

BOLYGÓMOZGÁSOK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Szakdolgozat

Kapornaky Melitta

Matematika alapszak - matematikai elemző szakirány

Témavezető:

Dr. Csomós Petra

egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2024

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	2
Bevezetés	3
1. Matematikai előismeretek	4
1.1. Közönséges differenciálegyenletek	4
1.2. Numerikus módszerek	7
1.2.1. Az explicit Euler-módszer	8
1.2.2. Az implicit Euler-módszer	8
1.2.3. A szimplektikus Euler-módszer	9
1.2.4. A Runge–Kutta módszer	9
2. Harmonikus rezgőmozgás	11
2.1. Periodikus megoldások	14
3. A kéttest-probléma	16
3.1. Az első integrálok	17
3.1.1. A tömegközéppont-integrál	17
3.1.2. Az energia-integrál	18
3.2. Az egycentrum-probléma	19
3.2.1. Az energia-integrál	23
3.2.2. Periodikus megoldások	24
4. A háromtest-probléma	27
4.1. Az első integrálok	28
4.1.1. A tömegközéppont-integrál	28
4.1.2. Az energia-integrál	29
4.2. A korlátozott háromtest-probléma	29
4.2.1. A Jacobi-integrál	33

4.2.2. Az Arenstorf-pályák	34
4.2.3. Periodikus megoldások	36
Összefoglalás	39
Irodalomjegyzék	39
Függelék	41

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Csomós Petrának a dolgozatomhoz nyújtott segítségét és támogatását, amit minden körülmény között megkaptam.

Köszönöm szobatársaimnak az együtt szerzett tapasztalatokat, és hogy motiváltak saját munkájukkal.

Bevezetés

A szakdolgozat témája különböző numerikus módszerek bemutatása a bolygómozgások példáján keresztül. Vizsgálni fogjuk a módszerek hibáját, illetve azt, hogy mennyire őrzik meg az energiát. Utóbbihoz az első integrálokat fogjuk használni. Emellett tanulmányozni fogjuk a módszerek viselkedését egy periódus elteltével.

Az első fejezetben bevezetjük a szükséges matematikai fogalmakat, amik a differenciálegyenletek és a numerikus módszerek megértéséhez kellenek. A második fejezetben megmutatjuk, hogy a korábban bevezetett módszereket hogyan lehet a harmonikus rezgőmozgásra alkalmazni. A dolgozat harmadik és negyedik fejezete arról szól, hogyan lehet a numerikus módszerekkel meghatározni speciális bolygómozgásokat leíró differenciálegyenletek közelítő megoldását. Ehhez levezetjük az első integrálokat, illetve ezek és a periodikus megoldások segítségével vizsgáljuk a numerikus módszerek hibáját.

A Függelékben a szakdolgozat ábráihoz írt MATLAB kódok találhatóak meg.

1. fejezet

Matematikai előismeretek

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a téma megértéséhez szükséges matematikai előismereteket, a későbbiekben használt definíciókat, állításokat és tételeket.

A fejezet Tóth János és Simon L. Péter: Differenciálegyenletek [1] tankönyv, Fekete Imre: Alkalmazott Analízis 1 [2] jegyzet és Pfeil Tamás: Differenciálegyenletek 1 [3] jegyzet [3], illetve Faragó István – Horváth Róbert: Numerikus módszerek [4] tankönyv alapján készült.

1.1. Közönséges differenciálegyenletek

A közönséges differenciálegyenletek elengedhetetlenek a folytonos matematikai modellek felírásához, így a bolygómozgások leírásához is.

1.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $G \subset I \times \mathbb{R}^d$ egy tartomány (azaz összefüggő, nyílt halmaz), $(t_0, u_0) \in G$ egy adott pont, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy folytonos leképezés. Ekkor az

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \tag{1.1}$$

feladatot kezdetiérték-feladatnak, vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

1.2. Definíció. Az olyan $u: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum) folytonosan differenciálható függvényt, amire

- $\{(t, u(t)): t \in I\} \subset G$,
- $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$, minden $t \in I$,
- $t_0 \in I$ és $u(t_0) = u_0$

teljesül, az (1.1) feladat megoldásának nevezzük.

1.3. Definíció. Legyen $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ egy tartomány. Az $f: G \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvényt a második változójában Lipschitz-tulajdonságúnak nevezzük, ha létezik $L > 0$ úgy, hogy minden $(t, p_1), (t, p_2) \in G$ esetén

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| < L|p_1 - p_2|.$$

1.4. Tétel (Picard–Lindelöf). Legyen $f: G \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény, ahol

$$G = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq a \text{ és } |u - u_0| \leq b\}$$

henger, $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ és $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$. Legyen $M = \max_{(t,u) \in G} |f(t, u)|$, továbbá tegyük fel, hogy az f függvény második változójában Lipschitz-tulajdonságú. Ekkor az (1.1) alakú Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik megoldása a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ intervallumon, ahol $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

1.5. Definíció. Legyen I adott intervallum, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény és $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor az $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényre vonatkozó

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = g(t)$$

differenciálegyenletet állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. Az egyenlet homogén, ha $g = 0$ konstansfüggvény, máskülönben inhomogén.

1.6. Definíció. Az $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényre vonatkozó

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0$$

állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének mondjuk a

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

másodfokú algebrai egyenletet.

1.7. Definíció. Legyen n pozitív egész szám és $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény esetén az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = g(t)$$

egyenletet n -edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

1.8. Definíció. Ha $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény, akkor az

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (1.2)$$

egyenletet n -edrendű explicit közönséges differenciálegyenletnek nevezzük.

1.9. Definíció. Az $u_1, \dots, u_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényekre vonatkozó elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük az

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= f_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n(t) &= f_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

egyenletrendszert, ahol $f_1, \dots, f_n: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények.

Legyen $u = (u_1, \dots, u_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ az ismeretlen függvényekből, mint koordinátafüggvényekből képzett vektorértékű függvény. Ekkor a deriváltfüggvénye $\dot{u} = (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n)$. Legyen továbbá $f = (f_1, \dots, f_n)$, akkor $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű függvény, mellyel az (1.3) differenciálegyenlet-rendszert átírhatjuk az (1.1) alakú, $\dot{u}(t) = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0$ vektoregyenletté.

1.10. Állítás. Minden (1.2) alakú magasabb rendű explicit közönséges differenciálegyenlet visszavezethető (1.1) alakú elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet-rendszerre.

Bizonyítás. Legyen az n -edrendű explicit közönséges differenciálegyenlet alakja (1.2) alapján

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.4)$$

akkor legyenek új ismeretlen függvények

$$u_1(t) = x(t), \quad u_2(t) = \dot{x}(t), \dots, \quad u_n(t) = x^{(n-1)}(t).$$

Ekkor

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) &= u_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_{n-1}(t) &= u_n(t) \\ \dot{u}_n(t) &= F(t, u_1(t), \dots, u_n(t)). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Egy függvény pontosan akkor megoldása az (1.4) differenciálegyenletnek, ha az (1.5) differenciálegyenlet-rendszer megoldásának megfelelő (jelen felírás szerint első) koordinátafüggvénye.

Ekkor (1.5) egy elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenlet-rendszer az $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ függvényre, ahol az (1.1) alakú $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$, $u(t_0) = u_0$ vektor-egyenletben

$$f(t, u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ F(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{pmatrix}.$$

□

1.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható (nem-konstans) függvény első integrálja az $\dot{x} = f(x)$ közönséges differenciálegyenletnek, ha V a megoldások mentén állandó, azaz $V(x(t))$ állandó minden $t \geq 0$ esetén, tehát

$$0 = \dot{V}(x(t)) = \langle \dot{V}(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \dot{V}(x(t)), f(x(t)) \rangle, \quad t \geq 0.$$

1.2. Numerikus módszerek

A differenciálegyenletek megoldását csak ritkán lehet zárt alakban előállítani, azaz olyan képletek segítségével megadni, amelyek ismert és könnyen kiértékelhető függvényeket tartalmaznak. Emiatt alkalmazunk numerikus módszereket, melyek segítségével a megoldást valamilyen közelítő alakban keressük.

A továbbiakban tekintsük az $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó (1.1) feladatot:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Válasszunk $h > 0$ lépésközt, legyen $t_n = t_0 + n \cdot h$, $n \in \mathbb{N}_0$, illetve jelölje a pontos megoldás $y(t_n)$ értékének közelítését y_n .

1.12. Definíció. Az n -edik lépésig elkövetett hibát globális hibának nevezzük:

$$\varepsilon(t_n) = |y(t_n) - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

1.2.1. Az explicit Euler-módszer

Az első numerikus módszer, amit alkalmazni fogunk, az explicit Euler-módszer. Először y deriváltját közelítjük a jobb oldali differenciahányadossal:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (h > 0 \text{ rögzített}). \\ &\parallel \\ f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Azaz minden $t \geq 0$ esetén teljesül a következő becslés:

$$f(t, y(t)) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

A közelítő egyenletet átrendezve kapjuk:

$$y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f(t, y(t)).$$

Azaz az explicit Euler-módszer $t = t_n$ esetén:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.7)$$

1.2.2. Az implicit Euler-módszer

A következő numerikus módszer, amivel foglalkozunk, az implicit Euler-módszer. Itt y deriváltját most nem a jobb oldali differenciahányadossal közelítjük, mint az explicit Euler-módszer esetében, hanem a bal oldali differenciahányadossal:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \quad (h > 0 \text{ rögzített}). \\ &\parallel \\ f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Azaz minden $t \geq 0$ esetén teljesül a következő becslés:

$$f(t, y(t)) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h},$$

ahonnan:

$$y(t) \approx y(t-h) + h \cdot f(t, y(t)).$$

Az implicit Euler-módszer $t = t_{n+1}$ esetén:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.8)$$

1.2.3. A szimplektikus Euler-módszer

Legyen az (1.6) feladatban $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ speciálisan

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \text{ és } f(t, y(t)) = \begin{pmatrix} p(t, v(t)) \\ q(t, x(t)) \end{pmatrix}.$$

Ekkor az explicit Euler-módszert alkalmazva felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot p(t_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot q(t_n, x_n). \end{cases}$$

A második egyenletben x_n helyére a már kiszámolt x_{n+1} -et írva megkapjuk a szimplektikus Euler-módszert erre a feladatra:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot p(t_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot q(t_{n+1}, x_{n+1}). \end{cases} \quad (1.9)$$

1.2.4. A Runge–Kutta módszer

1.13. Definíció. Legyen a következőkben $s \in \mathbb{Z}$ a lépcsők száma, legyenek $b_i \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a súlyok és $c_i \in [0, 1]$ a csomópontok ($i, j = 1, \dots, s$). Ekkor az

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_{n,i}$$

$$k_{n,i} = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot k_{n,j}\right)$$

képletekkel definiált módszert s -lépcsős Runge–Kutta módszernek nevezzük.

A negyedrendű Runge–Kutta módszert az

$$s = 4, \quad b = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } c = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

választással kapjuk. Ekkor a módszer felírható az alábbi alakban:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k_{n,1} + \frac{1}{3} \cdot k_{n,2} + \frac{1}{3} \cdot k_{n,3} + \frac{1}{6} \cdot k_{n,4} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.10)$$

ahol

$$\begin{aligned} k_{n,1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n,2} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,1}\right) \\ k_{n,3} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,2}\right) \\ k_{n,4} &= f(t_n + h, y_n + h \cdot k_{n,3}). \end{aligned}$$

Látni fogjuk, hogy a fent bevezetett módszerek által előállított közelítő megoldások különböznek pontosság és kvalitatív tulajdonságok (pl. energia-megőrzés) tekintetében. A dolgozat további részében ezen módszereket alkalmazzuk.

2. fejezet

Harmonikus rezgőmozgás

Ebben a fejezetben a harmonikus rezgőmozgás példáján keresztül bemutatjuk a már bevezetett numerikus módszereket. Mivel a harmonikus rezgőmozgásnak ismerjük a pontos megoldását, ki tudjuk számolni a módszerek hibáját.

A harmonikus rezgőmozgást az F harmonikus erő hozza létre, ami egyenesen arányos és ellentétes irányú a pont egyensúlyi helyzetétől mért x kitérésével, azaz $F = -Dx$, ahol D a rugóállandó. A dinamika alapegyenlete szerint $F = ma$, jelen esetben $m\ddot{x} = -Dx$, ahol $m \neq 0$ a test tömege.

Az egyenlet átrendezésével és az $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} > 0$ jelölés bevezetésével kapjuk az

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2.1)$$

másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletet. Ezt az 1.10. Állítás segítségével átírhatjuk elsőrendű rendszerré.

Ehhez legyen az (1.3) feladatban szereplő $u_1 = x$ és $u_2 = \dot{x} = v$, ekkor

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1. Állítás. A $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x, v) = \omega^2 x^2 + v^2$ függvény első integrálja a (2.2) feladatnak.

Bizonyítás. Először beszorozzuk (2.2) első sorát $\omega^2 x(t)$ -vel, a második sorát pedig $v(t)$ -vel:

$$\begin{cases} \omega^2 x(t)\dot{x}(t) = \omega^2 x(t)v(t) \\ v(t)\dot{v}(t) = -\omega^2 x(t)v(t). \end{cases}$$

Az így kapott egyenleteket összeadva

$$\omega^2 x(t)\dot{x}(t) + v(t)\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(\omega^2 \frac{x^2(t)}{2} + \frac{v^2(t)}{2} \right) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

összefüggést kapjuk, azaz a test energiája

$$E(t) := \omega^2 x^2(t) + v^2(t) = V(x(t), v(t)) \quad (2.3)$$

állandó minden $t \geq 0$ esetén, tehát az 1.11. Definíció szerint $V(x, v) = \omega^2 x^2 + v^2$ első integrál. \square

A (2.1) differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ komplex számok. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Legyen a $t_0 = 0$ időpontban a test helyzete $x(0) = x_0$ és a sebessége $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ előre adottak. Ekkor a (2.4) megoldásba $t = 0$ értéket helyettesítve kapjuk, hogy

$$x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1,$$

azaz $x_0 = c_1$. A (2.4) megoldásba visszahelyettesítve:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Ezt deriválva kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}(t) = v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t).$$

Szintén a $t = 0$ helyen

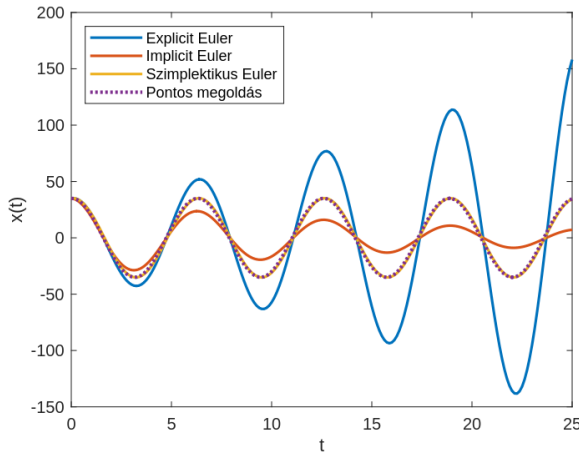
$$\dot{x}(0) = v(0) = -\omega x_0 \sin(0) + \omega c_2 \cos(0) = \omega c_2,$$

így $\frac{v_0}{\omega} = c_2$ adódik. A kezdetiérték-feladat megoldása tehát

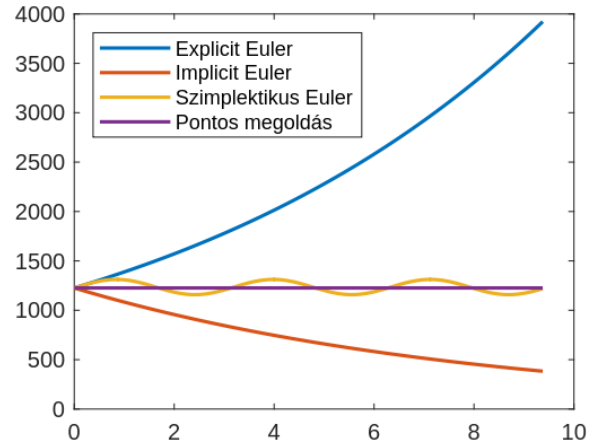
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \geq 0.$$

Az 2.1.a. és 2.1.b. ábrákon (2.4) feladat megoldása és a megoldások (2.3) energiája

látható az időben különböző numerikus módszerekkel. A 2.2.a. és 2.2.b. ábrákon pedig a megoldás a fázistérben látható. Minden esetben $\omega = 1$, a számolás t_N időértékig tart, azaz $n = 1, \dots, N$.

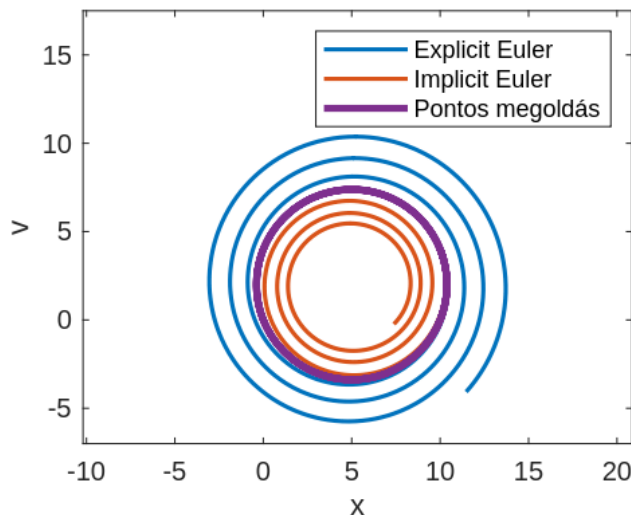


2.1.a A (2.4) feladat $x(t)$ megoldása $h = 1/8$ és $N = 200$ esetén.

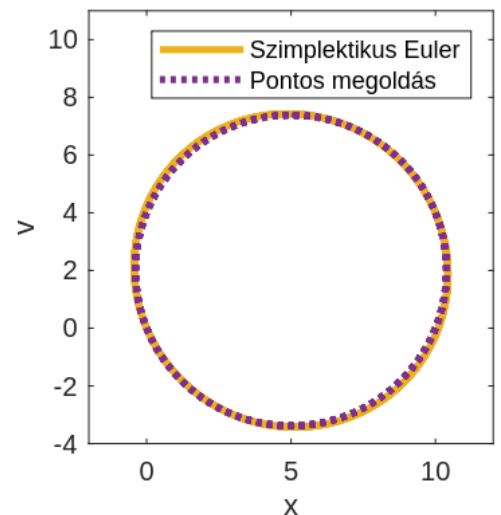


2.1.b A (2.4) feladat $E(t)$ energiája $h = 1/8$ és $N = 75$ esetén.

2.1. ábra. A kezdeti feltételek: $x_0 = 35$ és $v_0 = 1$.



2.2.a A (2.4) feladat megoldása a fázistérben $h = 1/20$ és $N = 400$ esetén.



2.2.b A (2.4) feladat megoldása a fázistérben $h = 1/20$ és $N = 400$ esetén.

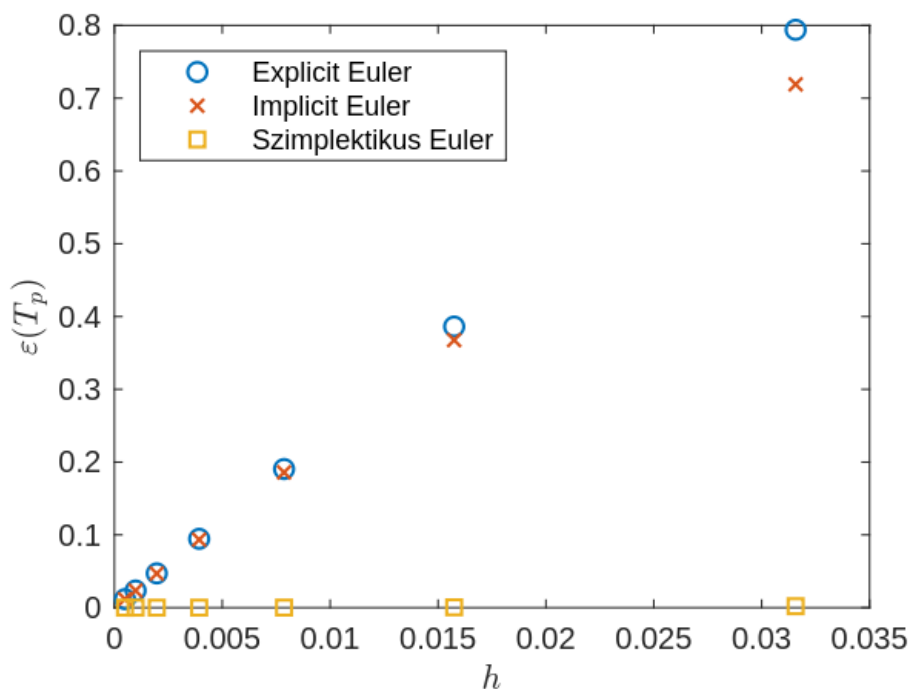
2.2. ábra. A kezdeti feltételek: $x_0 = 5$ és $v_0 = 2$.

2.1. Periodikus megoldások

Jelölje T_p a periódusidőt, azaz az egy teljes rezgés megtételéhez szükséges időt. Tudjuk, hogy egy periódus megtétele után a vizsgált test ugyanoda ér vissza, vagyis

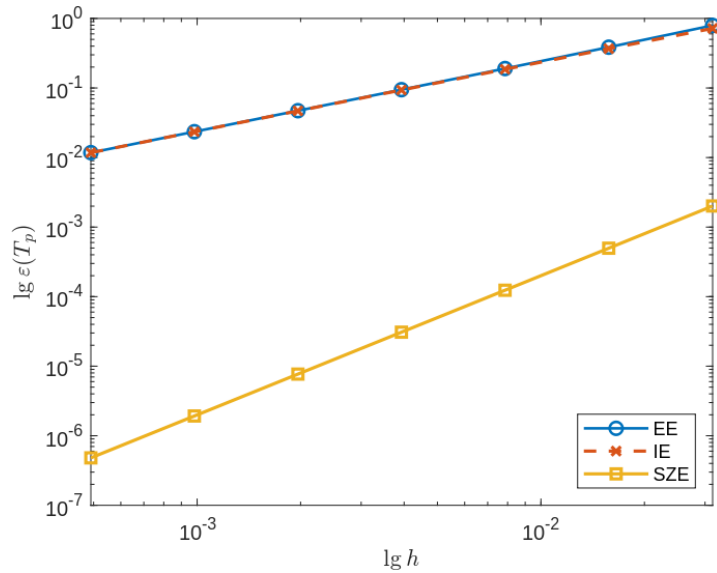
$$\begin{aligned}x(0) &= x(T_p), \\v(0) &= v(T_p).\end{aligned}$$

A 2.3. ábrán a különböző numerikus módszerek 1.12. Definíció szerinti globális hibája látható $T_p = Nh$ időpillanatban, azaz $\varepsilon(T_p) = \sqrt{|x_0 - x_N|^2 + |v_0 - v_N|^2}$. Leolvasható, hogy h lépéshossz növelésével a hiba is növekszik.



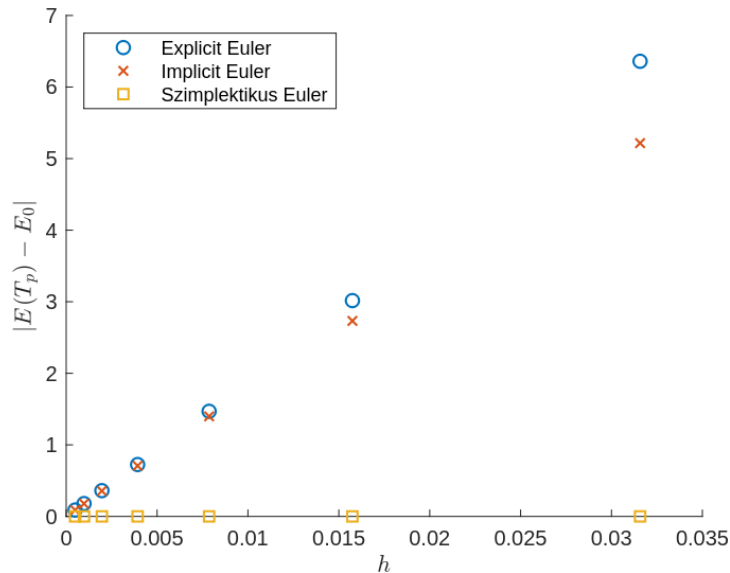
2.3. ábra. A globális hibák 7 különböző lépéshossz esetében.

Ha vesszük a lépéshosszok és a globális hibák logaritmusát, akkor az így kapott pontokra illesztett egyenes meredeksége megfelel a numerikus módszer rendjének. Ez látszik a 2.4. ábrán.



2.4. ábra. A numerikus módszerek globális hibái logaritmusai 7 különböző lépéshossz esetében. A meredekségek rendre 1,0118, 0,9883 és 2,0026.

Tudjuk, hogy a 2.3 képlettel megadott $E(t) = \omega^2 x(t)^2 + v(t)^2$ energia állandó minden $t \geq 0$ értékre. A 2.5. ábrán a különböző numerikus módszerek által számított energiaértékek eltérése látható az $E(0) = \omega^2 x(0)^2 + v(0)^2 =: E_0$ kezdeti értéktől a T_p időpontban, azaz $|E(T_p) - E_0|$. Ez ugyanazt támasztja alá, mint a 2.1.b. ábra, nevezetesen hogy az (1.9) szimplektikus Euler-módszer jobban megtartja az energiát, mint az (1.7) explicit és az (1.8) implicit Euler-módszerek. Leolvasható, hogy h lépéshossz növelésével az energiák eltérése is növekszik.



2.5. ábra. Az energia eltérése 7 különböző lépéshossz esetében.

3. fejezet

A kéttest-probléma

A kéttest-probléma az égi mechanika egyik alapfeladata. A jelen fejezet Érdi Bálint: Égi mechanika [5] jegyzet alapján készült.

A feladat: határozzuk meg két pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hat!

A Newton-féle gravitációs törvény szerint két pontszerű, $m_1 > 0$ és $m_2 > 0$ tömegű, egymástól $r > 0$ távolságra lévő test

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

nagyságú erővel vonzza egymást, ahol G a gravitációs állandó, aminek értéke SI egységekben:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}.$$

Az erő iránya a testeket összekötő egyenes mentén a vonzott testtől a vonzó felé mutat. A bolygók mozgásának vizsgálatakor célszerű az égi mechanika mértékegységeit használni. Ekkor a tömeg, az idő és a hosszúság egysége rendre a Nap tömege (M), a középnapi (T) és a csillagászati egység (A). Jelölje k^2 a gravitációs állandó ezen egységekkel számított értékét

$$G[\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}] = k^2[M^{-1} A^3 T^{-2}].$$

Gauss számításai szerint

$$k = 0,0172020989[M^{-1/2} A^{-3/2} T^{-1}],$$

ahol k a Gauss-féle gravitációs állandó.

Jelölje a kéttest-problémában a tömegpontok helyét P_1 és P_2 , tömegüket m_1 és m_2 . Legyen P_i helyvektora egy $Oxyz$ derékszögű koordinátarendszerben $\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$.

A P_1 tömegpontra a P_2 által kifejtett gravitációs vonzóerő a Newton-féle gravitációs törvény alapján (G helyére k^2 -et írva)

$$\underline{F}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r},$$

ahol

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 - \underline{r}_1, \\ r &= |\underline{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

Az erő irányát a P_1 -ből a P_2 felé mutató \underline{r}/r vektor adja. Hasonlóan felírható a P_2 tömegpontra P_1 által kifejtett gravitációs erő, annyi különbséggel, hogy $-\underline{r}$ irányú erő hat.

A kéttest-probléma Newton-féle mozgásegyenletei így:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A (3.1) komponensekben kiírva hat másodrendű differenciálegyenletet jelent a meghatározandó $\underline{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, $\underline{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ függvények számára, azaz a kéttest-probléma mozgásegyenleteinek differenciálegyenlet-rendszerének fázistere 12 dimenziós.

3.1. Az első integrálok

A (3.1) egyenletek vizsgálatához az első integráljaikat fogjuk használni, amik az 1.11. Definíció szerint a mozgás során állandóak.

3.1.1. A tömegközéppont-integrál

A (3.1) rendszer egyenleteit összeadva kapjuk, hogy

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = 0.$$

Majd ezt idő szerint kétszer integrálva

$$m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 = \underline{a}, \quad (3.2)$$

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = \underline{a}t + \underline{b} \quad (3.3)$$

egyenleteket kapjuk, ahol \underline{a} és \underline{b} konstans vektorok (\underline{a} az összipulzus).

A rendszer P_0 tömegközéppontjának \underline{r}_0 helyvektora

$$\underline{r}_0 = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Ekkor (3.2), (3.3) és (3.4) szerint

$$(m_1 + m_2) \dot{\underline{r}}_0 = \underline{a}, \quad (3.5)$$

integrálás után pedig

$$(m_1 + m_2) \underline{r}_0 = \underline{a}t + \underline{b}. \quad (3.6)$$

Tehát (3.5) és (3.6) egyenletekből látható, hogy a P_0 tömegközéppont vagy nyugalomban van ($\underline{a} = \underline{0}$), vagy egyenes vonalú egyenes mozgást végez ($\underline{a} \neq \underline{0}$). A (3.2) és (3.3), illetve a velük ekvivalens (3.5) és (3.6) egyenletek a tömegközéppont-integrálok. A (3.1) első integrálja :

$$m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 = \underline{a}. \quad (3.7)$$

A (3.7) komponensekben kiírva:

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2}, \\ V_2(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= m_1 v_{y_1} + m_2 v_{y_2}, \\ V_3(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= m_1 v_{z_1} + m_2 v_{z_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Az 1.11. Definíció szerint a (3.8) függvények (3.1) első integráljai.

3.1.2. Az energia-integrál

A (3.1) első sorát $\dot{\underline{r}}_1$ -tal, második sorát $\dot{\underline{r}}_2$ -tal skalárisan megszorozva, majd összeadva kapjuk, hogy

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 \dot{\underline{r}}_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \underline{r} (\dot{\underline{r}}_1 - \dot{\underline{r}}_2) = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \underline{r} \dot{\underline{r}}.$$

Mindkét oldalt idő szerint integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = k^2\frac{m_1m_2}{r} + H, \quad (3.9)$$

ahol H konstans. A (3.9) az energia-integrál, komponensekben felírva

$$\begin{aligned} V_4(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= \\ &= \frac{1}{2}m_1v_{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x_2}^2 - k^2\frac{m_1m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ V_5(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= \\ &= \frac{1}{2}m_1v_{y_1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{y_2}^2 - k^2\frac{m_1m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ V_6(x_1, x_2, v_{x_1}, v_{x_2}, y_1, y_2, v_{y_1}, v_{y_2}, z_1, z_2, v_{z_1}, v_{z_2}) &= \\ &= \frac{1}{2}m_1v_{z_1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{z_2}^2 - k^2\frac{m_1m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned}$$

a (3.1) újabb első integráljai az 1.11. Definíció alapján.

A (3.1) egyenletrendszerre tehát összesen 6 első integrált írtunk fel.

3.2. Az egycentrum-probléma

A bolygók és holdak mozgásának vizsgálatában fontos szerepet játszik az az eset, amikor az egyik test, pl. P_1 sokkal nagyobb tömegű a másikonál. A kisebb test mozgását így elsősorban P_1 gravitációs hatása határozza meg. Célszerű ezért a P_2 tömegpont mozgását P_1 -hez viszonyítva vizsgálni.

Látni fogjuk, hogy a (3.7) tömegközéppont-integrálok felhasználásával a kéttest-probléma visszavezethető az egycentrum-problémára. A (3.5) és (3.6) szerint a P_0 tömegközéppont vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Mindkét esetben P_0 egy inerciarendszer kezdőpontjának tekinthető. Ebben a P_0 kezdőpontú inerciarendszerben vizsgálhatjuk P_1 és P_2 mozgását. Jelölje P_1 és P_2 helyvektorát P_0 -ra vonatkoztatva \underline{s}_1 , illetve \underline{s}_2 . Ekkor P_1 mozgásegyenlete:

$$m_1\ddot{\underline{s}}_1 = k^2\frac{m_1m_2}{r^3}\underline{r}, \quad (3.10)$$

P_2 mozgásegyenlete:

$$m_2\ddot{\underline{s}}_2 = k^2\frac{m_1m_2}{r^3}\underline{r}, \quad (3.11)$$

ahol $\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$.

Figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned}\underline{s}_1 &= \underline{r}_1 - \underline{r}_0 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{r}, \\ \underline{s}_2 &= \underline{r}_2 - \underline{r}_0 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\underline{r},\end{aligned}\tag{3.12}$$

a (3.10) és (3.11) egyenletek az

$$\ddot{\underline{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\underline{r}\tag{3.13}$$

egyenletre vezetnek, ahol

$$\mu = k^2(m_1 + m_2).$$

Ugyanezt az egyenletet kapjuk, ha P_2 -nek a P_1 -hez viszonyított mozgását akarjuk meghatározni, és P_2 mozgásegyenletéből kivonjuk P_1 mozgásegyenletét (a kivonás elvégzése előtt (3.10)-ben m_1 -gyel, (3.11)-ben m_2 -vel egyszerűsítünk). Tehát ugyanaz az egyenlet határozza meg P_1 -nek és P_2 -nek a tömegközépponthez viszonyított mozgását, mint P_2 -nek a P_1 -re vonatkoztatott mozgását. Így e három mozgás egymáshoz hasonló.

A (3.13) formailag megegyezik az egycentrum-probléma mozgásegyenletével.

Az egycentrum-probléma feladat tehát, hogy meghatározzuk egy m tömegű tömegpont mozgását egy rögzített helyzetű, m' tömegű pontszerű test körül a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hatására. A mozgó tömegpont $\underline{r} = (x(t), y(t), 0)$ helyvektorát a nyugvó testre vonatkoztatva a mozgásegyenlet

$$m\ddot{\underline{r}} = -k^2\frac{mm'}{r^3}\underline{r}.\tag{3.14}$$

A (3.13) megegyezik (3.14)-gyel, ha $m = 1$ és $m' = m_1 + m_2$. A P_2 tömegpont a P_1 körül tehát úgy mozog, mint ahogy egy egységnyi tömegű pontszerű test kering egy rögzített helyzetű, $m_1 + m_2$ tömegű vonzó centrum körül. Ennek megfelelően (3.13) megoldását azzal a feltevéssel vizsgáljuk, hogy P_2 tömege egységnyi, az $m_1 + m_2$ tömeg pedig P_1 -ben van koncentrálna.

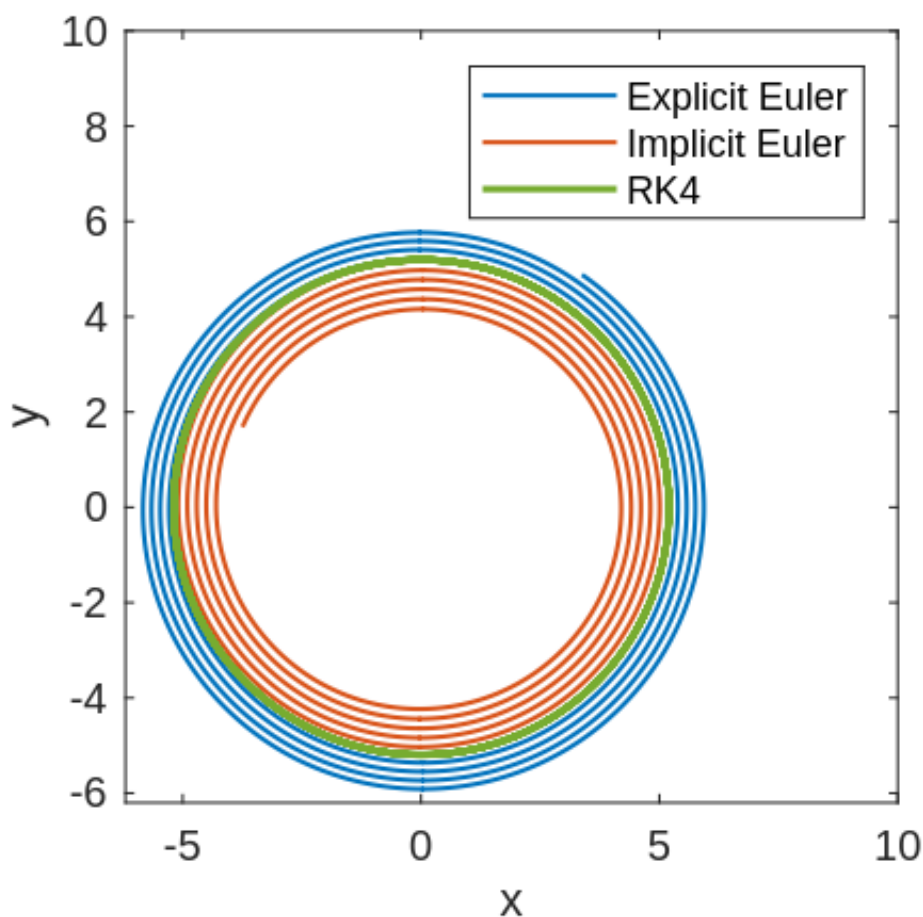
A továbbiakban elegendő tehát (3.13) megoldásával foglalkozni. A megoldást meghatározva a (3.1) egyenletrendszer megoldását (3.12)-ből és (3.7)-ből következő

$$\begin{aligned}\underline{r}_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2}(\underline{at} + \underline{b}) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{r}, \\ \underline{r}_2 &= \frac{1}{m_1 + m_2}(\underline{at} + \underline{b}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\underline{r}\end{aligned}\tag{3.15}$$

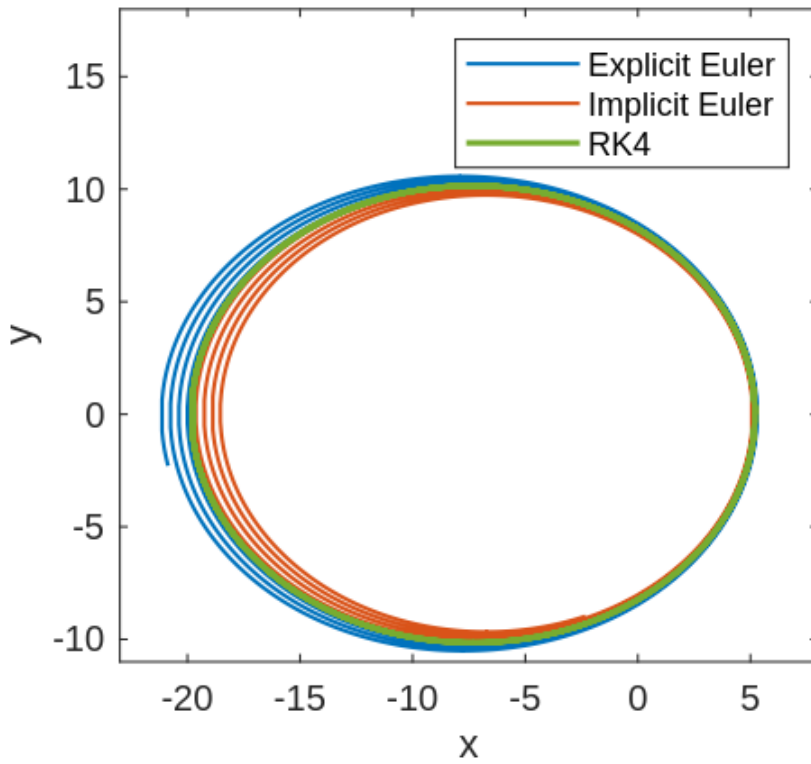
összefüggések adják.

A (3.13) komponensekben felírva három másodrendű differenciálegyenletből áll, így az egycentrum-probléma differenciálegyenlet-rendszerének fázistere 6 dimenziós.

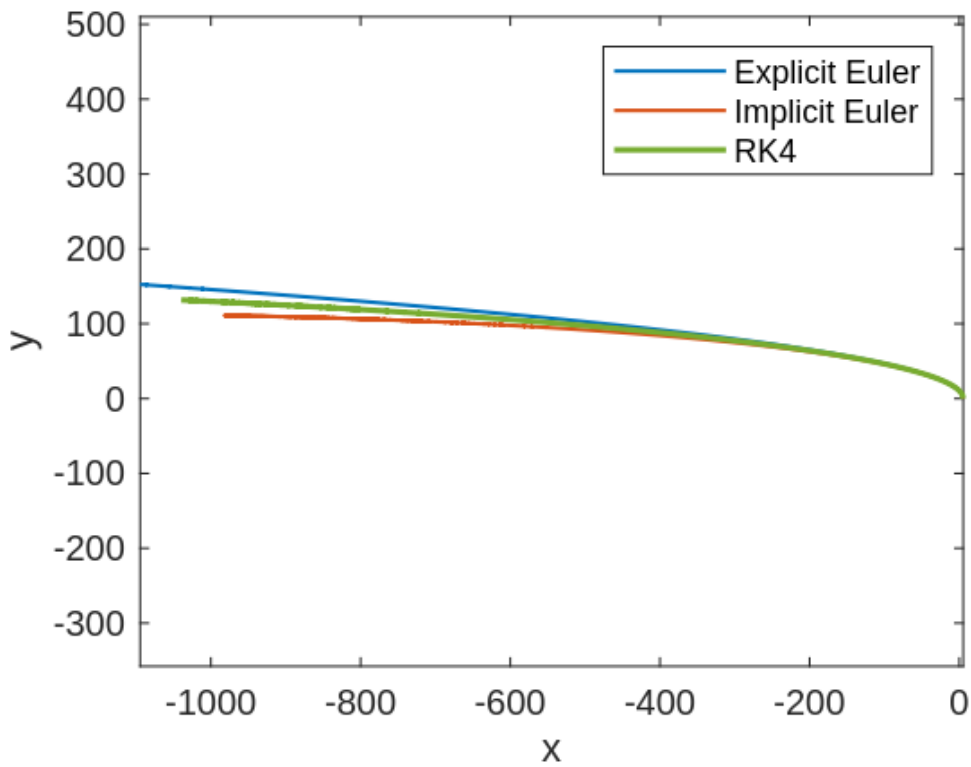
A 3.1., 3.2. és 3.3. ábrákon a (3.13) feladat megoldása látható az (1.7) explicit és az (1.8) implicit Euler-módszerrel, illetve az (1.10) negyedrendű Runge–Kutta módszerrel különböző kezdeti feltételek mellett. A v_{y_0} érték úgy van választva, hogy rendre kör, ellipszis, illetve parabola alakú pályát kapjunk. Kör alakú pálya esetében ezt Kepler-sebességnek, parabola alakú pálya esetében pedig szökési sebességnek hívjuk. Itt $m_1 = 1$ a Nap tömege, $m_2 = 0,001$ a Jupiter tömege, $m' = 1,001$ a Jupiter és a Nap tömegének összege, $|r| = 5,2$ csillagászati egység a Jupiter és a Nap távolsága, $k = 0,0172020989$ pedig a már bevezetett Gauss-féle gravitációs állandó.



3.1. ábra. A kezdeti feltételek: $x_0 = 5,2$, $v_{x_0} = 0$, $y_0 = 0$ és $v_{y_0} = k\sqrt{\frac{m_1}{|r|}}$.



3.2. ábra. A kezdeti feltételek: $x_0 = 5,2$, $v_{x_0} = 0$, $y_0 = 0$ és $v_{y_0} = 0,0095$.



3.3. ábra. A kezdeti feltételek: $x_0 = 5,2$, $v_{x_0} = 0$, $y_0 = 0$ és $v_{y_0} = k \sqrt{2 \frac{m_1}{|r|}}$.

3.2.1. Az energia-integrál

A (3.13) megoldásához írjuk fel az energia integrált, ami az 1.11. Definíció szerint állandó a megoldások mentén.

A (3.13)-et \dot{r} -tal skalárisan megszorozva, majd idő szerint integrálva kapjuk, hogy

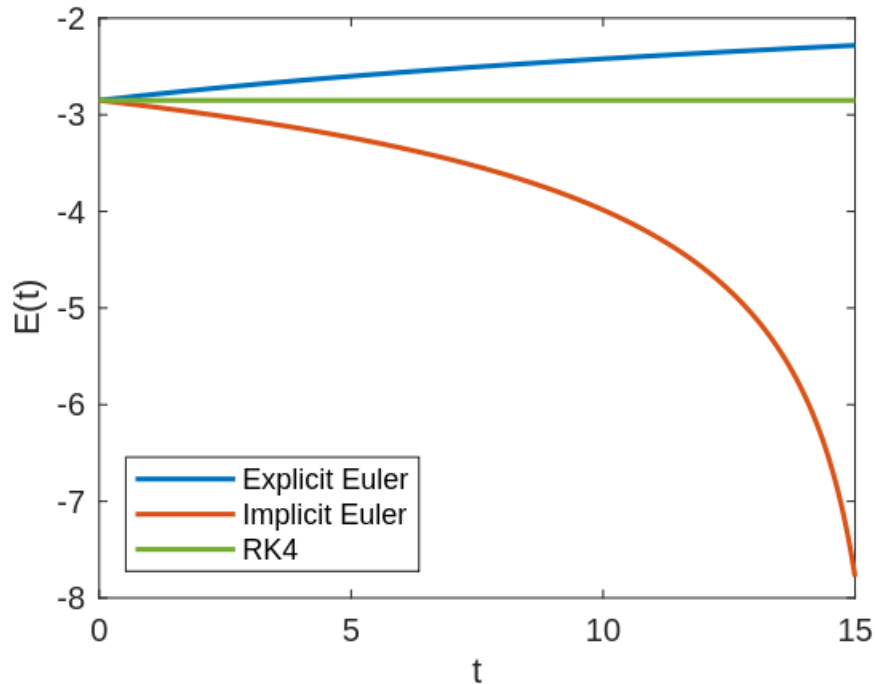
$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} = d, \quad (3.16)$$

ahol d konstans. A (3.16) bal oldalán $\frac{1}{2}\dot{r}^2$ az egységnyi tömegű P_2 tömegpont kinetikus energiája, $-\frac{\mu}{r}$ a potenciális energia, így (3.16) a tömegegységre vonatkozó energia-integrál. Vagyis

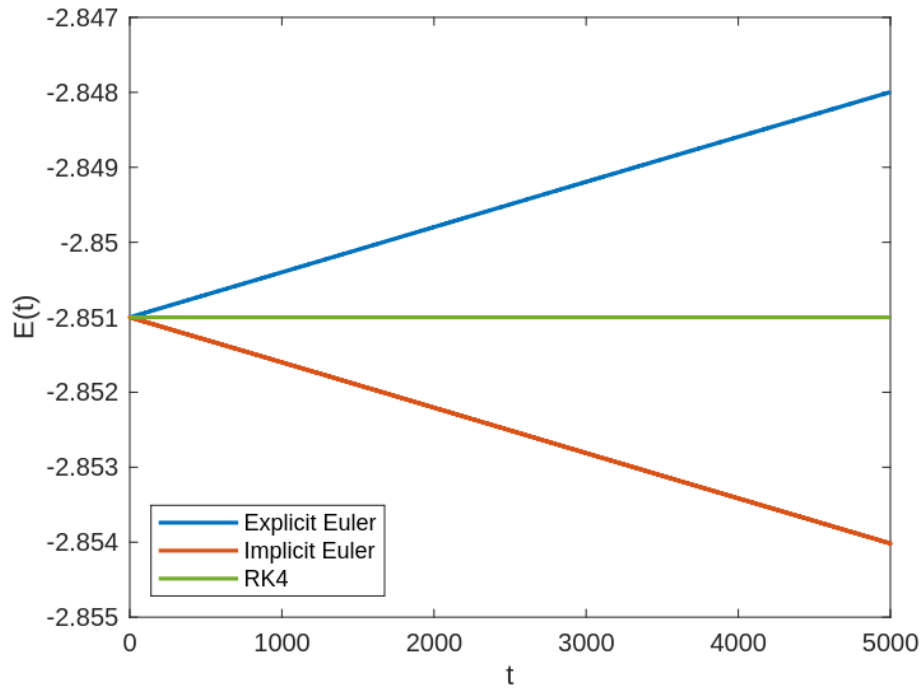
$$V(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.17)$$

a (3.13) egyenlet első integrálja az 1.11. Definíció alapján.

A 3.4. és 3.5. ábrákon a Jupiter körpályájának (3.16) összefüggésből számított energiája látható az (1.7) explicit és az (1.8) implicit Euler-módszerrel, illetve az (1.10) negyedrendű Runge–Kutta módszerrel különböző h és N értékek esetén. Az ábrákról leolvasható, hogy az explicit és az implicit Euler-módszer rendre energiát nyer, illetve veszít, a negyedrendű Runge–Kutta módszer pedig elég kicsi h esetén megtartja az energiát.



3.4. ábra. A (3.16) megoldása $h = 1/2$ és $N = 3 \cdot 10^5$ esetén.



3.5. ábra. A (3.16) megoldása $h = 1/20$ és $N = 10^5$ esetén.

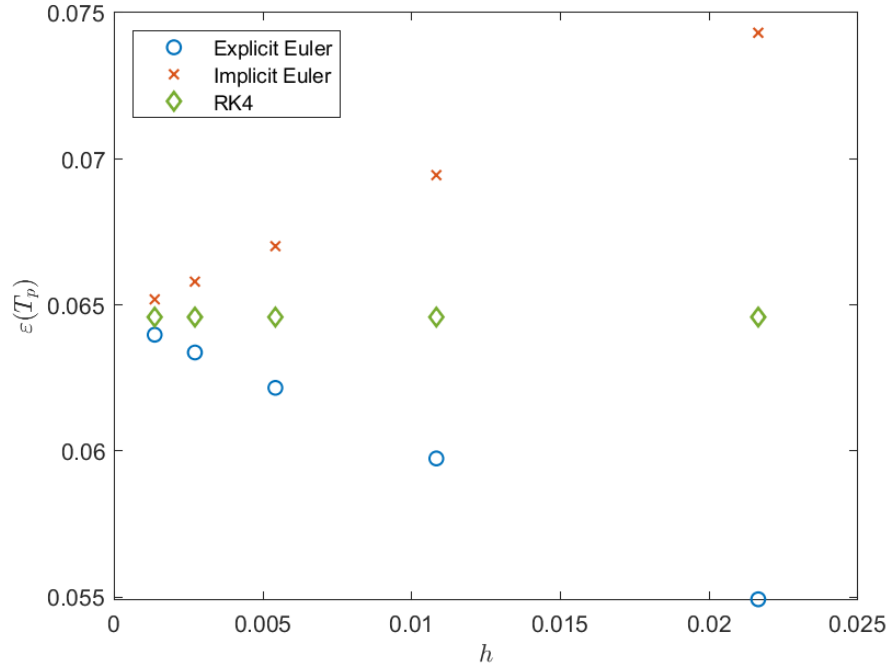
3.2.2. Periodikus megoldások

Jelölje T_p a periódusidőt, azaz a keringési időt. Tudjuk, hogy egy periódus megtétele után a P_2 testnek a fázistérben ugyanoda kell visszaérnie, azaz

$$\begin{aligned} x(0) &= x(T_p), \\ v_x(0) &= v_x(T_p), \\ y(0) &= y(T_p), \\ v_y(0) &= v_y(T_p). \end{aligned}$$

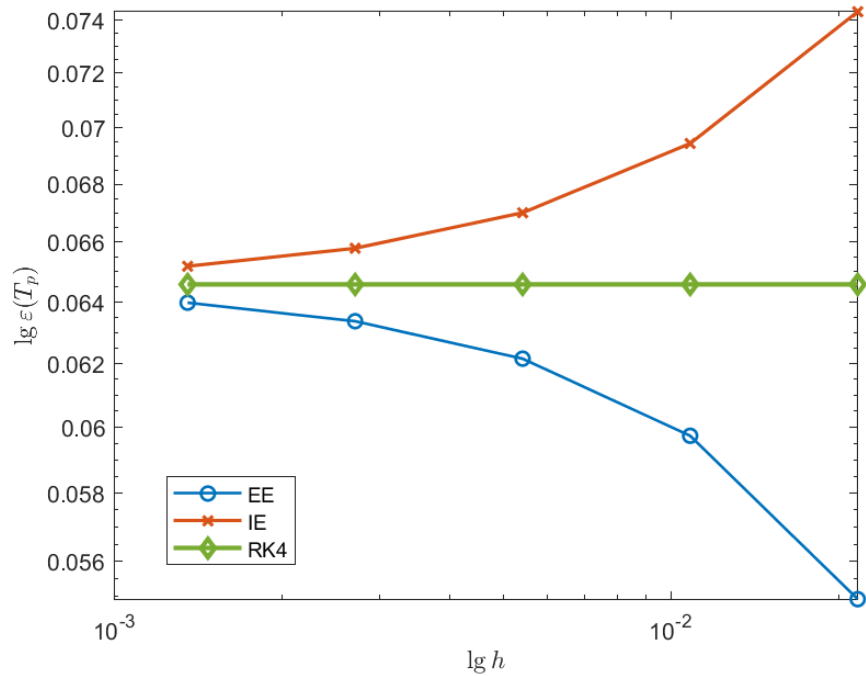
A 3.6. ábrán a különböző numerikus módszerek 1.12. Definíció szerinti globális hibája látható $T_p = Nh$ időpillanatban, vagyis

$$\varepsilon(T_p) = \sqrt{|x_0 - x_N|^2 + |v_{x_0} - v_{x,N}|^2 + |y_0 - y_N|^2 + |v_{y_0} - v_{y,N}|^2}.$$



3.6. ábra. A numerikus módszerek globális hibái 5 különböző lépéshossz esetében.

Ennek a globális hibának logaritmusa látszik a 3.7. ábrán.



3.7. ábra. A numerikus módszerek globális hibái logaritmikus skálán ábrázolva 5 különböző lépéshossz esetében.

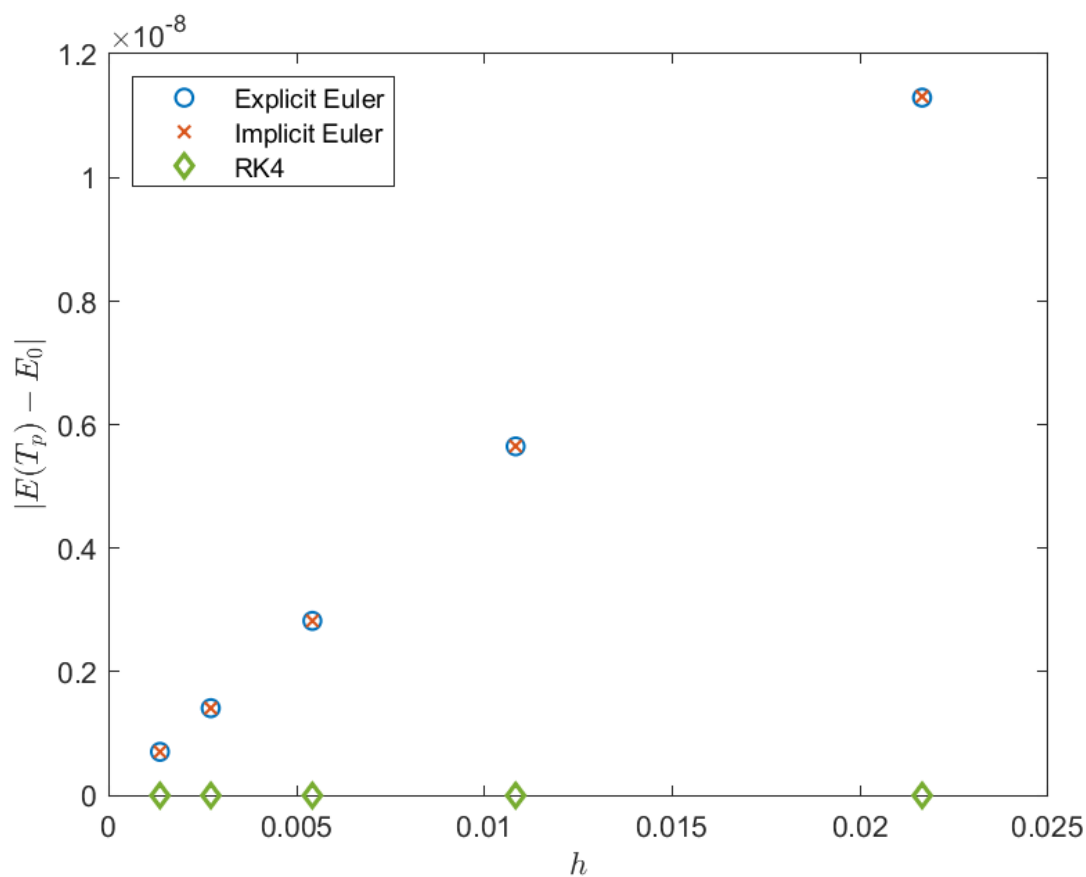
Tudjuk, hogy a 3.17 képlettel megadott

$$V(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

energia állandó. A 3.8. ábrán a különböző numerikus módszerek által számított energiaértékek eltérése látható a

$$V(x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0}) = \frac{1}{2}(v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} =: E_0$$

kezdeti értéktől a T_p időpontban, azaz $|E(T_p) - E_0|$, ahol $E(T_p) = V(x_N, y_N, v_{x,N}, v_{y,N})$. Ez ugyanazt támasztja alá, mint a 3.5. ábra, nevezetesen hogy az (1.10) negyedrendű Runge–Kutta módszer jobban megtartja az energiát, mint az (1.7) explicit és az (1.8) implicit Euler-módszerek.



3.8. ábra. Az energia eltérése 5 különböző lépéshossz esetében.

4. fejezet

A háromtest-probléma

Az égi mechanika egy másik alapfeladata a háromtest-probléma. A jelen fejezet Érdi Bálint: Égi mechanika [5] jegyzete és Victor G. Szebehely, Theory of orbits. The restricted problem of three bodies [6] című könyve alapján készült.

A feladat: határozzuk meg három pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak!

Jelölje a háromtest-problémában a tömegpontok helyét P_1 , P_2 és P_3 , tömegüket m_1 , m_2 és m_3 . Legyen P_i helyvektora egy $Oxyz$ derékszögű koordinátarendszerben $\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. A háromtest-probléma Newton-féle mozgásegyenletei:

$$\begin{aligned}m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i},\end{aligned}\tag{4.1}$$

ahol

$$\begin{aligned}U &= k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right), \\r_{ij} &= |\underline{r}_{ij}| = |\underline{r}_j - \underline{r}_i|.\end{aligned}$$

A (4.1) mozgásegyenletek vektoriális alakban

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \underline{r}_{12} - k^2 \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \underline{r}_{13},\tag{4.2}$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \underline{r}_{12} + k^2 \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \underline{r}_{23},\tag{4.3}$$

$$m_3\ddot{r}_3 = k^2 \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \underline{r}_{13} - k^2 \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \underline{r}_{23}. \quad (4.4)$$

A (4.1) differenciálegyenlet-rendszerének fázistere 18 dimenziós.

4.1. Az első integrálok

Írjuk fel a háromtest-probléma 1.11. Definíció szerinti első integráljait!

4.1.1. A tömegközéppont-integrál

A (4.2), (4.3) és (4.4) egyenleteket összeadva, majd ezt idő szerint kétszer integrálva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\underline{r}}_i = \underline{a}. \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^3 m_i \underline{r}_i = \underline{a}t + \underline{b}, \quad (4.6)$$

ahol \underline{a} és \underline{b} konstans vektorok.

A rendszer P_0 tömegközéppontjának \underline{r}_0 helyvektora

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}.$$

Tehát (4.5) és (4.6) azt fejezik ki, hogy a P_0 tömegközéppont vagy nyugalomban van ($\underline{a} = \underline{0}$), vagy egyenes vonalú egyenes mozgást végez ($\underline{a} \neq \underline{0}$). A (4.5) skaláregyenletekben felírva (4.1) három első integrálját adja. Azaz

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) &= \\ &= m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} + m_3 v_{x_3}, \\ V_2(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) &= \\ &= m_1 v_{y_1} + m_2 v_{y_2} + m_3 v_{y_3}, \\ V_3(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) &= \\ &= m_1 v_{z_1} + m_2 v_{z_2} + m_3 v_{z_3} \end{aligned} \quad (4.7)$$

első integrálok az 1.11. Definíció szerint.

4.1.2. Az energia-integrál

A (4.2), (4.3) és (4.4) egyenleteket rendre \dot{r}_1 , \dot{r}_2 és \dot{r}_3 -tal skalárisan megszorozva, majd idő szerint integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{r}_i^2 - U = d, \quad (4.8)$$

ahol d állandó. A (4.8) az energia-integrál, (4.1) egy újabb első integrálja. Vagyis

$$\begin{aligned} V_4(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) = \\ = \frac{1}{2} m_1 v_{x_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{x_2}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{x_3}^2 - k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_2 m_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}} + \frac{m_3 m_1}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_5(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) = \\ = \frac{1}{2} m_1 v_{y_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{y_2}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{y_3}^2 - k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_2 m_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}} + \frac{m_3 m_1}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_6(x_1, x_2, x_3, v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, y_1, y_2, y_3, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, z_1, z_2, z_3, v_{z_1}, v_{z_2}, v_{z_3}) = \\ = \frac{1}{2} m_1 v_{z_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{z_2}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{z_3}^2 - k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_2 m_3}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}} + \frac{m_3 m_1}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}} \right) \end{aligned}$$

első integrálok az 1.11. Definíció alapján.

A (4.1) egyenletrendszerre tehát összesen 6 első integrált írtunk fel.

4.2. A korlátozott háromtest-probléma

A naprendszerbeli égitestek mozgását vizsgálva a háromtest-probléma azon eseteivel találkozunk, melyekben az egyik test tömege elhanyagolhatóan kicsi a másik kettőhöz képest. Ezt nevezzük korlátozott háromtest-problémának. Tegyük fel, hogy a két nagyobb test egyenletes körmozgást végez, továbbá tegyük fel, hogy a három test mindig ugyanabban a síkban mozog, azaz $z_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Határozzuk meg a harmadik, elha-

nyagolható test mozgását.

A (4.5) tömegközéppont-integrál és (4.6) alapján helyezzük az $Oxyz$ koordináta-rendszer kezdőpontját a rendszer tömegközéppontjába. Tartsunk például m_3 -mal 0-hoz! Ekkor (4.2) és (4.3) esetében a jobb oldalon lévő második tag, azaz a harmadik test hatása egyre kisebb lesz, és határesetben 0. Az $m_3 = 0$ esetben ezekből az egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$m_1 \ddot{r}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12}, \quad m_2 \ddot{r}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12}, \quad (4.9)$$

amik azt adják meg, hogy a P_1 és P_2 tömegpontok kölcsönös gravitációs vonzásuk hatására hogyan mozognak. A (4.4) érvényes, ha $m_3 \neq 0$, de az $m_3 = 0$ esetben az egyenlet azonosan nullává válik. Emiatt tegyük fel, hogy m_3 kicsi, de nem 0. Egyszerűsítsük (4.4)-et m_3 -mal:

$$\ddot{r}_3 = k^2 \frac{m_1}{r_{13}^3} r_{13} - k^2 \frac{m_2}{r_{23}^3} r_{23}. \quad (4.10)$$

A (4.10) egyenlet pontosan meghatározza P_3 mozgását, de (4.9) egyenletek csak közelítőleg adják meg P_1 és P_2 mozgását. Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb m_3 .

A (4.9) és (4.10) adja a korlátozott háromtest-probléma mozgásegyenleteit.

Az egyenletes körmozgást végző P_1 és P_2 tömegpontok távolsága legyen ℓ , középmozgásuk (szögsebességük) n . A rendszer O tömegközéppontja P_1 és P_2 összekötő egyenesén van, távolsága P_2 -től

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell,$$

illetve P_1 -től

$$b = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell.$$

A OXY inercierendszerben P_3 mozgásegyenletei

$$\frac{d^2 X}{dt^{*2}} = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^{*2}} = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad (4.11)$$

ahol t^* az idő,

$$U = k^2 \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right), \quad (4.12)$$

és $R_1 = |P_1 P_3|$, $R_2 = |P_2 P_3|$. Ha $t^* = 0$ esetén P_1 és P_2 az OX tengelyen van, akkor a $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$ koordináták

$$\begin{aligned} X_1 &= b \cos nt^*, & X_2 &= -a \cos nt^*, \\ Y_1 &= b \sin nt^*, & Y_2 &= -a \sin nt^*. \end{aligned}$$

Így az

$$R_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

távolságok az idő explicit függvényei. Mivel R_1 -en és R_2 -n keresztül U is függ az időtől, a (4.11) egyenletekre a szokásos módon nem vezethető le a (4.8) alakúhoz hasonló energia-integrál. Ha a mozgásegyenleteket egy P_1 -gyel és P_2 -vel együtt forgó koordináta-rendszerben írjuk fel, melyben P_1 és P_2 koordinátái állandók, akkor levezethető lesz egy az energia-integrállal analóg integrál, ami az új koordináta-rendszernek köszönhetően 18 ismeretlen függvény helyett már csak négyet fog tartalmazni.

Legyen $O\bar{x}\bar{y}$ egy n szögsebességel egyenletesen forgó koordináta-rendszer, melynek $O\bar{x}$ tengelye $t^* = 0$ esetén egyezzen meg OX -szel!

A (4.11) az $O\bar{x}\bar{y}$ koordináta-rendszerben felírva

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt^*} - n^2\bar{x} &= \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt^*} - n^2\bar{y} &= \frac{\partial U}{\partial \bar{y}}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

ahol

$$U = k^2 \left(\frac{m_1}{\bar{r}_1} + \frac{m_2}{\bar{r}_2} \right),$$

és $\bar{r}_1 = |P_1P_3|$, $\bar{r}_2 = |P_2P_3|$. Mivel P_1 koordinátái: $\bar{x}_1 = b$, $\bar{y}_1 = 0$, P_2 koordinátái: $\bar{x}_2 = -a$, $\bar{y}_2 = 0$, ezért

$$\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2}, \quad \bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2}.$$

Ekkor \bar{r}_1 , \bar{r}_2 , és így U már nem függ explicit az időtől.

A (4.13) egyszerűsíthető dimenziótlan koordináták bevezetésével. Legyen $t = n \cdot t^*$ új független változó. A továbbiakban ezt fogjuk időnek nevezni. Emellett legyen

$$x = \frac{\bar{x}}{\ell}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\ell}, \quad r_1 = \frac{\bar{r}_1}{\ell}, \quad r_2 = \frac{\bar{r}_2}{\ell},$$

ahol $\ell = |P_1P_2|$. Végül legyen

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

A (4.13)-ból az új változókkal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= \frac{\partial U^*}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= \frac{\partial U^*}{\partial y},\end{aligned}\tag{4.14}$$

ahol

$$U^* = \frac{k^2(m_1 + m_2)}{n^2\ell^3} \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right).$$

A harmadik Kepler-törvény¹ szerint

$$k^2(m_1 + m_2) = n^2\ell^3,$$

így

$$U^* = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2},$$

ahol

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{b}{\ell}\right)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{\ell}\right)^2 + y^2}.$$

Mivel

$$\frac{b}{\ell} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu_2, \quad \frac{a}{\ell} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \mu_1,$$

így

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu_2)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu_1)^2 + y^2}.$$

Legyen

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}.$$

Ezzel (4.14) felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

¹Az ellipszispálya fél nagytengelyének (a) köbe és a bolygó keringési idejének (T) négyzetének aránya: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$.

Legyen

$$\Omega = \bar{\Omega} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2. \quad (4.16)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ellenőrizhető, hogy

$$\Omega = \frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2},$$

azaz Ω a változók szimmetrikus függvénye. A (4.17) egyenletrendszert tovább tudjuk egyszerűsíteni, ha figyelembe vesszük, hogy $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Legyen

$$\mu = \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

így

$$1 - \mu = \mu_1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}[(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_1 &= \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

4.2.1. A Jacobi-integrál

A (4.18) egyenleteknek egy első integráljuk ismeretes. Szorozzuk meg (4.18) első egyenletét \dot{x} -tal, a másodikat pedig \dot{y} -tal

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} - 2\dot{y}\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x}, \\ \ddot{y}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}, \end{aligned}$$

majd az így kapott egyenleteket adjuk össze

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy Ω explicit nem függ t -től, és mindkét oldalt idő szerint integráljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C, \quad (4.19)$$

ahol C konstans. A (4.19) a Jacobi-integrál. Az 1.11. Definíció szerint

$$\begin{aligned} V(x, y, v_x, v_y) = & (1 - \mu)[(x - \mu)^2 + y^2] + \mu[(x + 1 - \mu)^2 + y^2] + \\ & + 2\frac{1 - \mu}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}} + 2\frac{\mu}{\sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}} - v_x^2 - v_y^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

első integrál.

4.2.2. Az Arenstorf-pályák

A korlátozott háromtest-problémának léteznek speciális periodikus megoldásai, ezeket Richard Arenstorf fedezte fel. A dolgozat jelen része Victor G. Szebehely, Theory of orbits, The restricted problem of three bodies [6] című könyve és R. F. Arenstorf, Existence of periodic solutions passing near both masses of the restricted three-body problem [7] című cikke alapján készült. Tekintsük a Föld–Hold rendszert, ekkor $\mu = 0,012277471$. Megfelelő kezdeti értékekkel három eset lehetséges. Két hurok esetén a kezdeti feltételek:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1,2, \\ v_x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ v_y(0) &= -1,049357510, \end{aligned} \quad (4.21)$$

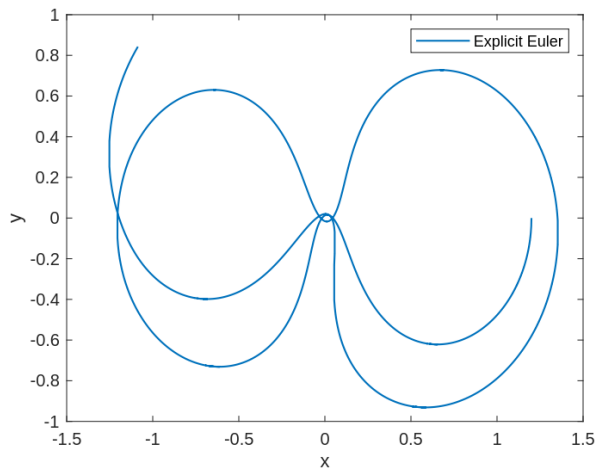
három huroknál:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,994, \\ v_x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ v_y(0) &= -2,0317326295573368357302057924, \end{aligned} \quad (4.22)$$

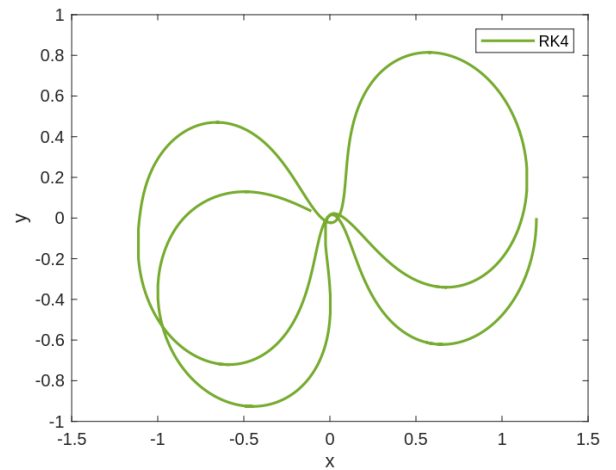
és négy hurok esetén:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0,994, \\
 v_x(0) &= 0, \\
 y(0) &= 0, \\
 v_y(0) &= -2,00158510637908252240537862224.
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

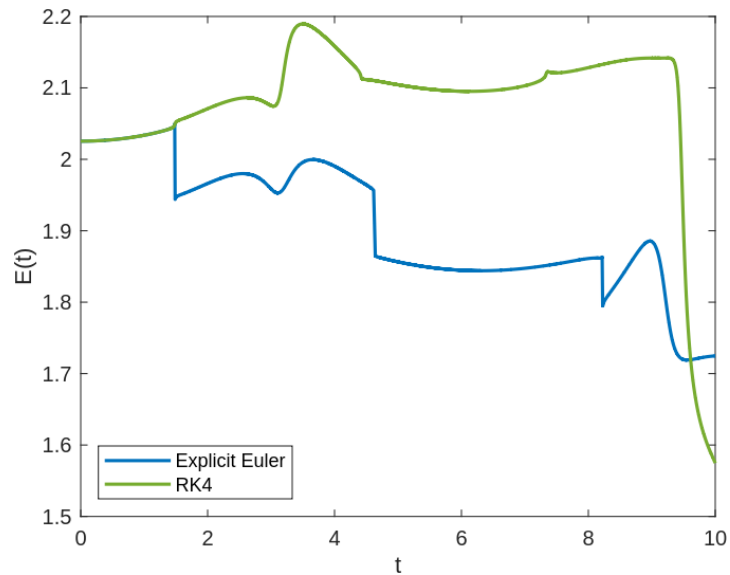
Az 4.1.a. és 4.1.b. ábrákon (4.18) megoldása, a 4.2. ábrán pedig ezek (4.19) alakú energiája látható (4.21) kezdeti feltételekkel $h = 10^{-6}$ és $N = 10^7$ értékek esetén.



4.1.a A (4.18) megoldása explicit Euler-módszerrel két hurok esetében.



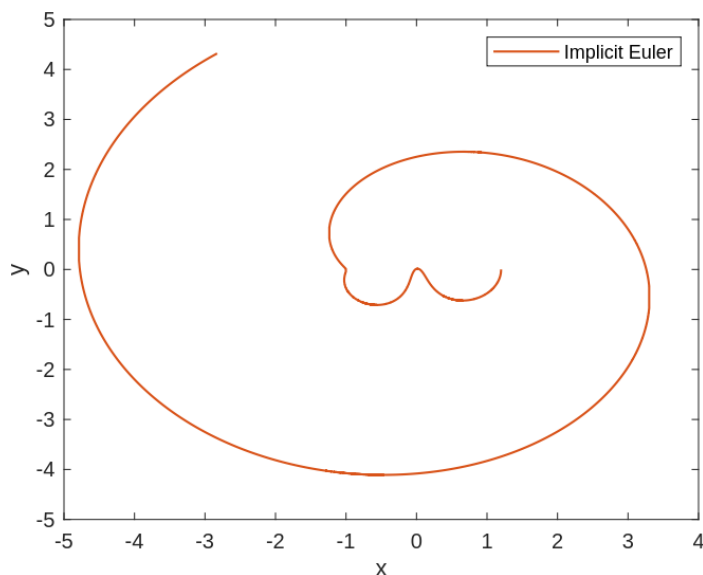
4.1.b A (4.18) megoldása negyedrendű Runge-Kutta módszerrel két hurok esetében.



4.2. ábra. Az explicit Euler-módszer és a negyedrendű Runge-Kutta módszer energiája

Ahhoz, hogy az implicit Euler-módszer megfelelő pontosságot érjen el, a h lépésközt

nagyon kicsire kell állítani, emiatt a kód lassan fut le. Ez is mutatja, hogy a valós alkalmazások során előforduló problémák esetében az elsőrendű módszerek sok esetben már nem elegendők.



4.3. ábra. A (4.18) megoldása implicit Euler-módszerrel (4.21) kezdeti feltételekkel $h = 10^{-6}$ és $N = 10^7$ értékek esetén.

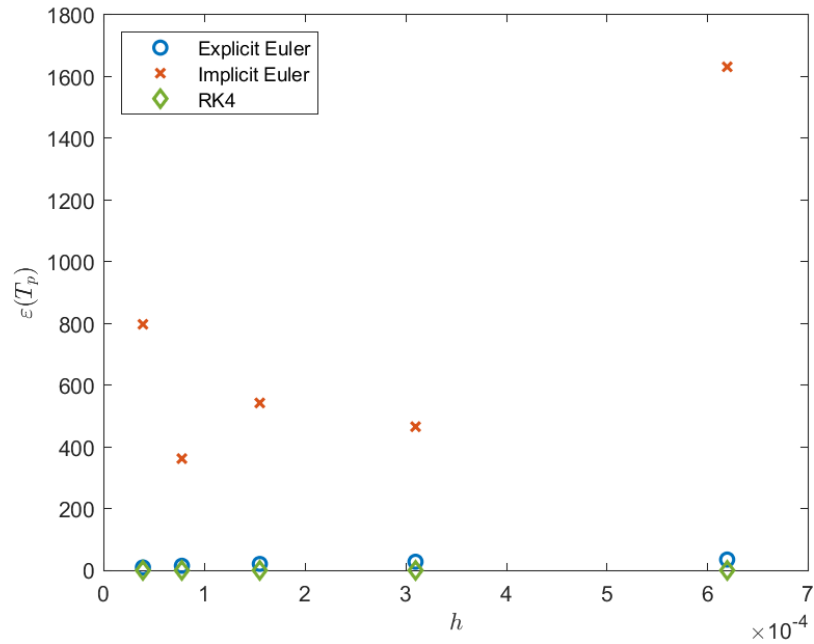
4.2.3. Periodikus megoldások

Jelölje T_p a periódusidőt, azaz a keringési időt. Tudjuk, hogy egy periódus megtétele után a P_2 testnek a fázistérben ugyanoda kell visszaérnie, azaz

$$\begin{aligned} x(0) &= x(T_p), \\ v_x(0) &= v_x(T_p), \\ y(0) &= y(T_p), \\ v_y(0) &= v_y(T_p). \end{aligned}$$

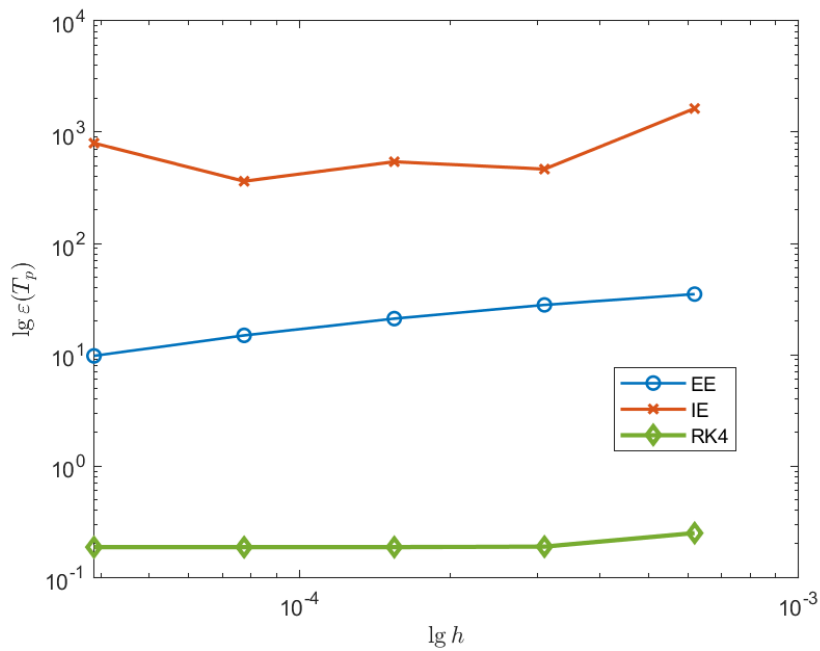
A 4.4. ábrán a különböző numerikus módszerek 1.12. Definíció szerinti globális hibája látható $T_p = Nh$ időpillanatban, vagyis

$$\varepsilon(T_p) = \sqrt{|x_0 - x_N|^2 + |v_{x_0} - v_{x,N}|^2 + |y_0 - y_N|^2 + |v_{y_0} - v_{y,N}|^2}.$$



4.4. ábra. A numerikus módszerek globális hibái 5 különböző lépéshossz esetében.

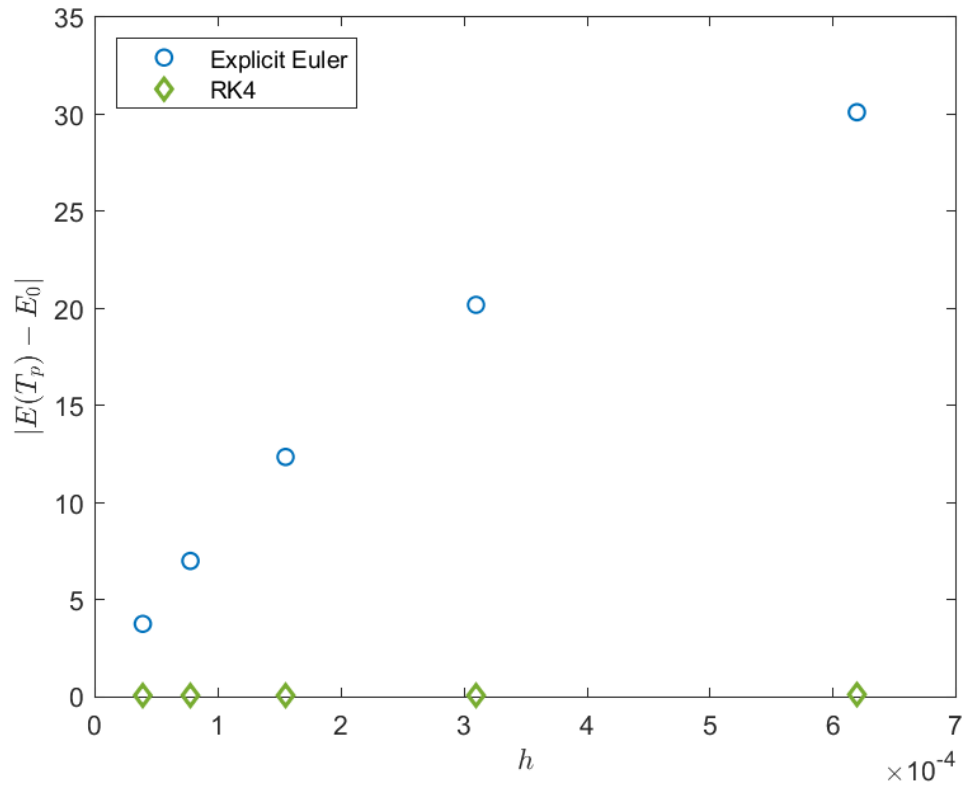
Ennek a globális hibának a logaritmusát látszik a 4.5. ábrán.



4.5. ábra. A numerikus módszerek globális hibái logaritmikus skálán ábrázolva 5 különböző lépéshossz esetében.

Tudjuk, hogy a 4.20 képlettel megadott $V(x, y, v_x, v_y)$ energia állandó. A 4.6. ábrán a különböző numerikus módszerek által számított energiaértékek eltérése látható

a $V(x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0}) =: E_0$ kezdeti értéktől a T_p időpontban, azaz $|E(T_p) - E_0|$, ahol $E(T_p) = V(x_N, y_N, v_{x,N}, v_{y,N})$. Leolvasható, hogy az (1.10) negyedrendű-Runge–Kutta módszer jobban megtartja az energiát, mint az (1.7) explicit Euler-módszer.



4.6. ábra. Az energia eltérése 5 különböző lépéshossz esetében.

Összefoglalás

A szakdolgozatban az égi mechanikában fontos differenciálegyenletek elméleti és numerikus vizsgálatával foglalkoztunk. Ehhez először a harmonikus rezgőmozgást tekintettük, mert ennek ismert a pontos megoldása. Mivel a vizsgált bolygómozgásoknál már nem ismert a pontos megoldás, bevezettünk egy másik hibafogalmat. A numerikus módszerektől is elvárjuk, hogy megtartsák az első integrálokat, ezért ezeket vezettük le elméletileg egy-egy feladat esetén. Majd numerikusan vizsgáltuk az explicit, az implicit, a szimplektikus Euler-módszerekkel és a negyedrendű Runge–Kutta módszerrel. Utóbbi volt a legpontosabb, ahogy azt vártuk. Az explicit Euler-módszer energiát nyert, míg az implicit energiát veszített. Az elsőrendű módszerek közül a szimplektikus Euler-módszer tartotta meg az energiát a legjobban.

Emellett felhasználtuk, hogy mindegyik feladatnak létezik periodikus megoldása, és ennek segítségével is mértük a hibát, vagyis azt, hogy a periódusidő után az adott test mennyire nem ért vissza a fázistérben a kiindulási pontba.

A dolgozat eredményei azt mutatták, hogy a valódi alkalmazásokban előforduló feladatokra érdemes magasabb rendű módszereket alkalmazni.

Irodalomjegyzék

- [1] Tóth János, Simon L. Péter: Differenciálegyenletek (Typotex, 2020)
- [2] Fekete Imre: Alkalmazott Analízis 1 órai jegyzet (ELTE, 2023)
- [3] Pfeil Tamás: Differenciálegyenletek 1 órai jegyzet (ELTE, 2023)
- [4] Faragó István – Horváth Róbert: Numerikus módszerek (Typotex, 2016)
- [5] Érdi Bálint: Égi mechanika (Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996)
- [6] Victor G. Szebehely, Theory of orbits. The restricted problem of three bodies (Academic Press, 1967)
- [7] Richard F. Arenstorf, Existence of periodic solutions passing near both masses of the restricted three-body problem (AIAA J. 1, 238, 1963)

Függelék

A függelékben megtalálhatóak azok a MATLAB kódok, amelyekkel a dolgozatban szereplő ábrákat készítettem. Az egyes ábrák a megfelelő kommentek ki- és bekapcsolásával készültek el. A kód első függvényének első paramétere azt adja meg, hogy a pályákat és az energiát, vagy a periódust vizsgáltuk-e, a második paraméter pedig azt, hogy a harmonikus rezgőmozgás, az egycentrum-probléma vagy a korlátozott háromtest-probléma esetével akarunk-e foglalkozni. A többi függvény a közelítésekhez, az energiához és a globális hibához szükséges segédfüggvényeket tartalmazza. Ha a pályákat és az energiát vizsgáljuk, akkor a kód kiszámítja és ábrázolja különböző módszerekkel a megoldást és az energiát. A harmadik és a negyedik paraméter a h lépésköz és az N lépésszám értékeit adja meg. Ha pedig a periódussal foglalkozunk, akkor a kód ebben a pontban vizsgálja a megoldásokat és ezek energiáit. A harmadik paraméter azt adja meg, hogy hány különböző h értékre vizsgáljuk az adott módszereket, a negyedik paraméter pedig az N lépésszám értéke. A kezdeti feltételek a kódon belül változtathatóak.

```
function plan_motion(code_type,problem_type,par,N)

    global omega mu Mu

    k = 0.0172020989; % Gauss-féle gravitációs állandó (CsE,
        nap, Naptömeg)

    % kezdeti feltételek
    if strcmp(problem_type, 'harmonikus')

        omega = 1;
        x_0 = 5;
        v_0 = 2;
        Y = [x_0; v_0];
        T_p = 2*pi/omega; % periódusidő

    elseif strcmp(problem_type, 'egycentrum')

        m1 = 1; % Nap tömege
        m2 = 0.001; % Jupiter tömege
```

```

M = m1 + m2;           % Nap + Jupiter tömege
Dist = 5.2;           % Jupiter távolsága
mu = k^2*M;

x_0 = Dist;
v_x_0 = 0;
y_0 = 0;
v_y_0 = k*sqrt(m1/Dist); % körpálya
%v_y_0 = 0.0095;       % ellipszis
%v_y_0 = k*sqrt(2*m1/Dist); % parabola

Y = [x_0; v_x_0; y_0; v_y_0];
T_p = sqrt(Dist^3) * 365.25; % periódusidő

elseif strcmp(problem_type, 'kht')

    Mu = 0.012277471;

    % Arenstorf - két hurok
    x_0 = 1.2;
    v_x_0 = 0;
    y_0 = 0;
    v_y_0 = -1.049357510;
    T_p = 6.192169331;

    %{
    % Arenstorf - három hurok
    x_0 = 0.994;
    v_x_0 = 0;
    y_0 = 0;
    v_y_0 = -2.0317326295573368357302057924;
    T_p = 11.124340337266085134999734047;
    %}

    %{
    % Arenstorf - négy hurok
    x_0 = 0.994;
    v_x_0 = 0;
    y_0 = 0;
    v_y_0 = -2.00158510637908252240537862224;
    T_p = 17.0652165601579625588917206249;
    %}

    Y = [x_0; v_x_0; y_0; v_y_0];

end

if strcmp(code_type, 'orbit')

```

```

h = par;                % h lépésköz
T = h*(0:N);

if strcmp(problem_type, 'harmonikus')

    Y_e = Y;
    Y_i = Y;
    Y_s = Y;

    y = exact_sol(x_0,v_0,omega,N,h); % pontos megoldás

    % numerikus megoldások
    for n = 1:N
        Y_e(:, n+1) = explicit_e(h, Y_e(:, n), '
            harmonikus');
        Y_i(:, n+1) = implicit_e(h, Y_i(:, n), '
            harmonikus');
        Y_s(:, n+1) = symplectic_e(h, Y_s(:, n));
    end

    % energia
    E_ex = arrayfun(@(n) energy(y(:, n), 'harmonikus'),
        1:N+1);
    E_ee = arrayfun(@(n) energy(Y_e(:, n), 'harmonikus')
        , 1:N+1);
    E_ie = arrayfun(@(n) energy(Y_i(:, n), 'harmonikus')
        , 1:N+1);
    E_se = arrayfun(@(n) energy(Y_s(:, n), 'harmonikus')
        , 1:N+1);

elseif strcmp(problem_type, 'egycentrum')

    Y_e = Y;
    Y_i = Y;
    Y_rk4 = Y;

    % numerikus megoldások
    for n = 1:N
        Y_e(:,n+1) = explicit_e(h,Y_e(:,n),'egycentrum');
        Y_i(:,n+1) = implicit_e(h,Y_i(:,n),'egycentrum');
        Y_rk4(:,n+1) = rk4(h,Y_rk4(:,n),'egycentrum');
    end

    % energiaintegrál
    E_ee = arrayfun(@(n) energy(Y_e(:, n), 'egycentrum')
        , 1:N+1);
    E_ie = arrayfun(@(n) energy(Y_i(:, n), 'egycentrum')
        , 1:N+1);
    E_rk4 = arrayfun(@(n) energy(Y_rk4(:, n), '

```

```

        egycentrum'), 1:N+1);

elseif strcmp(problem_type, 'kht')

    Y_e = Y;
    Y_i = Y;
    Y_rk4 = Y;

    % numerikus megoldások
    for n = 1:N
        Y_e(:,n+1) = explicit_e(h,Y_e(:,n),'kht');
        Y_i(:,n+1) = implicit_e(h,Y_i(:,n),'kht');
        Y_rk4(:,n+1) = rk4(h,Y_rk4(:,n),'kht');
    end

    % energiaintegrál
    E_ee = arrayfun(@(n) energy(Y_e(:, n), 'kht'), 1:N
        +1);
    E_ie = arrayfun(@(n) energy(Y_i(:, n), 'kht'), 1:N
        +1);
    E_rk4 = arrayfun(@(n) energy(Y_rk4(:, n), 'kht'), 1:
        N+1);

end

% ábrák
%%{
figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(T, Y_e(1,:), 'Color', [0 0.4470 0.7410], 'LineWidth'
    , 1.5)
hold on
plot(T, Y_i(1,:), 'Color', [0.8500 0.3250 0.0980], '
    LineWidth', 1.5)
plot(T, Y_s(1,:), 'Color', [0.9290 0.6940 0.1250], '
    LineWidth', 1.5)
plot(T, y(1,:), 'LineStyle', ':', 'Color', [0.4940 0.1840
    0.5560], 'LineWidth', 2)
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "Szimplektikus
    Euler" "Pontos megoldás"], 'Location', 'northwest')
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
%}

figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(T, E_ee, 'Color', [0 0.4470 0.7410], 'LineWidth',
    1.5)
hold on

```

```

plot(T,E_ie, 'Color', [0.8500 0.3250 0.0980], 'LineWidth'
, 1.5)
plot(T,E_se, 'Color', [0.9290 0.6940 0.1250], 'LineWidth
', 1.5)
plot(T,E_ex, 'Color', [0.4940 0.1840 0.5560], 'LineWidth
', 1.5)
%plot(T,E_rk4, 'Color', [0.4660 0.6740 0.1880], '
LineWidth', 1.5)
xlabel('t')
ylabel('E(t)')
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "Szimplektikus
Euler" "Pontos megoldás"], 'Location', 'northwest')
%legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "RK4"], '
Location', 'southwest')

figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(Y_e(1,:) + x_0, Y_e(2,:) + v_0, 'Color', [0 0.4470
0.7410], 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(Y_i(1,:) + x_0, Y_i(2,:) + v_0, 'Color', [0.8500
0.3250 0.0980], 'LineWidth', 1.5)
plot(y(1,:) + x_0, y(2,:) + v_0, 'Color', [0.4940 0.1840
0.5560], 'LineWidth', 2.5)
%plot(Y_rk4(1,:), Y_rk4(3,:), 'Color', [0.4660 0.6740
0.1880], 'LineWidth', 1.5)
axis equal
xlabel('x')
ylabel('v')
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "Pontos megold
ás"], 'Location', 'northeast')
%{
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "RK4"], '
Location', 'northeast')
xlabel('x')
ylabel('y')
%}

%%{
figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(Y_s(1,:) + x_0, Y_s(2,:) + v_0, 'Color', [0.9290
0.6940 0.1250], 'LineWidth', 2.5)
hold on
plot(y(1,:) + x_0, y(2,:) + v_0, 'LineStyle', ':', '
Color', [0.4940 0.1840 0.5560], 'LineWidth', 2.5)
axis equal
xlabel('x')
ylabel('v')

```

```

legend(["Szimplektikus Euler" "Pontos megoldás"], '
Location', 'northeast')
%}

elseif strcmp(code_type, 'periodic')

I = par;          % I a különböző lépésközök száma
tmax = T_p;

if strcmp(problem_type, 'harmonikus')

    % numerikus megoldások
    Y_e_at_period = zeros(2,I);
    Y_i_at_period = zeros(2,I);
    Y_s_at_period = zeros(2,I);
    h = zeros(1,I);

    for i = 1:I
        T = linspace(0,tmax,(2^(I+1-i))*N); % lépések sz
            áma feleződik
        h(i) = T(2)-T(1); % lépéshossz
            kétszereződik
        n = 1;
        t = 0;
        Y_e = Y;
        Y_i = Y;
        Y_s = Y;
        while(t<tmax)
            Y_e(:, n+1) = explicit_e(h(i), Y_e(:, n), '
                harmonikus');
            Y_i(:, n+1) = implicit_e(h(i), Y_i(:, n), '
                harmonikus');
            Y_s(:, n+1) = symplectic_e(h(i), Y_s(:, n));
            n = n + 1;
            t = t + h(i);
        end
        period_ind = round(tmax / h(i)) + 1;
        Y_e_at_period(:, i) = Y_e(:, period_ind);
        Y_i_at_period(:, i) = Y_i(:, period_ind);
        Y_s_at_period(:, i) = Y_s(:, period_ind);
    end

    exact_at_period = exact_sol(x_0, v_0, omega, 1, T_p)
        ;

    % hiba
    eps_ee = arrayfun(@i) err(exact_at_period,
        Y_e_at_period(:, i)), 1:I);
    eps_ie = arrayfun(@i) err(exact_at_period,

```



```

        Y_i_at_period(:, i)), 1:I);
    eps_se = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
        Y_s_at_period(:, i)), 1:I);

    % energia
    E_ex = arrayfun(@(i) energy(exact_at_period, '
        harmonikus'), 1:I);
    E_ee = arrayfun(@(i) energy(Y_e_at_period(:, i), '
        harmonikus'), 1:I);
    E_ie = arrayfun(@(i) energy(Y_i_at_period(:, i), '
        harmonikus'), 1:I);
    E_se = arrayfun(@(i) energy(Y_s_at_period(:, i), '
        harmonikus'), 1:I);

elseif strcmp(problem_type, 'egycentrum')

    % numerikus megoldások
    Y_e_at_period = zeros(4,I);
    Y_i_at_period = zeros(4,I);
    Y_rk4_at_period = zeros(4,I);
    h = zeros(1,I);

    for i = 1:I
        T = linspace(0,tmax,(2^(I+1-i))*N); % lépések sz
            âma feleződik
        h(i) = T(2)-T(1); % lépéshossz
            kétszereződik
        n = 1;
        t = 0;
        Y_e = Y;
        Y_i = Y;
        Y_rk4 = Y;
        while(t<tmax)
            Y_e(:, n+1) = explicit_e(h(i), Y_e(:,n), '
                egycentrum');
            Y_i(:, n+1) = implicit_e(h(i), Y_i(:,n), '
                egycentrum');
            Y_rk4(:, n+1) = rk4(h(i), Y_rk4(:,n), '
                egycentrum');
            n = n + 1;
            t = t + h(i);
        end
        period_ind = round(tmax / h(i)) + 1;
        Y_e_at_period(:, i) = Y_e(:, period_ind);
        Y_i_at_period(:, i) = Y_i(:, period_ind);
        Y_rk4_at_period(:, i) = Y_rk4(:, period_ind);
    end

    exact_at_period = Y;

```

```

% hiba
eps_ee = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
    Y_e_at_period(:, i)), 1:I);
eps_ie = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
    Y_i_at_period(:, i)), 1:I);
eps_rk4 = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
    Y_rk4_at_period(:, i)), 1:I);

% energia
E_ex = arrayfun(@(i) energy(exact_at_period, '
    egycentrum'), 1:I);
E_ee = arrayfun(@(i) energy(Y_e_at_period(:, i), '
    egycentrum'), 1:I);
E_ie = arrayfun(@(i) energy(Y_i_at_period(:, i), '
    egycentrum'), 1:I);
E_rk4 = arrayfun(@(i) energy(Y_rk4_at_period(:, i),
    'egycentrum'), 1:I);

elseif strcmp(problem_type, 'kht')

% numerikus megoldások
Y_e_at_period = zeros(4,I);
Y_i_at_period = zeros(4,I);
Y_rk4_at_period = zeros(4,I);
h = zeros(1,I);

for i = 1:I
    T = linspace(0,tmax,(2^(I+1-i))*N); % lépések sz
        áma feleződik
    h(i) = T(2)-T(1); % lépéshossz
        kétszereződik
    n = 1;
    t = 0;
    Y_e = Y;
    Y_i = Y;
    Y_rk4 = Y;
    while(t<tmax)
        Y_e(:, n+1) = explicit_e(h(i), Y_e(:,n), '
            kht');
        Y_i(:, n+1) = implicit_e(h(i), Y_i(:,n), '
            kht');
        Y_rk4(:, n+1) = rk4(h(i), Y_rk4(:,n), 'kht')
            ;
        n = n + 1;
        t = t + h(i);
    end
    period_ind = round(tmax / h(i)) + 1;
    Y_e_at_period(:, i) = Y_e(:, period_ind);

```

```

        Y_i_at_period(:, i) = Y_i(:, period_ind);
        Y_rk4_at_period(:, i) = Y_rk4(:, period_ind);
    end

    exact_at_period = Y;

    % hiba
    eps_ee = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
        Y_e_at_period(:, i)), 1:I);
    eps_ie = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
        Y_i_at_period(:, i)), 1:I);
    eps_rk4 = arrayfun(@(i) err(exact_at_period,
        Y_rk4_at_period(:, i)), 1:I);

    % energia
    E_ex = arrayfun(@(i) energy(exact_at_period, 'kht'),
        1:I);
    E_ee = arrayfun(@(i) energy(Y_e_at_period(:, i), '
        kht'), 1:I);
    E_ie = arrayfun(@(i) energy(Y_i_at_period(:, i), '
        kht'), 1:I);
    E_rk4 = arrayfun(@(i) energy(Y_rk4_at_period(:, i),
        'kht'), 1:I);

end

% meredekség / rend
slope_e = mean(diff(log(eps_ee)) / diff(log(h)))
slope_i = mean(diff(log(eps_ie)) / diff(log(h)))
slope_s = mean(diff(log(eps_se)) / diff(log(h)))
%slope_rk4 = mean(diff(log(eps_rk4)) / diff(log(h)))

% ábrák
figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(h, eps_ee, 'o', 'Color', [0 0.4470 0.7410], '
    LineWidth', 1)
hold on
plot(h, eps_ie, 'x', 'Color', [0.8500 0.3250 0.0980], '
    LineWidth', 1)
%%{
plot(h, eps_se, 's', 'Color', [0.9290 0.6940 0.1250], '
    LineWidth', 1)
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "Szimplektikus
    Euler"], 'Location', 'northwest')
%}
%{
plot(h, eps_rk4, 'd', 'Color', [0.4660 0.6740 0.1880], '
    LineWidth', 1.25)

```

```

legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "RK4"], '
    Location','northwest')
%}
xlabel('$h$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\varepsilon(T_p)$', 'Interpreter', 'latex')

figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
loglog(h, eps_ee, '-o', 'Color', [0 0.4470 0.7410], '
    LineWidth', 1.25)
hold on
loglog(h, eps_ie, '-x', 'Color', [0.8500 0.3250 0.0980], '
    LineWidth', 1.5)
%%{
loglog(h, eps_se, '-s', 'Color', [0.9290 0.6940 0.1250],
    'LineWidth', 1.5)
legend(["EE" "IE" "SZE"], 'Location', 'southeast')
%}
%{
loglog(h, eps_rk4, '-d', 'Color', [0.4660 0.6740 0.1880],
    'LineWidth', 2)
legend(["EE" "IE" "RK4"], 'Location', 'southeast')
%}
xlabel('$\lg{h}$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\lg{\varepsilon(T_p)}$', 'Interpreter', 'latex'
)

figure;
set(gcf, 'Renderer', 'painters')
plot(h, abs(E_ee - E_ex), 'o', 'Color', [0 0.4470
    0.7410], 'LineWidth', 1)
hold on
plot(h, abs(E_ie - E_ex), 'x', 'Color', [0.8500 0.3250
    0.0980], 'LineWidth', 1)
%%{
plot(h, abs(E_se - E_ex), 's', 'Color', [0.9290 0.6940
    0.1250], 'LineWidth', 1)
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "Szimplektikus
    Euler"], 'Location', 'northwest')
%}
%{
plot(h, abs(E_rk4 - E_ex), 'd', 'Color', [0.4660 0.6740
    0.1880], 'LineWidth', 1.5)
legend(["Explicit Euler" "Implicit Euler" "RK4"], '
    Location', 'northwest')
%}
xlabel('$h$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$|E(T_p)-E_0|$', 'Interpreter', 'latex')

```

```

end
end
%%
function dY = f(Y, problem_type)

    global omega mu Mu

    if strcmp(problem_type, 'harmonikus')           % Y = [x; v]
        dY = [Y(2); -omega^2*Y(1)];
    elseif strcmp(problem_type, 'egycentrum')      % Y = [x; v_x;
        y; v_y]
        Grav = (-mu) / (sqrt(Y(1)^2 + Y(3)^2))^3;
        dY = [Y(2); Grav * Y(1); Y(4); Grav * Y(3)];
    elseif strcmp(problem_type, 'kht')            % Y = [x; v_x;
        y; v_y]
        r_1 = sqrt((Y(1) - Mu)^2 + Y(3)^2);        % r_1 hossza
        r_2 = sqrt((Y(1) + 1 - Mu)^2 + Y(3)^2);    % r_2 hossza
        Omega_x = (1 - Mu)*(Y(1) - Mu) + Mu*(Y(1) + 1 - Mu) - (1
            - Mu)*(Y(1) - Mu) / r_1^3 + Mu*(Y(1) + 1 - Mu) / r_2
            ^3;
        Omega_y = (1 - Mu)*Y(3) + Mu*Y(3) - (1 - Mu)*Y(3) / r_1
            ^3 - Mu*Y(3) / r_2^3;
        dY = [Y(2); Omega_x + 2*Y(4); Y(4); Omega_y - 2*Y(2)];
    end

end

end
%% harmonikus rezgőmozgás pontos megoldása
function y = exact_sol(x_0,v_0,omega,N,h)
    y = zeros(2,N+1);
    T = h*(0:N);
    for n = 1:N+1
        y(1,n) = x_0*cos(omega*T(n)) + v_0/omega * sin(omega*T(n)
            );
        y(2,n) = -omega*x_0*sin(omega*T(n)) + v_0 * cos(omega*T(
            n));
    end

end

end
%%
function E = energy(params, problem_type)

    global omega mu Mu

    if strcmp(problem_type, 'harmonikus')
        x = params(1);
        v = params(2);
        E = omega^2*x^2 + v^2;
    elseif strcmp(problem_type, 'egycentrum')
        Y = params(1:4);
        E = 1/2 * (Y(2)^2 + Y(4)^2) - mu/sqrt(Y(1)^2 + Y(3)^2);
    end
end

```

```

elseif strcmp(problem_type, 'kht')
    Y = params(1:4);
    r_1 = sqrt((Y(1) - Mu)^2 + Y(3)^2); % r_1 hossza
    r_2 = sqrt((Y(1) + 1 - Mu)^2 + Y(3)^2); % r_2 hossza
    Omega = 1/2 * ((1 - Mu)*r_1^2 + Mu*r_2^2) + (1 - Mu)/r_1
            + Mu/r_2;
    E = 2*Omega - Y(2)^2 - Y(4)^2;
end

end

%%
function eps = err(Y_0, Y_N)
    eps = norm(Y_0 - Y_N);
end

%%
function Y_1 = explicit_e(h, Y_0, problem_type)
    Y_1 = Y_0 + h .* f(Y_0, problem_type);
end

%%
function Y_1 = implicit_e(h, Y_0, problem_type)
    F = @(Y_1) Y_0 + h .* f(Y_1, problem_type);
    x = Y_0 + h.*f(Y_0, problem_type); %EE
    for k=1:10
        x = F(x);
    end
    Y_1 = x;
end

%%
function Y_1 = symplectic_e(h,Y_0) % Y_0 = [x_0; v_0]
    global omega
    x_1 = Y_0(1) + h*Y_0(2);
    v_1 = Y_0(2) - h*omega^2*x_1;
    Y_1 = [x_1; v_1];
end

%%
function Y_1 = rk4(h,Y_0, problem_type)
    k1 = f(Y_0, problem_type);
    k2 = f(Y_0 + h/2 * k1, problem_type);
    k3 = f(Y_0 + h/2 * k2, problem_type);
    k4 = f(Y_0 + h * k3, problem_type);
    Y_1 = Y_0 + 1/6 * h * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
end

```