
Legyen $N$ normálosztó a $G$ csoportban. Az előző állításban definiált $K$ csoportot a $G$ csoport $N$ szerinti faktorcsoportjának nevezzük, és $G/N$-nel jelöljük. A $\Psi : g \mapsto gN$ leképezés neve természetes homomorfizmus

**7.5. definíció.** (Normállánc [KisEm, 4.13.1.Def.])
Egy $G$ csoport normálláncának nevezzük $G$ részcsoportjainak egy olyan $N_0, N_1, ..., N_n$ sorozatát, melyre $\{1\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft ... \triangleleft N_n = G$

Például a $\{0\} \triangleleft H \triangleleft G$ egy normállánc, ahol $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ osztható 5-tel}\}$.

**7.6. definíció.** (Feloldható csoport [KisEm, 4.13.5.])
Egy $G$ csoportot feloldhatónak nevezünk, ha van olyan normállánca, amelynek minden faktorcsoportja Abel-csoport.

Például minden $A$ Abel-csoport feloldható, mert $\{0\} \triangleleft A$ egy megfelelő normállánc. Így a $(\mathbb{Z}, +)$ csoport is feloldható, mert az összeadás kommutatív.

## 7.2. Amenábilitás

Az amenábilitás definíciója segít feltárni az invariáns mértékek és a paradox hatások közötti összefüggéseket. Az a célunk, hogy meghatározzuk, pontosan melyek a paradox csoportok, és megvizsgáljuk az invariáns mértékekkel való kapcsolatukat. Először a definícióval és az invariáns mértékekkel foglalkozunk, majd megnézünk pár fontos amenábilis csoportot. Végül ennek segítségével belátjuk a Banach-mértékek tételét és meghatározzuk a paradox csoportokat is.

Ehhez a fejezethez a [HaiHu], a [SWInPro] és az [EquLac] forrásokat használtam fel.

Az alábbi definíció Neumann Jánostól származik.

**7.7. definíció.** (Amenábilis csoport [HaiHu, 2.1.Def.])
$G$ csoport amenábilis, ha létezik egy végesen additív, invariáns, $G$ összes részhalmazán definiált $\mu$ valószínűségi mérték. (A valószínűségi mérték egy olyan mérték, amire $\mu(G) = 1$.)

A következő megfigyelés is Neumann János nevéhez fűződik, aki felfedezte, hogy a $G$ csoport amenábilis tulajdonságát mutató mérték segítségével egyszerűen megadható egy ugyanilyen típusú (végesen additív, invariáns) mérték, azon az $X$ halmazon, amire a $G$ csoport hat. Ez az első fontos eredmény, amely az amenábilitás általános fogalmát használja, és nagy segítségünkre lesz ebben a fejezetben.

**7.8. állítás.** [HaiHu, 2.3.Áll.]
Legyen $G$ egy amenábilis csoport, ami az $X$ halmazon hat. Ekkor létezik egy végesen additív, $G$-invariáns, $X$ összes részhalmazán értelmezett valószínűségi mérték, így $X$ nem $G$-paradox.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 2.3.Biz.] Legyen $x \in X$. Ha a $\mu$ a $G$ amenábilitását mutató mérték, akkor legyen $\nu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,1]$, $\nu(A) := \mu(\{g \in G \mid g(x) \in A\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\nu$ végesen additív, $G$-invariáns mérték a $\mathscr{P}(X)$-en, és $\nu(X) = 1$. Tehát $X$ nem $G$-elhanyagolható, ebből következik, hogy $X$ nem $G$-paradox halmaz (5.27. állítás). $\square$

Az előző állítás megfordításának megfogalmazása és bizonyítása is izgalmas probléma. A direkt fordítottja (ha létezik $\mathscr{P}(X)$-en végesen additív, $G$-invariáns valószínűségi mérték, akkor $G$ amenábilis) nem igaz, mivel ha vannak olyan $x \in X$ pontok, amelyeket $G$ hatása rögzít, akkor az ilyen $x$ pontok halmazán bármely mérték $G$-invariáns, függetlenül attól, hogy $G$ amenábilis-e vagy sem, hiszen őket $G$ a mértéktől függetlenül fixen hagyja. Valójában ez az egyetlen akadálya annak, hogy megfordítsuk az állításunkat.

A következő bizonyítás szintén Neumann módszere, ami az F. P. Greenleaf Invariant means on topological groups -ban (Van Nostrand, New York, 1969.) jelenik meg olyan hatásokra, amelyekről feltételezzük, hogy tranzitívak.

**7.9. állítás.** [SWInPro, 1.Áll.]
Ha a $G$ csoport szabadon hat az $X$ halmazon, azaz $gx \neq x$ bármely $x \in X$, $g \in G \setminus \{1\}$, akkor $G$ pontosan akkor amenábilis, ha létezik egy végesen additív, $G$-invariáns, $X$ összes részhalmazán értelmezett $\mu$ valószínűségi mérték.

*Bizonyítás.* [SWInPro, 1.Biz.] Az előző állítás miatt csak a visszairányt kell bizonyítanunk, tehát legyen $\mu$ egy végesen additív, $G$-invariáns , $X$ összes részhalmazán értelmezett valószínűségi mérték. Legyen $E \subseteq X$ a kiválasztási axióma segítségével konstruált halmaz, ami a $G$ általi hatás pályáinak egy-egy reprezentánsát tartalmazza. Legyen $\Psi : X \longrightarrow G$, $\Psi(x) = \sigma$, ahol $x \in \sigma(E)$. A hatás szabad tulajdonságából következik, hogy $\Psi$ jól definiált, továbbá hogy $\Psi(\sigma x) = \sigma\Psi(x)$. Most már könnyű leellenőrizni, hogy a $\nu$, amit a $\nu(A) := \mu(\Psi^{-1}(A))$ képlet definiál, pont egy kívánt típusú mérték a $G$-n, így $G$ amenábilis. $\square$

A következő néhány tétel fontos amenábilis csoportokról szól.

**7.10. tétel.** (Day, Folner [SWInPro, 4.Tét.])
Ha $G$ amenábilis és $H \leq G$, akkor $H$ is amenábilis.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 2.6.Biz.] Legyen $G$ csoport, $H$ pedig egy részcsoportja. Legyen $R$ az a halmaz, ami a $H$ jobb oldali mellékosztályainak egy-egy reprezentánsából áll. Ekkor a $\nu(A) := \mu(AR) = \mu(\cup_{r \in R} Ar)$ egy jó mérték a $H$-n. $\square$

**7.11. tétel.** (Neumann [SWInPro, 4.Tét.])
Minden véges csoport amenábilis.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 2.6.Biz.] Tegyük fel, hogy $G$ véges. Ekkor $\mu(A) := |A|/|G|$ egy jó mérték a $G$-n. $\square$

A következő tételt nem bizonyítom.

**7.12. tétel.** (Banach [SWInPro, 4.Tét.])
Minden Abel-csoport amenábilis.

**7.13. tétel.** (Neumann [EquLac, 2.5.Tét.])
Minden feloldható csoport amenábilis.

*Bizonyítás.* [EquLac, 2.5.Biz.] Legyen $G$ egy feloldható csoport. Ekkor létezik egy olyan normállánca, amiben a faktorcsoportok Abel-csoportok. Ezért elég belátnunk, hogy ha $H$ egy normálosztója a $G$-nek úgy, hogy $G/H$ Abel-csoport, és $H$ amenábilis, akkor $G$ is amenábilis. Tudjuk, hogy minden Abel-csoport amenábilis. Ezért elég megmutatni, hogy ha $H$ egy normálosztója a $G$-nek, és $H$, $G/H$ amenábilisak, akkor $G$ is az. Ha ezt megmutatnánk, akkor indukcióval következne az állítás.
Legyenek $\mu$ és $\nu$ végesen additív invariáns mértékek a $H$-n illetve a $G/H$-n úgy, hogy $\mu(H) = \nu(G/H) = 1$. Kiterjesztjük a $\mu$ mértéket a következőképpen: $\mu(gA) := \mu(A)$, ahol $A \subseteq H, g \in G$. Ez jól értelmezett, mivel $A_1, A_2 \subseteq H$, $g_1 A_1 = g_2 A_2$-ből következik, hogy $g_2^{-1} g_1 \in H$ és így, $\mu$ invarianciája miatt $\mu(A_1) = \mu(g_2^{-1} g_1 A_1) = \mu(A_2)$. Ez a kiterjesztés definiálja $\mu$-t a $H$ egyes mellékosztályainak hatványhalmazain.
Legyen $\Phi : G \longrightarrow G/H$ a természetes homomorfizmus. Ekkor $\Phi^{-1}(y)$ egy mellékosztálya $H$-nak minden $y \in G/H$-ra. Legyen $A \subseteq G$ fix. Ekkor $g(y) := \mu(A \cap \Phi^{-1}(y))$ egy korlátos függvényt definiál a $G/H$-n. Legyen $\gamma(A) := \int_{G/H} g d\nu$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\gamma$ végesen additív, invariáns mérték a $G$ összes részhalmazán úgy, hogy $\gamma(H) = 1$, tehát a $G$ csoport amenábilis. □

Az alábbi jelöléseket fogom használni ezekre a speciális csoportokra.

**7.14. definíció.** [EquLac, 148.Old.]
$G_n$, mint megszokhattuk, az izometriacsoport, $SG_n$ az irányítástartó izometriák csoportja, $SO(n)$ az 1 determinánsú ortogonális transzformációk csoportja, $T_n$ pedig az eltoláscsoport $\mathbb{R}^n$-ben.

A következő tétel egy fontos mértékelméleti eredmény.

**7.15. tétel.** [EquLac, 2.6.Tét.]
Legyen $G$ $G_n$ egy amenábilis részcsoportja. Ekkor létezik egy végesen additív $G$-invariáns kiterjesztése a $\lambda_n$ Lebesgue-mértéknek a $P(\mathbb{R}^n)$-re.

*Bizonyítás.* [EquLac, 2.6.Biz.] Bebizonyítható, mondjuk a Hahn-Banach tétel használatával, hogy a $\lambda_n$-nek van egy végesen additív kiterjesztése a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$-re. Legyen $\nu$ egy ilyen kiterjesztés. Legyen $\gamma$ egy végesen additív invariáns mérték a $G$-n úgy, hogy $\gamma(G) = 1$. Ekkor minden $A \subseteq \mathbb{R}^n$-re legyen $f_A(g) := \nu(gA)$, $g \in G$. Ha $f_A$ nem korlátos a $G$-n, akkor legyen $\mu(A) := \infty$, egyébként legyen $\mu(A) := \int_G f_A d\gamma$. Könnyű leellenőrizni, hogy $\mu$ teljesíti a kívánt feltételeket. □

Az előző tétel következménye a Banach-mértékek létezése $n = 1, 2$-re.

**7.16. következmény.** [HaiHu, 2.7.Példa]
Létezik végesen additív, $G_1$-invariáns kiterjesztése a $\lambda_1$ Lebesgue mértéknek $\mathscr{P}(\mathbb{R})$-re. Ezt a kiterjesztést Banach mértéknek nevezzük.

*Bizonyítás.* [HaiHu, 2.7.Példa] $G_1$ izometriacsoport feloldhatóságát az $\{1\} \triangleleft \mathbb{R} \triangleleft G_1$ normállánc mutatja, ebből következik, hogy $G_1$ amenábilis. □

**7.17. következmény.** [EquLac, 2.7.Tét.]
Létezik végesen additív, $G_2$-invariáns kiterjesztése a $\lambda_2$ Lebesgue mértéknek $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$-re. Ezt a kiterjesztést Banach-mértéknek nevezzük.

*Bizonyítás.* [EquLac, 2.7.Biz.] $G_2$ feloldható, mert az $\{1\} \triangleleft T_2 \triangleleft SG_2 \triangleleft G_2$ a $G_2$ egy normállánca, tehát a csoport amenábilis is. □

Mivel az eltolások csoportja kommutatív (azaz Abel-csoport) és az Abel-csoportok amenábilisak, az alábbi következtetést vonhatjuk le.

**7.18. következmény.** [EquLac, 2.8.Tét.]
Minden $n$-re létezik végesen additív, eltolás-invariáns kiterjesztése a $\lambda_n$-nek $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$-re.

A következő tétel megmutatja, hogy a paradox felbontás az egyetlen akadálya az invariáns mérték létezésének.

**7.19. tétel.** (Tarski [SWInPro, 3.Tét.])
Legyen a $G$ az $X$ halmazon ható csoport. Ekkor a $G$ csoport amenábilis $\iff$ $G$ nem paradox tulajdonságú.

Az odairány egyszerű. Tegyük fel, hogy $\mu$ végesen additív, $G$-invariáns valószínűségi mérték, és indirekt tegyük fel, hogy létezik egy paradox felbontás: $\{A_i\}, \{B_i\}$, $\rho_i, \sigma_i \in G$. Legyen $d_1 = \mu(\cup A_i)$, $d_2 = \mu(\cup B_i)$. Ekkor $d_1 + d_2 \leq \mu(X) = 1$, de $1 = \mu(X) = \mu(\cup \rho_i A_i) \leq \sum \mu(\rho_i A_i) = \sum \mu(A_i) = d_1$. Hasonlóan $1 \leq d_2$, ami ellentmondás.

A visszairány meglehetősen nehéz, Jan Mycielski nevéhez fűződik egy rövid és szép bizonyítása.

Ebből a tételből például az is következik, hogy ha a $G$ csoport amenábilis, akkor nem tartalmazza részcsoportként a két elem által generált $\mathbb{F}_2$ szabadcsoportot, mert ha tartalmazná, akkor paradox tulajdonságú is lenne, ami ellentmond Tarski tételének. Mivel $G_1$ és $G_2$ feloldhatóak, és így amenábilisak is, speciálisan nem tartalmazzák részcsoportként az $\mathbb{F}_2$-t. Végső soron ez az oka annak, hogy a Hausdorff paradoxon konstrukciója nem alkalmazható ezekben az alacsonyabb dimenziókban annak eldöntésére, hogy létezik-e izometria-invariáns, végesen additív mérték a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^1)$-n és a $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$-n.

# 8. Összegzés

Dolgozatomban először a paradox tulajdonság és az egymásbadarabolhatóság fogalmát vizsgáltam meg. Ezek segítségével Banach megfogalmazta a halmazelméleti Schröder-Bernstein tétel egy általánosítását, amire két bizonyítást is mutattam.

Láttunk példát paradox, illetve megszámlálhatóan paradox halmazokra, csoportokra és félcsoportokra. Megvizsgáltuk a kapcsolatot a szabad hatás, a szabad részcsoport és a paradox csoportok között.

Beláttuk a Vitali, a Hausdorff és a Banach-Tarski paradoxont, és megvizsgáltuk ezek mértékelméleti következményeit is. Mutattam példát úgynevezett elnyelős bizonyításra, amit sokszor alkalmaznak ezen a területen.

Körbejártuk az egymásbadarabolhatóság klasszikus síkgeometriai alakját, az átdarabolhatóságot, kitekintésként pedig a kiválasztási axióma és a paradoxonok kapcsolatát is megnéztük.

Az amenábilitás fogalmának segítségével feltérképeztük a kapcsolatot az invariáns mértékek léte és egy csoport paradoxsága között is. Láttunk példákat amenábilis csoportokra, és megvizsgáltuk a Lebesgue mérték kiterjeszthetőségét bizonyos feltételek mellett.

Úgy gondolom, sikerült a terület alapját képező definíciókat, tételeket és kérdéseket alaposan összefoglalnom. További olvasmányként a felsorolt forrásaimból elsősorban a [StanWag] alapművet ajánlom, amiben a legkülönfélébb általánosításokkal és kérdésfelvetésekkel találkozhat az érdeklődő. Ez még csak a kezdet volt: dolgozatom csupán töredékét fedi le az ott leírtaknak.

# 9. Hivatkozások


[StanWag] Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[KisEm] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába.* TypoTeX Kiadó 2007

[MaWa] Mats Wahlberg, *The Banach-Tarski Paradox* (Bachelor Thesis). arXiv:2206.13512v1 [math.HO] 26 Jun 2022

[ParLac] Laczkovich Miklós, *Paradoxical Decompositions: A Survey of Recent Results.* First European Congress of Mathematics (Paris, July 6-10, 1992). Progress in Mathematics, No. 120, Birkhäuser, 1994, Volume II, 159-184.

[ParMe] Laczkovich Miklós, *Paradoxes in Measure Theory.* Handbook of Measure Theory (editor: E. Pap), Elsevier, 2002. Vol. I, 83-123.

[EquLac] Laczkovich Miklós, *Equidecomposability of Sets, Invariant Measures and Paradoxes.* Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. Trieste 23 (1991), 145-176.

[KósG] Kós Géza, *Analízis 4 jegyzet* (kézirat). 2024, `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2023tavasz-an4/Analizis4_Jegyzet-20240218.pdf`

[HaiHu] Haiyu Huang, *Paradoxical Decomposition and Amenability* (UCSD Math Honor Thesis). `https://www.math.ucla.edu/~haiyu/`

[SWInPro] Stanley Wagon, *Invariance Properties of Finitely Additive Measures in* $\mathbb{R}^n$. Illinois Journal of Mathematics Volume 25, Number 1, Spring 1981

[ParKat] Kate Juschenko, *Lecture 1. Paradoxical decompositions of groups and their actions* (kézirat). `https://web.ma.utexas.edu/users/juschenko/notes.html`

[WaBoGe] Maeve Coates Welsh, *Scissorc Congruence.* 2016, `https://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Welsh.pdf`

[Isom] Keith Conrad, *Isometries of* $\mathbb{R}^n$. 2012, `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15635493`.

[MetSp] Mícheál Ó Searcóid, *Metric Spaces.* Springer London, 2007, `https://doi.org/10.1007/978-1-84628-627-8`.