SZÍNES GRÁFELMÉLETI TÉTELEK

Szakdolgozat

Jeney Eszter Eliza
Matematika alapszak - matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Jung Attila

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2024

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban köszönöm a témavezetőmnek, Jung Attilának a közös munkát, hálás vagyok, hogy végig biztatott és támogatott. Köszönöm még a szobatársaimnak, hogy azonos mérföldkövek mentén haladtunk, és így sose kellett egyedül éreznem magam. Valamint köszönettel tartozom a családomnak és barátaimnak, akik lelkesedése nélkül talán sose fejezem be ezt a dolgozatot.

Tartalomjegyzék

1. Szivárvány Dirac **4**

1.1. Az eredeti Dirac tétel 5

1.2. Színes Dirac tétel 6

2. Ore típusú feltételek **15**

2.1. Szivárvány feszítőerdő 16

2.2. Szivárvány Hamilton-út 19

3. Szivárvány klikkek **26**

4. Szivárvány háromszögek **28**

Bevezetés

Ebben a szakdolgozatban élszínezett multigráfokról és a bennük található szivárvány részgráfokról lesz szó. Élszínezett gráfot többféle módon lehet definiálni, mi azonos csúcshalmazon vett különböző színű egyszerű gráfok unióját fogjuk nézni. A különböző színű gráfok élszámára adunk feltételeket, és vizsgáljuk a bennük található, páronként különböző színű élekből álló, azaz szivárvány részgráfokat.

Több, klasszikus gráfelméleti tétel élszínezett verzióját vizsgáljuk, mint a Dirac-, az Ore-, illetve a Mantel tétel. A Dirac tétellel azonos feltétel esetén bizonyítjuk szivárvány Hamilton-kör létezését, Ore-féle feltételeknél szivárvány feszítőerdő és Hamilton-út létezését, Mantel tételhez hasonlóan szivárvány háromszög létezését nézzük meg, valamint minimális fokszám-feltétel mellett szivárvány klikkeket keresünk.

1. Szivárvány Dirac

Van egy n csúcsú G gráfunk, aminek az éleit n színnel kiszínezzük (két csúcs között mehet több él, ha azok különböző színűek). Mikor lesz G-ben csupa különböző színű élből álló Hamilton-kör? Erre adott Joos és Kim [JK20] egy, a Dirac tételhez hasonló elégséges feltételt, ez a fejezet ezt a cikket dolgozza fel.

Jelölés. *Legyen* $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ *és* $[m, n] = \{m, m + 1, ..., n\}$.

Jelölés. *Legyen* $N_G(x) = \{y \in V : xy \in E\}$*, ahol* $G = (V, E)$ *irányítatlan gráf és* $x \in V$*. Legyen* $N_D^+(x) = \{y \in V : xy \in A\}$ *és* $N_D^-(x) = \{y \in V : yx \in A\}$*, ahol* $D = (V, A)$ *irányított gráf és* $x \in V$*.*

Jelölés. *Legyen* $d_G(x)$ *egy irányítatlan* G *gráf* x *csúcsának foka. Legyen* $d_D^-(x)$ *és* $d_D^+(x)$ *egy irányított* D *gráf* x *csúcsának befoka és kifoka.*

Jelölés. *Legyen* $\delta(G)$ *egy* G *irányítatlan gráf minimális fokszáma.*

Jelölés. *Legyen* $C = (v_1, v_2, ..., v_k, v_1)$ *egy kör, ahol* $v_{k+1} = v_1$*. Bármely két* $i, j \in [k]$*,* $i < j$ *egész számra jelölje* $v_i \overrightarrow{C} v_j$ *a* $(v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$ *utat,* $v_j \overrightarrow{C} v_i$ *pedig a* $(v_j, v_{j+1}, ..., v_i)$ *utat. Hasonlóan* $P = (v_1, v_2, ..., v_k)$ *út esetén jelölje* $v_i \overrightarrow{P} v_j$ *a* $(v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$ *utat,* $v_j \overleftarrow{P} v_i$ *a* $(v_j, v_{j-1}, ..., v_i)$ *utat.*

Definíció. *V egy csúcshalmaz, ezen* $G_1, G_2, ..., G_s$ *nem feltétlenül diszjunkt gráfok,* $G = \{G_1, G_2, ..., G_s\}$ *ezen gráfok uniója. G felfogható élszínezett multigráfnak:* G_i *élei az* i*. színnel vannak kiszínezve,* $i \in [s]$*. A V csúcshalmazon értelmezett H gráf egy* ***szivárvány*** *részgráf, ha* $\exists \Phi : E(H) \to [s]$ *injekció úgy, hogy* $\forall e \in E(H)$*-ra* $e \in E(G_{\Phi(e)})$*. Vagyis H mindegyik éléhez különböző színt rendelhetünk, és az élhez rendelt színű gráfban benne is van az él.*

Jelölés. *G élszínezett multigráfban* $e \in \binom{V}{2}$ *élre legyen* $c(e) = \{i \in [n] : e \in E(G_i)\}$*, vagyis az e él színeinek halmaza.*

1.1. Az eredeti Dirac tétel

Az élszínezett verzió nagyon hasonlít Dirac eredeti, egyszínű tételéhez [Dir52], így mondjuk ki, és bizonyítsuk azt is.

1. Tétel (Dirac)**.** *Ha egy G egyszerű, n-csúcsú ($n \geq 3$) gráfban $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton-kör.*

Bizonyítás. Legyen $G = (V, E)$ gráf, amire teljesülnek a fenti feltételek. Látható, hogy G összefüggő, mivel ha több komponensből állna, a legkisebb komponensében a csúcsoknak legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ lehetne a fokszáma. Tegyük fel indirekt, hogy G-ben nincs Hamilton-kör.

Legyen $P = (x_1, x_2, ..., x_{k+1})$ egy leghosszabb út G-ben. Mivel P nem bővíthető, ezért x_1 és x_{k+1} minden szomszédja P-beli, vagyis $N_G(x_1) \subseteq \{x_2, ..., x_{k+1}\}$ és $N_G(x_{k+1}) \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$.

Legyen

$$A_0 = \{i \in [1, k] : x_1 x_{i+1} \in E\},$$

vagyis azok az i-k, amikre x_{i+1} szomszédos x_1-gyel, és legyen

$$B_0 = \{i \in [1, k] : x_i x_{k+1} \in E\},$$

vagyis azok az i-k, amikre x_i szomszédos x_{k+1}-gyel.

$|A_0| \geq \frac{n}{2}$, és $|B_0| \geq \frac{n}{2}$, mivel A_0 tartalmazza x_1 összes szomszédját, B_0 pedig tartalmazza x_{k+1} összes szomszédját, tehát $|A_0| + |B_0| \geq n$. $A_0 \cup B_0 \subseteq [1, k]$ és $k < n$, tehát $\exists j \in A_0 \cap B_0$.

Töröljük P-ből az $x_j x_{j+1}$ élt és adjuk hozzá az $x_1 x_{j+1}$ és $x_j x_{k+1}$ éleket. Így a $C = (x_1 \overrightarrow{P} x_j, x_{k+1} \overleftarrow{P} x_{j+1}, x_1)$ kört kapjuk. Ha $k + 1 = n$, akkor C Hamilton-kör, ami ellentmondás, tehát $k + 1 < n$. Mivel G összefüggő, ezért $\exists y \in V : y \notin V(C)$, és $\exists x_\ell \in V(C) : x_\ell y \in E$. Ha C-t elvágjuk x_ℓ után, és hozzáadjuk az $x_\ell y$ élt, akkor $k + 1$ hosszú utat kapunk, ami ellentmondás azzal, hogy P a leghosszabb út G-ben. $\square$

1.2. Színes Dirac tétel

2. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 3$. Tegyük fel, hogy $G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ nem feltétlen diszjunkt n-csúcsú gráfok összessége azonos csúcshalmazon úgy, hogy $\delta(G_i) \geq n/2 \quad \forall i \in [n]$-re. Ekkor G-ben található szivárvány Hamilton-kör.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy G nem tartalmaz szivárvány Hamilton-kört. Könnyen látható, hogy $n = 3$ és $n = 4$ esetén van szivárvány Hamilton-kör, ezért $n \geq 5$ feltehető. Szükségünk lesz az alábbi lemmára:

1. Lemma. *A tétel feltételei mellett létezik szivárvány n-1 hosszú kör G-ben.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a szivárvány részgráfot, ami az utak és körök között a legtöbb éllel rendelkezik, legyen ez (C, Φ). (Ha van azonos élszámú kör és út is, akkor a kört válasszuk.) Tegyük fel, hogy $C = (x_1, x_2, ..., x_{\ell+1})$ ℓ hosszú út, és $\ell \in [3, n-1]$ ($\ell \geq 3$ következik abból, hogy $n \geq 5$, mohó választással könnyen belátható).

Tekintsük az $\ell - 1$ hosszú utat, $P = (x_1, ..., x_\ell)$-t. P legalább 2 színt kihagy, legyenek ezek 1 és 2.

1. Állítás. *$1, 2 \notin c(x_1 x_\ell)$, különben $(x_1, ..., x_\ell, x_1)$ egy ℓ hosszú kör, ami ellentmond (C, Φ) választásának.*

2. Állítás.

$$|N_{G_1}(x_1) \setminus V(P)| + |N_{G_2}(x_\ell) \setminus V(P)| \leq n - \ell \tag{1}$$

vagyis G_1-ben x_1 szomszédait összeszámolva, kivéve a P-beli csúcsokat és G_2-ben x_ℓ szomszédait összeszámolva, kivéve a P-beli csúcsokat, az összegük nem nagyobb $n - \ell$-nél.

Bizonyítás. Ha az összeg nagyobb lenne $n - \ell$-nél, akkor, mivel mindkét halmazban csak P-n kívüli elemek szerepelnek, a skatulyaelv alapján lenne olyan $y \in V \setminus V(P)$ elem a metszetben, hogy $(x_1, ..., x_\ell, y, x_1)$ egy $\ell + 1$ hosszú kör, ami ellentmond (C, Φ) választásának. □

Legyen

$$A_0 = \{i \in [\ell - 2] : 1 \in c(x_1 x_{i+1})\},$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre x_{i+1} szomszédja x_1-nek G_1-ben, valamint legyen

$$B_0 = \{i \in [2, \ell - 1] : 2 \in c(x_i x_\ell)\},$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre x_i szomszédja x_ℓ-nek G_2-ben.

3. Állítás. $\exists j \in A_0 \cap B_0$.

Bizonyítás. $\delta(G_1) \geq n/2$, és $1 \notin c(x_1 x_\ell)$ miatt (i csak $\ell - 2$-ig megy, de ha $\ell - 1$-ig menne, akkor se lenne A_0-nek több eleme), valamint A_0 definíciója alapján teljesül:

$$|A_0| \geq n/2 - |N_{G_1}(x_1) \setminus V(P)|.$$

Hasonlóan $\delta(G_2) \geq n/2$, és $2 \notin c(x_1 x_\ell)$ miatt (i csak 2-től megy, de ha 1-től menne, akkor se lenne B_0-nek több eleme) valamint B_0 definíciója alapján teljesül:

$$|B_0| \geq n/2 - |N_{G_2}(x_\ell) \setminus V(P)|.$$

Így (1)-et felhasználva

$$|A_0| + |B_0| \geq n - (|N_{G_1}(x_1) \setminus V(P)| + |N_{G_2}(x_\ell) \setminus V(P)|) \geq \ell.$$

Mivel $A_0 \cup B_0 \subseteq [\ell - 1]$, ezért $\exists j \in A_0 \cap B_0$ és $j \in [2, \ell - 2]$. □

4. Állítás. *C kiegészíthető egy körré.*

Bizonyítás. Ha töröljük $x_j x_{j+1}$ élt $E(P)$-ből és hozzáadjuk $x_1 x_{j+1}$ és $x_j x_\ell$ éleket, akkor $(x_1 \overrightarrow{P} x_j, x_\ell \overleftarrow{P} x_{j+1}, x_1)$-et kapjuk, ami egy szivárvány ℓ hosszú kör. □

Mivel a 4. állítás ellentmond (C, Φ) választásának, ezért C mégsem lehet út. Tehát feltehető, hogy $C = (x_1, ..., x_\ell, x_1)$ egy ℓ hosszú kör valamilyen $\ell \in [3, n - 2]$-re és van két szín (1 és 2), amik hiányoznak Φ-ből.

5. Állítás.

$$\ell \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\ell < \frac{n}{2} + 1$. Ebből $|V(C)| < \frac{n}{2} + 1$, és mivel $x_1 \in V(C)$, ezért $|V(C) \setminus x_1| < \frac{n}{2}$.

Ez alapján $|N_{G_1}(x_1) \setminus (V(C) \setminus x_1)| \geq 1$, és mivel $x_1 \notin N_{G_1}(x_1)$, ezért $|N_{G_1}(x_1) \setminus V(C)| \geq 1$.

Hasonlóan $|N_{G_2}(x_\ell) \setminus V(C)| \geq 1$ is teljesül.

Ekkor lenne két (nem feltétlenül diszjunkt) csúcs: $y, z \in V \setminus V(C)$, amikre $1 \in c(x_1 y)$ és $2 \in c(x_\ell z)$ teljesül. Ekkor $(y, x_1, ..., x_\ell, z)$ egy $\ell + 1$ élből álló szivárvány út (y és z különböző) vagy kör (y és z megegyeznek), ez pedig ellentmond (C, Φ) választásának. □

6. Állítás. *$\forall v \in V \setminus V(C)$ és $i \in [2]$-re $N_{G_i}(v) \subseteq V(C)$.*

Bizonyítás. Nézzük meg indirekt. Ekkor $\exists i \in [2]$ és $\exists u, v \in V \setminus V(C)$, hogy $uv \in E(G_i)$.

Rendezzük át az előző állítás egyenlőtlenségét: vonjunk ki mindkét oldalból n-et és szorozzunk be (-1)-gyel. Így

$$n - \ell \leq \frac{n}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad |V \setminus V(C)| < \frac{n}{2}.$$

Mivel $d_{G_{3-i}}(v) \geq \frac{n}{2} > |V \setminus V(C)|$, vagyis nagyobb v fokszáma, mint a nem C-beli csúcsok száma, ezért $\exists j : x_j v \in E(G_{3-i})$, és a szimmetria miatt feltehető, hogy $j = \ell$. Ebből adódóan $(x_1, ..., x_\ell, v, u)$ ellentmond (C, Φ) választásának, vagyis az állítás igaz. □

Legyen $v \in V \setminus V(C)$ rögzített. Legyen

$$A_1 = \{i \in [\ell] : 1 \in c(vx_{i+1})\} \quad (\text{itt } x_{\ell+1} := x_1),$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre x_{i+1} G_1-ben v szomszédja, és legyen

$$B_1 = \{i \in [\ell] : 2 \in c(vx_i)\},$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre x_i G_2-ben v szomszédja.

Ekkor, mivel G_1-ben és G_2-ben v-nek csak $V(C)$-beli szomszédai vannak, ezért

$$|A_1| + |B_1| = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v) \geq \delta(G_1) + \delta(G_2) \geq n > \ell,$$

amiből skatulyaelv alapján következik, hogy $\exists j \in A_1 \cap B_1$.

Így $x_j x_{j+1}$-et törölve $E(C)$-ből, és vx_j-t valamint vx_{j+1}-et hozzáadva $(x_1 \overrightarrow{C} x_j, v, x_{j+1} \overrightarrow{C} x_\ell)$ egy szivárvány $\ell + 1$ hosszú kör. Ez ellentmondásra vezet, így az 1. Lemmát bebizonyítottuk. □

Az 1. Lemmából következik, hogy létezik szivárvány kör (C, Φ), ahol $C = (x_1, ..., x_{n-1}, x_1)$. C-ből hiányzik egy csúcs, legyen ez w.

Ha átnevezzük a színeket, feltehető, hogy $\forall i \in [n-1]$-re $\Phi(x_i x_{i+1}) = i$ (itt $x_n = x_1$), tehát Φ-ből hiányzik az n. szín.

Definíció. *Készítsünk egy D irányított segédgráfot az $[n]$ csúcshalmazon úgy, hogy*

$$A(D) = \bigcup_{i \in [n-1]} \{x_i z : z \neq x_{i+1}, i \in c(x_i z)\}.$$

Tehát ha az i. csúcsból megy i színű él egy csúcsba, ami nem az $i+1$., akkor bevesszük ezt az élt D-be.

Megjegyzés: Így D nem tartalmaz C-beli éleket, valamint D-ben w-nek nincsenek kimenő élei.

7. Állítás.

$$|A(D)| \geq (n-1)(\frac{n}{2} - 1).$$

Bizonyítás. Számoljuk meg minden csúcs kimenő éleit D-ben. Mivel $\forall i \in [n-1]$-re $\delta(G_i) \geq \frac{n}{2}$, így $\forall x \in A(D \setminus \{w\})$-re $d_D^+(x) \geq \frac{n}{2} - 1$, mert a C-beli éleket le kell vonni. Tehát D-ben $n-1$ csúcsnak van kiéle, mindegyiknek legalább $\frac{n}{2} - 1$, ebből következik az állítás. □

Legyen

$$A_2 = \{i \in [n-1] : x_i w \in A(D)\},$$

vagyis azok az i indexek, amikre x_i és w között megy i színű él, és legyen

$$B_2 = \{i \in [n-1] : x_{i+1}w \in E(G_n)\},$$

vagyis azok az i indexek, amikre x_{i+1} és w között megy n színű él.

8. Állítás. $d^-_D(w) \leq \frac{n}{2} - 1$.

Bizonyítás. Ha $d^-_D(w) > \frac{n}{2} - 1$, akkor $|A_2| + |B_2| \geq d^-_D(w) + \delta(G_n) > n - 1 = |V(C)|$ teljesülne, emiatt létezne $j \in A_2 \cap B_2$, tehát ha C-ből töröljük $x_j x_{j+1}$ élt és hozzáadjuk $x_j w$ és $w x_{j+1}$ éleket, akkor szivárvány Hamilton-kört kapnánk, ami ellentmondás. □

9. Állítás. *Az előző állítás és $d^+_D(w) = 0$ miatt következik, hogy*

$$|A(D \setminus \{w\})| \geq (n-1)(\frac{n}{2} - 1) - \frac{n}{2} + 1 > (n-1)(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}). \qquad (2)$$

Most megvizsgáljuk, hogy létezhet -e olyan x_i csúcs, amire $d^-_D(x_i) \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$.

1. Eset. Tegyük fel, hogy létezik olyan csúcs, mondjuk x_1, hogy $d^-_D(x_1) \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$. Ez alapján

$$|\{i \in [2, n-2] : i \in c(x_1 x_i)\}| = d^-_D(x_1) \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Legyen

$$A_3 = \{i \in [n-1] : x_i w \in E(G_1)\},$$

vagyis azon i indexek, amikre x_i és w között megy 1-es színű él, és legyen

$$B_3 = \{i \in [n-1] : x_{i+1}w \in E(G_n)\},$$

vagyis azon i indexek, amikre x_{i+1} és w között megy n színű él.

Látható, hogy $|A_3| + |B_3| \geq n$ (a minimális fokszámok miatt), így $\exists j \in A_3 \cap B_3$. Feltehető, hogy $j \neq 1$, különben $x_1 x_2$ él törlésével, valamint $x_1 w$ és $x_2 w$ hozzáadásával C-ből szivárvány Hamilton-kör lenne, ami ellentmondás.

Legyen (P, Φ') az a szivárvány Hamilton-út, ami C-ből az x_1x_2, x_jx_{j+1} élek törlésével és az x_jw, $x_{j+1}w$ élek hozzáadásával keletkezik, tehát $P = (x_2\overrightarrow{C}x_j, w, x_{j+1}\overrightarrow{C}x_{n-1}, x_1)$. $\Phi'(x_jw) := 1$, $\Phi'(x_{j+1}w) := n$, minden más esetben Φ' megegyezik Φ-vel. Látható, hogy Φ'-ből csak j szín hiányzik.

Írjuk fel P-t $P = (y_1, ..., y_n)$ alakban. Itt $y_1 = x_2$.

Legyen

$$A_4 = \{i \in [n-2] : j \in c(y_1y_{i+1})\},$$

vagyis azon i indexek, amikre j az y_1y_{i+1} lehetséges színei között van, és legyen

$$B_4 = \{i \in [n-2] : y_i \in N_D^-(x_1)\},$$

vagyis azon i indexek, amikre y_i csúcsból megy x_1-be (vagyis y_n-be) él D-ben.

A_4-ben y_1 minden lehetséges G_j-beli szomszédja benne lehet, y_n-t kivéve (mert i csak $n-2$-ig fut). Azonban ha $j \in c(y_1y_n)$ teljesülne, akkor ezzel az éllel kiegészítve P-t szivárvány Hamilton-kört kapnánk, ami ellentmondás. Ebből adódóan $|A_4| \geq \delta(G_j) = \frac{n}{2}$.

10. Állítás.

$$y_{n-1} \notin N_D^-(x_1).$$

Bizonyítás. Mivel y_{n-1} csúcs csak x_{n-1} vagy w átnevezése lehet, és mivel D definíciójából adódóan se x_{n-1}-ből, se w-ből nem megy D-ben x_1-be él, ezért az állítás igaz. □

Az előző állításból és (3)-ból következik, hogy $|B_4| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, amiből $|A_4| + |B_4| \geq n$ (mivel az összeg egész).

Mivel $A_4 \cup B_4 \subseteq [n-2]$, ezért $A_4 \cap B_4$-ben legalább 2 szín van, amik közül legalább az egyikre (legyen ez k) igaz, hogy $y_{k+1} \neq w$. Továbbá $y_k \neq w$ is teljesül, mivel $y_k \in N_D^-(x_1)$, azonban $w \notin N_D^-(x_1)$.

11. Állítás.

$$\Phi'(y_ky_{k+1}) \in c(y_ky_n).$$

Bizonyítás. y_k, $y_{k+1} \neq w$-ből következik, hogy $\Phi'(y_k y_{k+1}) = \Phi(y_k y_{k+1})$. Legyen P korábbi felírásában $y_k = x_\ell$. Ekkor $\Phi(y_k y_{k+1}) = \Phi(x_\ell x_{\ell+1}) = \ell$. Mivel $y_k \in N_D^-(x_1)$, ezért x_ℓ és x_1 között megy ℓ színű él, más jelöléssel leírva y_k és y_n között megy ℓ színű él, ebből már következik az állítás. □

Emiatt létrehozható P-ből $y_k y_{k+1}$ élt elvéve, valamint $y_1 y_{k+1}$ és $y_k y_n$ éleket hozzáadva $(y_{k+1}, y_1 \overrightarrow{P} y_k, y_n \overleftarrow{P} y_{k+1})$ szivárvány Hamilton-kör, ami ellentmondás, tehát a $d_D^-(x_1) \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ feltevés helytelen volt.

2. Eset. $\forall i \in [n-1]$-re $d_D^-(x_i) \leq \frac{n}{2} - 1$.

Legyen
$$A_5 = \left\{ i \in [n-1] : d_D^-(x_i) = \left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor \right\},$$
vagyis azok az i indexek, amikre x_i befoka D-ben a lehető legnagyobb, ez páros n-re $d_D^-(x_1) = \frac{n}{2} - 1$, páratlan n-re $d_D^-(x_1) = \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$-et jelent.

Ekkor (2) miatt
$$\left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor |A_5| + \left\lfloor \frac{n}{2} - 2 \right\rfloor (n - 1 - |A_5|) \geq |A(D \setminus w)| > (n-1)\left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right).$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán a $D \setminus w$ csúcsokból kimenő élek számára adunk felső becslést: $|A_5|$ csúcs van, amiből pontosan $\left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor$ darab él megy ki, és $n - 1 - |A_5|$ csúcs van, amiből legfeljebb $\left\lfloor \frac{n}{2} - 2 \right\rfloor$ darab él megy ki.

Tehát ha n páros, akkor
$$\left(\frac{n}{2} - 1\right)|A_5| + \left(\frac{n}{2} - 2\right)(n - 1 - |A_5|) > (n-1)\left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right),$$
átrendezve
$$|A_5| \geq \frac{n-1}{2}.$$

Ha n páratlan, akkor pedig
$$\left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)|A_5| + \left(\frac{n}{2} - \frac{5}{2}\right)(n - 1 - |A_5|) > (n-1)\left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right),$$

átrendezve
$$|A_5| \geq n-1,$$
vagyis $|A_5| \geq \frac{n-1}{2}$ egy jó becslés mindkét esetben.

Legyen
$$B_5 = \{i \in [n-1] : x_{i+1}w \in E(G_n)\},$$
vagyis azok az i indexek, amikre x_{i+1} és w között megy n színű él (itt $i = n-1$ esetén $x_n = x_1$ érvényes).

Látható, hogy $|B_5| \geq \frac{n}{2}$, tehát $|A_5| + |B_5| \geq n$ (mivel az összeg egész). Ebből következik, hogy $\exists j \in A_5 \cap B_5$.

Legyen (Q, Φ^*) szivárvány út, ami C-ből $x_j x_{j+1}$ él törlésével és $x_{j+1}w$ él hozzáadásával keletkezik, így $Q = (w, x_{j+1}\overrightarrow{C}x_{n-1}, x_1\overrightarrow{C}x_j)$. $\Phi^*(x_{j+1}w) := n$, minden más esetben Φ^* megegyezik Φ-vel. Látható, hogy Φ^*-ból hiányzik j szín.

Írjuk fel Q-t $Q = (z_1, z_2, ..., z_n)$ alakban. Itt $z_1 = w$.

Legyen
$$A_6 = \{i \in [n-2] : j \in c(z_1 z_{i+1})\},$$
vagyis azok az i indexek, amikre $z_1 z_{i+1}$ él lehet j színű, valamint legyen
$$B_6 = \{i \in [2, n-2] : z_i \in N_D^-(z_n)\},$$
vagyis azok az i indexek, amikre z_i-ből megy él z_n-be D-ben.

Vegyük észre, hogy A_6-ban $z_1 z_n$-t nem vizsgáljuk, B_6-ban pedig $z_1 z_n$-t és $z_{n-1}z_n$-t nem vizsgáljuk a definícióikból adódóan. Ha $j \in c(z_1 z_n)$ teljesülne, akkor lenne szivárvány Hamilton-kör G-ben, ami ellentmondás, így $|A_6| \geq \delta(G_j) \geq \frac{n}{2}$. Mivel $z_n = x_j$, ezért D definíciója miatt $z_1 = w \notin N_D^-(z_n)$ és $z_{n-1} = x_{j-1} \notin N_D^-(z_n)$. Valamint mivel $j \in A_5$, ezért $d_D^-(x_j) = d_D^-(z_n) = |B_6| = \left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor$.

Ezekből $|A_6| + |B_6| \geq n-1$. Mivel $A_6 \cup B_6 \subseteq [n-2]$, ezért $\exists k \in A_6 \cap B_6 \subseteq [2, n-2]$.

12. Állítás.

$$\Phi^*(z_k z_{k+1}) \in c(z_k z_n).$$

Bizonyítás. Hasonlóan a 11. Állításhoz. □

Így P-ből $z_k z_{k+1}$ élt elvéve, valamint $z_1 z_{k+1}$ és $z_k z_n$ éleket hozzáadva $(z_1 \overrightarrow{Q} z_k, z_n \overleftarrow{Q} z_{k+1}, z_1)$ szivárvány Hamilton-kört kapjuk, ami ellentmondás, tehát a 2. Tételt bebizonyítottuk. ■

2. Ore típusú feltételek

Ebben a fejezetben Ore-féle feltételek mellett vizsgáljuk szivárvány feszítőfa vagy feszítőerdő és szivárvány Hamilton-út létezését G élszínezett multigráfban L. Li, P. Li és X. Li cikke [LLL23] alapján.

Jelölés. *G egyszerű gráf esetén jelölje $\sigma_2(G) = min\{d_G(x) + d_G(y) : x, y \in V(G), xy \notin E(G)\}$, vagyis az összes nemszomszédos csúcspár fokszámösszegeinek minimumát.*

3. Tétel. [Ore60] *Legyen G egyszerű gráf, ahol $|V(G)| \geq 3$ és $\sigma_2(G) \geq n$. Ekkor G-ben található Hamilton út.*

A fenti tételben szereplőhöz hasonló feltételeket nevezzük Ore-típusú feltételeknek.

Jelölés. *Legyen $C(G)$ a G gráf komponenseinek száma.*

Jelölés. *Legyen $c(F)$ az F részgráfban szereplő színek halmaza.*

Jelölés. *Legyen $N_G(v, H)$ a v csúcs H-beli szomszédainak halmaza, ahol $G = (V, E)$ egyszerű gráf, $v \in V$ és H részgráfja G-nek.*

Jelölés. *Egy $\{V_1, ..., V_k\}$ csúcsfelbontásra a G gráfban legyen $E_G[V_1, ..., V_k]$ azon élek halmaza, amelyeknek végpontjai különböző V_i csúcshalmazokban vannak.*

Jelölés. *H_1 és H_2 pontdiszjunkt gráfokra legyen $H_1 \vee H_2$ az a gráf, amit akkor kapunk, ha minden H_1-beli csúcsot összekötünk minden H_2-beli csúccsal.*

Jelölés. *Ha G gráf k darab komponensből áll és ezek izomorfak H gráffal, akkor G-t jelölhetjük úgy, hogy kH.*

Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\{G_i : i \in [t]\}$ t darab H-másolatból áll, ha $G_1 = G_2 = ... = G_t = H$.*

2.1. Szivárvány feszítőerdő

Először nézzünk egy elégséges feltételt szivárvány feszítőfa létezésére G-ben.

4. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_{n-1}$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$ és $\sigma_2(G_i) \geq \frac{2n}{3} - 1$ $\forall i \in [n-1]$-re, valamint ezen gráfok G uniója összefüggő. Ekkor a G gráfban található szivárvány feszítőfa.*

Most ennél gyengébb feltétellel mondjuk ki a tételt, azaz csökkentjük az egyenlőtlenség jobb oldalát eggyel, valamint nem kötjük ki, hogy G legyen összefüggő. Ekkor vagy lesz szivárvány feszítőerdő, vagy egy specifikus kivétel teljesül.

5. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_{n-1}$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$ és $\sigma_2(G_i) \geq \frac{2n}{3} - 2$ $\forall i \in [n-1]$-re. Legyen G multigráf ezen gráfok uniója. Ekkor fennáll a következő állítások közül valamelyik:*

1. *$\exists$ szivárvány feszítőerdő, $n - C(G)$ darab éllel;*
2. *n osztható 3-mal, G összefüggő, és $[n-1]$ átszámozásával azt kapjuk, hogy $\{G_i : i \in [2, n-1]\}$ n-2 darab $3K_{\frac{n}{3}}$-másolatból áll.*

Bizonyítás. Látható, hogy mivel $\sigma_2(G_i) \geq \frac{2n}{3} - 2$, ezért minden G_i gráf legfeljebb három komponensből áll.

13. Állítás. *Ha egy G_i pontosan 3 komponensű, legyenek ezek D_1, D_2, D_3, akkor $\forall j \in [3]$-ra $|V(D_j)| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vagy $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $|V(D_1)| < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Ekkor $|V(D_2)| + |V(D_3)| > n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \geq \frac{2n}{3}$. A $\sigma_2(G_i) \geq \frac{2n}{3} - 2$ feltételből következik, hogy $|V(D_1)| + |V(D_2)| \geq \frac{2n}{3}$ és $|V(D_1)| + |V(D_3)| \geq \frac{2n}{3}$. Összeadva a 3 egyenlőtlenséget és 2-vel leosztva azt kapjuk, hogy $|V(D_1)| + |V(D_2)| + |V(D_3)| > n$, ami ellentmondás. $\square$

Az alábbiakban G összefüggősége szerint két esetet különböztetünk meg.

1. Eset. G összefüggő.

Legyen (T, Φ) a G-ben található legnagyobb szivárvány fa és $U = V \setminus V(T)$. Ha $U = \emptyset$, akkor a tétel 1. állítása teljesül, és kész vagyunk.

Vizsgáljuk meg, amikor $U \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $|V(T)| = k < n$ és $c(T) = [k-1]$. T maximalitásából következik, hogy $\forall i \in [k, n-1]$-re $E_{G_i}[V(T), U] = \emptyset$, különben ilyen éllel kiegészíthetnénk.

Tegyük fel, hogy $e \in E_1[V(T), U]$ és $xy \in E(T)$ az az él, amire $\Phi(xy) = 1$.

Jelölje T_x a $T \setminus xy$ gráf x csúcsot tartalmazó komponensét, T_y pedig a $T \setminus xy$ gráf y csúcsot tartalmazó komponensét.

2. Lemma. *$N_{G_i}(v) \subseteq V(T_x)$ $\forall v \in V(T_x)$-re és $N_{G_i}(v') \subseteq V(T_y)$ $\forall v' \in V(T_y)$-ra, ahol $i \in [2, n-1]$. Vagyis $v \in V(T_x)$-nek nem lehetnek $V(T_y) \cup U$-ban szomszédai $i \in [2, n-1]$ színekben (és fordítva).*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég $N_{G_i} \subseteq v(T_x)$ esetet bizonyítani.

Először nézzük meg $i \in [k, n-1]$-re. Rögzítsük i-t. T maximalitása miatt $N_{G_i}(v) \cap U = \emptyset$. Látható, hogy $\nexists f \in E_{G_i}[V(T_x), V(T_y)]$, különben T-ből elvéve xy-t és hozzáadva e és f éleket, szivárvány $k+1$ csúcsú fát kapnánk, ami ellentmondás. $T \setminus \{xy\} \cup \{e, f\}$ gráf tényleg fa lesz, mivel f T_x és T_y komponenst köti össze, e pedig egy új, U-beli csúcsot köt a gráfhoz.

Most nézzük meg $i \in [2, k-1]$ esetén. Rögzítsük i-t. $\exists f = zz'$ éle T-nek, amire $\Phi(f) = i$. Feltehető, hogy $f \in E(T_y)$. Legyen F_z és $F_{z'}$ a két komponense $T_y \setminus \{f\}$-nek. Mivel $N_{G_k}(v) \subseteq V(T_x)$ $\forall v \in V(T_x)$-re, ezért $E_{G_k}[V(T_x), V(T_y)] = \emptyset$.

14. Állítás. $\exists g \in E_{G_k}[V(F_z), V(F_{z'})]$.

Bizonyítás. Ha $E_{G_k}[V(F_z), V(F_{z'})] = \emptyset$, akkor $E_{G_k}[V(T_x), V(F_z), V(F_{z'})] = \emptyset$, amiből következik, hogy G_k leszűkítve $V(T)$ csúcshalmazra legalább 3 komponensű. Mivel $U \neq \emptyset$, ezért G_k-nak legalább 4 komponense van, ami ellentmondás. $\square$

Így $\exists g \in E(G_k)$, amire $T_y \cup \{g\}$-ben van egy kör, ami tartalmazza f és g éleket.

Ha $\exists w \in N_{G_i}(v) \cap U$ valamilyen $v \in V(T_x)$ esetén, akkor $T \setminus \{f\} \cup \{g, vw\}$ $k+1$ csúcsú szivárvány fa lenne, ami ellentmondás (itt f és vw élek i színűek, g él pedig k színű).

Vegyük észre, hogy $T' = T \setminus \{f\} \cup \{g\}$ egy szivárvány fa, ahol $V(T') = V(T)$, $T'_x = T_x$, és $T'_y = T_y \setminus \{f\} \cup \{g\}$.

Ha $\exists w' \in N_{G_i}(v) \cap V(T_y)$ valamilyen $v \in V(T_x)$ esetén, akkor $T' \cup \{vw'\}$-ben van egy kör, és ez a kör tartalmazza xy és vw' éleket. Mivel $e \in E_{G_1}[V(T), U]$, következik, hogy $T' \setminus \{xy\} \cup \{e, vw'\}$ $k+1$ csúcsú szivárvány fa, ami ellentmondás. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. $\square$

A 2. Lemma alapján $\forall i \in [2, n-1]$-re G_i-nek legalább három komponense van, tehát G_1-et kivéve minden G_i pontosan három komponensből áll, ezek a $V(T_x)$, $V(T_y)$ és U csúcshalmazok. A 13. Állítás alapján $|V(T_x)|, |V(T_y)|, |U| \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right\}$.

Ha $3 \nmid n$, akkor $\sigma_2(G_j) \geq \frac{2n}{3} - 2$ miatt $|V(T_x)| + |V(T_y)| \geq \frac{2n+1}{3}$, hasonlóan $|V(T_x)| + |U|$ és $|V(T_y)| + |U|$ is $\geq \frac{2n+1}{3}$, amiből $2(|V(T_x)| + |V(T_y)| + |U|) \geq \frac{6n}{3} + 1$, ami ellentmondás. Tehát $3 \mid n$, és $|V(T_x)| = |V(T_y)| = |U| = \frac{n}{3}$. Így a fokszámfeltétel miatt $G_i[V(T_x)] = G_i[V(T_y)] = G_i[U] = K_{\frac{n}{3}}$ $\forall i \in [2, n-1]$-re, tehát a 2. állítás teljesül. Vegyük észre, hogy ilyenkor $\sigma_2(G_i) = \frac{2n}{3}$.

Ezzel az 1. Eset végére értünk.

2. Eset. G több komponensből áll.

Tegyük fel, hogy D a G gráf egy komponense. Legyen $G'_i = G_i[V(D)]$ és $G''_i = G_i \setminus D$ $\forall i \in [n-1]$, és legyen G' a G'_i gráfok uniója, G'' pedig a G''_i gráfok uniója.

Vegyük észre, hogy $\sigma_2(G'_i) \geq \frac{2n}{3} - 2 > \frac{2|V(D)|}{3} - 2$ és $\sigma_2(G''_i) \geq \frac{2n}{3} - 2 > \frac{2(n-|V(D)|)}{3} - 2$ $\forall i \in [n-1]$-re. Emiatt D-re csak az 1. állítás teljesülhet, a 2. nem.

Az 1. Esetből következik, hogy G'-ben van szivárvány feszítőfa, legyen ez T', ahol $c(T') = [|V(D)| - 1]$. Hasonlóan G''-re is teljesül, hogy van benne F'' szivárvány feszítőerdő, ahol $|E(F'')| = n - |V(D)| - C(G'')$ és $c(F'') \subseteq$

$[|V(D)|, n-1]$. Így $F = T' \cup F''$ egy szivárvány feszítőerdő, ahol $|E(F)| = n - C(G)$, vagyis az 1. állítás teljesül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ha adunk egy extra feltételt, miszerint G összefüggő, akkor vagy szivárvány feszítőfa van, vagy a tétel 2. állítása áll fenn. Mivel a 2. állítás teljesülése esetén $\sigma_2(G_i) = \frac{2n}{3} - 2$ $\forall i \in [2, n-1]$-re, ezért az 5. Tételből következik a 4. Tétel.

2.2. Szivárvány Hamilton-út

Most vizsgáljuk szivárvány Hamilton-út létezését G-ben. Először adjunk egy elégséges feltételt.

6. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_n$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$ és $\sigma_2(G_i) \geq n-1$ $\forall i \in [n]$-re. Legyen G multigráf ezen gráfok uniója. Ekkor G-ben van szivárvány Hamilton-út.*

Most gyengébb feltétel mellett nézzük meg, mit mondhatunk el a gráfról. Ha eggyel csökkentjük az egyenlőtlenség jobb oldalát, csak két kivételes esetben nem lesz szivárvány Hamilton-út a gráfban.

7. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_n$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$ és $\sigma_2(G_i) \geq n-2$ $\forall i \in [n]$-re. Legyen G multigráf ezen gráfok uniója. Ekkor fennáll a következő állítások közül valamelyik:*

1. *A gráfban található szivárvány Hamilton-út;*
2. *a G gráf a $K_\ell \cup K_{n-\ell}$ gráf n darab másolatából áll, ahol $\ell \in [n-1]$;*
3. *n páros és létezik (H, I) felbontása V csúcshalmaznak úgy, hogy $|H| = \frac{n-2}{2}$ és $|I| = \frac{n+2}{2}$, és $\forall i \in [n]$-re $G_i = G_i[H] \vee G_i[I]$, ahol $G_i[I]$ független csúcshalmaz és $G_i[H]$ tetszőleges gráf.*

Bizonyítás. Bizonyítsuk a tételt indirekten. Legyen (P, Φ) egy tetszőleges legnagyobb szivárvány út, ahol a szimmetria miatt feltehető, hogy $P =$

$(v_1, ..., v_\ell)$ és $\Phi(v_i v_{i+1}) = i$, $\forall i \in [\ell - 1]$ esetén. Ekkor $\ell \leq n - 1$. P maximalitása miatt $\forall i \in [\ell, n]$ színre és $\forall u \in V \setminus V(P)$ csúcsra $v_1 u \notin E(G_i)$ és $v_\ell u \notin E(G_i)$. Így $N_{G_i}(v_1)$, $N_{G_i}(v_\ell) \subseteq V(P)$ $\forall i \in [\ell, n]$.

3. Lemma. *Ekkor nincs a gráfban szivárvány ℓ hosszú kör.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van G-ben (C, Φ) kör, ahol $C = (u_1, u_2, ..., u_\ell, u_1)$ és $\Phi(u_i, u_{i+1}) = i$ $\forall i \in [\ell]$-re (itt $u_{\ell+1} = u_1$). Legyen $U = V \setminus V(C)$.

15. Állítás. $\forall k \in [\ell + 1, n]$ *színre* $E_{G_k}[V(C), U] = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha van $u \in U$ csúcs és $k \in [\ell + 1, n]$ szín úgy, hogy $N_{G_k}(u, C) \neq \emptyset$, akkor válasszunk egy tetszőleges $u_i \in N_{G_k}(u, C)$ csúcsot. Ekkor $P' = (u, u_i \overrightarrow{C} u_{i-1})$ egy szivárvány ℓ hosszú út, ami ellentmondás. $\square$

Mivel $\sigma_2(G_k) \geq n - 2$ $\forall k \in [\ell + 1, n]$ színre, ezért tetszőleges $x \in V(C)$ és $y \in U$ csúcsokra igaz, hogy $N_{G_k}(x) = V(C) \setminus \{x\}$ és $N_{G_k}(y) = U \setminus \{y\}$. Emiatt $G_k[V(C)] = K_\ell$ és $G_k[U] = K_{n-\ell}$. Tehát $\{G_i : i \in [\ell + 1, n]\}$ gráfok $K_\ell \cup K_{n-\ell}$ másolatai.

16. Állítás. $\forall k \in [\ell]$ *színre* $E_{G_k}[V(C), U] = \emptyset$.

Bizonyítás. Rögzítsük $k \in [\ell]$-t. Ha van $u \in U$ csúcs úgy, hogy $N_{G_k}(u, C) \neq \emptyset$, akkor válasszunk egy tetszőleges $u_i \in N_{G_k}(u, C)$ csúcsot. Emlékezzünk vissza, hogy C kör $e = u_k u_{k+1}$ élére $\Phi(e) = k$. Mivel $G_{\ell+1}[V(C)]$ részgráf teljes gráf, ezért $G_{\ell+1}$-ben van $f = u_k u_{k+1}$ él.

Ha $i = k$, akkor $(u_{i+1} \overrightarrow{C} u_i, u)$ egy szivárvány ℓ hosszú út, ami ellentmondás.

Ha $i \neq k$, akkor $(u_{i+1} \overrightarrow{C} u_i, u) \setminus \{e\} \cup \{f\}$ egy szivárvány ℓ hosszú út, ami ellentmondás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. $\square$

Az előző állításból és a fokszámfeltételből következik, hogy $G_i[V(C)] = K_\ell$ és $G_i[U] = K_{n-\ell}$ $\forall i \in [\ell]$.

Tehát $\{G_i : i \in [n]\}$ n darab $K_\ell \cup K_{n-\ell}$ -másolatból áll, azaz a tétel 2. állítása teljesül. Ez egy ellentmondás, így következik, hogy a lemma igaz. $\square$

Válasszunk ki két színt; $s, t \in [\ell, n]$. A 3. Lemmából következik, hogy $v_1 v_\ell \notin E(G_s)$ és $v_1 v_\ell \notin E(G_t)$. Ezért $d_{G_s}(v_1) + d_{G_s}(v_\ell) \geq n-2$ és $d_{G_t}(v_1) + d_{G_t}(v_\ell) \geq n-2$, amiből következik, hogy $d_{G_s}(v_1) + d_{G_t}(v_\ell) \geq n-2$ vagy $d_{G_t}(v_1) + d_{G_s}(v_\ell) \geq n-2$ teljesül. Feltehető, hogy $d_{G_s}(v_1) + d_{G_t}(v_\ell) \geq n-2$.

Legyen

$$A_0 = \{i \in [\ell-2] : v_1 v_{i+1} \in E(G_s)\},$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre G-ben van s színű $v_1 v_{i+1}$ él, és legyen

$$B_0 = \{i \in [2, \ell-1] : v_i v_\ell \in E(G_t)\},$$

vagyis azon i indexek halmaza, amikre G-ben van t színű $v_i v_\ell$ él.

Mivel $N_{G_s}(v_1), N_{G_t}(v_\ell) \subseteq V(P) \setminus \{v_1, v_\ell\}$, ezért $|A_0| = d_{G_s}(v_1)$, illetve $|B_0| = d_{G_t}(v_\ell)$, amiből $|A_0| + |B_0| \geq n-2$.

17. Állítás. *$A_0 \cap B_0 = \emptyset$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists i \in A_0 \cap B_0$. Ekkor $(v_1, v_{i+1} \overrightarrow{P} v_\ell, v_i \overleftarrow{P} v_1)$ egy szivárvány ℓ hosszú kör, ami ellentmondás a 3. Lemmával. $\square$

Így $n-2 \leq |A_0 \cap B_0| \leq \ell - 1 \leq n-2$, tehát $A_0 \cap B_0 = [n-2]$, $d_{G_s}(v_1) + d_{G_t}(v_\ell) = n-2$, $\ell = n-1$, és $\{s, t\} = \{n-1, n\}$. Feltehető, hogy $s = n-1$ és $t = n$, így

$$d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_n}(v_{n-1}) = n-2. \tag{4}$$

Mivel $v_1 v_n \notin E(G_{n-1}) \cup E(G_n)$, ezért $d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_{n-1}}(v_n) \geq n-2$ és $d_{G_n}(v_1) + d_{G_n}(v_n) \geq n-2$, tehát $d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_n}(v_n) \geq n-2$ vagy $d_{G_n}(v_1) + d_{G_{n-1}}(v_n) \geq n-2$ teljesül. Hasonlóan, mivel $v_{n-1} v_n \notin E(G_{n-1}) \cup E(G_n)$, ezért $d_{G_{n-1}}(v_{n-1}) + d_{G_n}(v_n) \geq n-2$ vagy $d_{G_n}(v_{n-1}) + d_{G_{n-1}}(v_n) \geq n-2$ teljesül.

A szimmetria miatt elég a $d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_n}(v_n) \geq n-2$ és $d_{G_n}(v_{n-1}) + d_{G_{n-1}}(v_n) \geq n-2$ esetet nézni.

Definiáljuk a következő halmazokat:

$$A_1 = \{i \in [n-3] : v_1 v_{i+1} \in E(G_{n-1})\},$$

$$B_1 = \{i \in [2, n-2] : v_i v_n \in E(G_n)\},$$

$$A_2 = \{i \in [3, n-1] : v_{n-1} v_{i-1} \in E(G_n)\},$$

$$B_2 = \{i \in [2, n-2] : v_i v_n \in E(G_{n-1})\}.$$

18. Állítás. $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists i \in A_1 \cap B_1$. Ekkor lenne egy $P' = (v_n, v_i \overleftarrow{P} v_1, v_{i+1} \overrightarrow{P} v_{n-1})$ szivárvány Hamilton-út, ahol $v_i v_n$ él n színű és $v_1 v_{i+1}$ él $n-1$ színű, ami ellentmondás. □

Látható, hogy $N_{G_{n-1}}(v_1) \subseteq V(P) \setminus \{v_1, v_{n-1}\}$ és $N_{G_n}(v_n) \subseteq V(P) \setminus \{v_1, v_{n-1}\}$. Ez alapján $A_1 = \{i : v_i \in N_{G_{n-1}}(v_1)\}$ és $B_1 = \{i : v_i \in N_{G_n}(v_n)\}$. Mivel $|A_1 \cup B_1| \leq n-2$ és $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, így

$$d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_n}(v_n) = n - 2. \tag{5}$$

Hasonló érveléssel A_2-re és B_2-re, azt kapjuk, hogy

$$d_{G_{n-1}}(v_n) + d_{G_n}(v_{n-1}) = n - 2. \tag{6}$$

A (4), (5) és (6) egyenletekből következik, hogy $d_{G_{n-1}}(v_1) = d_{G_{n-1}}(v_n)$ és $d_{G_n}(v_{n-1}) = d_{G_n}(v_n)$.

Mivel $v_1 v_n \notin E(G_{n-1})$ és $v_{n-1} v_n \notin E(G_n)$, ezért $d_{G_{n-1}}(v_1) + d_{G_{n-1}}(v_n) \geq n-2$ és $d_{G_n}(v_{n-1}) + d_{G_n}(v_n) \geq n-2$. Tehát

$$d_{G_{n-1}}(v_1) = d_{G_{n-1}}(v_n) = d_{G_n}(v_{n-1}) = d_{G_n}(v_n) = \frac{n-2}{2}.$$

Hasonlóan, mivel $v_n v_{n-1} \notin E(G_{n-1})$ és $v_1 v_n \notin E(G_n)$, ezért

$$d_{G_{n-1}}(v_{n-1}) = d_{G_{n-1}}(v_n) = d_{G_n}(v_1) = d_{G_n}(v_n) = \frac{n-2}{2}.$$

Ekkor $\forall i \in \{n-1, n\}$ és $\forall j \in \{1, n-1, n\}$ esetén $d_{G_i}(v_j) = \frac{n-2}{2}$, és n páros.

Egy $R = (x_1, x_2, ..., x_{2m+1})$ útra legyen $V_e(R)$ a csúcshalmaz a páros indexű csúcsokkal, vagyis $V_e(R) = \{x_{2i} : i \in [m]\}$.

4. Lemma. *$\forall i \in \{n-1, n\}$ és $\forall j \in \{1, n-1, n\}$ esetén $N_{G_i}(v_j) = \Big\{v_{2k} : k \in \left[\frac{n-2}{2}\right]\Big\} = V_e(P)$.*

Bizonyítás. Először lássuk be v_n-re a lemmát. Ehhez definiáljuk A-t és B-t a következőképpen:

$$A = \{i \in [n-3] : v_{i+1} v_n \in E(G_n)\},$$

$$B = \{i \in [2, n-2] : v_i v_n \in E(G_{n-1})\}.$$

19. Állítás. *Az A halmaz az $[n-3]$ intervallum páratlan számait, a B halmaz pedig a $[2, n-2]$ intervallum páros számait tartalmazza.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítsuk az állítást.

Tegyük fel, hogy $\exists i \in A \cap B$. Ekkor lenne $(v_1 \overrightarrow{P} v_i, v_n, v_{i+1} \overrightarrow{P} v_{n-1})$, szivárvány Hamilton-út (ahol $v_i v_n$ él $n-1$ színű és $v_n v_{i+1}$ él n színű), ami ellentmondás, tehát $A \cap B = \emptyset$.

Mivel $d_{G_{n-1}}(v_n) = d_{G_n}(v_n) = \frac{n-2}{2}$, ezért $|A| = |B| = \frac{n-2}{2}$.

A fentiek alapján $|A \cup B| = n-2$, és mivel itt $i \in [n-2]$, ezért minden i vagy A-ba vagy B-be kerül.

Tudjuk, hogy $\{1\} \in A$, és $\{n-2\} \in B$. Ha 1 és $n-2$ között nem minden páratlan szám kerül A-ba és nem minden páros szám kerül B-be, akkor, mivel A-val kezdődik és B-vel végződik a sor, ezért lesz legalább 2 egymás melletti A-beli elem, amik után B-beli következik, legyen ez a B-beli elem $\{j\}$.

Tehát $\{j-2\} \in A$ és $\{j\} \in B$. Ebből A és B definíciója miatt következik, hogy $v_{j-1}v_n \in E(G_n)$ és $v_jv_n \in E(G_{n-1})$. Ekkor $(v_1\overrightarrow{P}v_{j-1}, v_n, v_j\overrightarrow{P}v_{n-1})$ szivárvány Hamilton-út, ami ellentmondás. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Ekkor $N_{G_i}(v_n) = V_e(P)$ $\forall i \in \{n-1, n\}$ esetén.

Most lássuk be a lemmát v_1-re és v_{n-1}-re. A szimmetria miatt a bebizonyításához elég azt belátni, hogy $N_{G_n}(v_1) = V_e(P) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$. Tegyük fel indirekt, hogy $\exists v_1v_{2k+1}$ éle G_n-nek valamilyen $k \in \left[\frac{n-4}{2}\right]$-re. Ekkor $(v_n, v_{2k}\overleftarrow{P}v_1, v_{2k+1}\overrightarrow{P}v_{n-1})$ szivárvány Hamilton-út, ahol $v_{2k}v_n$ él $n-1$ színű és v_1v_{2k+1} él n színű, ami ellentmondás. Tehát $N_{G_n}(v_1) \subseteq V_e(P)$. De tudjuk, hogy $d_{G_n}(v_1) = \frac{n-2}{2} = |V_e(P)|$, ezért $N_{G_n}(v_1) = V_e(P)$. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

5. Lemma. *$\forall i \in [n]$-re $N_{G_i}(v_1) = N_{G_i}(v_{n-1}) = V_e(P)$.*

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogy $P = (v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ szivárvány $n-2$ hosszú út, $V \setminus V(P) = \{v_n\}$ és $\forall i \in [n-2]$-re $\Phi(v_iv_{i+1}) = i$. A 4. Lemmából következik, hogy $N_{G_{n-1}}(v_n) = N_{G_n}(v_n) = V_e(P)$.

$\forall i \in \{3, 5, ..., n-3\}$-ra legyen $L_i = (v_i\overleftarrow{P}v_2, v_n, v_{i+1}\overrightarrow{P}v_{n-1})$ egy szivárvány $n-2$ hosszú út, ahol v_2v_n él $n-1$ színű és v_nv_{i+1} él n színű. Mivel $\{i\}, \{1\} \notin c(L_i)$ és $v_1 \notin V(L_i)$, ezért a 4. Lemma alapján $N_{G_i}(v_1) = N_{G_1}(v_1) = V_e(L_i) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$.

Továbbá $\forall i \in \{3, 5, ..., n-3\}$-ra legyen $M_i = (v_i\overrightarrow{P}v_{n-2}, v_n, v_{i-1}\overleftarrow{P}v_1)$ egy szivárvány $n-2$ hosszú út, ahol v_nv_{n-2} él $n-1$ színű és v_nv_{i-1} él n színű. Mivel $\{i-1\}, \{n-2\} \notin c(M_i)$ és v_1 M_i egyik végpontja, ezért a 4. Lemma alapján $N_{G_{i-1}}(v_1) = N_{G_{n-2}}(v_1) = V_e(M_i) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$.

Azaz $\forall i \in [n-2]$-re teljesül, hogy $N_{G_i}(v_1) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$. Szintén a 4. Lemma miatt $N_{G_{n-1}}(v_1) = N_{G_n}(v_1) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$. Tehát $N_{G_i}(v_1) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\} = V_e(P)$ $\forall i \in [n]$-re. A szimmetria miatt hasonlóan a v_{n-1} csúcsra is belátható ugyanez, így a lemmát beláttuk. $\square$

20. Állítás. *$N_{G_i}(x) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$, $\forall x \in \{v_1, v_3, ..., v_{n-1}, v_n\}$-re és $\forall i \in [n]$-re.*

Bizonyítás. Az 5. Lemmával az állítást $x \in \{v_1, v_{n-1}\}$-re beláttuk.

Most nézzük meg $x = v_n$-re. Legyen $(v_n, v_2 \overrightarrow{P} v_{n-1})$, ahol $v_2 v_n$ él n színű, ez a 4. Lemma alapján szivárvány $n-2$ hosszú út. Ekkor az 5. Lemma miatt $\forall i \in [n]$-re $N_{G_i}(v_n) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$, mivel v_n az út egyik végpontja.

Végül nézzük meg $x \in \{v_3, v_5, ..., v_{n-3}\}$ csúcsokra. $\forall j \in \{3, 5, ..., n-3\}$-ra legyen $L_j = (v_j \overleftarrow{P} v_2, v_n, v_{j+1} \overrightarrow{P} v_{n-1})$. Látható, hogy ez egy szivárvány $n-2$ hosszú út, ahol $v_2 v_n$ él $n-1$ színű és $v_n v_{j+1}$ él n színű. Mivel v_j L_j egyik végpontja és $V_e(L_j) = V_e(P)$, ezért az 5. Lemma alapján $\forall i \in [n]$-re $N_{G_i}(v_j) = V_e(L_j) = \{v_2, v_4, ..., v_{n-2}\}$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Látható, hogy ekkor $\{v_1, v_3, ..., v_{n-1}, v_n\}$ független csúcshalmaz minden G_i-ben. Legyen $I = \{v_1, v_3, ..., v_{n-1}, v_n\}$ és $H = V \setminus I$. $G_i[H]$ tetszőleges gráf $\forall i \in [n]$-re. Ekkor $\sigma_2(G_i) \geq n-2$, és nincs szivárvány Hamilton-út G-ben, de I és H teljesítik a tétel 3. állításának feltételeit. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ha G nem tartalmaz szivárvány Hamilton-utat a 7. Tételben, akkor a 2. vagy 3. állítás áll fenn. Vegyük észre, hogy mindkét esetben $\forall i \in [n]$-re $\sigma_2(G_i) = n-2$. Így a 7. Tételből egyenesen következik, hogy a 6. Tétel is teljesül.

A 6. Tételből következik az alábbi:

8. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_n$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$ és $\delta(G_i) \geq \frac{n-1}{2}$ $\forall i \in [n]$-re. Legyen G multigráf ezen gráfok uniója. Ekkor G-ben van szivárvány Hamilton-út.*

3. Szivárvány klikkek

Ebben a fejezetben, szintén [LLL23] alapján nézzük meg szivárvány klikkek létezését legkisebb fokszám feltétel mellett.

Definíció. *$T_{n,m}$ az n csúcsú, m osztályú **Turán-gráf**, ami azt jelenti, hogy a gráf m egyenlő méretű osztályra osztható úgy, hogy egyik osztályon belül sem mennek élek, viszont mindegyik csúcs szomszédos az összes, más osztályban lévő csúccsal. Ha $m|n$, akkor a gráfnak $\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{n^2}{2}$ darab éle van, és nem tartalmaz $\frac{n}{m}$ méretű klikket [Tur41].*

9. Tétel. *Legyenek $G_1, G_2, ..., G_{\binom{s}{2}}$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok azonos V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$, $\forall i \in \left[\binom{s}{2}-1\right]$-re $\delta(G_i) \geq \left(1-\frac{1}{s-1}\right)n$, és $\delta\left(G_{\binom{s}{2}}\right) > \left(1-\frac{1}{s-1}\right)n$. Legyen G multigráf ezen gráfok uniója. Ekkor G-ben van szivárvány K_s klikk, és a megszorítás a minimális fokszámra éles.*

Bizonyítás. $\forall\ 2 \leq j \leq s$-re legyen $H_j = \left\{G_i : i \in \left[\binom{j}{2}\right]\right\}$. Bizonyítsunk s szerinti indukcióval. Látható, hogy H_2-ben van szivárvány K_2. Tegyük fel, hogy H_{s-1}-re teljesül a tétel, vagyis tartalmaz R szivárvány teljes gráfot, ahol $|V(R)| = s-1$. Feltehető, hogy $V(R) = \{v_1, v_2, ..., v_{s-1}\}$. Lássuk be, hogy ekkor H_s tartalmaz s méretű szivárvány klikket.

Készítsünk egy D irányított segédgráfot. Legyen $V(D) = V$ és $A(D) = \left\{(v_i, u) : v_iu \in E\left(G_{\binom{s-1}{2}+i}\right), \text{ahol } i \in [s-1]\right\}$. Tehát minden R-beli csúcshoz rendelünk egy H_{s-1}-ben nem tartalmazott gráfot, és a csúcsnak az ebben a gráfban lévő éleit húzzuk be D-ben.

Látható, hogy H_s tartalmaz szivárvány K_s klikket, ha $\exists v \in V \setminus V(R)$ csúcs, hogy $d_D^-(v) \geq s-1$. Lássuk be, hogy létezik ilyen csúcs.

21. Állítás.

$$\sum_{v\in V(D)} d_D^-(v) > (s-2)n.$$

Bizonyítás. Látható, hogy $\sum_{v\in V(D)} d_D^-(v) = \sum_{v\in V(D)} d_D^+(v)$. Valamint, mivel D-ben csak a $V(R)$-beli csúcsokból mennek kiélek, ezért teljesül, hogy

$\sum_{v\in V(D)} d_D^+(v) = \sum_{v\in V(R)} d_D^+(v)$. A tételben szereplő fokszámfeltétel miatt $\sum_{v\in V(R)} d_D^+(v) > (s-1)\left(1-\frac{1}{s-1}\right)n = (s-2)n$. Tehát $\sum_{v\in V(D)} d_D^-(v) > (s-2)n$. $\square$

Ekkor van legalább egy w csúcs $V(D)$-ben, amire $d_D^-(w) \geq s-1$. Mivel $\forall v \in V(R)$-re $d_D^-(v) \leq s-2$, ezért $w \in V \setminus V(R)$. Így H_s-ben van szivárvány K_s klikk.

Vegyük észre, hogy ha $(k-1)|n$ és $G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_{\binom{k}{2}}$ $\binom{k}{2}$ darab $T_{n,k-1}$-másolatból áll, akkor $\delta(G_i) = \left(1-\frac{1}{k-1}\right)n$ $\forall i \in \left[\binom{k}{2}\right]$-re, és G nem tartalmaz szivárvány K_k klikket. Ez alapján a tételben szereplő megkötés éles, ezzel a tételt beláttuk. $\blacksquare$

4. Szivárvány háromszögek

Ebben a fejezetben Frankl cikkét [Fra22] alapul véve azt vizsgáljuk, hogy ha egy $G = G_1 \cup ... \cup G_t$ t színnel élszínezett multigráfban nincs szivárvány háromszög, akkor mit mondhatunk el a gráf éleinek számáról. Csak a $t = 3$ esetet bizonyítjuk.

Definíció. *Egy **háromszög** egy háromcsúcsú teljes gráf, jele $\triangle$.*

Definíció. *$\mu = \{e_1, e_2, ..., e_\ell\}$ páronként diszjunkt élek halmaza egy ℓ méretű **párosítás**.*

Jelölés. *Egy gráfban a lehető legnagyobb párosítás mérete $\nu(G)$.*

Definíció. *Legyen H gráf adott. Egy G gráfot hívjunk H**-mentesnek**, ha nem tartalmaz H-val izomorf részgráfot.*

Jelölés. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $|V| = n$, $G = (V, E)$, és H gráf adott. Jelölje $ex(n, H)$ a maximális élszámot, ami mellett G még H-mentes.*

Mantel tétele [Man07] kimondja, hogy $ex(n, \triangle) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ezt a tételt az alábbi, erősebb formában bizonyítjuk.

22. Állítás. *Legyen $n, \ell \in \mathbb{N}$, $n \geq 2\ell$ és $G = (V, E)$ egy $\triangle$-mentes gráf, ahol $|V| = n$ és $\nu(G) = \ell$. Ekkor létezik $V = X \cup Y \cup Z$ felbontás, ahol $X = \{x_1, ..., x_\ell\}$ és $Y = \{y_1, ..., y_\ell\}$, és teljesül, hogy*

$$x_i y_i \in E, \;\; 1 \leq i \leq \ell \tag{7}$$

és

$$\forall z \in Z - re \;\; N_G(z) \subseteq X. \tag{8}$$

Bizonyítás. Legyen $v_i w_i$, $1 \leq i \leq l$ egy ℓ méretű párosítás G-ben és legyenek $W = \{v_1, w_1, v_2, w_2, ..., v_\ell, w_\ell\}$ valamint $Z = V \setminus W$ halmazok. Mivel a párosítás maximális, ezért $E \cap E(Z) = \emptyset$ (Z-n belül nem mehetnek élek).

Ha $z \in Z$ és $x_i \in v_i w_i$-re $\exists$ a $zx_i \in E$ él, akkor tegyük x_i-t X-be, és $v_i w_i$ másik csúcsa legyen y_i, ezt pedig tegyük Y-ba. Látható, hogy $zy_i \notin E$, mivel akkor $\{z, x_i, y_i\}$ egy háromszöget alkotna. Továbbá $\forall z' \in Z$, $z' \neq z$-re $z'y_i \notin E$, mivel ez esetben $x_i y_i$ helyett zx_i és $z'y_i$ élek választásával növelhetnénk a párosítás méretét.

Ha v_i és w_i csúcsok közül egyik se szomszédos semelyik $z \in Z$-vel sem, akkor tetszőlegesen oszthatjuk be a két csúcsot X-be és Y-ba.

Ezzel létrehoztuk az $X \cup Y \cup Z$ felbontást (7) és (8) tulajdonságokkal. $\square$

23. Állítás. *Az előző állítás feltételei mellett teljesül, hogy*

$$|E| \leq \ell(n - \ell). \tag{9}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $X \cup Y$-beli csúcs (nevezzük ezt most w-nek) foka $\leq \ell$, ugyanis ha w, x_i és y_i három különböző eleme $X \cup Y$-nak, akkor a háromszögmentesség miatt w legfeljebb az egyik csúccsal szomszédos. Így w szomszédai a párosításbeli párja, és a többi $\ell - 1$ párból legfeljebb az egyik tag. Így

$$|E(G[X \cup Y])| \leq \frac{2\ell \cdot \ell}{2} = \ell^2.$$

(8) miatt Z-ből legfeljebb csúcsonként ℓ él megy ki, ami $(n - 2\ell)\ell$ élet jelent. Tehát

$$|E| \leq \ell^2 + (n - 2\ell)\ell = (n - \ell)\ell,$$

tehát (9) következik (7) és (8) tulajdonságokból. $\square$

10. Tétel. *Legyenek G_1, G_2, G_3 nem feltétlenül diszjunkt gráfok ugyanazon a V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$. Tegyük fel, hogy $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ nem tartalmaz szivárvány háromszöget. Ekkor $|E(G_1)| + |E(G_2)| + |E(G_3)| \leq n(n-1)$ teljesül.*

Bizonyítás. Látható, hogy nem adható jobb becslés, mint $n(n-1)$, mivel ha $G_1 = G_2$ teljes gráfok és G_3 üres, akkor nincs szivárvány háromszög G-ben, és pontosan $n(n-1)$ éle van a gráfnak.

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ gráf. Egy $S \subseteq V$ részhalmaz neve lefogó csúcshalmaz, ha $\forall e \in E$ élre $S \cap e \neq \emptyset$.*

Látható, hogy $|S| \geq \nu(G)$. Kőnig tétele alapján páros gráfokra egyenlőség áll fenn. Ennek a tételnek a következménye az alábbi állítás.

24. Állítás. *Legyen B páros gráf X és Y pontosztályokkal, ahol $|X| = |Y| = q$ és $\nu(B) \leq q - 1$. Ekkor $|E(B)| \leq (q - 1)q$ (jobb oldal: egy legkisebb lefogó csúcshalmaz mérete szorozva az egy csúcsból kimenő maximális élszámmal). Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha B egy q-1 és q méretű pontosztályokkal rendelkező teljes páros gráfból, valamint egy izolált csúcsból áll.*

25. Állítás. *Tegyük fel, hogy $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ szivárvány-háromszög-mentes, és legyen $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ egy háromszög, vagyis $T = \binom{Z}{2}$ valamilyen 3-elemű Z csúcshalmazra. Ekkor*

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} |E(G_i) \cap E(T)| \leq 6,$$

vagyis a multiháromszög 9 lehetséges éléből legfeljebb 6 lehet lefedve.

Bizonyítás. Készítsünk egy F páros gráfot $X = \{1, 2, 3\}$ és $Y = \{t_1, t_2, t_3\}$ csúcsokkal, ahol $(i, t_j) \in E(F) \iff t_j \in E(G_i)$. Látható, hogy F-ben egy teljes párosítás G-ben egy szivárvány-háromszöggel ekvivalens. Így a 25. Állítás következik a 24. Állításból. $\square$

V-n $\binom{n}{3}$ darab 3-elemű csúcshalmaz (Z) van, ezekre összeadva a 25. Állításban szereplő kifejezést, az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{Z \in \binom{V}{3}} |E(G_i) \cap E(T)| \leq 6 \binom{n}{3} = n(n-1)(n-2).$$

Mivel egy adott G_i éleit $n - 2$-ször számoljuk meg (rögzített élhez ennyi háromszög tartozik, mivel ennyiféleképpen választhatjuk ki a 3. csúcsot), ezért a bal oldal $(n-2)(|E(G_1)| + |E(G_2)| + |E(G_3)|)$-mal egyenlő. Egyszerűsítés után megkapjuk a tételben szereplő egyenlőtlenséget.

Egyenlőség esetén mind az $\binom{n}{3}$ darab Z-re egyenlőségnek kell fennállnia. Ez kétféleképpen állhat elő anélkül, hogy szivárvány-háromszög-mentességet megsértenénk: két azonos élet színezünk ki mindhárom színnel, vagy mindhárom élet két azonos színnel színezünk ki. Az 1. színezés $n = 5$-re, és így $n \geq 5$-re már nem megvalósítható. Így a 2. színezéssel kell a gráfot kiszínezni. Könnyen látható, hogy ugyanazzal a két színnel fogjuk a G gráf összes élét megszínezni. Tehát $G_1 = G_2 = K_n$ teljes gráfok és $E(G_3) = \emptyset$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ∎

Most mondjuk ki a tételt, ha G legalább 4 féle színű élből áll.

11. Tétel. *Legyenek $G_1, ..., G_t$ nem feltétlenül diszjunkt gráfok ugyanazon a V csúcshalmazon, ahol $|V| = n$. Tegyük fel, hogy $G = G_1 \cup ... \cup G_t$ nem tartalmaz szivárvány háromszöget. Ekkor $|E(G_1)| + ... + |E(G_t)| \leq t \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ teljesül.*

Megfigyelhető, hogy ha $G_1 = ... = G_t$, akkor a Mantel-tétel következik a fenti tételből.

Összegzés

A szakdolgozatomban színes gráfok szivárvány részgráfjait vizsgáltam. Több, klasszikus gráfelméleti tétel általánosítását is megnéztem.

Az 1. fejezetben a Dirac tétel színes változatát néztem meg, ami egy szép általánosítása az eredeti tételnek. Ugyanazt a feltételt mondjuk ki a G_i részgráfokra, és az eredmény is az, mint az eredeti tételben; Hamilton-kör, csak itt színes. A 2. fejezetben Ore-féle feltételek mellett kerestem először szivárvány feszítőerdőt, majd Hamilton-utat, ez utóbbi szintén hasonlít az eredeti Ore-tételre. A 3. fejezetben minimális fokszámfeltétel mellett szivárvány klikkeket kerestem. Végül a 4. fejezetben szivárvány háromszögek létezését vizsgáltam 3 színnel színezett gráfban.

A dolgozat 3 legfontosabb forrása Joos és Kim 2020-as, Frankl 2022-es, valamint Li, Li és Li 2023-as cikke volt. Nagyon izgalmasnak találtam ezt a témát, főleg, mivel az elmúlt pár évben sok cikket írtak ezen a területen. Érdekes volt látni, milyen sok irányból meg lehet közelíteni azt, hogy "színes gráf". Rendkívül élveztem a kutatómunkát, és remélem az Olvasónak is tetszett ez a betekintés a szivárvány gráfok világába.

Hivatkozások

[Dir52] Gabriel Andrew Dirac. Some theorems on abstract graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):69–81, 1952.

[Fra22] Peter Frankl. Graphs without rainbow triangles. *arXiv preprint arXiv:2203.07768*, 2022.

[JK20] Felix Joos and Jaehoon Kim. On a rainbow version of dirac's theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 52(3):498–504, 2020.

[LLL23] Luyi Li, Ping Li, and Xueliang Li. Rainbow structures in a collection of graphs with degree conditions. *Journal of Graph Theory*, 104(2):341–359, 2023.

[Man07] W Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.

[Ore60] Oystein Ore. Note on hamilton circuits. *The American Mathematical Monthly*, 67(1):55–55, 1960.

[Tur41] Paul Turán. On an external problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.