Elmélyedés a parciális differenciálegyenletek elméletében

Szakdolgozat

Készítette:

Gyetvai Miklós

Matematika BSc
Matematikus szakirány

Témavezető:

Maga Balázs

ELTE Matematikai Intézet,
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A variációszámítás a matematikának, azon belül az analízisnak egy nagy múltra visszatekintő ágazata. Már a tizenhetedik század végén felmerültek a terület híres problémái, például a brachisztochron-probléma, melyekkel a kor jeles matematikusai kezdtek el foglalkozni. Sőt, már az ókori görögök is foglalkoztak egyes problémákkal. A variációszámítás, mint önálló területe az analízisnak 1744-től eredeztethető, amikor Euler felfedezte a részben róla elnevezett differenciálegyenletet, ami, mint később látni fogjuk, egy szükséges feltétele a minimalizáló görbének.

A variációszámításban, a kalkulus szokásos problémáival ellentétben egy olyan értéket akarunk minimalizálni, ami nem csak egy vagy több változótól függ, hanem egy egész görbétől vagy felülettől vagy több dimenziós hiperfelülettől.

A variációszámításnak sok fizikai alkalmazása van. Például Hamilton elve, ami azt állítja, hogy egy rendszer dinamikája csak egy Lagrange-függvény variációjától függ, teljesen ezen alapul. Továbbá Albert Einstein és Erwin Schrödinger is alkalmazták a híres munkásságuk alatt, Einstein az általános relativitás elméletében, míg Schrödinger a hullámegyenletének felfedezésében.

Ez a szakdolgozat főleg Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations*[2] című művének ide vonatkozó részeinek foldolgozásán alapul(8. fejezet), azon belül az egzisztenciaelmélettel. Továbbá fel lett még használva forrásként George F. Simmons *Differential Equations with Applications and Historical Notes*[3] című műve.

2. A jelölésrendszer és elmélet bevezetése

Definíciók

$U \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz.
$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \to \mathbb{R}$ sima függvényt Lagrange-függvénynek hívjuk.
$p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ és $x \in U$ esetén $L(p, z, x) = L(p_1, ..., p_n, z, x_1, ..., x_n)$
$D_pL = (L_{p_1}, ..., L_{p_n})$, $D_zL = L_z$ és $D_xL = (L_{x_1}, ..., L_{x_n})$ jelölésekkel
$w : \bar{U} \to \mathbb{R}$ sima, peremfeltételt teljesítő ($w|_{\partial U} = g$) függvények esetén

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx$$

Ekkor keressük $I[w]$ minimumhelyét w függvényében.

2.1. Tétel. *Ha egy $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ sima, peremfeltételt teljesítő függvény a minimumhelye $I[w]$-nek, akkor*

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}(Du(x), u(x), x)\right)_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x) = 0$$

2.2. Definíció. *Ez utóbbi egyenletet hívjuk Euler-Lagrange egyenletnek.*

Bizonyítás. Legyen $v \in C_c^\infty(U)$ tetszőleges sima tesztfüggvény és legyen $i_v(\tau) = I[u+\tau v]$. Ekkor i_v-nek minimuma van 0-ban, hiszen $u+\tau v$ sima, peremfeltételt teljesítő függvények (hiszen $(u + \tau v)|_{\partial U} = u|_{\partial U} + \tau v|_{\partial U} = g + 0 = g$), tehát $i'_v(0) = 0$

$$i_v(\tau) = I[u + \tau v] = \int_U L(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)dx$$

amiből

$$i'_v(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)v_{x_i} +$$
$$+ L_z(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)vdx$$
$$i'_v(0) = \int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du(x), u(x), x)v_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x)vdx$$

ami parciális integrálással

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} (-(L_{p_i}(Du(x), u(x), x))_{x_i} v) + L_z(Du(x), u(x), x) v dx =$$

$$= \int_U [-\sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(Du(x), u(x), x))_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x)] v dx$$

Ez minden v tesztfüggvényre csak akkor lehet 0, ha

$$-\sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(Du(x), u(x), x))_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x) = 0$$

$\square$

Természetesen az Euler-Lagrange egyenlet nem elégséges feltétel, ha egy u függvény megoldása, akkor lehet hogy csak lokális maximum vagy akár még az sem. Emiatt az Euler-Lagrange függvény megoldásait gyakran hívjál stacionárius görbének vagy stacionárius függvénynek.

3. Példák

3.1. Két pontot összekötő legrövidebb görbe

Ennek intuitívan egy szakasznak kellene lennie.
Ekkor $U = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ és $L(p, z, x) = \sqrt{1 + p^2}$, illetve $g(x_i) = y_i$ peremfeltétel esetén

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (Dw(x))^2}dx$$

éppen w ívhossza, és az eddigiek alapján ennek minimumhelye u-ban akkor lehet, ha (mivel $L_z = 0$ és $L_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$)

$$0 = -(L_p(Du(x), u(x), x))_x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{Du(x)}{\sqrt{1 + Du(x)^2}}\right)$$

amiből

$$0 = \frac{D^2u(x)\sqrt{1 + Du(x)^2} - Du(x)\frac{Du(x)D^2u(x)}{\sqrt{1+Du(x)^2}}}{1 + Du(x)^2}$$

amiből mivel $1 + Du(x)^2 \neq 0$, így egyszerűsítve

$$0 = D^2u(x)(1 + Du(x)^2) - Du(x)^2D^2u(x) = D^2u(x)(1 + D(u(x)^2) - D(u(x)^2)) = D^2u(x)$$

innen $Du(x) = C_1$ és $u(x) = C_1x + c_2$, és ez a peremfeltétellel együtt éppen a (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokat összekötő egyenest adja.

Ez tehát az egyetlen stacionáris görbéje I-nek, annak matematikailag rigorózus igazolása, hogy ez valóban globális minimalizáló, további megfontolásokat igényel.

3.2. Brachisztochron-probléma

Adva van egy függőleges síkon két pontunk, A és B, úgy, hogy A magasabban van, a kettőt valamilyen pálya köti össze, és ezen egy golyót gurítunk le A-ból B-be. A kérdés: milyen görbén jut le a legrövidebb idő alatt A-ból B-be a golyó, ha 0 kezdősebességgel indul és súrlódással nem számolunk?
$A = (0, 0)$, $B = (X, Y)$, $0 > Y$ esetén $U = (0, X)$, $h(0) = 0$, $h(X) = Y$
t időpillanatban a golyó a $(x(t), u(x(t)))$ pontban van, sebessége $v(t)$.
Ekkor tetszőleges pillanatban a golyó mozgási energiája $\frac{1}{2}mv^2(t)$, helyzeti energiája $-mgu(x(t))$, így összenergiája $\frac{1}{2}mv^2(t) - mgu(x(t))$, ami állandó, és $t = 0$ esetén 0, így $\frac{1}{2}mv^2(t) = mgu(x(t))$, amiből $v(t) = \sqrt{2gu(x(t))} = V(x(t))$, ahol $V(x) = \sqrt{2gu(x)}$ a

golyó sebessége a hely függvényében.
Tudjuk, hogy

$$T = \int_0^X \frac{1}{V} ds = \int_U \frac{1}{\sqrt{2gu(x)}} \sqrt{1 + (Du(x))^2} dx = \int_U \frac{\sqrt{1 + Du(x)^2}}{\sqrt{2gu(x)}} dx$$

tehát ha $L(p, z, x) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2gz}}$, akkor a Brachisztochron-probléma megoldása éppen $I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx$ minimumhelye $w|_{\partial U} = h$ peremfeltétellel.
Ehhez felhasználjuk a következő lemmát:

3.1. Lemma. *Ha a Lagrange-függvényben nem szerepel x, vagyis ha $L(p, z, x) = F(p, z)$, és $u(x)$ megoldja az Euler-Lagrange egyenletet, akkor*

$$L_p(Du(x), u(x), x)Du(x) - L(Du(x), u(x), x)$$

konstans.

Bizonyítás. Ekkor L deriváltja x szerint

$$\frac{d}{dx} L(Du(x), u(x), x) = L_p(Du(x), u(x), x)D^2u(x) + L_z(Du(x), u(x), x)Du(x)+$$

$$+L_x(Du(x), u(x), x) = D^2u(x)L_p + Du(x)L_z$$

hiszen $L_x = 0$, és $L_pDu(x)$ deriváltja x szerint

$$\frac{d}{dx} L_pDu(x) = (L_p)_xDu(x) + L_pD^2u(x)$$

Így

$$\frac{d}{dx}(L_pDu(x) - L) = (L_p)_xDu(x) + L_pD^2u(x) - D^2u(x)L_p - Du(x)L_z = Du(x)((L_p)_x - L_z)$$

ami éppen az Euler-Lagrange egyenlet többszöröse, vagyis 0. □

A lemmába behelyettesítve $L(p, z, x) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2gz}}$ (ekkor $L_p = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)2gz}}$):

$$\frac{(Du)^2}{\sqrt{(1 + (Du)^2)2gu}} - \sqrt{\frac{1 + (Du)^2}{2gu}} = C$$

amiből

$$(Du)^2 - (1 + (Du)^2) = C\sqrt{(1 + (Du)^2)2gu}$$

és

$$-1 = C\sqrt{2g}\sqrt{u(1 + (Du)^2)}$$

így $u(1 + (Du)^2) = c$ ha $c = \frac{1}{2gC^2}$. Ekkor ha $u(x)$ helyére $c\sin^2(\phi(x))$-et helyettesítünk, akkor $Du(x) = 2c\sin(\phi(x))\cos(\phi(x))\phi'$ így

$$c = c\sin^2\phi(1 + (2c\sin\phi\cos\phi\phi')^2) = c\sin^2\phi + 4c^3\sin^4\phi\cos^2\phi(\phi')^2$$

Ezt rendezve:

$$\sin^2\phi + 4c^2\sin^4\phi\cos^2\phi(\phi')^2 = 1$$

$$4c^2\sin^4\phi\cos^2\phi(\phi')^2 = 1 - \sin^2\phi = \cos^2\phi$$

$$4c^2\sin^4\phi(\phi')^2 = 1$$

$$2c\sin^2\phi\phi' = 1$$

$$c(1 - \cos 2\phi)\phi' = 1$$

$$\int c(1 - \cos 2\phi)d\phi = \int 1dx$$

$$c\phi - \frac{c}{2}\sin 2\phi + c_1 = x$$

A peremfeltételből, mivel $0 = h(0) = u(0) = c\sin^2(\phi(0))$ miatt $\phi(0) = 0$, amiből $c_1 = 0$, így

$$x = \frac{c}{2}(2\phi - \sin 2\phi)$$

és

$$u = c\sin^2\phi = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

vagy ha $a = \frac{c}{2}$ és $\theta = 2\phi$ helyettesítéssel

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$u = a(1 - \cos\theta)$$

ami a ciklois szokásos paraméterezése.

Ez tehát az egyetlen stacionáris görbéje I-nek, annak matematikailag rigorózus igazolása, hogy ez valóban globális minimalizáló, itt is további megfontolásokat igényel.

4. Egyenletrendszerek és több dimenzió

Általánosíthatjuk egyenletrendszerre a következőképpen: a Lagrange-függvényünk ekkor $L : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \to \mathbb{R}$ ahol $L(P, z, x) = L(p_1^1, ..., p_n^m, z^1, ..., z^m, x_1, ..., x_n)$ felsőindexes jelölést használjuk az egyszerűség kedvéért.

Ekkor $w : \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ sima, a $w|_{\partial U} = g$ peremfeltételt teljesítő függvényekre $I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx$ minimalizálása hasonlóan levezethető a

$$-\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i^k}(Du(x), u(x), x))_{x_i} + L_{z^k}(Du(x), u(x), x) = 0$$

Euler-Lagrange egyenletrendszerre, ahol ha u minimalizálja $I[u]$-t, akkor minden $1 \leq k \leq m$ teljesül az Euler-Lagrange egyenletrendszer.

Egy L Lagrange-függvény null-Lagrange, ha az Euler-Lagrange egyenletrendszer minden $u : U \to \mathbb{R}^m$ sima függvényre teljesül. Ilyenkor $I[w]$ csak a peremfeltételtől függ:

4.1. Tétel. *Ha L null-Lagrange, és $u|_{\partial U} = w|_{\partial U}$, akkor $I[u] = I[w]$*

Bizonyítás. Legyen

$$i(t) = I[tu + (1-t)w]$$

tetszőleges $0 \leq t \leq 1$-re. Ekkor

$$i'(t) = \left(\int_U L(tDu(x) + (1-t)Dw(x), tu(x) + (1-t)w(x), x)dx\right)' =$$

$$= \int_U \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} L_{p_i^k}(tDu(x) + (1-t)Dw(x), tu(x) + (1-t)w(x), x)(u^k_{x_i} - w^k_{x_i}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} L_{z^k}(tDu(x) + (1-t)Dw(x), tu(x) + (1-t)w(x), x)(u^k - w^k)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_U \Bigg[-\sum_{i=1}^{n}\Big(L_{p_i^k}(tDu(x) + (1-t)Dw(x), tu(x) + (1-t)w(x), x)\Big)_{x_i} +$$

$$+ L_{z^k}(tDu(x) + (1-t)Dw(x), tu(x) + (1-t)w(x), x)\Bigg](u^k - w^k)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_U 0(u^k - w^k)dx = 0$$

hiszen az Euler-Lagrange egyenletrendszer teljesül $tu + (1-t)w$-re. Ekkor tehát $i(t)$ konstans, így $I[u] = i(1) = i(0) = I[w]$. □

Egy példája a null-Lagrange-függvényeknek a determináns, vagyis $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $L(P) = \det P$. Ekkor ugyanis az Euler-lagrange egyenletrendszer a következő:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (L_{p_i^k}(Du))_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \det Du}{\partial p_i^k}\right)_{x_i}$$

Ismert, hogy $(\det P)I = P^T(\mathrm{cof} P)$, ahol $\mathrm{cof} P$ a P mátrix kofaktor mátrixa. Ebből

$$(\det P)\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_i^k (\mathrm{cof} P)_j^k \tag{1}$$

Itt a mátrixelemek jelölésére (sor és oszlop) alsó és felső indexeket használunk. Ezt parciálisan deriválva p_i^k szerint $i = j$ esetben

$$\frac{\partial \det P}{\partial p_i^k} = (\mathrm{cof} P)_i^k \tag{2}$$

tehát az Euler-Lagrange egyenletrendszer a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{cof} Du)_{i,x_i}^k = 0$$

4.2. Lemma. *Tetszőleges $u : U \to \mathbb{R}^n$ sima függvényre és $k = 1, ..., n$-re*

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{cof} Du)_{i,x_i}^k = 0$$

Bizonyítás. (1)-be P helyére Du-t helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{x_i}^k (\mathrm{cof} Du)_j^k = \delta_{i,j} \det Du$$

ezt x_j szerint deriválva

$$\sum_{k=1}^{n} \left(u_{x_i x_j}^k (\mathrm{cof} Du)_j^k + u_{x_i}^k (\mathrm{cof} Du)_{j,x_j}^k \right) = \delta_{i,j} \frac{\partial \det Du}{\partial x_j} = \delta_{i,j} \sum_{m,k=1}^{n} \frac{\partial \det Du}{\partial u_{x_m}^k} \frac{\partial u_{x_m}^k}{\partial x_j}$$

A jobb oldalra (2)-t behelyettesítve

$$\sum_{k=1}^{n}\left(u^k_{x_ix_j}(\mathrm{cof}Du)^k_j + u^k_{x_i}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j}\right) = \delta_{i,j}\sum_{m,k=1}^{n}(\mathrm{cof}Du)^k_m u^k_{x_mx_j}$$

ezt $j = 1, ..., n$-re összegezve

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left(u^k_{x_ix_j}(\mathrm{cof}Du)^k_j + u^k_{x_i}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j}\right) = \sum_{j,k,m=1}^{n}\delta_{i,j}(\mathrm{cof}Du)^k_m u^k_{x_jx_m} = \sum_{m,k=1}^{n}(\mathrm{cof}Du)^k_m u^k_{x_ix_m}$$

Ezt átrendezve

$$\sum_{j,k=1}^{n}u^k_{x_ix_j}(\mathrm{cof}Du)^k_j + \sum_{j,k=1}^{n}u^k_{x_i}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j} = \sum_{j,k=1}^{n}u^k_{x_ix_j}(\mathrm{cof}Du)$$

amiből

$$0 = \sum_{j,k=1}^{n}u^k_{x_i}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j} = \sum_{k=1}^{n}u^k_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j}\right)$$

Ekkor ha $\det Du(x_0) \neq 0$, akkor következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{cof}Du(x_0))^k_{j,x_j} = 0 \tag{3}$$

Ha pedig $\det Du(x_0) = 0$, akkor választhatunk tetszőlegesen kicsi ϵ-t, amelyre ha $\tilde{u}(x) = u(x) + x\epsilon$, akkor $\det D\tilde{u}(x_0) \neq 0$, így $\tilde{u}(x_0)$-ra teljesül (3), és ezután ϵ-nal 0-hoz tartva $u(x_0)$-ra úgyszintén következik, vagyis

$$\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{cof}Du)^k_{j,x_j} = 0$$

□

Ebből tehát tetszőleges k-ra teljesül az Euler-Lagrange egyenletrendszer, tehát a determináns null-Lagrange.

5. Brouwer-fixponttétel

A fenti, technikainak tetsző levezetés egy váratlan következményeként a Brouwer-fixponttétel egy analitikus bizonyítása adódik, melyet ebben a fejezetben prezentálunk.

5.1. Tétel. *Legyen $u : B \to B$ folytonos leképezés, ahol B az n-dimenziós zárt egységgömb. Ekkor van u-nak fixpontja, vagyis létezik $x \in B$, amire $u(x) = x$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u : B \to B$ folytonos és nincs fixpontja. Ekkor legyen $w : B \to \partial B$ az a leképezés, ahol $w(x)$ az $(u(x), x)$ nyílt félegyenes és ∂B metszéspontja. Ekkor $w : B \to \partial B$ folytonos leképezés amire minden $x \in \partial B$-re $w(x) = x$. Ezt a függvényt folytonosan kiterjeszthetjük $\mathbb{R}^n$-re, hogyha $x \in \mathbb{R}^n \backslash B$-re $w(x) = x$. A továbbiakhoz szükségünk van buckafüggvényekre:

5.2. Definíció. *Legyen*

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & ha\ |x| < 1 \\ 0 & ha\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

ahol C úgy van megválasztva, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$

Legyen $\epsilon > 0$-ra

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Ekkor η a standard buckafüggvény és η_ϵ buckafüggvények.

5.3. Lemma. *Tetszőleges $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvényre $f * \eta_\epsilon$ sima.*

Bizonyítás. Legyen $f * \eta_\epsilon = f^\epsilon$. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ fix, $h \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ekkor

$$\frac{f^\epsilon(x + he_i) - f^\epsilon(x)}{h} = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right)\right] f(y)dy =$$

$$= \int_V \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right]f(y)dy$$

valamely $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra, mivel η tartója kompakt. Ekkor V-n

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\epsilon}\eta_{x_i}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

egyenletesen, így $f^\epsilon_{x_i}$ létezik és

$$f^\epsilon_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon,x_i}(x-y)f(y)dy$$

Hasonlóan tetszőleges α multiindexre megmutathatjuk, hogy

$$D^\alpha f^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy$$

□

5.4. Lemma. *$f^\epsilon \to f$ majdnem mindenhol, ha $\epsilon \to 0$. Ha f folytonos, akkor $f^\epsilon \to f$ egyenletesen tetszőleges kompakt halmazon.*

Bizonyítás. Tudjuk Lebesque differenciálási tételéből, hogy

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy = 0 \tag{4}$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re. Ekkor tetszőleges ilyen x-re

$$|f^\epsilon(x)-f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\epsilon(x-y)dy\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)(f(y)-f(x))dy\right| \le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{D(x,\epsilon)}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(y)-f(x)|dy \le$$

$$\le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)}\frac{C}{\epsilon}|f(y)-f(x)|dy = \frac{C|B(x,\epsilon)|}{\epsilon^{n+1}}\frac{1}{|B(x,\epsilon)|}\int_{B(x,\epsilon)}|f(y)-f(x)|dx \to 0$$

ha $\epsilon \to 0$, tehát ekkor $f^\epsilon \to f$.

Ha f folytonos és $V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, akkor választhatunk olyan $V \subset W \subset \mathbb{R}^n$-t, amire f egyenletesen folytonos W-n, ekkor (4) minden $x \in V$-re egyenletesen teljesül, így a fenti számítások alapján $f^\epsilon \to f$ V-n egyenletesen. □

Ekkor mivel $w(x)$ sehol sem 0 és folytonos, ezért választhatunk olyan kicsi ϵ-t, amire $w_1 = w * \eta_\epsilon$ szintén sehol sem 0. Ekkor a fenti lemmák miatt w_1 sima és mivel $\eta_\epsilon(x)$ radiális (vagyis csak $|x|$-től függ), így $w_1(x) = x$ ha $x \in \mathbb{R}\backslash B(0,2)$, ahol $B(0,2)$ nyílt gömb.
Ekkor $w_2(x) = \frac{w_1(2x)}{|w_2(2x)}= \frac{w*\eta_\epsilon(2x)}{|w*\eta_\epsilon(2x)|}$ egy $B \to \partial B$ sima leképezés, amire $w_2(x) = \frac{w_1(2x)}{|w_1(2x)|} = \frac{2x}{|2x|} = \frac{2x}{2} = x$ ∂B-n, mivel ekkor $2x \in \mathbb{R}\backslash B(0,2)$.
Ekkor hogyha $\bar{w} : B \to B$ az identitásfüggvény, akkor mivel $\bar{w}|_{\partial B} = w_2|_{\partial B}$ és a determináns null-Lagrange, ezért a determináns alapján definiált $I[w]$ esetén $I[w_2] = I[\bar{w}]$ avagy

$$\int_B \det Dw_2 dx = \int_B \det D\bar{w} dx = \int_B 1 dx = |B| \neq 0$$

Viszont mivel $|w_2(x)|^2 = 1$, ezt deriválva $(Dw_2)^T w_2 = 0$, amiből 0 sajátértéke Dw_2^T-nek, vagyis $\det Dw_2 = 0$, így $\int_B \det Dw_2 dx = 0$, ami ellentmondás. □

6. A második variáció vizsgálata

Ha a korábban definiált $i_v(\tau)$ minimumát keressük, akkor önmagában nem feltétlen elég, hogy $i_v(0) = 0$, hiszen itt még lehet lokális maximum vagy inflexiós pont is, hogy ez utóbbit kiküszöböljük, megvizsgálhatjuk $i_v''(\tau)$-t is. Ha ugyanis minimumhelyünk van, akkor $i_v''(0) \geq 0$ minden v-re, és ha $i_v''(0) > 0$ minden v-re akkor lokális minimumhelyünk van.

$$i_v(\tau) = I[u + \tau v] = \int_U L(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)dx$$

ennek második deriváltja

$$i_v''(\tau) = \int_U \sum_{1\leq i,j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)v_{x_i}v_{x_j} +$$
$$+2\sum_{i=1}^{n} L_{p_iz}(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)v_{x_i}v +$$
$$+L_{zz}(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x)v^2dx$$

amiből a feltétel

$$0 \leq i_v''(0) = \int_U \sum_{1\leq i,j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)v_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} L_{p_iz}(Du(x), u(x), x)v_{x_i}v +$$
$$+L_{zz}(Du(x), u(x), x)v^2dx$$

minden v tesztfüggvényre.
Legyen $\zeta \in C_c^\infty(U)$ és $\rho(x)$ az 1-periodikus cikk-cakk függvény (azaz ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ akkor $\rho(x) = x$, ha $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ akkor $\rho(x) = 1-x$ és $\rho(x) = \rho(x+1)$) és legyen $v(x) = \epsilon\rho(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon})\zeta(x)$ tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^n$ konstansra.
Ekkor $v_{x_i} = \rho'(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon})\xi_i\zeta + \epsilon\rho(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon})\zeta_{x_i} \to \rho'(\frac{x\cdot\xi}{\epsilon})\xi_i\zeta$ ha ϵ-nal 0-hoz tartunk.
Erre a v-re is teljesülnie kell a fenti egyenlőtlenségnek, így ezt behelyettesítve

$$0 \leq \int_U \sum_{1\leq i,j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)(\rho')^2\xi_i\xi_j\zeta^2 + \sum_{i=1}^{n} L_{p_iz}(Du(x), u(x), x)\epsilon\rho\rho'\xi_i\zeta^2+$$
$$+L_{zz}(Du(x), u(x), x)\epsilon^2\rho^2\zeta^2 \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_U \sum_{1\leq i,j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)(\rho')^2\xi_i\xi_j\zeta^2 =$$
$$= \int_U \sum_{1\leq i.j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)\xi_i\xi_j\zeta^2$$

Ennek minden $\zeta \in C_c^\infty(U)$-ra teljesülnie kell, ami csak akkor lehet, ha

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} L_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)\xi_i\xi_j \geq 0 \tag{5}$$

Ez tehát szükséges feltétele, hogy u minimalizáló legyen.

7. A minimalizáló létezésének vizsgálata

Ebben a fejezetben a Lagrange-függvény olyan tulajdonságait keresünk, amelyek garantálják $I[w]$ minimumhelyének létezését.

7.1. Koercivitás

Ismert, hogy tetszőleges sima, alulról korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem feltétlen veszi fel a minimumhelyét, mint például e^x vagy $(xy-1)^2 + y^2$, ezért ahhoz, hogy $I[w]$ minimalizálóját mégis garantálni tudjuk, ésszerű nagy w-kre valamilyen módon behatárolni $I[.]$ viselkedését.
Legyen $1 < q < \infty$ fix. Feltesszük, hogy léteznek $\alpha > 0, \beta \geq 0$ konstansok, hogy $L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta$ minden $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ és $x \in U$-ra, ugyanis ekkor

$$I[w] \geq \delta \|Dw\|^q_{L^q(U)} - \beta |U| \tag{6}$$

valamely $\delta > 0$ konstansra. Ez utóbbi egyenlőtlenséget hívjuk $I[.]$ koercivitási feltételének.

7.2. Kiterjesztés Szoboljev-terekre

A koercivitási feltételből észrevehetjük, hogy ésszerű kiterjeszteni a vizsgált függvények halmazát a $W^{1,q}(U)$ Szoboljev-térre, ahol a peremfeltételünk nyom értelemben van értelmezve. Jelölje ekkor

$$\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(U)|\ w|_{\partial U} = g \textit{ nyom értelemben}\}$$

az elfogadható függvények halmazát. Ekkor (6) miatt $I[.]$ definiálva van minden $w \in \mathcal{A}$-ra.

A továbbiakban több tételt a funkcionálanalízis témaköréből fogunk felhasználni, amik közvetve vagy közvetlenül a Szoboljev-terekről is szólnak, és itt bizonyítás nélkül szerepelnek.

7.1. Tétel (Rellich-Kondrasov kompaktsági tétel). *Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ korlátos ∂U C^1-beli és $1 \leq p < n$, akkor*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

tetszőleges $1 \leq q < p*$-ra.

7.2. Tétel (Mazur tétele). *Ha X egy valós Banach-tér, akkor annak tetszőleges konvex, zárt részhalmaza gyengén zárt.*

7.3. Tétel (Morrey-egyenlőtlenség). *$n < p \le \infty$ és korlátos U esetén létezik C konstans, amire*

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(U)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

tetszőleges $u \in C^1(U) \cap L^p(U)$ esetén.

7.4. Tétel (Arzela-Ascoli). *Ha f_k valós értékű függvények sorozata, amire*

$$|f_k(x)| \le M$$

valamely M konstansra és minden k-ra, és a függvénysorozat egyenletesen ekvifolytonos, akkor van, kompakt halmazokon egyenletesen konvergens részsorozata.

7.3. Félig folytonosság

Legyen

$$m = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w]$$

ekkor léteznek olyan $u_k \in \mathcal{A}$ függvények, amelyekre

$$I[u_k] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} m$$

ekkor $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy minimalizáló sorozat. Mivel $1 < q < \infty$, ezért $L^q(U)$ reflexív, így Banach-Alaoglu tétel miatt létezik u_k-nak egy u_{k_j} részsorozata és $u \in W^{1,q}(U)$, hogy

$$u_{k_j} \rightharpoonup u$$

és

$$Du_{k_j} \rightharpoonup Du$$

gyengén rendre $L^q(U)$-ban és $L^q(U;\mathbb{R}^n)$-ben. Ezt a továbbiakban úgy rövidítjük, hogy $u_{k_j} \rightharpoonup u$ $W^{1,q}(U)$-ban. Ekkor még $u = g$ ∂U-n a gyenge konvergencia miatt, így $u \in \mathcal{A}$.

Ekkor ha $I[.]$ folytonos lenne a gyenge topológiára, akkor következne, hogy $I[u_{k_j}] \to I[u]$, vagyis ekkor u egy minimalizáló. Sőt, elég $I[.]$ alulról félig folytonossága, hiszen ekkor $m \le I[u] \le \lim I[u_{k_j}] = m$, vagyis u minimalizáló. $I[.]$ operátort gyengén alulról félig folytonosnak hívjuk, ha a gyenge topológiára nézve alulról félig folytonos. A továbbiakban olyan tulajdonságát keressük L-nek, amelyből következik, hogy I gyengén alulról félig folytonos.

7.4. Konvexitás

A második variáció vizsgálatát lefolytatva (5)-ből tudjuk, hogy ahhoz, hogy az Euler-Lagrange-egyenletet kielégítő kritikus függvény valóban minimalizáló lehessen, ennek az egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. L első változó szerinti konvexitása tehát jó kiindulópont lehet a minimalizáló tényleges létezéséhez, amint azt a következő tételekben demonstrálni fogjuk.

7.5. Tétel. *Ha L sima, alulról korlátos és p változó szerint konvex, akkor $I[.]$ gyengén alulról félig folytonos.*

Bizonyítás. Legyen (u_k) gyengén konvergens sorozat, amire $u_k \rightharpoonup u$ $W^{1,q}(U)$-ban és legyen

$$l = \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$$

Ekkor be kell látnunk, hogy $l \geq I[u]$

Tudjuk, hogy egy gyengén konvergens sorozat normája korlátos, vagyis

$$\sup_k \|u_k\|_{W^{1,q}(U)} < \infty$$

Ekkor áttérhetünk $I[u_k]$-nak egy olyan konvergens részsorozatára, amire $I[u_k] \to l$. A Rellich-Kondrasov Kompaktsági Tétel alapján $u_k \to u$ $L^q(U)$-ban, ezután pedig megint áttérhetünk u_k olyan részsorozatára, amire $u_k \to u$ majdnem mindenhol U-n belül.

Legyen $\epsilon > 0$ fix. Ekkor Jegorov tétele alapján $u_k \to u$ egyenletesen egy E_ϵ mérhető halmazon, amire $|U - E_\epsilon| \leq \epsilon$. Feltehetjük, hogy $0 < \epsilon' < \epsilon$-ra $E_\epsilon \subset E_{\epsilon'}$. Legyen

$$F_\epsilon = \left\{ x \in U : |u(x)| + |Du(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

Ekkor

$$|U - F_\epsilon| \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Legyen $G_\epsilon = E_\epsilon \cup F_\epsilon$, és a korábbiakból tudjuk, hogy

$$|U - G_\epsilon| \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Mivel L alulról korlátos, ezért feltehetjük, hogy $L \geq 0$. Ekkor

$$I[u_k] = \int_U L(Du_k(x), u_k(x), x)dx \geq \int_{G_\epsilon} L(Du_k(x), u_k(x), x)dx \geq$$

$$\geq \int_{G_\epsilon} L(Du(x), u_k(x), x)dx + \int_{G_\epsilon} D_pL(Du(x), u_k(x), x) \cdot (Du_k(x) - Du(x))dx$$

ahol az utóbbi egyenlőtlenség L konvexitásából jön.

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} L(Du(x), u_k(x), x)dx = \int_{G_\epsilon} L(Du(x), u(x), x)dx$$

mivel $u_k \to u$ egyenletesen E_ϵ-on és $G_\epsilon \subset E_\epsilon$. Hasonlóan

$$D_pL(Du(x), u_k(x), x) \to D_p(Du(x), u(x), x)$$

egyenletesen G_ϵ-on, és mivel $Du_k \rightharpoonup Du$ gyengén $L^q(U; \mathbb{R}^n)$-en, ezért

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} D_pL(Du(x), u_k(x), x) \cdot (Du_k(x) - Du(x))dx = 0$$

Ezeket összevetve:

$$l = \lim_{k\to\infty} I[u_k] \geq \lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} L(Du(x), u_k(x), x)dx +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} D_pL(Du(x), u_k(x), x) \cdot (Du_k(x) - Du(x))dx = \int_{G_\epsilon} L(Du(x), u(x), x)dx$$

Ez minden ϵ-ra teljesül, így ha ϵ-nal 0-hoz tartunk, akkor a Monoton Konvergenciatétel alapján:

$$l \geq \int_U L(Du(x), u(x), x)dx = I[u]$$

$\square$

7.6. Tétel. *Legyen L p változó szerint konvex, és teljesíti a koercivitási feltételt, és $\mathcal{A}$ nemüres. Ekkor $\exists u \in \mathcal{A}$ amire*

$$I[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$$

Bizonyítás. Legyen

$$m = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w]$$

Ekkor ha $m = \infty$, akkor triviális, tehát feltehetjük, hogy m véges. Legyen (u_k) egy tetszőleges minimalizáló sorozat. Ekkor $I[u_k] \to m$. A koercivitási feltételnél feltehetjük, hogy $\beta = 0$, hiszen különben vehetjük helyette a $\tilde{L} = L + \beta$ Lagrange-függvényt, így $L \geq \alpha |p|^q$, így

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)dx \geq \int_U \alpha |Dw(x)|^q dx = \alpha \int_U |Dw|^q dx$$

tetszőleges $w \in \mathcal{A}$-ra. Mivel m véges, így az előbbiekből

$$\sup \|Du_k\|_{L^q(U)} < \infty$$

Legyen $w \in \mathcal{A}$ fix. Mivel $u_k|_{\partial U} = g = w|_{\partial U}$, ezért $u_k - w \in W_0^{1,q}(U)$. Ekkor a Poincaré-egyenlőtlenség alapján

$$\|u_k\|_{L^q(U)} \leq \|u_k - w\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)} \leq c\|Du_k - Dw\|_{L^q(U)} + c \leq C$$

Amiből

$$\sup_k \|u_k\|_{L^q(U)} < \infty$$

Ezek alapján (u_k) korlátos $W^{1,q}(U)$-n, így van gyengén korlátos részsorozata (u_{k_j}), amire

$$u_{k_j} \rightharpoonup u$$

valamely $u \in W^{1,q}(U)$-ra. $W_0^{1,q}(U)$ egy zárt, lineáris altere $W^{1,q}(U)$-nak, így Mazur tétele alapján zárt a gyenge topológiára is, tehát $u - w \in W_0^{1,q}(U)$, így $u|_{\partial U} = g$. Mivel L konvex p szerint, ezért a korábbi tétel alapján $I[.]$ gyengén alulról félig folytonos, így $I[u] \leq \liminf I[u_{k_j}] = m$, viszont a korábbiak alapján $u \in \mathcal{A}$, így $m \leq I[u]$, így

$$m = I[u] = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w]$$

$\square$

7.5. Egyértelműség

Általános esetben nem tudunk egyértelműségről beszélni, egy $I[.]$ operátornak sok minimuma lehet. Viszont bizonyos megkötések mellett egyértelmű lesz.

7.7. Tétel. *Ha az L Lagrange-függvény z-változótól független (vagyis írhatjuk a továbbiakban $L(p,x)$-ként), és egyenletesen konvex p változóban, vagyis létezik $\theta > 0$ amire minden $p, \xi \in \mathbb{R}^n$ és $x \in U$-ra*

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(p,x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

akkor $I[.]$ minimalizálója egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u, \tilde{u} \in \mathcal{A}$ minimalizálják $I[.]$-t. Legyen $v = \frac{u+\tilde{u}}{2}$ ekkor azt állítjuk, hogy

$$I[v] \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2} \tag{7}$$

és az egyenlőség csak akkor van, ha $u = \tilde{u}$ majdnem mindenhol.

Az egyenletesen konvexségből következik, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}^n$-re és $x \in U$-ra

$$L(p,x) \geq L(q,x) + D_pL(q,x) \cdot (p-q) + \frac{\theta}{2}|p-q|^2 \tag{8}$$

Ekkor ha $p = Du$, $q = \frac{Du+D\tilde{u}}{2}$ és az integráljuk mindkét oldalt U-n, akkor

$$\int_U L(Du(x),x)dx = I[u] \geq \int_U L\left(\frac{Du(x)+D\tilde{u}(x)}{2}, x\right)dx +$$

$$+ \int_U D_pL\left(\frac{Du(x)+D\tilde{u}(x)}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{Du(x)-D\tilde{u}(x)}{2}\right)dx + \int_U \frac{\theta}{2}\left|\frac{Du(x)-D\tilde{u}(x)}{2}\right|^2 dx =$$

$$= I[v] + \int_U D_pL\left(\frac{Du(x)+D\tilde{u}(x)}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{Du(x)-D\tilde{u}(x)}{2}\right)dx + \frac{\theta}{8}\int_U |Du(x)-D\tilde{u}(x)|^2 dx$$

Ha pedig (8)-ba $p = D\tilde{u}$-t (és ugyanazt a q-t) helyettesítjük be, és integrálunk U-n, akkor a következőt kapjuk:

$$I[\tilde{u}] \geq I[v] + \int_U D_pL\left(\frac{Du(x)+D\tilde{u}(x)}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{D\tilde{u}(x)-Du(x)}{2}\right)dx +$$

$$+\frac{\theta}{8}\int_U |Du(x)-D\tilde{u}(x)|^2 dx$$

Ekkor ha a két egyenlőtlenséget összeadjuk és osztunk kettővel, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2} \geq I[v] + \frac{\theta}{8}\int_U |Du(x)-D\tilde{u}|^2 dx$$

Mivel az integrál nemnegatív, ezért (7) következik, ha pedig (7)-ben egyenlőség van, akkor mivel u és $\tilde{u}$ minimalizálók, ezért az integrálnak 0-nak kell lennie, ami csak akkor lehet, ha $Du = D\tilde{u}$ majdnem mindenhol, és mivel $u|_{\partial U} = \tilde{u}|_{\partial U}$, ezért következik, hogy $u = \tilde{u}$ majdnem mindenhol. □

7.6. Gyenge megoldások

Meg akarjuk mutatni, hogy egy minimalizáló $u \in \mathcal{A}$ teljesíti az Euler-Lagrange egyenletet valamilyen értelemben. Mivel u-ról nem tudjuk, hogy sima, hiszen $\mathcal{A}$ Szoboljev-térbeli függvényekből áll, ezért nem használhatjuk a második fejezetbeli bizonyítást. Sőt, szükségünk lesz a Lagrange-függvény néhány növekedési megkötésére:

$$|L(p,z,x)| \leq C(|p|^q + |z|^q + 1)$$

$$|D_pL(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$$
$$|D_zL(p,z,x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$$

valamely C konstansra és minden $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ és $x \in U$-ra.
Mivel u Szoboljev-térbeli függvény, ezért nem várhatjuk el, hogy teljesítse az Euler-Lagrange egyenletet, csak gyenge értelemben.
Az Euler-Lagrange egyenlet gyenge megoldásának nevezzük azon $u \in \mathcal{A}$-t, amire

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du(x), u(x), x)v_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x)v dx = 0$$

tetszőleges $v \in W_0^{1,q}(U)$-ra.

7.8. Tétel. *Ha L teljesíti a növekedési megkötéseket és $u \in \mathcal{A}$ minimalizálja $I[.]$-t, akkor u egy gyenge megoldása az Euler-Lagrange egyenletnek.*

Bizonyítás. Legyen $v \in W_0^{1,q}(U)$ tetszőleges és legyen $i_v(\tau) = I[u + \tau v]$. A növekedési megkötések miatt $i_v(\tau)$ mindig véges. Legyen $\tau \neq 0$ és tekintsük a következő differencia-hányadost:

$$\frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \int_U \frac{L(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x) - L(Du(x), u(x), x)}{\tau} dx =$$

$$= \int_U L^\tau(x) dx$$

ahol $L^\tau(x) = \frac{1}{\tau}(L(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x) - L(Du(x), u(x), x))$.
Ha τ-val 0-hoz tartunk, akkor

$$L^\tau(x) \to \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du(x), u(x), x) v_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x) v$$

majdnem mindenhol. Továbbá

$$L^\tau(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{ds} L(Du(x) + sDv(x), u(x) + sv(x), x) ds =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du(x) + sDv(x), u(x) + sv(x), x) v_{x_i} +$$

$$+ L_z(Du(x) + sDv(x), u(x) + sv(x), x) v ds$$

Ezután belátható, hogy

$$|L^\tau(x)| \leq C\left(|Du(x)|^q + |u(x)|^q + |Dv(x)|^q + |v(x)|^q + 1\right)$$

amiből a Dominált Konvergenciatételből

$$i_v'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du(x), u(x), x) v_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x) v dx$$

és mivel u minimalizálja $I[.]$-t, ezért $i_v(0) = 0$ minden $v \in W_0^{1,q}(U)$-ra, vagyis u gyenge megoldása az Euler-Lagrange egyenletnek. □

7.7. Egyenletrendszerek

Használjuk a negyedik fejezetben bevezetett jelölést. $w : U \to \mathbb{R}^m$, $L : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \to \mathbb{R}$ esetén keressük

$$I[w] = \int_U L(Du(x), u(x), x)dx$$

minimalizálóját.
Ekkor ha a koercivitási feltételünk minden $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $z \in \mathbb{R}^m$ és $x \in U$ esetén

$$L(P, z, x) \geq \alpha|P|^q - \beta$$

valamely $\alpha > 0$ és $\beta \geq 0$ konstansokra, az elfogadható függvények halmaza pedig adott $g : \partial U \to \mathbb{R}^m$ peremfüggvényre

$$\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(U; \mathbb{R}^m) : w|_{\partial U} = g\textit{nyom értelemben}\}$$

akkor látni fogjuk, hogy a korábbi tételeink hasonó feltételekkel teljesülnek.

7.9. Tétel. *Ha L teljesíti a koercivitási feltételt, konvex a P változóban, és $\mathcal{A}$ nemüres, akkor létezik $u \in \mathcal{A}$ amire*

$$I[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$$

Bizonyítás. A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint 7.5 és 7.6 tételek esetén. □

7.10. Tétel. *Ha L a z változótól független és egyenletesen konvex P változóban, akkor $I[.]$ minimalizálója egyértelmű.*

Bizonyítás. A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint 7.7 tétel esetén □

Továbbiakban tegyük fel, hogy valamely C konstansra L teljesíti a következő növekedési megkötéseket:

$$|L(P, z, x)| \leq C(|P|^q + |z|^q + 1)$$

$$|D_P L(P, z, x)| \leq C(|P|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$$

és

$$|D_z L(P, z, x)| \leq (|P|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$$

minden $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$-re, $z \in \mathbb{R}^m$-re és $x \in U$-ra.
Tekintsük az Euler-Lagrange egyenletrendszert:

$$-\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i^k}(Du(x),u(x),x))_{x_i} + L_{z^k}(Du(x),u(x),x) = 0$$

minden $1 \leq k \leq n$-re, és hívjuk $u \in \mathcal{A}$-t ennek egy gyenge megoldásának, ha minden $w \in W_0^{1,q}(U;\mathbb{R}^m)$ esetén

$$\sum_{k=1}^{m}\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i^k}(Du(x),u(x),x)w^k_{x_i} + L_{z^k}(Du(x),u(x),x)w^k dx = 0$$

7.11. Tétel. *Ha L teljesíti a növekedési megkötéseket, és $u \in \mathcal{A}$ minimalizálja $I[.]$-t, akkor u egy gyenge megoldása az Euler-Lagrange egyenletrendszernek.*

Bizonyítás. A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint 7.8 tétel esetén □

7.8. Polikonvex egyenletrendszerek

7.5 tételt P változóban konvex függvényekre mondtuk ki, azonban ez nem szükséges feltétel, elég azt tudnunk, hogy $I[.]$ gyengén alulról félig folytonos. Erre fogunk másik elégséges feltételt találni, azonban ehhez először a következő lemmát bizonyítjuk:

7.12. Lemma. *Legyen $n < q < \infty$ és $u_k \rightharpoonup u$ $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$-ben. Ekkor* $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ *$L^{q/n}(U)$-ban*

Bizonyítás. Ismert, hogy $(\det P)I = P(\mathrm{cof}P)^T$, amiből

$$\det P = \sum_{j=1}^{n} p^i_j(\mathrm{cof}P)^i_j$$

minden $i = 1, ..., n$-re, így ha $w \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ függvény, akkor

$$\det Dw = \sum_{j=1}^{n} w^i_{x_j}(\mathrm{cof}Dw)^i_j$$

4.1 lemmából tudjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{cof}Dw)^i_{j,x_j} = 0$$

tetszőleges i-re, így

$$\sum_{j=1}^{n}(w^i(\mathrm{cof} Dw)^i_j)_{x_j} = \sum_{j=1}^{n} w^i_{x_j}(\mathrm{cof} Dw)^i_j + \sum_{j=1}^{n} w^i(\mathrm{cof} Dw)^i_{j,x_j} = \det Dw$$

vagyis a gradiensmátrix determinánsa felírjató divergenciaként, így ha $v \in C_0^\infty(U)$, akkor

$$\int_U v \det Dw dx = \int_U \sum_{j=1}^{n} v(w^i(\mathrm{cof} Dw)^i_j)_{x_j} dx = -\sum_{j=1}^{n}\int_U v_{x_j} w^i (\mathrm{cof} Dw)^i_j dx$$

Mivel u_k-t közelíthetjük sima függvényekkel, ezért láthatjuk, hogy

$$\int_U v \det Du_k dx = -\sum_{j=1}^{n}\int_U v_{k_j} u^i_k (\mathrm{cof} Du_k)^i_j dx$$

Mivel $u_k \rightharpoonup u$ $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$-ben, így u_k korlátos $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$-ben, így Morrey-egyenlőtlenségből tudjuk, hogy u_k korlátos $C^{0,1-\frac{n}{q}}(U;\mathbb{R}^n)$-ben. Ekkor Arzela-Ascoli-tétel miatt áttérhetünk u_k-nak egy egyenletesen konvergens részsorozatára. $Du_k \rightharpoonup Du$ gyenge konvergenciából beláthatjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\int_U \psi(\mathrm{cof} Du_k)^i_j dx = \int_U \psi(\mathrm{cof} Du)^i_j dx$$

ennek felhasználásával pedig láthatjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\int_U v \det Du_k dx = -\sum_{j=1}^{n}\int_U v_{k_j} u^i_k (\mathrm{cof} Du_k)^i_j dx = \int_U v \det Du dx$$

Mivel u_k korlátos $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$-ben, és $|\det Du_k| \leq C|Du_k|^n$ ezért $\det Du_k$ korlátos $L^{\frac{q}{n}}$-ben, így tetszőleges részsorozatának van gyengén konvergens részsorozata. □

A továbbiakban feltesszük L-ről a következőt:

$$L(P,z,x) = F(P, \det P, z, x)$$

ahol $F : \mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\bar{U}\to\mathbb{R}$ sima függvény, illetve L polikonvex, vagyis a $(P,r)\mapsto F(P,r,z,x)$ leképezés minden $z\in\mathbb{R}^m$, $x\in\bar{U}$-ra konvex.

7.13. Tétel. *Legyen $n < q < \infty$ és az L Lagrange-függvény polikonvex és alulról korlátos. Ekkor $I[.]$ gyengén alulról félig folytonos.*

Bizonyítás. Legyen u_k tetszőleges $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$-ben gyengén konvergens sorozat, amire $u_k \rightharpoonup u$. Ekkor a lemma alapján $\det Du_k \rightharpoonup Du$, és ezután hasonlóan megy a bizonyítás, mint a 7.1 tételnél:

$$I[u_k] = \int_U L(Du_k(x), u_k(x), x)dx \geq \int_{G_\epsilon} L(Du_k(x), u_k(x), x)dx =$$

$$= \int_{G_\epsilon} F(Du_k(x), \det Du_k(x), u_k(x), x)dx \geq \int_{G_\epsilon} F(Du(x), \det Du(x), u_k(x), x)dx +$$
$$+ \int_{G_\epsilon} F_P(Du(x), \det Du(x), u_k(x), x) \cdot (Du_k - Du)dx +$$
$$+ \int_{G_\epsilon} F_r(Du(x), \det Du(x), u_k(x), x)(\det Du_k(x) - \det Du(x))dx$$

ahol 7.1 jelöléseit használjuk. Itt már elég azt látni, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} F_P(Du(x), \det Du(x), u_k(x), x) \cdot (Du_k(x) - Du(x)) = 0$$

és

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\epsilon} F_P(Du(x), \det Du(x), u_k(x), x) \cdot (\det Du_k(x) - \det Du(x)) = 0$$

□

Példa: elaszticitás

Egy fontos előfordulása a polikonvexitásnak az elaszticitás a térben, vagyis ha $n = 3$. Ekkor ha van egy elasztikus testünk, ami alaphelyzetben U alakját veszi fel, majd ∂U minden x pontját átvisszük $g(x)$ pontba, és meg akarjuk tudni, hogy milyen új alakba kerül ekkor a testünk, akkor létezik egy L energiasűrűséggüggvény, amelyre mint Lagrange-függvényre a

$$I[w] = \int_U L(Dw, x)dx$$

minimalizálója u lesz a testünk új formája. Ha a test pedig hiperelasztikus, abban az esetben feltehetjük, hogy L polikonvex. Ennek további magyarázata John M. Ball cikkében[1] található.

7.9. Lokális minimalizálók

Ebben a fejezetben arra tekintünk ki, hogy milyen körülmények között lesz $I[.]$ egy kritikus pontja lokális vagy abszolút minimumhely.
Legyen L p változóban konvex, és legyen u sima függvény, ami megoldása a

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(Du(x), u(x), x)_{x_i} + L_z(Du(x), u(x), x) = 0 \\ u|_{\partial U} = g \end{cases}$$

Euler-Lagrange differenciálegyenletnek, vagyis kritikus pontja $I[.]$-nek.
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum amire $0 \in I$ és legyen $\{u(., \lambda) | \lambda \in I\}$ egy, az Euler-Lagrange differenciálegyenletnek sima megoldásaiból álló sima család, ahol $u(x, 0) = u(x)$, és $\mathcal{R}$ ezek grafikonjai által generált régió. Legyen $\theta : \bar{U} \to I$ egy sima függvény amire $\theta|_{\partial U} = 0$ és legyen

$$w_\theta(x) = u(x, \theta(x))$$

Ekkor $w_\theta(x) = u(x, \theta(x)) = u(x, 0) = u(x) = g(x)$ ha $x \in \partial U$.

7.14. Tétel. *Tetszőleges θ-ra*

$$I[u] \leq I[w_\theta]$$

vagyis u lokális minimalizáló az $\mathcal{R}$ régión.

Bizonyítás.

$$w_{\theta, x_i}(x) = u_{x_i}(x, \theta(x)) + u_\lambda(x, \theta(x))\theta_{x_i}(x)$$

így L konvexitásából

$$I[w] = \int_U L(Dw, w, x)dx = \int_U L(D_x u + u_\lambda D\theta, w, x)dx \geq$$

$$\geq \int_U L(D_x u, w, x) + u_\lambda D_p L(D_x u, w, x) \cdot D\theta dx$$

Legyen

$$b^j = \int_0^{\theta(x)} u_\lambda(x, \lambda) L_{p_i}(D_x u(x, \lambda), u(x, \lambda), x) d\lambda$$

és legyen $\mathbf{b} = (b^1, ..., b^n)$ vektormező.

Ekkor

$$\mathrm{div}\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} b^j_{x_j} = \sum_{j=1}^{n} \big(\theta_{x_j} u_\lambda(x, \theta(x)) L_{p_j}(D_x u(x, \theta(x)), u(x, \theta(x)), x) +$$

$$+\int_0^{\theta(x)} u_{\lambda,x_j}(x,\lambda)L_{p_j}(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)+u_\lambda(x,\lambda)L_{p_j,x_j}(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)d\lambda\Big)=$$

$$=u_\lambda(x,\theta(x))D_pL(D_xu(x,\theta(x)),w(x),x)\cdot D\theta+$$

$$+\int_0^{\theta(x)}\sum_{j=1}^n u_{\lambda,x_j}(x,\lambda)L_{p_j}(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)+u_\lambda(x,\lambda)L_z(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)d\lambda$$

ahol az utolsó egyenlőséghez az Euler-Lagrange egyenlőséget használtuk fel, hiszen $u(.,\lambda)$ megoldása annak.

$$(L(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x))_\lambda=\sum_{j=1}^n L_{p_j}(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)u_{x_j,\lambda}+$$

$$+L_z(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)u_\lambda$$

felhasználásával

$$\mathrm{div}\mathbf{b}=u_\lambda(x,\theta)D_pL(D_xu,w,x)\cdot D\theta+\int_0^{\theta(x)}L(D_xu,u,x)_\lambda d\lambda=$$

$$=u_\lambda(x,\theta)D_pL(D_xu,w,x)\cdot D\theta+[L(D_xu(x,\lambda),u(x,\lambda),x)]_0^{\theta(x)}=$$

$$=u_\lambda(x,\theta)D_pL(D_xu,w,x)\cdot D\theta+L(D_xu(x,\theta(x)),u(x,\theta(x)),x)-L(D_xu(x,0),u(x,0),x)=$$

$$=u_\lambda D_pL(D_xu,w,x)\cdot D\theta+L(D_xu,w,x)-L(D_xu,u,x)$$

tehát

$$I[w]\geq\int_U L(D_xu,w,x)+u_\lambda D_pL(D_xu,w,x)\cdot D\theta dx=\int_U \mathrm{div}\mathbf{b}+L(D_xu,u,x)dx=$$

$$=\int_U \mathrm{div}\mathbf{b}\,dx+I[u]$$

Viszont a Gauss-Osztrohradszkij tétel alapján

$$\int_U \mathrm{div}\mathbf{b}\,dx=\int_{\partial U}\mathbf{b}\cdot\nu dS=0$$

hiszen $\theta|_{\partial U}=0$ így $b^j|_{\partial U}=0$ tehát $\mathbf{b}|_{\partial U}=0$, tehát

$$I[w]\geq I[u]$$

□

Hivatkozások

[1] John M. Ball. “Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity”. English. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 63.4 (1976. dec.), 337–403. old.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2010.

[3] G.F. Simmons. *Differential Equations: With Applications and Historical Notes.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1972.