



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ANALÍZIS TANSZÉK

Komplex differenciálegyenlet rendszerek stacionárius pontjai

Témavezető:

Dr. Tóth Árpád
egyetemi tanár

Szerző:

Várdai Kitti
Elemző matematikus BSc

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	3
1. Bevezetés	4
1.1. Motiváció	4
1.2. Komplexesítés	4
1.2.1. Alap definíciók	4
1.2.2. Komplex fázistér	6
1.3. Autonóm rendszerek	7
2. Stacionárius pontok	8
2.1. Stacionárius pontok	8
2.1.1. Stacionárius pontok típusai kétdimenziós autonóm rendszerben	8
2.2. Stacionárius pontok osztályozása	11
2.2.1. Ljapunov-stabilitás	11
2.2.2. Elfajultság - csomók esetén	16
3. Ljapunov-függvény	17
3.1. Ljapunov-függvény lineáris rendszerre	18
3.2. A 6. Tétel bizonyítása	21
3.2.1. Valós sajátértékű és sajátbázissal rendelkező A mátrix esete .	22
3.2.2. A komplex eset $n = 2$ -re.	23
3.2.3. Diagonalizálható mátrix esete	26
3.2.4. Sajátbázissal nem rendelkező A mátrix esete: általános eset . .	28
3.2.5. A Ljapunov-függvény megszerkesztése a gyakorlatban	31
4. Egyensúlyi helyzetek alkalmazása a való életben	34
4.1. Valóság lemodellezése	34
4.2. Van der Pol oszcillátor	35
4.2.1. Modell felírása	35

4.2.2. Rendszer átírása	35
4.2.3. Egyensúlyi helyzet és stabilitása	36
5. Összefoglaló	39
A. Függelék	40
Ábrajegyzék	41
Hivatkozások	42

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani azoknak a személyeknek, akik valamilyen szinten osztozkodnak velem ezen tanulmányi sikeremben.

Elsősorban azok felé szeretném kifejezni hálámat, akik nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy erre a pályára induljak; egykori matematika tanárainak - Csire Andrásnak és Annamáriának, valamint Varga Eszternek - akik a matematika világába oly módon vezettek be, ami megalapozta, hogy egyetemi tanulmányaimat ezen a szakon végezzem.

Ezen felül szeretném megköszönni a testvéreimnek, barátaimnak, barátomnak, akikre támaszkodhattam és akik mindvégig tartották bennem a hitet, hogy végig jussak ezen az úton.

Végül, de egyáltalán nem utolsó sorban köszönettel tartozom Dr. Tóth Árpád konzulensemnek, hogy éles meglátásaival, kiemelkedő szakmai tudásával, lelkesítésével támogatta a szakdolgozatom írását.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

A dolgozatom témáját az a kíváncsiság ihlette, ami akkor merült fel bennem, mikor differenciálegyenletrendszerek egyensúlyi pontjait vizsgáltuk és komplex sajátértékek mellett egészen egyedi trajektória részleteket figyelhattünk meg. Konkrétan komplex differenciálegyenlet rendszerekről nem esett szó és ez egy nagy űrt okozott bennem, mivel a komplex függvénytani tanulmányaim során számtalan érdekes függvénybeli tulajdonságot ismerhettem meg. Ez a két matematikai ágazat ötvözete motiválja a dolgozatomat.

1.2. Komplexesítés

1.2.1. Alap definíciók

Ebben a fejezetben átvándorlunk a valós térrendszerből a komplexbe. Az utóbbit jobban szoktuk preferálni: elsősorban ezen rendszer magába foglalja a valóst, így jobban tudunk általánosítani, másodsorban az \mathbb{R} test algebrailag nem zárt (míg a \mathbb{C} test igen), ezért is szokott bonyolultabb lenni a valós eset bizonyítása.

1. Definíció (A valós tér komplexesítése). Legyen \mathbb{R}^n a valós lineáris tér. Az \mathbb{R}^n tér komplexesítése egy n -dimenziós komplex lineáris tér, jele: ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$, amelyet a következőképpen szerkesztünk meg:

A ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ tér pontjai a (ξ, η) párok, jelük: $\xi + i\eta$, ahol $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

2. Definíció (Valós lineáris operátor komplexesítése). Legyen $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris operátor. Az A operátor komplexesítése egy \mathbb{C} -lineáris operátor: ${}^{\mathbb{C}}A: {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, amelyet a következő összefüggés definiál: ${}^{\mathbb{C}}A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta$.

Emlékeztető. A komplex operátor exponense, determinánsa és nyoma a valós esettel megegyezően definiálható. A tulajdonságok is megegyeznek, azzal a kivétellel, hogy a komplex determináns nem adja vissza a sorok vagy oszlopok vektorai által kifeszített politóp térfogatát: azaz nem funkcionál térfogattorzítási tényezőként.

3. Definíció (Komplex értékű görbe deriváltja). Legyen $\mu: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ a valós t tengely egy I intervallumának leképezése a komplex \mathbb{C}^n lineáris térbe. Egy ilyen μ leképezést görbének nevezünk és a $t_0 \in I$ pontban vett deriváltját így definiáljuk:

$$\left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(t_0 + h) - \mu(t_0)}{h}$$

A deriváltvektor a \mathbb{C}^n térben fekszik.

1. Tétel. Legyen $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ egy \mathbb{C} -lineáris operátor. Ekkor $\forall t \in \mathbb{R}$ -re létezik egy $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ \mathbb{C} -lineáris operátor, amely az e^{At} deriváltja:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

2. Tétel (Cauchy-Riemann-egyenletek). Legyen $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$, ahol az u és v függvények valós értékűek és változójúak. Tegyük fel, hogy f parciális deriváltjai folytonosak. Ekkor az f akkor és csak akkor differenciálható az (a, b) pontban, ha

$$\frac{du}{dx}(a, b) = \frac{dv}{dy}(a, b), \quad \frac{du}{dy}(a, b) = -\frac{dv}{dx}(a, b)$$

1.2.2. Komplex fázistér

4. Definíció (Komplex differenciálegyenlet rendszer). Legyen $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ egy \mathbb{C} -lineáris operátor. \mathbb{C}^n fázistérű állandó komplex együtthatójú, elsőrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet rendszernek nevezzük a

$$\dot{z} = Az, z \in \mathbb{C}$$

egyenletet.

Ezen egyenlet $\mu(t_0) = z_0, t_0 \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}$ kezdeti feltétel melletti μ megoldásának nevezzük a valós t tengely I intervallumának a \mathbb{C}^n -be való $\mu : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ leképezését, ha

1. bármely $t \in I - re : \left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{t=\theta} = A\mu(\theta),$

2. $t_0 \in I$ és $\mu(t_0) = z_0$

5. Definíció. Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris operátor, amely a lineáris

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

egyenletet adja meg. Ezen egyenlet komplexesítése:

$$\dot{z} = {}^{\mathbb{C}}Az \quad z \in \mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

3. *Lemma.* $Az = \phi(t)$ függvény akkor és csak akkor megoldása a komplexesített (1.2) egyenletnek, ha valós és képzetes részei kielégítik az eredeti (1.1) egyenletet.

Azaz,

$${}^{\mathbb{C}}A(x + iy) = Ax + iAy,$$

ezért a (1.1) egyenlet komplexesítése:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = Ay, \end{cases} \tag{1.3}$$

ahol $x, y \in \mathbb{R}^n$.

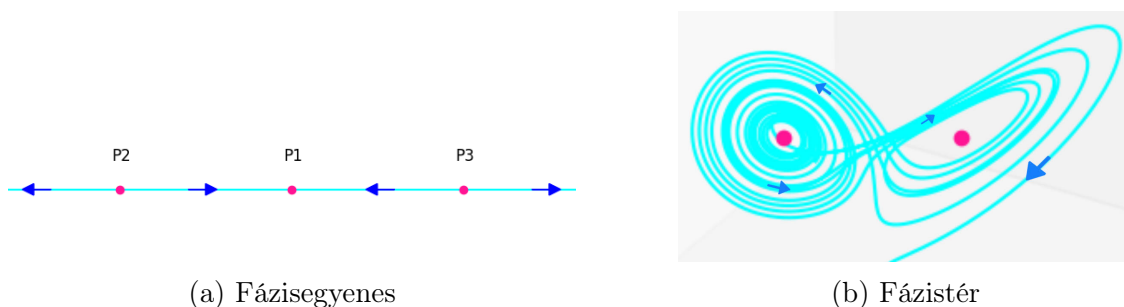
1.3. Autonóm rendszerek

6. Definíció (Autonóm rendszer). Legyen $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt halmazon értelmezett függvény, az $\dot{x} = \underline{f}(x(t))$ egyenletet $n \geq 1$ esetén *autonóm rendszernek* vagy *vektorértékű autonóm differenciálegyenletnek* nevezzük.

Megjegyzés. Amennyiben az f függvény teljesíti a lokális Lipschitz-feltételt (A), akkor létezik egyértelmű megoldás.

7. Definíció (Fáziskép, fázistér). Az $\dot{x}(t) = \underline{f}(x(t))$ n -dimenziós autonóm rendszer *fázisképének* nevezzük a $D(\underline{f}) \subsetneq \mathbb{R}^n$ halmazt, benne a pályákkal és azokon a haladás irányával.

A $D(\underline{f})$ halmaz neve *fázistér*, amit $n = 1$ esetén *fázisegyenesnek*, $n = 2$ esetén pedig *fázissík*nek mondunk. Ezekre példát az 1.1-es, illetve az $n = 2$ esetre a 2.1-es ábrák mutatnak.



1.1. ábra. Fázistér 1 és 3 dimenziós esete

8. Definíció (Dinamikai rendszer). Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt halmaz. A $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ folytonos függvényt *dinamikai rendszernek* nevezzük, ha $\forall t, s \in \mathbb{R}$ és $p \in M$ esetén

$$\mu(0, p) = p, \quad \mu(t + s, p) = \mu(t, \mu(s, p)) \quad (1.4)$$

2. fejezet

Stacionárius pontok

2.1. Stacionárius pontok

9. Definíció (Stacionárius pont). A $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dinamikai rendszer *egyensúlyi pontja* $p \in M$, ha $\mu(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ esetén.

10. Definíció (Stacionárius megoldás). Legyen $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény és $\dot{x}(t) = \underline{f}(x(t))$ autonóm rendszer.

Ha a $p \in D(\underline{f})$ konstansfüggvény megoldás, akkor ezt az autonóm rendszer *stacionárius megoldásának* nevezzük, a $p \in \mathbb{R}^n$ pontot pedig a rendszer *egyensúlyi* vagy *stacionárius pontjának*.

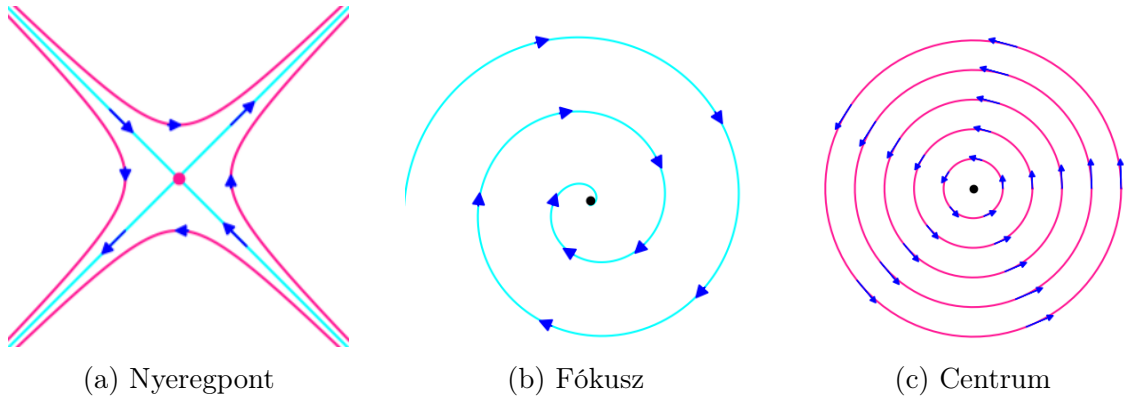
Megjegyzés. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény és $\dot{x}(t) = \underline{f}(x(t))$ autonóm rendszernek akkor és csak akkor egyensúlyi pontja p , ha $\underline{f}(p) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

2.1.1. Stacionárius pontok típusai kétdimenziós autonóm rendszerben

11. Definíció. Legyen $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, akkor az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ megoldás a p középpontú polárkoordinátarendszerben

$$\begin{cases} x(t) = p_1 + r(t)\cos\gamma(t) \\ y(t) = p_2 + r(t)\sin\gamma(t), \end{cases}$$

ahol r és γ folytonos függvények és $r \geq 0$.



2.1. ábra. Stacionárius pontok néhány típusa

12. Definíció (Nyeregpont). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *nyeregpont*nak nevezzük, ha létezik olyan környezet, ahol

(i) pontosan két pályára igaz, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = p$$

(ii) pontosan két pályára igaz, hogy

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = p$$

(iii) az összes többi pálya $t \rightarrow \infty$ és $t \rightarrow -\infty$ esetén is elhagyja az említett környezetet az egyensúlyi pont egy pontú pályája kivételével.

A nyeregpontot a 2.1a ábra szemlélteti.

13. Definíció (Stabil fókusz). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *stabil fókusz*nak nevezzük, ha létezik olyan környezet, amelyiknek bármely pontjára illeszkedő pályán a megoldás p középpontú polárkoordinátáira teljesül, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty$$

Megjegyzés. Azaz a t paraméterű pont valamelyik irányába végtelen sokszor körüljárja a p egyensúlyi pontot.

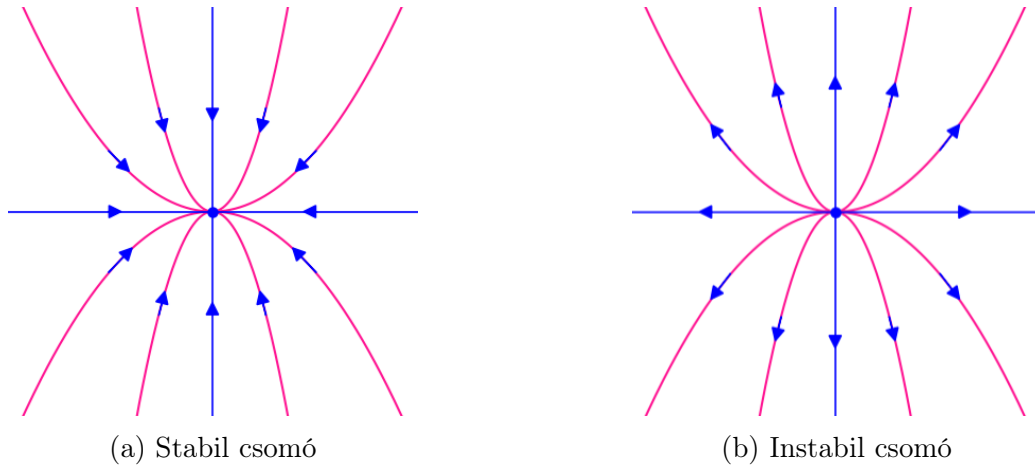
A 2.1b-n látható fókusz például ilyen típusú.

14. Definíció (Instabil fókusz). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *instabil fókusz*nek nevezzük, ha létezik olyan környezete, amelyeknek bármely pontjára illeszkedő pályán a megoldás p középpontú polárkoordinátáira teljesül, hogy

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} |\gamma(t)| = \infty.$$

A 2.1b ábrán az irányítást megfordítva kapnánk instabil fókuszt.

15. Definíció (Centrum). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *centrum*nek nevezzük, ha létezik olyan környezete, amelyekben minden pont pályája periodikus p egy pontú pályájának kivételével, és ezen koncentrikus körök belsejében helyezkedik el p . Centrum típusú egyensúlyi helyzetre példát a 2.1c ábra mutat.



2.2. ábra. Nem elfajult csomók típusai

16. Definíció (Stabil csomó). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *stabil csomó*nak nevezzük, ha létezik olyan környezete, amelyeknek bármely pontjára illeszkedő pályán a megoldás p középpontú polárkoordinátáira fennáll, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| < \infty$$

Stabil csomóra a 2.2a ábra ad példát.

17. Definíció (Instabil csomó). A kétdimenziós autonóm rendszer p egyensúlyi pontját *instabil csomó*nak nevezzük, ha létezik olyan környezete, amelyeknek bármely pontjára illeszkedő pályán a megoldás p középpontú polárkoordinátáira fennáll, hogy

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} |\gamma(t)| < \infty.$$

Instabil csomót láthatunk a 2.2b ábrán.

2.2. Stacionárius pontok osztályozása

Az autonóm differenciálegyenlet rendszerek egyensúlyi pontjait sokféle módon csoportosíthatjuk, ez esetben: **stabilitás és elfajultság** szerint fogjuk.

Legyen az alábbi egyenletünk:

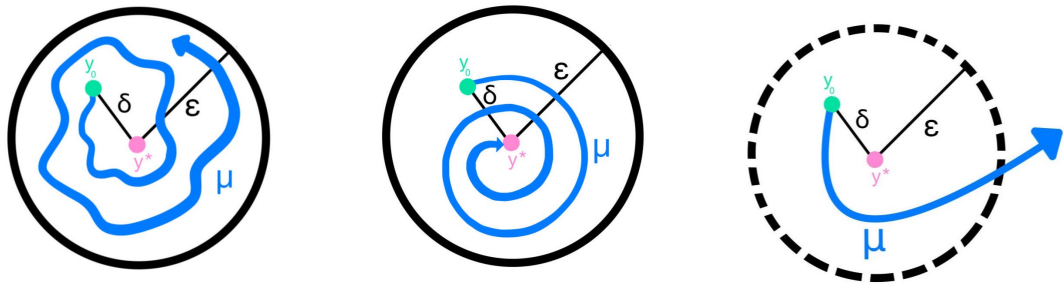
$$\dot{x} = f(x), x \in H \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

ahol f a H tartományon megadott legalább kétszer differenciálható vektormező. Továbbá feltesszük, hogy a 2.1 egyenletnek létezik stacionárius pontja, amit a rendszerrel együtt az origóba tolunk, tehát $f(0) = 0$.

A $\mu(t_0) = 0$ kezdeti feltételhez az $\mu = 0$ megoldás tartozik.

2.2.1. Ljapunov-stabilitás

Stabilitás vizsgálatokor arra vagyunk kíváncsiak, hogy a közeli kezdeti feltételekhez tartozó megoldások hogyan viselkednek az idő előrehaladtával: közel maradnak a stacionárius ponthoz, talán közelítenek hozzá vagy eltávolodnak tőle?



(a) Stabil

(b) Aszimptotikusan stabil

(c) Instabil

2.3. ábra. Egyensúlyi helyzetek stabilitásának esetei

18. Definíció (Ljapunov-stabilitás). Az (2.1) egyenlet $x = 0$ helyzetét Ljapunov-stabilnak nevezzük, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, amire fennáll, hogy:

$$\text{ha } \|x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mu(t)\| < \epsilon, \forall t > 0\text{-ra,} \quad (2.2)$$

ami a 2.1 egyenlet $\mu(0) = x_0$ kezdeti érték melletti megoldásra áll fenn.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy az imént tárgyalt δ paraméterünk csak ϵ -től függ és t -től független.

19. Definíció (Aszimptotikus stabilitás). A (2.1.) egyenlet $x = 0$ stacionárius pontját *aszimptotikusan Ljapunov-stabilnak* nevezzük, ha

- 1) Ljapunov-stabil, és
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$,

$\forall \mu$ megoldásra, amelynek $\mu(0)$ kezdeti feltétele a nulla elegendően kicsi környezetébe tartozik.

20. Definíció (Aszimptotikus stabilitás). Az origó egyensúlyi helyzet *exponenciálisan Ljapunov-stabil* az (2.1.) egyenletrendszerben, ha $\exists \delta, \alpha, \beta$ pozitív konstansok, hogy:

$$\text{ha } \|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0\text{-ra}$$

Továbbá, ha egy egyensúlyi helyzet

$$\text{exponenciálisan stabil} \Rightarrow \text{aszimptotikusan stabil} \Rightarrow \text{stabil.}$$

Megjegyzés. Egyből láthatjuk, hogy mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{-\beta t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

21. Definíció (Instabilitás). Az origó egyensúlyi helyzet *instabil* az $\dot{x} = f(x)$ rendszerben, ha nem stabil. Azaz, ha $\exists \epsilon > 0$, amihez **nem létezik** $\delta > 0$, hogy:

$$\text{ha } \|x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mu(t)\| < \epsilon, \forall t > 0\text{-ra,}$$

azaz hiába $\|x_0\| < \delta$ egy t_0 időpont után $\|\mu(t)\| > \epsilon, \forall t \geq t_0\text{-ra.}$

Példák stabilitás vizsgálatra

Vizsgáljuk meg a következő rendszerek stacionárius pontjainak stabilitását.

1. $\dot{x} = x$

Az egyenletünk megoldása az $x(t) = Ce^t$ görbe, ahol $C \in \mathbb{R}$.

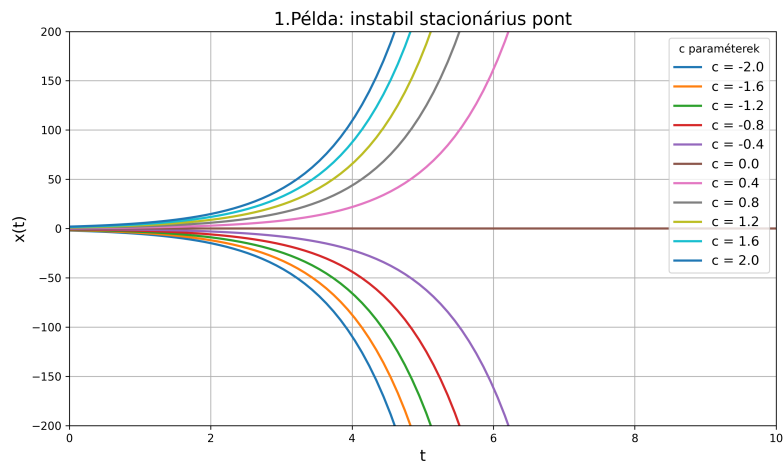
A rendszer egyensúlyi helyzete pedig az $x = 0$ pontban van.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Ce^t = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } C > 0 \\ 0, & \text{ha } C = 0 \\ -\infty, & \text{ha } C < 0 \end{cases}$$

Mivel ez egy korlátlan függvény, így nem tudunk semmilyen ϵ -hoz a Ljapunov-stabilitáshoz megfelelő δ -t találni (kivéve, ha $C = 0$).

nem létezik δ , amire: ha $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ce^t\| < \epsilon$.

Tehát az $x = 0$ stacionárius pont instabil.



2.4. ábra. 1. Példa

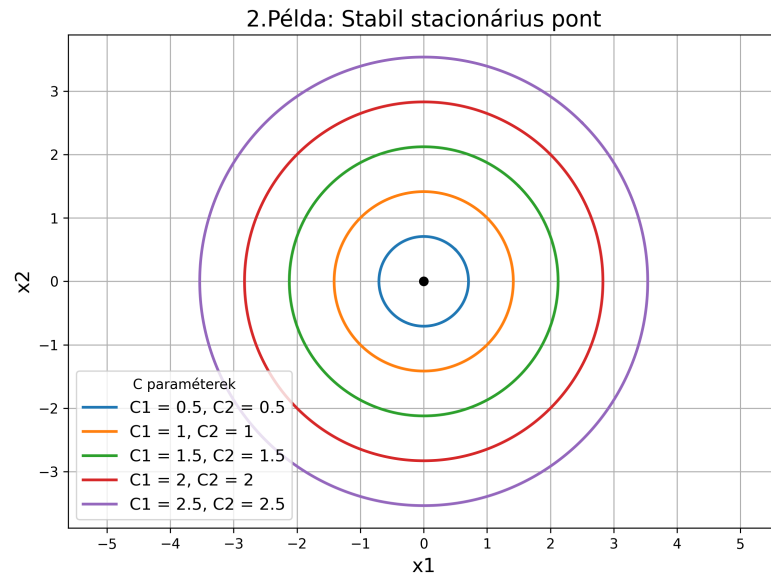
$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásgörbéje az

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \\ -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \end{pmatrix},$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A rendszer egyetlen egyensúlyi pontja az origó.



2.5. ábra. 2. Példa

Láthatjuk, hogy a megoldások kör alakot írnak le, azaz egy x_0 kezdeti érték mellett a megoldások $\epsilon = \|x_0\| = \delta$ sugáron belül maradnak, de nem közelítenek az egyensúlyi helyzethez.

$$\|x(0)\| = \|x_0\| = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ -c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} < \delta$$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|x_0\| = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \\ -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \sqrt{(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))^2 + (-c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t))^2} = \\ &= \sqrt{c_1^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + c_2^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} < \epsilon = \delta \end{aligned}$$

Tehát az origó stabil, de nem aszimptotikusan stabil stacionárius pont és ezt a típusú egyensúlyi helyzetet centrumnak hívjuk.

$$3. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

A megoldásgörbénk az

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

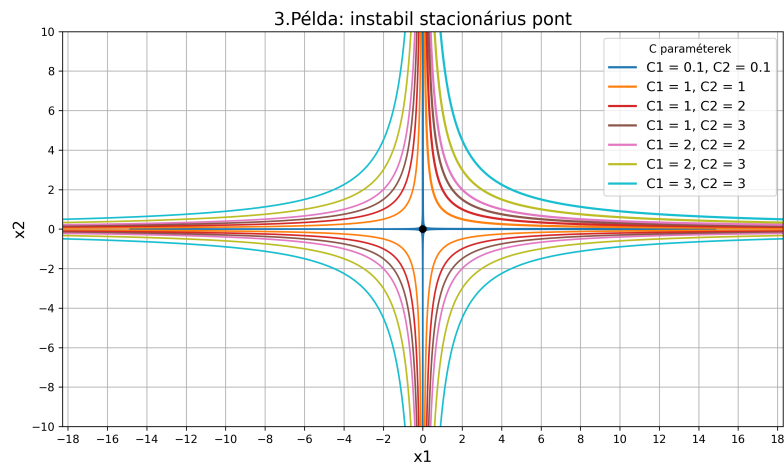
Az egyensúlyi helyzetünk ebben a rendszerben is az origó. A trajektóriák ún. *közeledve távolodó* viselkedést mutatnak az origó irányába haladva. Egyedül akkor maradunk az egyensúlyi helyzetünk közelében, ha $C_1 = 0, C_2 \neq 0$.

$$\|x(0)\| = \|x_0\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(c_1 e^0)^2 + (c_2 e^0)^2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} < \delta$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{(c_1 e^t)^2 + (c_2 e^{-t})^2},$$

$$\text{ha } c_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{c_1^2 e^{-2t}} = c_1 e^{-t} \rightarrow 0, \text{ ha } t \rightarrow \infty.$$

Azaz bármilyen közeli x_0 kezdeti értéket véve, a görbénk bármekkora ϵ sugarú környezetből kilép. Tehát az origó instabil egyensúlyi pont, ez esetben épp nyeregpont.



2.6. ábra. 3. Példa

2.2.2. Elfajultság - csomók esetén

Legyen a korábban definiált $\dot{x}(t) = \underline{f}(x(t))$ 2-dimenziós autonóm rendszer, ahol $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az a mátrix, amire $\underline{f}(x(t)) = Ax(t) \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^2$. Ezen A mátrix valós sajátértékei legyenek λ_1, λ_2 , valamint az A mátrix rendelkezzen az \mathbb{R}^2 -beli sajátvektoraiból álló bázissal.

(LER = Lineáris egyenletrendszer)

Ekkor, ha A -nak kétszeres sajátértéke $\lambda \neq 0$ és ezen sajátértékhez tartozó sajátaltér egy dimenziós, akkor a következőket állíthatjuk:

- 1) Ha $\lambda < 0$: A LER origó stacionárius pontját *stabil elfajult csomó*nak nevezzük.
- 2) Ha $\lambda > 0$: A LER origó stacionárius pontját *instabil elfajult csomó*nak nevezzük.

Ezen esetekben általános alakban

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Az A mátrix nem diagonalizálható, így sajátvektorokból álló bázisa nincs.

3. fejezet

Ljapunov-függvény

A differenciálegyenlet rendszerek egyensúlyi helyzeteinek stabilitási kérdéskörében nagy szerepet játszik az ún. *Ljapunov-függvény*, ami Aleksandr Mikhailovich Lyapunov orosz matematikus, mechanikus és fizikus után kapta nevét. Ljapunov kiemelkedő kutatási eredményei mellett szoros kapcsolatban állt Andrey Andreyevich Markov matematikussal a Markov-láncok atyjával.

22. Definíció (Ljapunov-függvény). Legyen

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

autonóm rendszer $x = \underline{0}$ egyensúlyi ponttal.

Az $r(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalárfüggvény *Ljapunov-függvény*, ha

- kétszeresen folytonosan differenciálható,
- szigorúan pozitív, ha $x \neq \underline{0}$,
- folytonos a 0-ban és $r(\underline{0}) = 0$.

4. **Tétel** (Ljapunov-stabilitás [7]). Legyen

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

autonóm rendszer $x = \underline{0}$ egyensúlyi ponttal.

Ha létezik $r(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Ljapunov-függvény, akkor a következők állnak fenn, ha $r(0) = 0$, $r(x) > 0$, ha $x \neq 0$

- Ha $\frac{d}{dt}r(x) \leq 0$ akkor az origó **stabil** egyensúlyi helyzet
- Ha $\frac{d}{dt}r(x) < 0$ akkor az origó **aszimptotikusan stabil** egyensúlyi helyzet
- Ha $\frac{d}{dt}r(x) \leq 0$ és $\frac{d}{dt}r(x) = 0$ egyedül akkor, ha $x = \underline{0}$, akkor az origó **aszimptotikusan stabil** egyensúlyi helyzet.

Megjegyzés. Az utolsó esetben az állítás megfordítása is igaz.

5. **Tétel.** Ha $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0 \neq 0$ és $A = J_f(x)$ Jacobi mátrix sajátértékeire $\text{Re}(\lambda) < 0$, akkor létezik $r(x)$ kvadratikus alak, ami Ljapunov-függvény és ezért az origó stabil egyensúlyi helyzet.

A következő fejezetben a lineáris esetre konstruálunk.

3.1. Ljapunov-függvény lineáris rendszerre

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, melynek a következőképpen definiáljuk a karakterisztikus polinomját:

$$\text{charpol} := p(\lambda) = \det(A - I\lambda)$$

valós együtthatós, pontosan n -edfokú polinom. Tehát

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \alpha_j) \prod_{j=k+1}^{n-k} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j),$$

ahol $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_j = \alpha_j + \beta i$, $\alpha_j > 0$, $\bar{\lambda}_j$ pedig a λ_j sajátérték komplex konjugáltja.

A λ_j -k nem feltétlenül mind különbözőek.

Illusztráljuk ezt $n = 2$ esetben, ekkor a karakterisztikus polinom $p(\lambda) =$

- $(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$ (\mathbb{R} esetben)
- $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1) = \lambda^2 - \lambda\bar{\lambda}_1 - \lambda_1\lambda + \lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda^2 - 2\alpha_1\lambda + |\lambda_1|^2$ (\mathbb{C} esetben)

Példának vegyük a következő mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Karakterisztikus polinomja: $(1 - \lambda)(2 - \lambda)$, tehát a sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

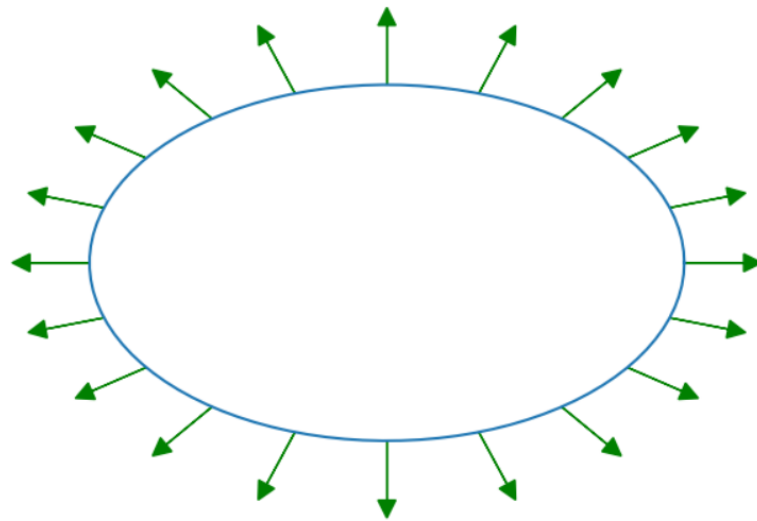
6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az A lineáris transzformáció sajátértékeinek valós része pozitív. Ekkor létezik $B(x, y)$ pozitív definit bilineáris forma, hogy*

$$B(Ax, x) > 0,$$

ha $x \neq 0$.

Vagyis az $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy olyan lineáris operátor, amelynek minden sajátértékének valós része pozitív. Ekkor létezik egy \mathbb{R}^n -ben egy olyan euklideszi struktúra, amelyben az Ax vektor minden $x \neq 0$ pontban hegyes szöget zár be az x vektorral.

Tehát, létezik egy \mathbb{R}^n dimenziós 0 középpontú ellipszoid, amelynek minden x pontjában az Ax vektor kifelé mutat.



3.1. ábra. Ljapunov-függvény nívófelülete

Egy fontos következmény, hogy ilyenkor az $r(x) = B(x, x)$ olyan pozitív definit kvadratikus alak \mathbb{R}^n -ben, amelynek az Ax vektormező iránymenti deriváltja pozitív. Ez lesz majd a Ljapunov-függvényünk, amint a következő tétel mutatja.

7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az iménti 4. Tétel feltételei teljesülnek, ekkor az*

$$\dot{x} = -Ax$$

lineáris differenciálegyenlet rendszer aszimptotikusan stabil az origóban.

Bizonyítás. A 6. Tétel szerint tudjuk, hogy létezik egy $B(x, y)$ pozitív definit bilineáris forma, hogy $B(Ax, Ax) > 0$. Azt állítjuk, hogy az $r(x) = B(x, x)$ egy Ljapunov-függvény. Belátjuk, hogy

$$D_{Ax}r > 0, \text{ ha } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Idézzük fel az iránymenti derivált definícióját:

Legyen $g(t) = f(\underline{x} + t\underline{v})$. Az f függvény v irányú deriváltja

$$(D_v f)(x) = g'(0)$$

Megjegyzés. Egy fontos tétel szerint $D_v f(x) = \langle \text{grad}(f), \mathbf{v} \rangle$.

Magából a definícióból $D_{Ax}r(x) = g'(0)$, ahol

$$g(t) = r(x + tAx) \stackrel{\text{def. szerint}}{=} B(x + tAx, x + tAx) \stackrel{\text{bilineáris f.}}{=} B(x, x) + 2tB(x, Ax) + t^2B(Ax, Ax)$$

Majd $t = 0$ -ban deriválva t szerint:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(t) = g'(0) = 2B(x, Ax) > 0,$$

épp a fentiek miatt.

Végezetül vegyük észre, hogy a többváltozós függvényekre vonatkozó láncszabály szerint

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r(x(t)) &= \langle \text{grad}(r)(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle -\text{grad}(r)(x(t)), Ax(t) \rangle = \\ &= -D_{Ax}(r)(x(t)) = -B(Ax(t), x(t)) < 0. \end{aligned}$$

□

3.2. A 6. Tétel bizonyítása

Mielőtt rátérünk a 6. Tétel bizonyításra, vegyük észre, hogy ha A diagonális akkor létezik $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisa \mathbb{R}^n -nek az A sajátvektoraiból álló bázis.

Legyen $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény,

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

$$\text{ahol } \underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j, \underline{y} = \sum_{j=1}^n y_j \underline{e}_j$$

Speciálisan $r(\underline{x}) = B(\underline{x}, \underline{x})$, ekkor

$$B(A\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j x_k,$$

ahol $(A)_{kj} = a_{kj}$, $(\underline{x})_j = x_j$, $(k, j \in \mathbb{Z}^+)$

Ezen formula diagonális mátrixok esetén igen leegyszerűsödik. Ehhez definiáljuk a Kronecker-delta szimbólumot.

23. Definíció.

$$\text{Kronecker-delta: } \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha } j \neq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{azaz } \underline{e}_k \underline{e}_j = \delta_{kj}$$

$$B(A\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} x_k \underline{e}_k x_j \underline{e}_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{kj} a_{kj} x_k x_j = \sum_{k=1}^n a_{kk} x_k^2$$

Mivel A diagonális és sajátértékeinek valós része pozitív, amik épp a diagonál elemek ($a_{kk} > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$) és így $B(A\underline{x}, \underline{x}) > 0$.

Az általános esetet több lépésben bizonyítjuk, valamint szükségünk lesz komplex számokra és Jordan normálalakra is.

3.2.1. Valós sajátértékű és sajátbázissal rendelkező A mátrix esete

Legyenek $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ az A sajátvektorai, amikre

$$Av_j = \lambda_j v_j, \quad (3.1)$$

ahol $\lambda_j \in \mathbb{R}$ és $\lambda_j > 0$, $\forall j$. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vektorra **egyértelműen létezik** $(t_1(x), \dots, t_n(x))$, hogy

$$x = \sum_{j=1}^n t_j(x) v_j, \quad (3.2)$$

mert a v_j vektorok bázist alkotnak.

8. Tétel. *A fenti jelölést használva legyen*

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^n t_j(x) t_j(y).$$

Ekkor B pozitív definit és

$$B(Ax, x) > 0$$

kivéve, ha $x = \underline{0}$.

Bizonyítás. Mivel $B(x, x) = \sum_{j=1}^n t_j^2(x) > 0$ a $B(x, y)$ bilineáris forma nyilvánvalóan pozitív definit.

Vegyük észre, hogy

$$Ax = A \sum_{j=1}^n t_j(x) v_j = \sum_{j=1}^n t_j(x) Av_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j(x) v_j.$$

Az előállítás egyértelműsége miatt

$$t_j(Ax) = \lambda_j t_j(x).$$

Ezért $x \neq 0$ esetén

$$B(Ax, x) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j t_j(x)) t_j(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j^2(x) > 0.$$

□

3.2.2. A komplex eset $n = 2$ -re.

Tegyük fel, hogy A egy 2×2 -es valós mátrix, aminek a sajátértékei nem valósak. Mint az előző fejezetben láthattuk, komplexesítés után tekinthetjük úgy, mint egy $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ lineáris operátor. Itt tehát létezik A -nak egy $v \in \mathbb{C}^2$ sajátvektora.

9. *Lemma.* Legyen a fenti feltételek mentén $Av = \lambda v, \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$. Ekkor $(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v))$ bázist alkotnak, amiben

$$A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \text{ alakú.}$$

Bizonyítás. A $v \in \mathbb{C}^2$ és $\bar{v} \in \mathbb{C}^2$ lineárisan független vektorok, mivel $\bar{A} = A$ és így

$$A\bar{v} = \bar{A}v = \bar{Av} = \bar{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

A feltevés szerint $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Ezért a v és \bar{v} különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek és ily módon bázist alkotnak \mathbb{C}^2 -ben.

Azt akarjuk belátni, hogy $v_1 = \operatorname{Re}(v), v_2 = \operatorname{Im}(v)$ bázist alkotnak.

Legyen $x = c_1 v + c_2 \bar{v}$, $x \in \mathbb{R}$ és $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Mivel x a valós térben fekszik, ezért

$$x = \bar{x} = \overline{c_1 v + c_2 \bar{v}}.$$

A v, \bar{v} lineáris függetlensége miatt $c_1 = \bar{c}_2, c_2 = \bar{c}_1$.

Végezetül legyen $c_1 = a + bi, c_2 = a - bi$, és $v = v_1 + iv_2, \bar{v} = v_1 - iv_2$. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= c_1 v + c_2 \bar{v} = (a + bi)(v_1 + iv_2) + (a - bi)(v_1 - iv_2) \\ &= av_1 + aiv_2 + biv_1 - bv_2 + av_1 - aiv_2 - biv_1 - bv_2 = 2(av_1 - bv_2). \end{aligned}$$

Tehát az x vektor valóban előállt a v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként, azaz tényleg bázist alkotnak \mathbb{C}^2 -ben.

Most bizonyítsuk be, hogy a mátrixunk valóban olyan alakú, amilyennek megadtuk.

Legyen a $v \in \mathbb{C}^2$ az A egy sajátvektora, azaz

$$Av = \lambda v, \text{ ahol } \lambda = x + iy \in \mathbb{C}.$$

A feltevés szerint $x > 0$, $y \neq 0$. Vizsgáljuk meg az az A leképezés a $v_1 = \operatorname{Re}(v)$ és $v_2 = \operatorname{Im}(v)$ vektorokat mibe képzí.

$$A(v_1 + iv_2) = (x + iy)(v_1 + iv_2) = (xv_1 - yv_2) + i(yv_1 + xv_2).$$

Tehát

$$\begin{aligned} Av_1 &= xv_1 - yv_2 \\ Av_2 &= yv_1 + xv_2. \end{aligned}$$

□

Megjegyzés. Legyen az A mátrix $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ alakú. Ha a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, akkor a $\lambda = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, valamilyen θ szögre. Ezért az $A = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Azaz az A mátrix, mint lineáris transzformáció r -szeresre való nyújtás és θ szöggel való forgatás. Ekkor $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle : \underline{x} \mapsto r \langle \theta\text{-val elforgatott } \underline{x}, \underline{x} \rangle = r |\underline{x}|^2 \cos(\theta) > 0$.

Valóban, a hosszok nemnegatívak, $\cos(\theta)$ pedig azért nemnegatív, mert $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

Mint megszokhattuk gyakran a komplex esetet könnyebb bizonyítani majd a valós esetre leszűkíteni, mint egyből a valós esetet.

Nézzünk a fentiekre egy példát:

Legyen $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az A mátrix komplex sajátértékeit és sajátvektorait:

- sajátértékek:

$$(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 = -1$$

$$|1 - \lambda| = i$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - i \\ \lambda_2 = 1 + i \end{cases}$$

- sajátvektorok: $\underline{v}_1 = \underline{w}$ (λ_1 -hez tartozó), $\underline{v}_2 = \underline{u}$ (λ_2 -hez tartozó)

1) $\lambda_1 = 1 - i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (1 - i) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Rendezzük az egyenletet homogén alakra: $(A - I\lambda_1)\underline{w} = \underline{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow -x_{w_1} - iy_{w_1} = 0 \Leftrightarrow x_{w_1} = -iy_{w_1}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy_w \\ y_w \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y_w \mid y_w \in \mathbb{C} \right\}$$

2) $\lambda_2 = 1 + i$. A korábbiak alapján $u = \bar{w}$, tehát

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy_u \\ y_u \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y_u \mid y_u \in \mathbb{C} \right\}$$

24. Definíció. Definiáljuk \mathbb{C}^2 -en a skalárszorzás műveletét: Legyen $x, y \in \mathbb{C}^2$. Ekkor léteznek $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, hogy $x = x_1 w + x_2 u$, és $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$, hogy $y = y_1 w + y_2 u$. Legyen

$$B(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2.$$

Folytassuk a példánkat:

Azt szeretnénk belátni, hogy ha $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$ akkor

$$B(x, x) > 0 \text{ és } B(Ax, x) > 0.$$

Ez direkt számolással is adódik, de mi a fenti gondolatmenetet használjuk. Legyen

$$\underline{v}_1 = \text{Re}(\underline{w}) = \text{Re} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \text{Im}(\underline{w}) = \text{Im} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy $v_1 = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$, $v_2 = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$. Ezért

$$B(v_1, v_2) = \frac{i}{4} B(w + \bar{w}, w - \bar{w}) = \frac{i}{4} (B(w, w) + B(\bar{w}, w) - B(w, \bar{w}) - B(\bar{w}, \bar{w})) = 0.$$

Ez alapján, ha $x = (x_1, x_2)$ akkor

$$B(x, x) = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2).$$

Emiatt $B(Ax, x) = \frac{1}{4}\|Ax\|\|x\|\cos(\theta)$, ahol θ az x és Ax vektorok által bezárt szög. Végezetül vegyük észre, hogy a v_1, v_2 bázisban A egy $\sqrt{2}$ -szörös nyújtásból, és egy $\pi/4$ szögű forgatásból áll, tehát $\|Ax\|\|x\|\cos(\theta) = \sqrt{2}\|x\|^2 \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

3.2.3. Diagonalizálható mátrix esete

Ezen alfejezetben az A mátrix sajátvektorai \mathbb{C}^n -ben vannak, nem feltétlenül a valós térben. Ennek ellenére visszavezetjük a korábban már tárgyalt esetekre.

10. *Lemma.* Tegyük fel, hogy $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^n$ lineáris altérek, amikre $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^n$, azaz kiegészítő altérek, valamint $AV_1 \subset V_1, AV_2 \subset V_2$.

Továbbá tegyük fel, hogy B_1 a V_1 -en, B_2 pedig a V_2 -n értelmezett bilineáris formák, amikre fennáll, hogy

$$B_1(Ax_1, x_1) > 0 \quad \forall x_1 \in V_1 \quad \text{és} \quad B_2(Ax_2, x_2) > 0 \quad \forall x_2 \in V_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0.$$

Ha $x, y \in \mathbf{R}^n$ legyen

$$B(x, y) = B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2),$$

ahol $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$.

Az így definiált B bilineáris forma teljesíti a $B(Ax, x) > 0$ feltételt.

Bizonyítás. Mivel $V = V_1 \oplus V_2$, akkor $\forall \underline{x} \in \mathbf{R}^n$ vektorra egyértelműen létezik $x_1 \in V_1$ és $x_2 \in V_2$, amikre $\underline{x} = x_1 + x_2$. Ezért B jól definiált.

Ha $x \neq 0$, akkor $x_1 \neq 0$ vagy $x_2 \neq 0$

- Ha $x_1 \neq 0 \Rightarrow B(Ax, x) = B_1(Ax_1, x_1) + B_2(Ax_2, x_2)$, amikre $B_1(Ax_1, x_1) > 0, B_2(Ax_2, x_2) \geq 0 \Rightarrow B(Ax, x) > 0$.
- hasonlóan, ha $x_2 \neq 0$.

□

Ha $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, akkor $\forall \underline{x} \in \mathbf{R}^n$ vektorra egyértelműen létezik $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \dots, x_k \in V_k$ amikre $\underline{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_k$.

A fentihez hasonló módon kapjuk a következő állítást.

10.1. *Állítás.* Tegyük fel, hogy $V_1, V_2, \dots, V_k \subset \mathbf{R}^n$ lineáris altérek, amikre $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k = \mathbf{R}^n$, $AV_j \subset V_j$, $\forall j$. Ha minden j -re adott egy B_j , a V_j -n értelmezett pozitív definit bilineáris forma, amikre fennáll, hogy

$$B_j(Ax_j, x_j) > 0 \quad \forall x_j \in V_j, x_j \neq 0$$

akkor a

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^k B_j(x_j, y_j)$$

teljesíti a $B(Ax, x) > 0$ feltételt, ha $x \neq 0$.

A 6.Tétel bizonyítása ebben az esetben a következő módon történik:

A $V = \mathbf{R}^n$ vektorteret felbontjuk a valós sajátvektorok által kifeszített altér, és a komplex sajátvektorok valós és képzetes részei által kifeszített alterek direkt összegére. Az alábbi lemma szerint ez megtehető.

11. *Lemma.* Legyen $A \in \mathbb{C}^n$ mátrix, melynek sajátértéke a $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$, a $v_1, \overline{v_1} \in \mathbb{C}^n$ sajátvektorokkal.

Ekkor $Re(v_1), Im(v_1) \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek és a

$$V_1 = \{\alpha Re(v_1) + \beta Im(v_1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

altér A -invariáns, $AV_1 \subset V_1$.

Bizonyítás. A bizonyítás a 9. lemma bizonyítását követi. Legyen $\lambda_1 = x + yi$. Ekkor

$$\begin{aligned} A(Re(v_1) + iIm(v_1)) &= \lambda(Re(v_1) + iIm(v_1)) = \\ &= (x + iy)(Re(v_1) + iIm(v_1)) = \\ &= (xRe(v) - yIm(v_1)) + i(yRe(v) + xIm(v_1)) \end{aligned}$$

□

A bizonyításhoz szükségünk lesz még egy észrevételre.

12. *Lemma.* Legyen $v_1, \bar{v}_1, \dots, v_k, \bar{v}_k \in \mathbb{C}^n$ és $v_{2k+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ az A sajátvektoraiból álló bázisa \mathbb{C}^n -nek. Definiáljuk a következő altereket:

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle \operatorname{Re}(v_1), \operatorname{Im}(v_1) \rangle \\ V_2 &= \langle \operatorname{Re}(v_2), \operatorname{Im}(v_2) \rangle \\ &\vdots \\ V_k &= \langle \operatorname{Re}(v_k), \operatorname{Im}(v_k) \rangle \\ V_{k+1} &= \langle v_{2k+1}, \operatorname{Im}(v_1) \rangle \end{aligned}$$

Ekkor $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \oplus V_{k+1}$.

Bizonyítás. Ha $k = 0$ az állítás triviális. Egyébként k szerinti indukcióval az előző lemma következménye. \square

A 6. Tétel bizonyítása a diagonalizálható mátrixokra. Vegyük a 12. Lemmában szereplő felbontást. Az előző két alfejezet szerint minden V_j direkt összeadandón van olyan B_j bilineáris forma, ami teljesíti a $B_j(Ax_j, x_j) > 0$ feltételt. A 10.1. Állítás szerint ezek összege a tételben megkívánt bilineáris forma lesz. \square

3.2.4. Sajátbázissal nem rendelkező A mátrix esete: általános eset

Az egyetlen eset, amit eddig a bizonyításunk nem fedett le az, amikor az A mátrix nem diagonalizálható. Célunk olyan alakra hozni, ami szétbontható egy diagonális és egy nem diagonális, de ígéretes alakra. Ehhez szükséges definiálnunk a Jordan-féle normálalakot.

25. Definíció (Jordan-blokk). Az $(m \times m)$ -es λ -hoz tartozó *Jordan-blokk*:

$$J_{\lambda, m} = \lambda I_m + J_m = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

azaz $j_{kk} = \lambda, j_{k+1k+1} = 1$, minden máshol 0. Továbbá J_m mátrixban a főátló alatti átlóbeli elemek 1-ek, azon kívül 0-k. Továbbá I_m az $m \times m$ -es identitásmátrix.

26. Definíció (Jordan-féle normálalak). Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix *Jordan alakú*, ha a diagonálisban Jordan blokkok szerepelnek és a többi eleme 0.

13. Tétel (Jordan-féle normálforma). *Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix egy megfelelő bázisban Jordan-alakra hozható.*

Megjegyzés. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű és csak a blokkok sorrendje változhat. Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Csak a valós sajátértékek esetére mutatjuk meg, a komplex eset a jelölést leszámítva hasonlóan bizonyítható.

Első lépésben használjuk, hogy a vektorterünk szétbontható olyan alterekre, amin csak egy sajátérték van. Itt megfelelő bázisban a mátrixunk Jordan blokkokból áll. Ezek kezelésére kell a következő lemma.

14. *Lemma.* Legyen $J_{\lambda,m}$ Jordan blokk és $\epsilon > 0$,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon & & & \\ & & \epsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{n-1} \end{bmatrix} \quad EJ_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ \epsilon & \epsilon\lambda & & & \\ & \epsilon^2 & \epsilon^2\lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{n-1}\lambda \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon^{-1} & & & \\ & & \epsilon^{-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{-n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow EJ_{\lambda,m}E^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ \epsilon & \lambda & & & \\ & \epsilon & \lambda & & \\ & & \epsilon & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

ahol E diagonális, $A = EJ_{\lambda,m}E^{-1}$ pedig alsóháromszög mátrix, ahol az átló alatti elemek abszolútértéke kisebb, mint ϵ .

15. *Lemma.* Tegyük fel, hogy $A = D + \epsilon J_m$ Jordan normálalakban van, ahol D diagonális. Ha $B(x, y)$ olyan pozitív definit bilineáris forma, amire

$$B(Dx, x) > 0. \tag{3.3}$$

Ekkor amennyiben ϵ elég kicsi akkor $D_{A\underline{x}}r^2 > 0$, ha $\underline{x} \neq \underline{0}$

Bizonyítás. Legyen a szokásos B bilineáris pozitív definit kvadratikus formánk, amire tehát $B(Dx, x) > 0$, ahol D diagonális mátrix, pozitív valós sajátértékekkel. Azt szeretnénk belátni, hogy elegendően kicsi ϵ -ra $B((D + \epsilon J)x, x) > 0$, azaz, hogy nem diagonalizálható mátrixokra is találunk megfelelő ilyen bilineáris formulát.

Írjuk fel a vizsgálandó kvadratikus alakot:

$$r(x) = B((D + \epsilon J)x, x) > 0 \stackrel{\text{bilineáris f.}}{=} B(Dx, x) + \epsilon B(Jx, x) > 0,$$

ha ϵ elég kicsi.

A kvadratikus alak konstansszoros inputra a következőképp reagál: Legyen c valós konstans, ekkor $r(cx) = B(cx, cx) = c^2 B(x, x) = c^2 r(x)$. Ezért az állítást elegendő belátnunk arra az esetre, ha $\|x\| = 1$.

Legyen $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Mivel ez kompakt halmaz és a $B(Jx, x)$ függvény folytonos

$$\exists M \in \mathbb{R} : B(Jx, x) \leq M \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Hasonlóképpen a $B(Dx, x)$ függvény folytonos, ezért létezik minimuma az S^{n-1} kompakt halmazon, amit nevezzünk m -nek.

Mivel m minimum, ezért $\exists x_0$, ahol $\|x_0\| = 1$, amire $B(Dx_0, x_0) = m$. A (3.3) feltétel miatt $m > 0$ ezért, ha

$$\|x\| = 1, \text{ akkor } B(Dx, x) \geq m \text{ és } \|B(Jx, x)\| \leq M$$

Tehát

$$B((D + \epsilon J)x, x) = B(Dx, x) + \epsilon B(Jx, x) \geq m - \epsilon M,$$

ahol az első tagot alulról, a másodikat pedig felülről becsültük.

Azaz, megfelelő pl. $\epsilon := \frac{m}{2M}$ választásra:

$$B((D + \epsilon J)x, x) \geq m/2 > 0.$$

□

3.2.5. A Ljapunov-függvény megszerkesztése a gyakorlatban

Vizsgáljuk meg a Ljapunov-függvényt programozói szemmel, azaz vezessük be úgy, hogy számítógépen implementálható formulát kapjunk.

Először tegyük fel, hogy az A mátrix $n \times n$ -es, diagonalizálható és sajátértékei valósak, ebből következik, hogy létezik a v_1, v_2, \dots, v_n (oszlop)sajátvektorokból álló V bázisa:

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Valamint legyen A diagonalizáltja:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Lássuk be, hogy $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$:

$$AV = A \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{bmatrix} \stackrel{\text{sv. tul.}}{=} \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = VD$$

Éppen a sajátvektor tulajdonsága és a mátrixszorzás szabálya miatt.

Majd vizsgáljuk meg, hogy igazából mit is jelent az, hogy:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^n t_j \underline{v}_j$$

Tudjuk, hogy

$$V \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ha adott egy

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow r(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n t_j^2 = (t_1 \ \cdots \ t_n) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{V^{-1} := W}{=} W \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ebből pedig megkapjuk $r(x)$ -et

$$r(x) = (x^T W^T)(Wx) = x^T (W^T W)x$$

Tehát megkaptuk a még fentebb definiált B függvényünket:

$$B(x, y) = (x^T W^T)(Wy)$$

Végül ellenőrizzük le, hogy valóban teljesül erre, hogy

$$B(x, Ax) > 0 \quad \forall x, \quad x \neq 0$$

$$\text{azaz, hogy } (x^T W^T)(W Ax) > 0 \quad \forall x, \quad x \neq 0$$

Vegyük észre, hogy mivel

$$AV = VD \iff A^{-1}AV = A^{-1}VD \iff$$

$$V = A^{-1}VD \iff VD^{-1} = A^{-1}VDD^{-1} \iff VD^{-1} = A^{-1}V$$

Vegyük mindkét oldal inverzét

$$DV^{-1} = V^{-1}A \iff DW = WA$$

Amiből

$$(x^T W^T)D(Wx) = \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j^2 > 0,$$

mivel A sajátértékei mind pozitív (valósak) voltak ezért az egész szumma is az.

Vegyük erre egy 3 dimenziós példát

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

- sajátértékei: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 15$

- sajátvektorai: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ellenőrizzük le, hogy $B(Ax, x) > 0$, ha $x \neq 0$, azaz, hogy $(x^T W^T) D (Wx) > 0$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad W = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Az átláthatóság kedvéért vegyük a W mátrix 7-szeresét, ez a pozitív konstansszorzó úgyszem változtat a kvadratikus alak definitységén.

Legyen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow 7x^T W^T = \left(\left(\frac{1}{7}x_2 \right) \quad (2x_1 - 2x_2 - x_3) \quad (-x_1 + x_2 + 4x_3) \right)$

$$7(x^T W^T) D = \left(\mathbf{5} \left(\frac{1}{7}x_2 \right) \quad \mathbf{8}(2x_1 - 2x_2 - x_3) \quad \mathbf{15}(-x_1 + x_2 + 4x_3) \right)$$

$$7Wx = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 49(x^T W^T) D (Wx) = 49(5(\frac{1}{7}x_2)^2 + 8(2x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 15(-x_1 + x_2 + 4x_3)^2) > 0$
 ,mivel minden tag négyzetes és a konstans szorzó pozitív, ezen kívül $B(Ax, x) = 0$
 akkor és csak akkor, ha $\underline{x} = 0$.

Ekkor $r(x) = B(x, x) = (x^T W^T)(7Wx) =$
 $= 49((\frac{1}{7}x_2)^2 + (2x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + (-x_1 + x_2 + 4x_3)^2) > 0$, azaz találtunk egy pozitív
 definit Ljapunov-függvényt.

A következő fejezetben arra kapunk választ, hogy hogyan tudjuk az eddigieket a való
 életben alkalmazni.

4. fejezet

Egyensúlyi helyzetek alkalmazása a való életben

4.1. Valóság lemodellezése

Az emberiség történelmét végig kísérte a valóság lemodellezésének kísérletei és a modellekből származó prediktálások a jövőre vonatkozóan. Számos jelenséget igyekszünk a matematika szabályainak kordájában tartva megjósolni a múlt megvizsgálásával és az ezen adatokból felépített modellek vizsgálatával. Az ezekből származó predikciók az emberi életet és a hozzá tartozó döntések meghozatalát kívánják megkönnyíteni. Napjainkban ezen struktúrák alkalmazási területe a meteorológiai előrejelzésektől a járványterjedési vizsgálatokon át a tőzsdei valutaingadozásokig terjed.

A valóságot azért is nagyon nehéz lemodellezni, mert a világ akár csak egy kis részlete, jelensége is számos tényezőtől függ, amik a modellekben változóként jelennek meg. Viszont minél precízebben próbáljuk lemodellezni az adott jelenséget, - azaz minél több tényezővel kalkulálunk - annál komplexebb, bonyolultabb és annál több változós rendszert kapunk.

A valóság lemodellezésénél tehát törekednünk kell arra, hogy csak azon tényezőket foglaljuk a modellünkbe, amik kardinálisak, illetve amik relevánsak az adott jelenségre és azon belül a vizsgálatunk céljára nézve.

Emlékeztető. A változást, mint jelenséget differenciálással tudjuk szemléltetni. Ezen elv alapján bármely függvény változását meg tudjuk vizsgálni, valamint felhasználva ezen tudásunkat képesek vagyunk a minket körülvevő jelenségeket differenciálegyenletek segítségével lemodellezni és hipotéziseket támasztani a jövő prediktálásával.

4.2. Van der Pol oszcillátor

A holland származású van Der Pol fizikus a dinamikus rendszerek vizsgálatakor állt elő egy nem konzervatív, nemlineáris csillapítással rendelkező rezgő rendszer modelljével. Ezen rendszert a múltban vakum csövek esetén használták, napjainkban pedig a robotikában nyer értelmet. [5]

4.2.1. Modell felírása

Legyen

- $y(t)$: a pozíció koordinátafüggvénye a t időpillanatban,
- ϵ : az a skaláris paraméter, ami a nemlinearitást és a csillapítás erősségét jelzi.

A modell eredeti egyenlete

$$\ddot{y} + y - \epsilon \left(\frac{\dot{y}^3}{3} - \dot{y} \right) = 0$$

Legyen $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, ekkor a rendszerünk:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -x_1 + \epsilon \left(\frac{x_2^3}{3} - x_2 \right) \end{cases}$$

4.2.2. Rendszer átírása

Alakítsuk az egyenletrendszerünket $\dot{x} = f(x)$ alakúra:

$$\text{Legyen } \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \underline{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

A rendszerünk pedig:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}(t)) = f \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \epsilon \left(\frac{x_2^3}{3} - x_2 \right) \end{pmatrix}$$

4.2.3. Egyensúlyi helyzet és stabilitása

Keressük meg a rendszerünk egyensúlyi helyzeteit.

$$f(\underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \epsilon \left(\frac{x_2^3}{3} - x_2 \right) \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Amiből

$x_1^* = (0, 0)$ az origó az egyetlen egyensúlyi pontja a rendszernek.

Vizsgáljuk meg ezen stacionárius pont stabilitását, azaz keressünk alkalmas $r(x)$ Ljapunov-függvényt.

Mivel a rendszerünk nemlineáris így a lineáris esetben látottakat direktbe, indoklás nélkül nem alkalmazhatjuk. Vizsgáljuk meg a rendszert az egyensúlyi helyzetének környezetében annyira közelről, hogy a nemlineáris trajektóriák már lineárisnak látszódnak.

Ezt az ötletet igazolja, illetve helyezi keretek közé a **Hartman-Grobman** elmélet.

16. Tétel (Hartman-Grobman tétel). *Legyen $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ nemlineáris differenciálegyenlet rendszer, ami az x^* egyensúlyi helyzetnek egy $B(\epsilon)$ környezetében a rendszer fázisképe lokálisan topologikusan ekvivalens az $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, lineáris rendszer fázisképevel, ahol az $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mátrixnak nincs tisztán képzetes sajátértéke továbbá $A = \frac{df}{dx}(x^*)$, azaz a rendszer Jacobi-mátrixa az egyensúlyi pontban.*

Az átláthatóság érdekében jelöljük a rendszerben szereplő függvényeket a t változó elhagyásával: x_1, x_2 .

A Hartman-Grobman tétel értelmében írjuk fel a rendszer Jacobi-mátrixát:

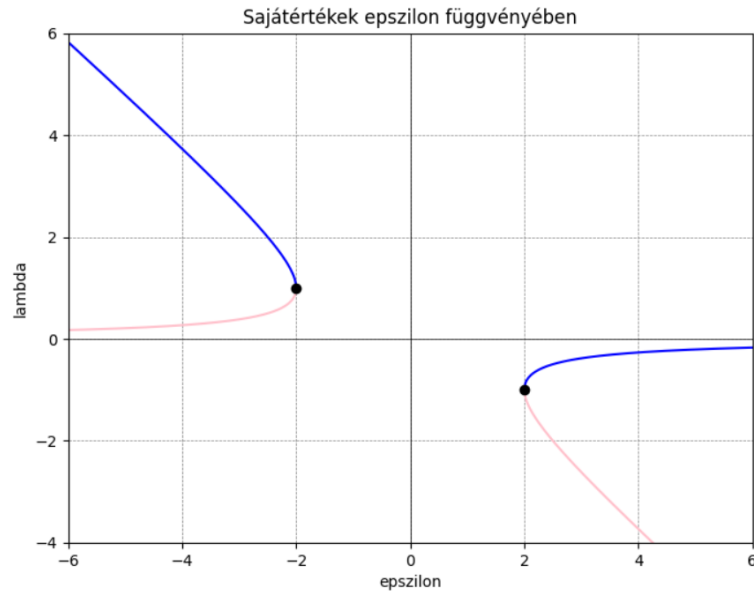
$$J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon(x_2^2 - 1) \end{bmatrix}$$

Az $x_2^* = (0, 0)$ egyensúlyi pontot behelyettesítve:

$$J \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\epsilon \end{bmatrix}$$

A $(0, 0)$ pontbeli Jacobi mátrixunk sajátértékei:

$$\lambda^2 + \lambda\epsilon + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$$



4.1. ábra. Sajátértékek az epsilon függvényében

Az 4.1. ábrán a kék görbe a másodfokú megoldóképlet függvénye az összeadásra, és a rózsaszín a kivonásra a valós síkban. Ha $|\epsilon| \geq 2$, akkor a sajátértékek valósak. Az ábrán is láthatjuk, hogy $\epsilon > 2$ esetén mindkét sajátérték kisebb, mint nulla. Ha $|\epsilon| \leq 2$, akkor az A mátrixnak komplex konjugált gyökei vannak. Legyenek a sajátértékek $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ekkor a karakterisztikus polinom

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - 2\alpha_1\lambda + |\lambda|^2,$$

ahol $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2)$, mivel egymás konjugáltjai. A fenti másodfokú egyenlet együtthatóira nézve kapjuk, hogy $\epsilon = -2\alpha_1$.

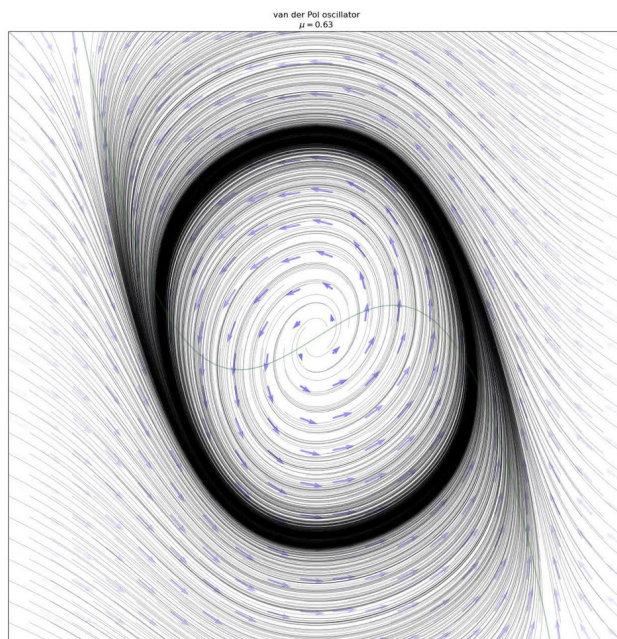
Tudjuk, hogy, ha $\alpha_1 < 0$, akkor a sajátértékek valós része negatív lesz, tehát ha $\epsilon > 0$ akkor az origó Ljapunov-stabil. De vajon lehet-e aszimptotikusan stabil?

Legyen a Ljapunov-függvényünk a

$$r(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

ami léthatóan pozitív definit. És idő szerinti első deriváltja:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 - x_1x_2 + \epsilon\frac{x_2^4}{3} - \epsilon x_2^2 = \epsilon\frac{x_2^4}{3} - \epsilon x_2^2.$$



4.2. ábra. Van der Pol oszcillátor fázisképe epsilon = 0.63 esetén

Elsőre azt mondanánk, hogy ha $\epsilon > 0$, akkor az origó aszimptotikusan Ljapunov-stabil $x_2^2 < 3$ esetén, de ezt nem állíthatjuk, mivel a Ljapunov-függvény deriváltja nem függ az x_1 -től ami ezért az x_1 tengelyen végig 0 lesz. Az origó a 4. Tétel szerint ez esetben Ljapunov-stabil, de nem aszimptotikusan Ljapunov-stabil egyensúlyi helyzet.

5. fejezet

Összefoglaló

A dolgozat esszenciája a differenciálegyenlet rendszerek egyensúlyi helyzeteinek stabilitás vizsgálata volt. Ebben jött segítségünkre a Ljapunov-függvény, amit nem csak lineáris, de a Hartman-Grobman tétel miatt nemlineáris rendszerekre is tudtunk alkalmazni. A Ljapunov-függvény ereje abban rejlik, hogy alkalmas ilyen függvényt találva akár egészen bonyolult rendszerek egyensúlyi helyzet stabilitásáról is be tudunk számolni.

A bizonyítás szekcióban minden esetre kitértünk, néhol példákkal is demonstrálva a kimondott tételeket, lemmákat. Láthattuk, hogy a legkényelmesebb esetben, amikor A diagonális volt, rendkívül könnyen beláttuk a tételünket, ellenben az általános eset belátásához már komplex számokra és Jordan-féle normálalakra is szükség volt.

Végezetül a robotikán belül az ún. *bipedal robotok*nál alkalmazott differenciálegyenlet rendszerénél tudtuk kamatoztatni a korábbi fejezetekben tárgyaltakat.

A. függelék

Függelék

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény teljesíti a *Lipschitz-feltételt*, ha $\exists L > 0$, melyre $\forall x, y \in D(f)$ esetén:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|.$$

Ha egy függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor az értelmezési tartománya minden pontjában teljesíti a *lokális Lipschitz-feltételt*.

Ha az f függvény egyváltozós, akkor $x \neq y$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L,$$

azaz az f függvény akkor és csak akkor teljesíti ezt a feltételt, ha $\text{graph } f$ húrjainak meredeksége korlátos.

Ha egy egyváltozós f függvény differenciálható és deriváltfüggvénye **korlátos**, azaz $|\dot{f}| \leq K$, akkor f teljesíti a Lipschitz feltételt, hiszen bármely $x, y \in D(f), x \neq y$ esetén a Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in \mathbb{R}$ x és y között, amire

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dot{f}(c) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |\dot{f}(c)| |x - y| \leq K |x - y|$$

Ekkor ugyebár a K korlát lesz a Lipschitz-konstans.

A $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény teljesíti a *lokális Lipschitz-feltételt*, ha $\forall x \in D(f)$ pontra $\exists B$ környezet, melyre $f|_B$ az f B -re leszűkítettje teljesíti a Lipschitz-feltételt.

Ha az egyváltozós f függvény differenciálható és deriváltfüggvénye **follytonos**, akkor f teljesíti a lokális Lipschitz-feltételt. Legyen $x_0 \in D(f)$ tetszőleges szám és $\epsilon > 0$ olyan, hogy $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset D(f)$, akkor a Weierstrass-tétel következtében \dot{f} korlátos ezen a zárt intervallumon, így az x_0 pont $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ környezetében is.

Ábrák jegyzéke

1.1. Fázistér 1 és 3 dimenziós esete	7
2.1. Stacionárius pontok néhány típusa	9
2.2. Nem elfajult csomók típusai	10
2.3. Egyensúlyi helyzetek stabilitásának esetei	11
2.4. 1. Példa	13
2.5. 2. Példa	14
2.6. 3. Példa	15
3.1. Ljapunov-függvény nívófelülete	19
4.1. Sajátértékek az epsilon függvényében	37
4.2. Van der Pol oszcillátor fázisképe epsilon = 0.63 esetén	38

Hivatkozások

- [1] V.I. Arnold. Közönséges differenciálegyenletek. Fordította: Simonovics András. Budapest, Hungary: Műszaki Kiadó, 1987. ISBN: 963-10-7044-1.
- [2] Pfeil Tamás. Matematika alapszak Differenciálegyenletek1E-e, 2022/23 2. félév. PDF egyetemi jegyzet. Budapest, Magyarország, 2023.
- [3] Dr. Kós Géza. Komplex Függvénytan. egyetemi jegyzet. URL: <https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/KftJegyzet/KftJegyzet-20240428.pdf>.
- [4] Dr. Kiss Emil. Diagonalizálás. egyetemi jegyzet. URL: https://ewkiss.web.elte.hu/html/bboard/07t.mat/Alg2_art_10.pdf.
- [5] Max Suell Dutra Armando Carlos de Pina Filho. Application of hybrid van der Pol-Rayleigh oscillators for modeling of a bipedal robot. Article. URL: https://www.researchgate.net/profile/Armando-Carlos-Pina-Filho/publication/267953639_Application_of_hybrid_van_der_Pol-Rayleigh_oscillators_for_modeling_of_a_bipedal_robot/links/54b94e300cf253b50e2942e9/Application-of-hybrid-van-der-Pol-Rayleigh-oscillators-for-modeling-of-a-bipedal-robot.pdf.
- [6] Wikipédia. Van der Pol oszcillator. 4.2. ábra. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator.
- [7] G. C. Layek. „An introduction to dynamical systems and chaos.” Springer Vol. 449. (2015.). New Delhi.

Jelmagyarázat

- A nagybetűvel jelölt objektumok mátrixot reprezentálnak, $\underline{A} := A$
- A kisbetűvel, egyszeres aláhúzással írt objektumok vektort jelölnek, \underline{v}