Ismételt Richardson-extrapoláció

Szakdolgozat

Készítette: **Szandi Nándor Mihály**

Matematika BSc - matematikai elemző szakirány

Témavezető: **Dr. Havasi Ágnes**

egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudomágyegyetem, Természettudományi Kar

2024

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Havasi Ágnesnek a sok segítséget a témával kapcsolatban, hogy szakértelmével és hozzáértésével mindig készen állt arra, hogy segítse munkámat. Továbbá szeretném megköszönni családomnak és szeretteimnek a rengeteg támogatást, amit a munkám ideje alatt adtak, nélkülük nem sikerült volna.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az életben számos változás megy végbe mind a fizikai, mind a társadalmi folyamatokban. A matematikai modellek, amelyek ezeket leírják, leggyakrabban differenciálegyenleteken, illetve egyenletrendszereken alapulnak. Gyakran ezeknek a pontos megoldását lehetetlen előállítani, vagy nagy költséggel, sok idővel járna, így alternatív megoldásokat keresünk. Erre szolgálnak a numerikus módszerek, amelyekkel nagy pontossággal tudjuk közelíteni a kitűzött feladat megoldását.

Szakdolgozatom elején szó esik a Richardson-extrapoláció konvergenciagyorsító módszeréről, amely ezeknek a numerikus módszereknek a pontosságát javítja. Eredeti változatának a lényege, hogy kisebb (például feleakkora) lépésközzel is megoldjuk a feladatot, és a két numerikus megoldást kombináljuk. Így ezzel az eljárással eggyel magasabb rendben pontos megoldáshoz jutunk, mint az alapmódszerrel.

A harmadik fejezetben mutatjuk be a dolgozatom fő témáját, az ismételt Richardson-extrapolációt, amely a Richardson-extrapoláción alapul, de nem csak kettő, hanem több numerikus megoldást kombinálunk, minden egyes új numerikus megoldással egyel növelve a megoldás pontosságának rendjét.

A negyedik fejezetben rátérünk az ismételt Richardson-extrapoláció stabilitására rögzített rácson. Ez azért fontos, mert egy numerikus módszertől elvárjuk különféle kvalitatív tulajdonságok megőrzését, például a nemnegativitás-megőrzést, amely elvárható a kémiai modellekben, illetve a tömegmegőrzést, energiamegőrzést, amelyek különféle fizikai rendszerek modelljeiben kell, hogy teljesüljenek. Az említett kvalitatív tulajdonságok közül egy, a merev rendszerek megoldása során fontos stabilitási tulajdonsággal, a rögzített rácson való stabilitással foglalkozunk.

2. A Richardson-extrapoláció módszere

Ebben a fejezetben a Lewis Fry Richardsontól származó konvergenciagyorsító módszert, a Richardson-extrapolációt (röviden RE) mutatjuk be, amelyet elsősorban a közönséges differenciálegyenletek (röviden KDE-k) numerikus megoldása során alkalmazunk [1]. A Richardson-extrapolációnak kétféle változatát különböztetjük meg, a passzív Richardson-extrapolációt és az aktív Richardson-extrapolációt.

Az eljárás lényege az, hogy két különböző lépésközű, de ugyanazon p-ed rendben konvergens módszerrel kapott numerikus megoldásokat kombinálunk. Így egy p-ed rendben konvergens numerikus módszernek a rendje $p+1$-re növelhető.

2.1. A Richardson-extrapoláció elve

Tekintsünk egy olyan számítási algoritmust, amely valamely h paramétertől függ, ekkor ha $h \to 0$, akkor a számítási algoritmusunk tart az A^* pontos értékhez. Ha ez a módszer p-ed rendben konvergens, akkor $h > 0$ paraméterrel dolgozva az

$$A^* - A(h) = K \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.1.1}$$

egyenlőség érvényes lesz. Itt a K mennyiség független h-tól. Alkalmazzuk ezen számítási algoritmust $h_1 = h > 0$ és $h_2 = h/q$ paraméterekkel is ($q \in \mathbb{N}$). Ekkor az

$$A^* - A(h_1) = K \cdot h_1^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.1.2}$$

és

$$A^* - A(h_2) = K \cdot h_2^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.1.3}$$

egyenlőségek is fennállnak. Keressük a c_1 és c_2 együtthatókat úgy, hogy az

$$A_{RE} = c_1 A(h_1) + c_2 A(h_2) \tag{2.1.4}$$

lineáris kombináció magasabb rendben közelítse A^*-t, mint az alapul vett számítási algoritmus. A (2.1.2) és (2.1.3) egyenlőségekből az

$$A_{RE} = (c_1 + c_2)A^* + (c_1 h_1^p + c_2 h_2^p)K + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.1.5}$$

egyenlőséget kapjuk. Megállapítható, hogy a p-ed rendnél magasabb rendű konvergencia feltétele, hogy a

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{2.1.6}$$

és

$$c_1 h_1^p + c_2 h_2^p = 0 \tag{2.1.7}$$

egyenlőségek fennálljanak. A (2.1.6) és (2.1.7) egyenletek által alkotott egyenletrendszerből, K kiküszöbölésével a

$$c_1 = -\frac{h_2^p}{h_1^p - h_2^p}, \quad c_2 = 1 - c_1 \tag{2.1.8}$$

együtthatókhoz jutunk. Ekkor ezekkel a c_1 és c_2 együtthatókkal lineárisan kombinálva az $A(h_1)$ és $A(h_2)$ numerikus megoldásokat, az alapmódszernél egy renddel pontosabb közelítést kapunk. Ezt a módszert hívjuk Richardson-extrapolációnak.

A fejezet további részében azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor $h_1 = h$ és $h_2 = \frac{h}{2}$. Ekkor

$$c_1 = -\frac{1}{2^p - 1} \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{2^p}{2^p - 1}, \tag{2.1.9}$$

amelyeket a (2.1.4)-be behelyettesítve a Richardson-extrapoláció módszere a

$$A_{RE} = -\frac{1}{2^p - 1} A(h) + \frac{2^p}{2^p - 1} A(\tfrac{h}{2}) = \frac{2^p A(\frac{h}{2}) - A(h)}{2^p - 1} \tag{2.1.10}$$

kifejezést adja,

Elsőrendű módszer ($p = 1$) esetén a $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ súlyokat, másodrendű módszer ($p = 2$) esetén a $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{4}{3}$ súlyokat, harmadrendű módszer ($p = 3$) esetén a $c_1 = -\frac{1}{7}$, $c_2 = \frac{8}{7}$ súlyokat kell használnunk.

2.2. Alkalmazás közönséges differenciálegyenlet-rendszerre

Legyen, az előző fejezetben szereplő $A(h)$ egy időfüggő közönséges differenciálegyenlethez vagy differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó Cauchy-feladat h időlépcsővel nyert numerikus megoldása.

Tekintsük az

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

kezdetiérték-feladatot, ahol $f : \mathbb{R}^{M+1} \to \mathbb{R}^M$, $y_0 \in \mathbb{R}^M$ adott kezdeti vektor, és y egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ típusú ismeretlen függvény. Definiáljuk a $[0, T]$ intervallumon az

$$\Omega_h := \{t_n = nh : n = 0, 1, \ldots, N_t\} \tag{2.2.2}$$

és

$$\Omega_{\frac{h}{2}} := \{t_k = k\tfrac{h}{2} : k = 0, 1, \ldots, 2N_t\}, \tag{2.2.3}$$

rácshálókat, ahol $N_t = \frac{T}{h}$. Azért van szükségünk két rácshálóra, mert ezen a két rácshálón fogjuk alkalmazni a Richardson-extrapolációt.

Legyen a (2.2.1) feladat $y(t)$ pontos megoldása $(p+1)$-szer folytonosan differenciálható, és tegyük fel, hogy ennek a feladatnak már kiszámítottuk a numerikus megoldását az Ω_h rács egy t_n időpillanatára, egy olyan numerikus módszerrel h és $\frac{h}{2}$ lépésközzel dolgozva, amely p-ed rendű és konvergens. Ekkor Ω_h rácshálón n lépést, $\Omega_{\frac{h}{2}}$ rácshálón pedig $k = 2n$ lépést tettünk meg. Jelölje az Ω_h-n kapott numerikus megoldást $z(t_n)$, az $\Omega_{\frac{h}{2}}$-n kapott megoldást pedig $w(t_n)$. Ekkor érvényesek lesznek az

$$y(t_n) - z(t_n) = K \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.2.4}$$

és

$$y(t_n) - w(t_n) = K \cdot (\tfrac{h}{2})^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.2.5}$$

összefüggések. A K együttható függ a feladattól, illetve a megoldási módszertől is, de nem függ a h lépésköztől.
Az előző alfejezethez hasonlóan keressük azt az

$$y_{RE}(t_n) = c_1 z(t_n) + c_2 w(t_n) \tag{2.2.6}$$

lineáris kombinációt, amely magasabb rendben közelíti $y(t_n)$-t, mint az alapmódszer. A (2.2.4) és (2.2.5) egyenlőségekből az

$$y_{RE}(t_n) = (c_1 + c_2)y(t_n) + (c_1 h^p + c_2(\tfrac{h}{2})^p)K + \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2.2.7}$$

egyenlőseget kapjuk.
Az előző alfejezethez hasonlóan K kiküszöbölésével, az

$$y_{RE}(t_n) = \frac{2^p w(t_n) - z(t_n)}{2^p - 1} \tag{2.2.8}$$

approximációt érjük el, amely $(p+1)$-ed rendben közelíti a pontos megoldást.
Ez elsőrendű módszer esetén az

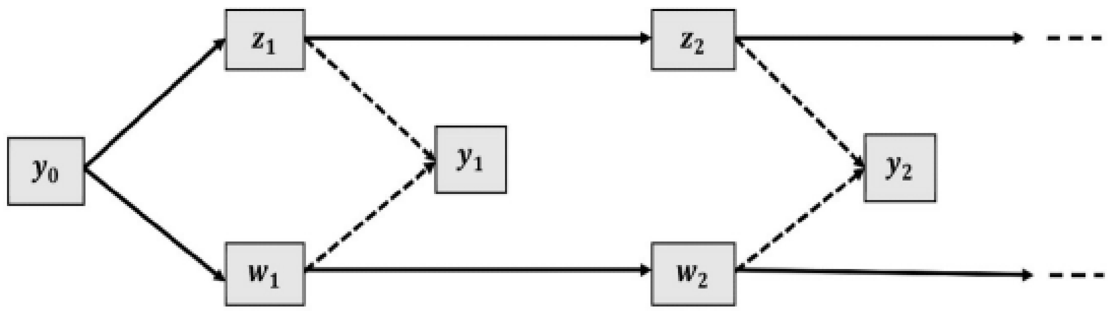
$$y_{RE}(t_n) = 2w(t_n) - z(t_n), \tag{2.2.9}$$

másodrendű módszer esetén pedig az

$$y_{RE}(t_n) = \frac{4}{3}w(t_n) - \frac{1}{3}z(t_n). \tag{2.2.10}$$

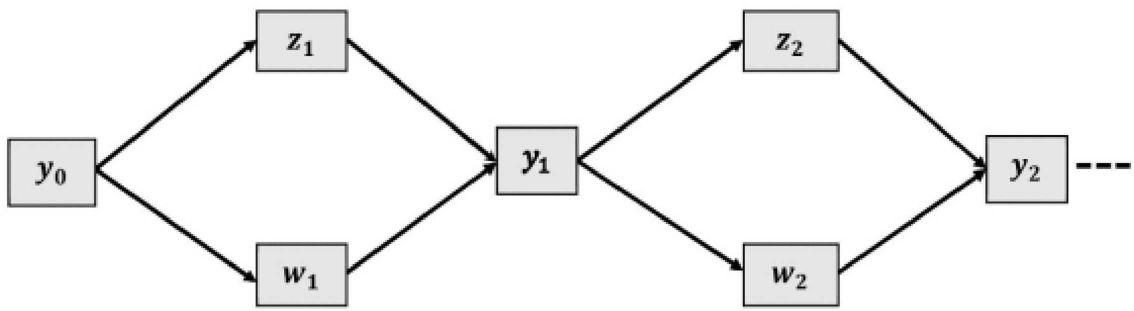
formulát szolgáltatja.
Amikor a Richardson-extrapolációt ezen módon alkalmazzuk, mindegyik időlépésnél a kiszá-

molt kombinált megoldást nem használjuk fel a továbblépéshez, így a pontosabb numerikus megoldás azután is meghatározható, miután a feladatot megoldottuk, mindkét rácson. Ezt passzív Richardson-extrapolációnak nevezzük, és a következő ábra szemlélteti:



1. ábra. A passzív Richardson-extrapoláció

Egy másik úton történő számolás az, amikor a durva rács minden időpillanatában kombináljuk mindkét rácson kapott megoldást, és ebből a kombinált megoldásból lépünk tovább. Ezt aktív Richarson-extrapolációnak nevezzük, és a következő ábra szemlélteti:



2. ábra. Az aktív Richardson-extrapoláció

3. Az ismételt Richardson-extrapoláció

Felmerül a kérdés, hogy lehet-e a Richardson-extrapoláció segítségével még magasabb rendű konvergenciát elérni. Erre egy lehetséges módszer az ismételt Richardson-extrapoláció (röviden IRE, az angol irodalomban Repeated Richardson Extrapolation, röviden RRE) [3] [4] [5] [6].

3.1. IRE módszer h, $\frac{h}{2}$ és $\frac{h}{4}$ lépésközzel

Tekintsük a (2.2.1) kezdetiérték-feladatot, ahol $f : \mathbb{R}^{M+1} \to \mathbb{R}^M$, $y_0 \in \mathbb{R}^M$ adott kezdeti vektor, és y egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ típusú ismeretlen függvény. Módosítsuk a Richardson-extrapoláció módszerét úgy, hogy nem két, hanem három különböző rácshálón nyert numerikus megoldásokat kombinálunk. Definiáljunk a $[0, T]$ intervallumon az

$$\Omega_h := \{t_n = nh : n = 0, 1, \ldots, N_t\}, \tag{3.1.1}$$

$$\Omega_{\frac{h}{2}} := \{t_k = k\frac{h}{2} : k = 0, 1, \ldots, 2N_t\} \tag{3.1.2}$$

és

$$\Omega_{\frac{h}{4}} := \{t_j = j\frac{h}{4} : j = 0, 1, \ldots, 4N_t\}, \tag{3.1.3}$$

rácshálókat, ahol $N_t = \frac{T}{h}$.

Legyen a (2.2.1) feladat $y(t)$ pontos megoldása $(p + 1)$-szer folytonosan differenciálható, és tegyük fel, hogy ennek a feladatnak már kiszámítottuk a numerikus megoldását az Ω_h rács egy t_n időpillanatára, egy olyan numerikus módszerrel h, $\frac{h}{2}$ és $\frac{h}{4}$ lépésközzel dolgozva, amely p-ed rendű és konvergens. Ekkor Ω_h rácshálón n lépést, $\Omega_{\frac{h}{2}}$ rácshálón $k = 2n$ lépést, $\Omega_{\frac{h}{4}}$ rácshálón pedig $j = 4n$ lépést tettünk meg.
Jelölje az Ω_h-n kapott numerikus megoldást $z(t_n)$, az $\Omega_{\frac{h}{2}}$-n kapott megoldást $w(t_n)$, $\Omega_{\frac{h}{4}}$-n kapott numerikus megoldást pedig $v(t_n)$. Ekkor érvényesek lesznek az

$$y(t_n) - z(t_n) = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}), \tag{3.1.4}$$

$$y(t_n) - w(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{2})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{2})^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \tag{3.1.5}$$

és

$$y(t_n) - v(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{4})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{4})^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \tag{3.1.6}$$

összefüggések. A K_1 és K_2 együttható függ a feladattól, illetve a megoldási módszertől is, de nem függ a h lépésköztől. Keressük azt az

$$y_{IRE}(t_n) = c_1 z(t_n) + c_2 w(t_n) + c_3 v(t_n) \tag{3.1.7}$$

lineáris kombinációt, amely kettővel magasabb rendben közelíti $y(t_n)$-t, mint az alapmódszer. A (3.1.4), (3.1.5) és (3.1.6) egyenlőségekből az

$$\begin{aligned} y_{IRE}(t_n) = (c_1 + c_2 + c_3)y(t_n) + (c_1 h^p + c_2(\tfrac{h}{2})^p + c_3(\tfrac{h}{4})^p)K_1 + \\ +(c_1 h^{p+1} + c_2(\tfrac{h}{2})^{p+1} + c_3(\tfrac{h}{4})^{p+1})K_2 + \mathcal{O}(h^{p+2}) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

egyenlőséget kapjuk.
K_1 és K_2 kiküszöbölésével az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{2^{2p+1}v(t_n) - 3 \cdot 2^p w(t_n) + z(t_n)}{2^{2p+1} - 3 \cdot 2^p + 1} \tag{3.1.9}$$

approximációt érjük el, amely $(p+2)$-ed rendben közelíti a pontos megoldást.
Ez elsőrendű módszer esetén az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{8}{3}v(t_n) - 2w(t_n) + \frac{1}{3}z(t_n) \tag{3.1.10}$$

másodrendű módszer esetén pedig az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{32}{21}v(t_n) - \frac{4}{7}w(t_n) + \frac{1}{21}z(t_n) \tag{3.1.11}$$

formulát szolgáltatja [2].

3.2. IRE módszer h, $\frac{h}{2}$ és $\frac{h}{3}$ lépésközzel

A [2] munkában bemutatásra kerül egy olyan, az irodalomban másutt nem vizsgált változata a Richardson-extrapolációnak, amelynek az imént bemutatott módszernél kisebb a számítási költsége: a harmadik rácsháló lépésköze ugyanis $\dfrac{h}{4}$ helyett $\dfrac{h}{3}$. Ennél a mószernél tehát a $[0, T]$ intervallumon az

$$\Omega_h := \{t_n = nh : n = 0, 1, \ldots, N_t\}, \tag{3.2.1}$$

$$\Omega_{\frac{h}{2}} := \{t_k = k\frac{h}{2} : k = 0, 1, \ldots, 2N_t\} \tag{3.2.2}$$

és

$$\Omega_{\frac{h}{3}} := \{t_j = j\frac{h}{3} : j = 0, 1, \ldots, 3N_t\}, \tag{3.2.3}$$

rácshálókat definiáljuk, ahol $N_t = \frac{T}{h}$.

Ekkor Ω_h rácshálón n lépést, $\Omega_{\frac{h}{2}}$ rácshálón $k = 2n$ lépést, $\Omega_{\frac{h}{3}}$ rácshálón pedig $j = 3n$ lépést tettünk meg.
Jelölje az Ω_h-n kapott numerikus megoldást $z(t_n)$, az $\Omega_{\frac{h}{2}}$-n kapott megoldást $w(t_n)$, $\Omega_{\frac{h}{3}}$-n ka-

pott numerikus megoldást pedig $v(t_n)$. Ekkor érvényesek lesznek az

$$y(t_n) - z(t_n) = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}), \tag{3.2.4}$$

$$y(t_n) - w(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{2})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{2})^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \tag{3.2.5}$$

és

$$y(t_n) - v(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{3})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{3})^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \tag{3.2.6}$$

összefüggések. A K_1 és K_2 konstans ismét független a h lépésköztől, de a feladattól, és a megoldási módszertől nem. Keressük azt az

$$y_{IRE}(t_n) = c_1 z(t_n) + c_2 w(t_n) + c_3 v(t_n) \tag{3.2.7}$$

lineáris kombinációt, amely kettővel magasabb rendben közelíti $y(t_n)$-t, mint az alapmódszer. A (3.1.4), (3.1.5) és (3.1.6) egyenlőségekből az

$$\begin{aligned} y_{IRE}(t_n) = (c_1 + c_2 + c_3) y(t_n) + (c_1 h^p + c_2 (\tfrac{h}{2})^p + c_3 (\tfrac{h}{3})^p) K_1 + \\ + (c_1 h^{p+1} + c_2 (\tfrac{h}{2})^{p+1} + c_3 (\tfrac{h}{3})^{p+1}) K_2 + \mathcal{O}(h^{p+2}) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

egyenlőséget kapjuk.
Ezúttal K_1 és K_2 kiküszöbölésével, az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{3^{p+1} v(t_n) - 2^{p+2} w(t_n) + z(t_n)}{3^{p+1} - 2^{p+2} + 1} \tag{3.2.9}$$

approximációt érjük el, amely szintén $(p+2)$-ed rendben közelíti a pontos megoldást.
Ez elsőrendű módszer esetén az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{9}{2} v(t_n) - 4 w(t_n) + \frac{1}{2} z(t_n) \tag{3.2.10}$$

másodrendű módszer esetén pedig az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{9}{4} v(t_n) - \frac{4}{3} w(t_n) + \frac{1}{12} z(t_n) \tag{3.2.11}$$

formulát szolgáltatja[2].

3.3. IRE módszer h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{3}$ és $\frac{h}{4}$ lépésközzel

Természetes módon kínálkozik az ötlet, hogy a rendet tovább növeljük háromnál több rácsháló alkalmazásával. A rácshálók lépésközét ismét többféle módon választhatjuk meg. A legegyszerűbb lehetséges megoldás az, amikor ezek a lépésközök h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{3}$ és $\frac{h}{4}$, azaz definiáljuk a $[0, T]$

intervallumon az

$$\Omega_h := \{t_n = nh : n = 0, 1, \dots, N_t\}, \tag{3.3.1}$$

$$\Omega_{\frac{h}{2}} := \{t_k = k\frac{h}{2} : k = 0, 1, \dots, 2N_t\}, \tag{3.3.2}$$

$$\Omega_{\frac{h}{3}} := \{t_j = j\frac{h}{3} : j = 0, 1, \dots, 3N_t\}, \tag{3.3.3}$$

és

$$\Omega_{\frac{h}{4}} := \{t_i = i\frac{h}{4} : i = 0, 1, \dots, 4N_t\}, \tag{3.3.4}$$

rácshálókat, ahol $N_t = \frac{T}{h}$.

Ekkor Ω_h rácshálón n lépést, $\Omega_{\frac{h}{2}}$ rácshálón $k = 2n$ lépést, $\Omega_{\frac{h}{3}}$ rácshálón $j = 3n$ lépést, $\Omega_{\frac{h}{4}}$ rácshálón pedig $i = 4n$ lépést tettünk meg.
Jelölje az Ω_h-n kapott numerikus megoldást $z(t_n)$, az $\Omega_{\frac{h}{2}}$-n kapott numerikus megoldást $w(t_n)$, $\Omega_{\frac{h}{3}}$-n kapott numerikus megoldást $v(t_n)$, $\Omega_{\frac{h}{4}}$-n kapott numerikus megoldást pedig $u(t_n)$. Ekkor érvényesek lesznek az

$$y(t_n) - z(t_n) = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + K_3 \cdot h^{p+2} + \mathcal{O}(h^{p+3}), \tag{3.3.5}$$

$$y(t_n) - w(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{2})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{2})^{p+1} + K_3 \cdot (\tfrac{h}{2})^{p+2} + \mathcal{O}(h^{p+3}), \tag{3.3.6}$$

$$y(t_n) - v(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{3})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{3})^{p+1} + K_3 \cdot (\tfrac{h}{3})^{p+2} + \mathcal{O}(h^{p+3}) \tag{3.3.7}$$

és

$$y(t_n) - u(t_n) = K_1 \cdot (\tfrac{h}{4})^p + K_2 \cdot (\tfrac{h}{4})^{p+1} + K_3 \cdot (\tfrac{h}{4})^{p+2} + \mathcal{O}(h^{p+3}) \tag{3.3.8}$$

összefüggések. A K_1, K_2 és K_3 függ a feladattól, illetve a megoldási módszertől is, de nem függ a h lépésköztől. Keressük azt az

$$y_{IRE}(t_n) = c_1 z(t_n) + c_2 w(t_n) + c_3 v(t_n) + c_4 u(t_n) \tag{3.3.9}$$

lineáris kombinációt, amely magasabb rendben közelíti $y(t_n)$-t. A (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) és (3.3.8) egyenlőségekből az

$$\begin{aligned} y_{IRE}(t_n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)y(t_n) + (c_1 h^p + c_2(\tfrac{h}{2})^p + c_3(\tfrac{h}{3})^p + c_4(\tfrac{h}{4})^p)K_1 + \\ +(c_1 h^{p+1} + c_2(\tfrac{h}{2})^{p+1} + c_3(\tfrac{h}{3})^{p+1} + c_4(\tfrac{h}{4})^{p+1})K_2 + \\ +(c_1 h^{p+2} + c_2(\tfrac{h}{2})^{p+2} + c_3(\tfrac{h}{3})^{p+2} + c_4(\tfrac{h}{4})^{p+2})K_3 + \mathcal{O}(h^{p+3}) \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

egyenlőséget kapjuk.
K_1, K_2 és K_3 kiküszöbölésével, az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{16 \cdot 4^p u(t_n) - 27 \cdot 3^p v(t_n) + 12 \cdot 2^p w(t_n) - z(t_n)}{12 \cdot 2^p - 27 \cdot 3^p + 16 \cdot 4^p - 1} \tag{3.3.11}$$

approximációt érjük el, amely $(p+3)$-ad rendben közelíti a pontos megoldást.
Ez elsőrendű módszer esetén az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{32}{3}u(t_n) - \frac{27}{2}v(t_n) + 4w(t_n) - \frac{1}{6}z(t_n) \tag{3.3.12}$$

másodrendű módszer esetén pedig az

$$y_{IRE}(t_n) = \frac{64}{15}u(t_n) - \frac{81}{20}v(t_n) + \frac{4}{5}w(t_n) - \frac{1}{60}z(t_n) \tag{3.3.13}$$

formulát szolgáltatja [2].

4. Stabilitás rögzített rácson

Ebben a fejezetben a rögzített rácson való stabilitással fogunk foglalkozni, illetve az egyes ismételt Richardson-extrapolációval kombinált konkrét módszereknek a stabilitási függvényét ábrázoljuk Matlab kód segítségével [1].

4.1. Stabilitási fogalmak

A következő stabilitási fogalmak egy egylépéses módszer viselkedését az úgynevezett Dahlquist-féle skaláris tesztfeladaton jellemzik [7]:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ rögzített szám. Ennek a tesztfeladatnak a pontos megoldása az $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ függvény. Ez a függvény $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ esetén a $[0, \infty)$ intervallumon korlátos, illetve ha $\mathrm{Re}\lambda < 0$, akkor $t \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Elvárjuk azt, hogy a numerikus megoldás szintén rendelkezzen ezekkel a tulajdonságokkal egy rögzített lépésközű rácson.
Legyen $\mu := h\lambda$. Ekkor egy egylépéses numerikus módszer a (4.1.1) feladatra való alkalmazása esetén az n-edik időrétegről az $(n+1)$-edikre való továbblépés operátora kifejezhető μ-vel az

$$y_{n+1} = R(\mu) y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.2}$$

egyenlőséggel, amelyből az

$$y_{n+1} = R(\mu)^{n+1} y_0 \tag{4.1.3}$$

egyenlőséget kapjuk. Ezt az $R(\mu)$ függvényt az adott numerikus módszer stabilitási függvényének nevezzük. Tekintsük az explicit Euler-módszert (rövien EE), amelynek a képlete

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.1.4}$$

Ezt a (4.1.1) feladatra alkalmazva az

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda) y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.5}$$

összefüggésre jutunk, amelyből megkapjuk, hogy az explicit Euler-módszer stabilitási függvénye $R(\mu) = (1 + h\lambda)$. Tekintsük az implicit Euler-módszert (röviden IE), amelynek a képlete

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.6}$$

Ezt a (4.1.4) feladatra alkalmazva az

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.7}$$

összefüggésre jutunk, amelyből megkapjuk, hogy az implicit Euler-módszer stabilitási függvénye $R(\mu) = \frac{1}{1-h\lambda}$. Tekintsük az középponti módszert (röviden KP), amelynek a képlete

$$y_{n+1} = y_n + hf(\frac{1}{2}f(t_n, y_n), \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1})), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.8}$$

Ezt a (4.1.1) feladatra alkalmazva az

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.9}$$

összefüggésre jutunk, amelyből megkapjuk, hogy a középponti módszer stabilitási függvénye $R(\mu) = \frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda}$.
Nyilvánvalóan egy egylépéses módszer alkalmazása esetén a közelítő megoldás pontosan akkor lesz korlátos a $[0, \infty[$ intervallum rácspontjaiban, ha a módszer stabilitási függvényére $|R(\mu)| \leq 1$. A módszer stabilitási tartományán azon $\mu \in \mathbb{C}$ pontok halmazát értjük, amelyekre $|R(\mu)| \leq 1$ [1].

1. Definíció. [1] Egy egylépéses numerikus módszert A-stabilnak nevezünk, ha stabilitási tartománya magában foglalja az egész bal félsíkot (a képzetes tengellyel együtt), vagyis a módszer $R(\mu)$ stabilitási függvényére

$$|R(\mu)| \leq 1 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}^-. \tag{4.1.10}$$

2. Definíció. [1] Egy egylépéses numerikus módszert erősen A-stabilnak nevezünk, ha A-stabil, és

$$\lim_{|\mu| \to \infty} |R(\mu)| \leq 1. \tag{4.1.11}$$

3. Definíció. [1] Egy egylépéses numerikus módszert erősen L-stabilnak nevezünk, ha A-stabil, és

$$\lim_{|\mu| \to \infty} |R(\mu)| = 0. \tag{4.1.12}$$

4.2. Az ismételt Richardson-extrapolációval kapott módszerek stabilitása

Tekintsük az egyik legelterjedtebb egylépéses numerikus módszert, a θ-módszert, amelynek képlete

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.2.1}$$

ahol $\theta \in [0, 1]$ súlyparaméter. Speciálisan $\theta = 0$ eseten az explicit Euler-módszert, $\theta = 1$ esetén az implicit Euler-módszert, $\theta = \frac{1}{2}$ esetén pedig a középponti módszert adja. $\theta = \frac{1}{2}$ esetén másodrendű ($p = 2$), más esetben elsőrendű ($p = 1$) módszert kapunk. Alkalmazzuk az ismételt Richardson-extrapolációt! Tegyük fel hogy az n-edik időrétegre már meghatároztuk a numerikus megoldást, ezt jelölje y_n, és legyen $t_{n+k} := t_n + \frac{1}{k}h$ ahol $k \in \mathbb{N}^+$, a rácsháló lépésszáma. A stabilitási függvény alakja függ attól, hogy az ismételt Richardson-extrapoláció alkalmazása során milyen rácshálókat használunk. Tekintsük a (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) rácshálókat. Ekkor a numerikus megoldást a következő lépésekben határozzuk meg:

1. lépés: teszünk egy időlépést a (3.1.1) rácson:

$$z_{n+1} = y_n + h[(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, z_{n+1})] \tag{4.2.2}$$

2. lépés: teszünk két fél időlépést a (3.1.2) rácson:

$$\begin{aligned} w_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{1}{2}h[(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+\frac{1}{2}}, w_{n+\frac{1}{2}})] \\ w_{n+1} &= w_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}) + \theta f(t_{n+1}, w_{n+1})] \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

3. lépés: teszünk négy negyed időlépést a (3.1.3) rácson:

$$\begin{aligned} v_{n+\frac{1}{4}} &= y_n + \frac{1}{4}h[(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+\frac{1}{4}}, v_{n+\frac{1}{4}})] \\ v_{n+\frac{2}{4}} &= v_{n+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{1}{4}}, y_{n+\frac{1}{4}}) + \theta f(t_{n+\frac{2}{4}}, v_{n+\frac{2}{4}})] \\ v_{n+\frac{3}{4}} &= v_{n+\frac{2}{4}} + \frac{1}{4}h[(1-\theta)f(t_{n\frac{2}{4}}, y_{n+\frac{2}{4}}) + \theta f(t_{n+\frac{3}{4}}, v_{n+\frac{3}{4}})] \\ v_{n+1} &= v_{n+\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{3}{4}}, y_{n+\frac{3}{4}}) + \theta f(t_{n+1}, v_{n+1})] \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

4. lépés: kiszámítjuk a kombinált megoldást, $\theta \neq \frac{1}{2}$ esetén az

$$y_n = \frac{8}{3}v_n - 2w_n + \frac{1}{3}z_n \tag{4.2.5}$$

illetve $\theta = \frac{1}{2}$ pedig az

$$y_n = \frac{32}{21}v_n - \frac{4}{7}w_n + \frac{1}{21}z_n \tag{4.2.6}$$

képlet szerint.

Általánosan ha k darab $\frac{1}{k}$-ad hosszúságú lépést teszünk meg egy olyan $[0, T]$ intervallumon definiált

$$\Omega_{\frac{h}{k}} := \{t_j = j\frac{h}{k} : j = 0, 1, \ldots, kN_t\} \tag{4.2.7}$$

rácson, ahol $N_t = \frac{T}{h}$, akkor azt a következőképpen kell megtennünk. Legyen g_n az $\Omega_{\frac{h}{k}}$ rácshálón kapott numerikus megoldás az n-edik időrétegen.

k. lépés: teszünk k darab $\frac{1}{k}$-ad időlépést a (4.2.7) rácson:

$$\begin{aligned}
g_{n+\frac{1}{k}} &= y_n + \frac{1}{k}h[(1-\theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+\frac{1}{k}}, g_{n+\frac{1}{k}})] \\
g_{n+\frac{2}{k}} &= g_{n+\frac{1}{k}} + \frac{1}{k}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{1}{k}}, y_{n+\frac{1}{k}}) + \theta f(t_{n+\frac{2}{k}}, g_{n+\frac{2}{k}})] \\
&\vdots \\
g_{n+\frac{k-1}{k}} &= g_{n+\frac{k-2}{k}} + \frac{1}{k}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{k-2}{k}}, y_{n+\frac{k-2}{k}}) + \theta f(t_{n+\frac{k-1}{k}}, g_{n+\frac{k-1}{k}})] \\
g_{n+1} &= g_{n+\frac{k-1}{k}} + \frac{1}{k}h[(1-\theta)f(t_{n+\frac{k-1}{k}}, y_{n+\frac{k-1}{k}}) + \theta f(t_{n+1}, g_{n+1})]
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

A rögzített rácson való stabilitás vizsgálatához meghatározzuk az ismételt Richardson-extrapolációval kombinált θ-módszer stabilitási függvényét. Ha a módszert a (4.1.1) Dahlquist-féle tesztfeladatra alkalmazzuk, akkor a

$$z_{n+1} = \frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu} y_n \tag{4.2.9}$$

$$w_{n+1} = \left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 y_n \tag{4.2.10}$$

és

$$v_{n+1} = \left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{4}}{1-\theta\frac{\mu}{4}}\right)^4 y_n \tag{4.2.11}$$

numerikus megoldásokat kapjuk a három különböző rácson. Ezekből könnyen levezethető, hogy a keresett stabilitási függvény $\theta \neq \frac{1}{2}$ esetén

$$R(\mu) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu}\right) - 2\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{4}}{1-\theta\frac{\mu}{4}}\right)^4\right], \tag{4.2.12}$$

és $\theta = \frac{1}{2}$ esetén

$$R(\mu) = \left[\frac{1}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right) - \frac{4}{7}\left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^2 + \frac{32}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{8}}{1-\frac{\mu}{8}}\right)^4\right]. \tag{4.2.13}$$

Általánosan a

$$g_{n+1} = \left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{k}}{1-\theta\frac{\mu}{k}}\right)^k y_n \tag{4.2.14}$$

egyenlőséget kapjuk, amelyből könnyen megállapítható, hogy ha $\frac{h}{k}$-s hosszúságú lépésközzel dolgozunk, akkor ennek a lépésközű numerikus megoldásnak a stabilitási függvénye

$$R(\mu) = \left(\frac{1 + (1-\theta)\dfrac{\mu}{k}}{1 - \theta\dfrac{\mu}{k}} \right)^k, \tag{4.2.15}$$

természetesen ezt kombinálni kell a korábban kiszámolt együtthatókkal.

4.3. Az IRE(124) módszerrel kombinált stabilitási tartományok

A θ-módszerrel kombinált IRE(124) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 + (1-\theta)\mu}{1 - \theta\mu} \right) - 2 \left(\frac{1 + (1-\theta)\dfrac{\mu}{2}}{1 - \theta\dfrac{\mu}{2}} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{1 + (1-\theta)\dfrac{\mu}{4}}{1 - \theta\dfrac{\mu}{4}} \right)^4 \right] y_n. \tag{4.3.1}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

$$R(\mu) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + (1-\theta)\mu}{1 - \theta\mu} \right) - 2 \left(\frac{1 + (1-\theta)\dfrac{\mu}{2}}{1 - \theta\dfrac{\mu}{2}} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{1 + (1-\theta)\dfrac{\mu}{4}}{1 - \theta\dfrac{\mu}{4}} \right)^4 \tag{4.3.2}$$

függvény.

4.3.1. Az EE+IRE(124) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 0$ esetén az explicit Euler-módszerrel kombinált IRE(124) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{3} (1 + \mu) - 2 \left(1 + \frac{\mu}{2} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(1 + \frac{\mu}{4} \right)^4 \right] y_n. \tag{4.3.3}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

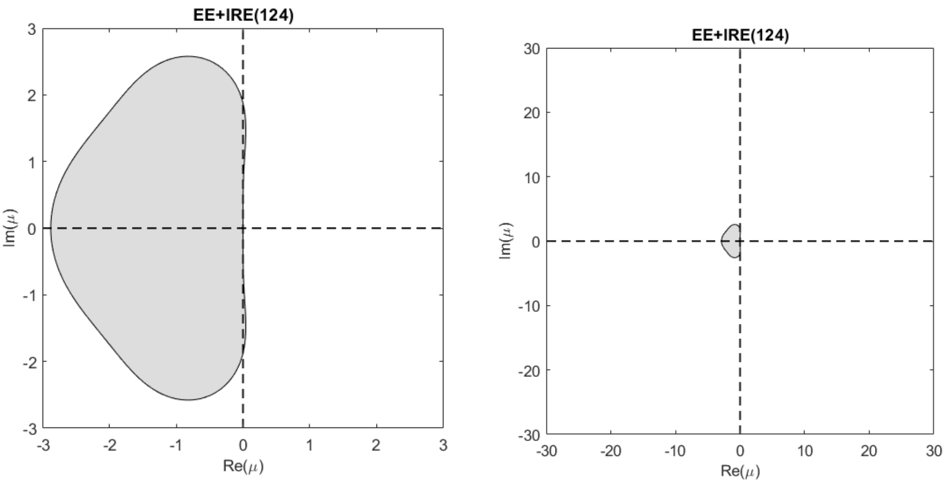
$$R(\mu) = \frac{1}{3} (1 + \mu) - 2 \left(1 + \frac{\mu}{2} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(1 + \frac{\mu}{4} \right)^4 \tag{4.3.4}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az explicit Euler-modszer+IRE(124) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all
```

```

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_EE_124 = -abs(1/3.*(1+mu)-2.*(1+(mu./2)).^2+8/3.*(1+(mu./4)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_EE_124,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('EE+IRE(124)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



3. ábra. Az EE+IRE(124) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.3.2. Az IE+IRE(124) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 1$ esetén az implicit Euler-módszerrel kombinált IRE(124) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) - 2\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{4}}\right)^4\right] y_n \tag{4.3.5}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

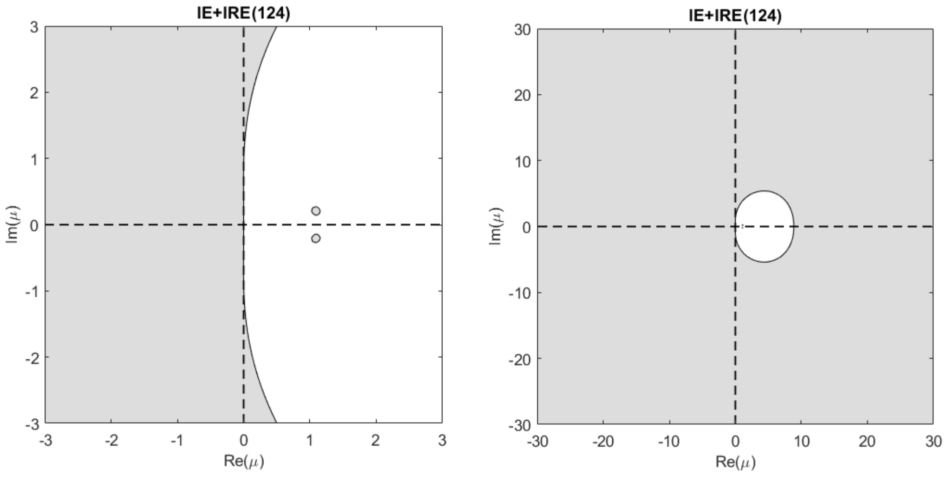
$$R(\mu) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) - 2\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{4}}\right)^4 \tag{4.3.6}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az implicit Euler-modszer+IRE(124) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```
%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_IE_124 = -abs(1/3.*(1./(1-mu))-2.*(1./(1-mu./2))
    .^2+8/3.*(1./(1-mu./4)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_IE_124,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('IE+IRE(124)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



4. ábra. Az IE+IRE(124) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.3.3. Az KP+IRE(124) módszer stabilitási tartománya

$\theta = \frac{1}{2}$ esetén a középponti módszerrel kombinált IRE(124) másodrendű módszer ($p = 2$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right) - \frac{4}{7}\left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^2 + \frac{32}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{8}}{1-\frac{\mu}{8}}\right)^4\right] y_n \tag{4.3.7}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

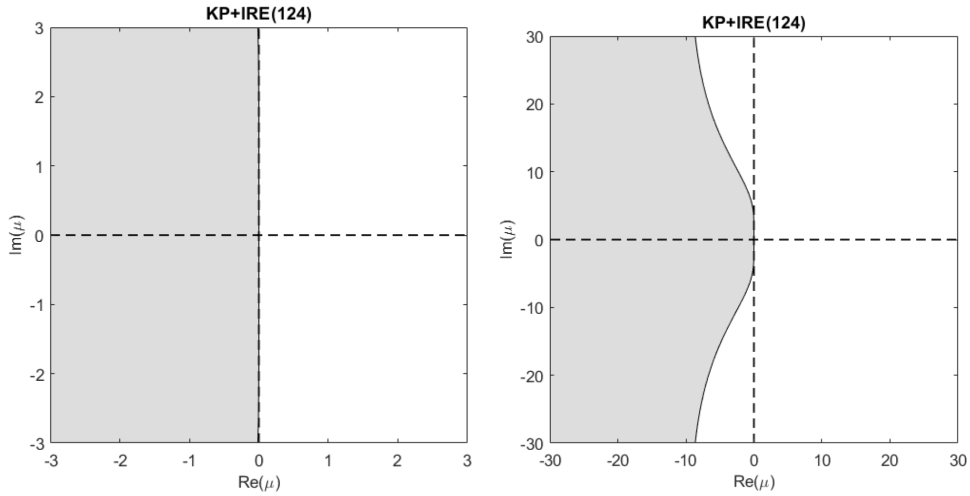
$$R(\mu) = \frac{1}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right) - \frac{4}{7}\left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^2 + \frac{32}{21}\left(\frac{1+\frac{\mu}{8}}{1-\frac{\mu}{8}}\right)^4 \tag{4.3.8}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az kozepponti modszer+IRE(124) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```
%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_KP_124 = -abs(1/21.*((1+mu./2)./(1-mu./2))-4/7.*((1+mu./4)
    ./(1-mu./4)).^2+32/21.*((1+mu./8)./(1-mu./8)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_KP_124,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('KP+IRE(124)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



5. ábra. A KP+IRE(124) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.4. Az IRE(123) módszerrel kombinált stabilitási tartományok

A θ-módszerrel kombinált IRE(123) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu}\right) - 4\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{3}}{1-\theta\frac{\mu}{3}}\right)^3\right] y_n \quad (4.4.1)$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

$$R(\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu}\right) - 4\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{3}}{1-\theta\frac{\mu}{3}}\right)^3 \quad (4.4.2)$$

függvény.

4.4.1. Az EE+IRE(123) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 0$ esetén az explicit Euler-módszerrel kombinált IRE(123) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{2}(1+\mu) - 4\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(1+\frac{\mu}{3}\right)^3\right] y_n \quad (4.4.3)$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

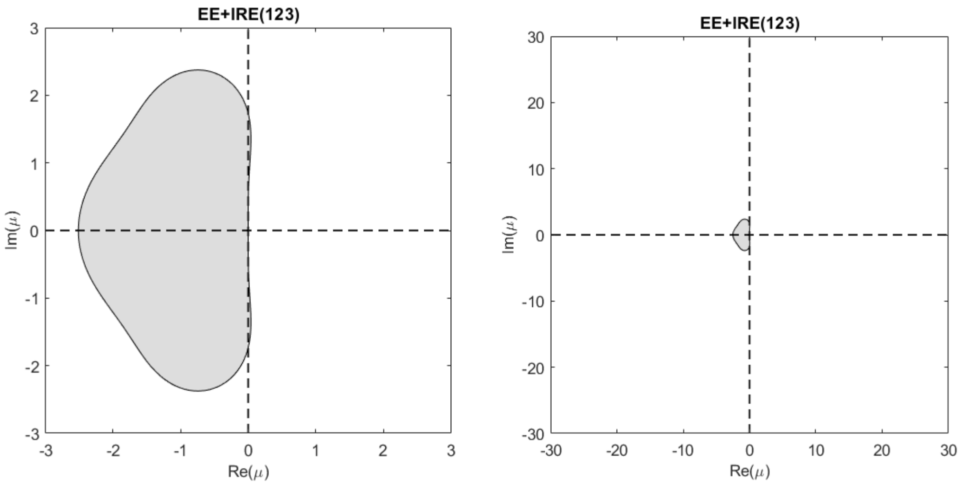
$$R(\mu) = \frac{1}{2}(1+\mu) - 4\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(1+\frac{\mu}{3}\right)^3 \tag{4.4.4}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az explicit Euler-modszer+IRE(123) stabilitasi tartomanyanak abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_EE_123 = -abs(1/2.*(1+mu)-4.*(1+(mu./2)).^2+9/2.*(1+(mu./3)).^3);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_EE_123,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('EE+IRE(123)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
```

```
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



6. ábra. Az EE+IRE(123) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.4.2. Az IE+IRE(123) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 1$ esetén az implicit Euler-módszerrel kombinált IRE(123) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) - 4\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{3}}\right)^3\right] y_n \qquad (4.4.5)$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

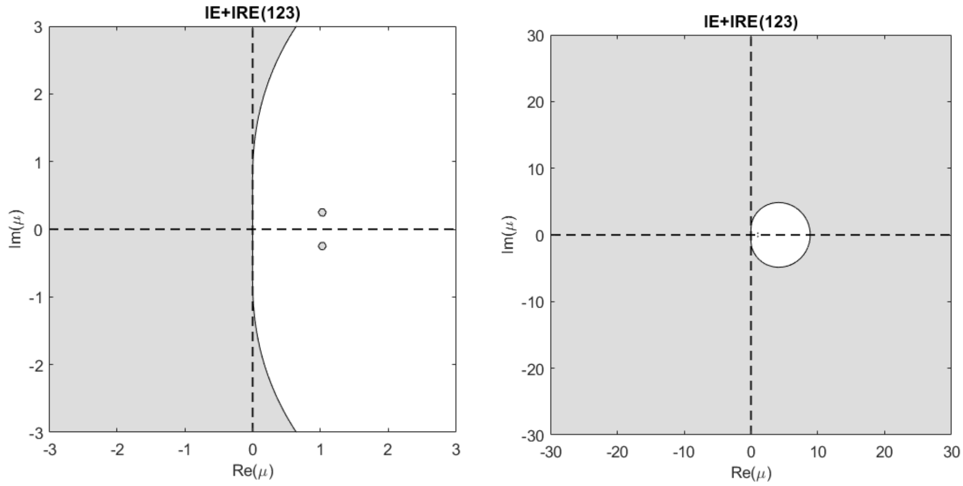
$$R(\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) - 4\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{2}}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{3}}\right)^3 \qquad (4.4.6)$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az implicit Euler-modszer+IRE(123) stabilitasi tartomanyanak abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
```

```
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_IE_123 = -abs(1/2.*(1./(1-mu))-4.*(1./(1-mu./2))
   .^2+9/2.*(1./(1-mu./3)).^3);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_IE_123,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('IE+IRE(123)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



7. ábra. Az IE+IRE(123) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.4.3. Az KP+IRE(123) módszer stabilitási tartománya

$\theta = \frac{1}{2}$ esetén a középponti módszerrel kombinált IRE(123) másodrendű módszer ($p = 2$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}} \right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1+\frac{\mu}{6}}{1-\frac{\mu}{6}} \right)^3 \right] y_n \tag{4.4.7}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

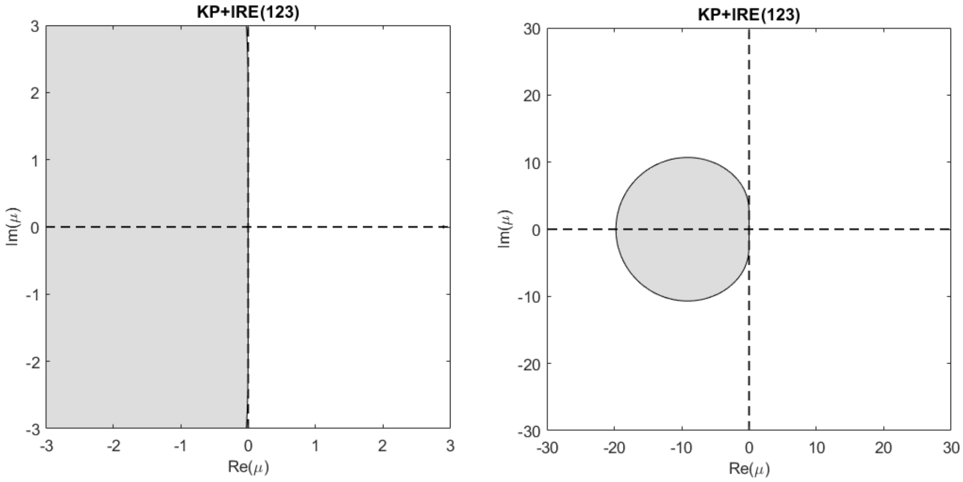
$$R(\mu) = \frac{1}{12} \left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}} \right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1+\frac{\mu}{6}}{1-\frac{\mu}{6}} \right)^3 \tag{4.4.8}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az kozepponti modszer+IRE(123) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```
%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_KP_123 = -abs(1/12.*((1+mu./2)./(1-mu./2))-4/3.*((1+mu./4)
    ./(1-mu./4)).^2+9/4.*((1+mu./6)./(1-mu./6)).^3);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_KP_123,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('KP+IRE(123)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



8. ábra. A KP+IRE(123) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.5. Az IRE(1234) módszerrel kombinált stabilitási tartományok

A θ-módszerrel kombinált IRE(1234) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[-\frac{1}{6}\left(\frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu}\right) + 4\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 - \right. \\ \left. -\frac{27}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{3}}{1-\theta\frac{\mu}{3}}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{4}}{1-\theta\frac{\mu}{4}}\right)^4 \right] y_n \tag{4.5.1}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

$$R(\mu) = \left[-\frac{1}{6}\left(\frac{1+(1-\theta)\mu}{1-\theta\mu}\right) + 4\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{2}}{1-\theta\frac{\mu}{2}}\right)^2 - \right. \\ \left. -\frac{27}{2}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{3}}{1-\theta\frac{\mu}{3}}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(\frac{1+(1-\theta)\frac{\mu}{4}}{1-\theta\frac{\mu}{4}}\right)^4 \right] \tag{4.5.2}$$

függvény.

4.5.1. Az EE+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 0$ esetén az explicit Euler-módszerrel kombinált IRE(1234) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[-\frac{1}{6}(1+\mu) + 4\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2 - \frac{27}{2}\left(1+\frac{\mu}{3}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(1+\frac{\mu}{4}\right)^4\right] y_n \tag{4.5.3}$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

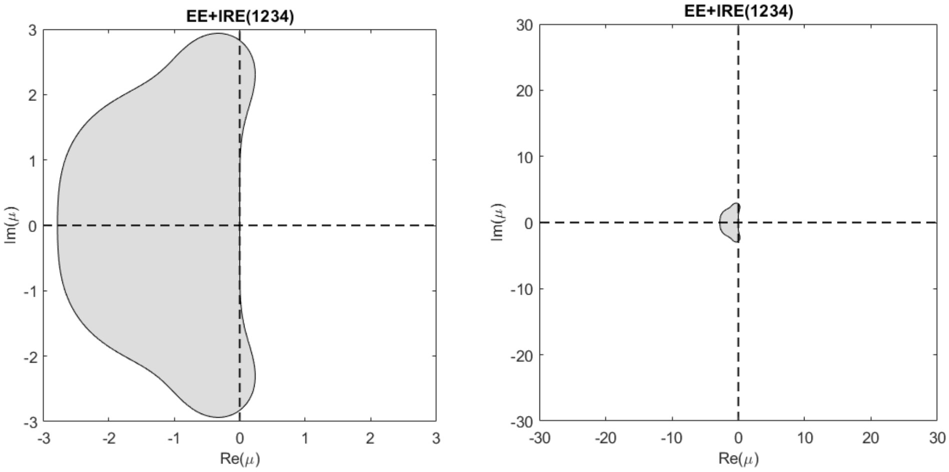
$$R(\mu) = -\frac{1}{6}(1+\mu) + 4\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2 - \frac{27}{2}\left(1+\frac{\mu}{3}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(1+\frac{\mu}{4}\right)^4 \tag{4.5.4}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az explicit Euler-modszer+IRE(1234) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_EE_1234 = -abs(-1/6.*(1+mu)+4.*(1+(mu./2)).^2-27/2.*(1+(mu
   ./3)).^3+32/3.*(1+(mu./4)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_EE_1234,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
```

```
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('EE+IRE(1234)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



9. ábra. Az EE+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.5.2. Az IE+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya

$\theta = 1$ esetén az implicit Euler-módszerrel kombinált IRE(1234) elsőrendű módszer ($p = 1$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) + 4\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{2}}\right)^2 - \frac{27}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{3}}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^4 \right] y_n \tag{4.5.5}$$

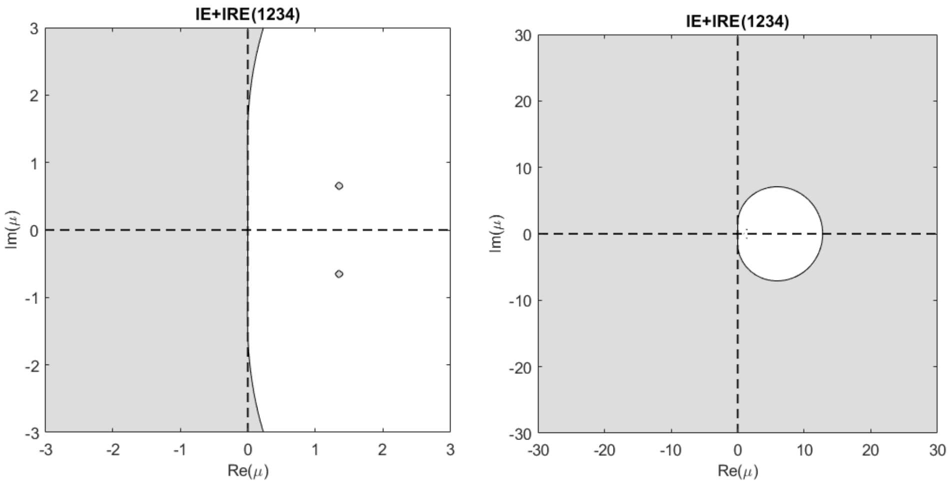
Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

$$R(\mu) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\mu}\right) + 4\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{2}}\right)^2 - \frac{27}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{3}}\right)^3 + \frac{32}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^4 \tag{4.5.6}$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az implicit Euler-modszer+IRE(1234) stabilitasi tartomanyanak abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_IE_1234 = -abs(-1/6.*(1./(1-mu))+4.*(1./(1-mu./2)).^2-27/2.*(1./(1-mu./3)).^3+32/3.*(1./(1-mu./4)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_IE_1234,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('IE+IRE(1234)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



10. ábra. Az IE+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.5.3. Az KP+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya

$\theta = \frac{1}{2}$ esetén a középponti módszerrel kombinált IRE(1234) másodrendű módszer ($p = 2$) a következő egyenlőséget adja:

$$y_{n+1} = \left[-\frac{1}{60}\left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^2 - \frac{81}{20}\left(\frac{1+\frac{\mu}{6}}{1-\frac{\mu}{6}}\right)^3 + \frac{64}{15}\left(\frac{1+\frac{\mu}{8}}{1-\frac{\mu}{8}}\right)^4 \right] y_n \quad (4.5.7)$$

Könnyen megállapítható, hogy ennek a módszernek a stabilitási függvénye az

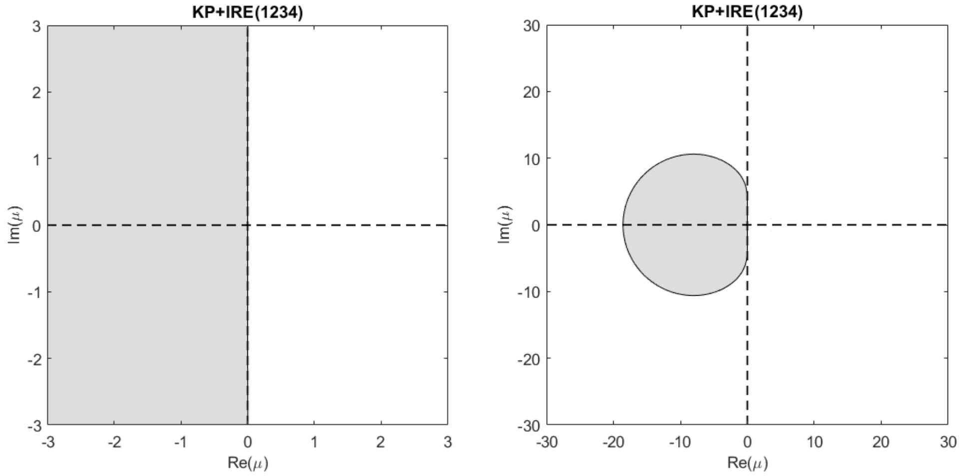
$$R(\mu) = -\frac{1}{60}\left(\frac{1+\frac{\mu}{2}}{1-\frac{\mu}{2}}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1+\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{4}}\right)^2 - \frac{81}{20}\left(\frac{1+\frac{\mu}{6}}{1-\frac{\mu}{6}}\right)^3 + \frac{64}{15}\left(\frac{1+\frac{\mu}{8}}{1-\frac{\mu}{8}}\right)^4 \quad (4.5.8)$$

függvény. A módszer stabilitási függvényét a következő Matlab kóddal ábrázoltuk:

```
%Az kozepponti modszer+IRE(1234) stabilitasi tartomanyanak
   abrazolasa
close all
clear all

%Az abrazolashoz szukseges tengelyek
x = -30:0.05:50;
y = -30:0.05:30;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```

%A stabilitasi fuggveny felirasa
mu = X+i*Y;
Z_KP_1234 = -abs(-1/60.*((1+mu./2)./(1-mu./2))+4/5.*((1+mu./4)
   ./(1-mu./4)).^2-81/20.*((1+mu./6)./(1-mu./6)).^3 ...
    +64/15.*((1+mu./8)./(1-mu./8)).^4);

%A stabilitasi regio abrazolasa
v = [-1,-1];
contourf(X,Y,Z_KP_1234,v);

%A stabilitasi regio szurkere szinezese
clr = [221 221 221]/255;
colormap(clr)

%Az abrazolas parameterei
LW = 'LineWidth'; lw = 1;
hold on
plot([min(x) max(x)],[0 0],'k--',LW,lw)  %Szaggatott vonal az x
plot([0 0],[min(y) max(y)],'k--',LW,lw)  %es y tengelyek menten
axis equal
%Ketfele tengelymeret az atlathatosag kedveert
axis([-3 3 -3 3])
%axis([-30 30 -30 30])
title('KP+IRE(1234)')
xlabel('Re(\mu)', 'FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
ylabel('Im(\mu)','FontName', 'AvantGarde','FontSize'   , 10)
set(gcf,'color','white')
```

Kimeneti eredmény:



11. ábra. A KP+IRE(1234) módszer stabilitási tartománya két különböző tengelyméretválasztással

4.6. Numerikus kísérlet KP+IRE(124) és KP+IRE(123) módszerekre

A középponti módszernél az IRE(123) (8) és IRE(124) (5) módszerek stabilitási tartománya gyökeresen más képet mutat, így ezekkel érdemes mélyebben foglalkozni. A KP + IRE(123) módszernek korlátos a stabilitási tartománya, míg a KP + IRE(124) módszer közel A-stabilnak tűnik. Célunk numerikus kísérlettel is alátámasztani ezen eredményünket. Olyan feladatot konstruálunk, amelyet megfelelően megválasztott h lépésközzel megoldva kimutatható a két módszer közötti minőségi eltérés a rögzített rácson való stabilitás szempontjából.

A -30 valós szám a KP + IRE(123) módszernél kívül esik a stabilitási tartományon, míg a KP + IRE(124) módszernél annak belsejében található. Olyan kétismeretlenes lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszert írunk fel, amelynek egyik sajátértéke -300. Ilyen módon $h = 0,1$ esetén $\mu = -300h = -30$ a KP + IRE(123) módszernél a stabilitási tartományon kívül, míg a KP + IRE(124) módszernél azon belül van. Tekintsük az

$$\begin{aligned} y'(t) = Ay(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) = (100, 150) \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

feladatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 280 & -2900 \\ 58 & -590 \end{bmatrix} \tag{4.6.2}$$

Ezen A mártix sajátértékei -300 és -10. A $\theta = \frac{1}{2}$ módszer lineáris feladatra:

$$y^{n+1} = (I - h\theta A)^{-1}(I + h(1 - \theta)A)y^n \tag{4.6.3}$$

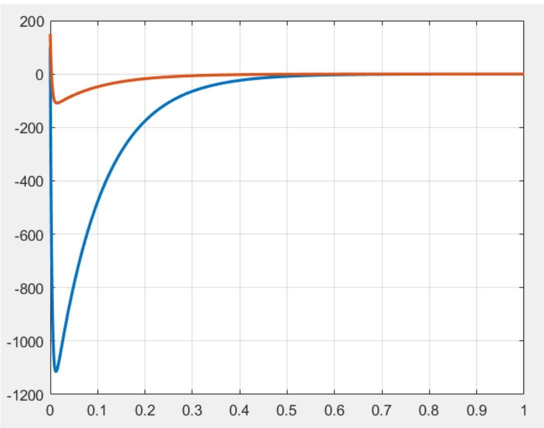
A következő Matlab kóddal kiszámoltuk a pontos megoldást, valamint a KP, a KP + IRE(123) és a KP + IRE(124) módszerrel a $h = 0.1$ lépésközzel kapott numerikus megoldásokat a $[0, 1]$ intervallumon.

```
clear all
close all
y0 = [100, 150]';
V = [5 20; 1 2];
D = [-300 0; 0  -10];
A = V*D/V;
eigs(A);
y = y0;
t0 = 0;
h = 0.001;
t(1)=t0;
for i =2:1001
    t(i) = t0 + (i-1)*h;
    y = [y expm(A*t(i))*y0];
end
% A pontos megoldas abrazolasa
figure(1)
plot(t,y(1,:),t,y(2,:),'LineWidth',2)
grid on

%Megoldas a KP modszerrel
dt = 0.1;
y_KP = y0;
theta = 0.5;
for i = 2:(1/dt + 1);
    t_KP(i) = t0 + (i-1)*dt;
    y_KP(:,i) = (eye(2)-dt*theta*A)\(eye(2)+dt*(1-theta)*A)*
       y_KP(:,i-1);
end
figure(2)
plot(t_KP,y_KP,'LineWidth',2)
grid on

%Megoldas a KP + IRE(123) modszerrel
dt = 0.1;
y_KP123 = y0;
```

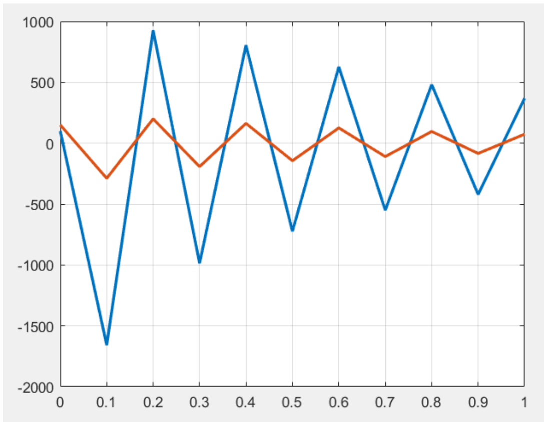
```
theta = 0.5;
for i = 2:(1/dt + 1);
    t_KP123(i) = t0 + (i-1)*dt;
    z_KP123(:,i) = (eye(2)-dt*theta*A)\(eye(2)+dt*(1-theta)*A)*y_KP123(:,i-1);

    w = (eye(2)-dt/2*theta*A)\(eye(2)+dt/2*(1-theta)*A)*y_KP123(:,i-1);
    w_KP123(:,i) = (eye(2)-dt/2*theta*A)\(eye(2)+dt/2*(1-theta)*A)*w;

    q = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*y_KP123(:,i-1);
    q = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*q;
    q_KP123(:,i) = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*q;

    y_KP123(:,i) = 1/12* z_KP123(:,i) - 4/3*w_KP123(:,i) + 9/4*q_KP123(:,i);
end
figure(3)
plot(t_KP123,y_KP123,'LineWidth',2)
grid on

%Megoldas a KP + IRE(124) modszerrel
dt = 0.1;
y_KP124 = y0;
theta = 0.5;
for i = 2:(1/dt + 1);
    t_KP124(i) = t0 + (i-1)*dt;
    z_KP124(:,i) = (eye(2)-dt*theta*A)\(eye(2)+dt*(1-theta)*A)*y_KP124(:,i-1);

    w = (eye(2)-dt/2*theta*A)\(eye(2)+dt/2*(1-theta)*A)*y_KP124(:,i-1);
    w_KP124(:,i) = (eye(2)-dt/2*theta*A)\(eye(2)+dt/2*(1-theta)*A)*w;

    q = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*y_KP124
```

```
        (:,i-1);
    q = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*q;
    q = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)*A)*q;
    q_KP124(:,i) = (eye(2)-dt/3*theta*A)\(eye(2)+dt/3*(1-theta)
        *A)*q;

    y_KP124(:,i) = 1/21* z_KP124(:,i) - 4/7*w_KP124(:,i) +
        32/21 *q_KP124(:,i);
end
figure(4)
plot(t_KP124,y_KP124,'LineWidth',2)
grid on
```

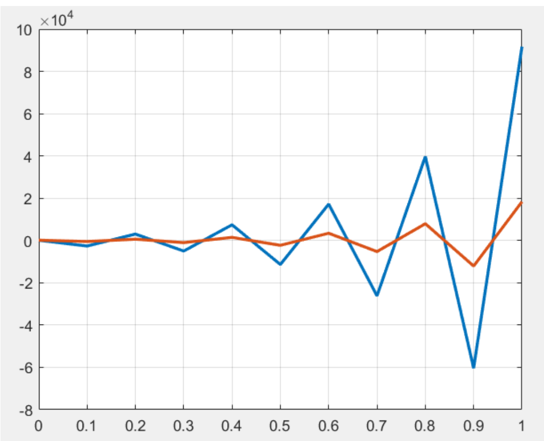
Kimeneti eredmény:



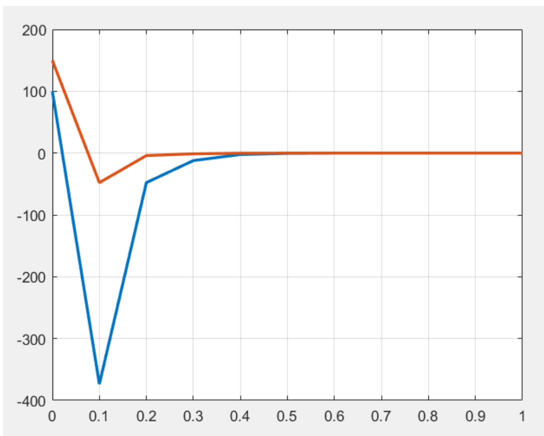
12. ábra. A pontos megoldás



13. ábra. A KP módszer



14. ábra. A KP+IRE(123) módszer



15. ábra. A KP+IRE(124) módszer

Látható, hogy egyedül a KP+IRE(123) módszer alkalmazásakor tapasztaljuk a numerikus megoldás nagymértékű kinövését (10000-es nagyságrendű értékek). A többi esetben a numerikus megoldás korlátos marad, és bár a nagy lépésköz miatt pontatlan, rendelkezik a rögzített rácson való stabilitás kvalitatív tulajdonságával.

5. Összefoglalás

A szakdolgozatban a közönséges differenciálegyenletek, illetve differenciálegyenlet-rendszerek numerikus módszereivel foglalkoztunk. Bemutattuk a Richardson-extrapoláció konvergencia-gyorsító módszerét, valamint azt, hogy hogyan kell ezt egy közönséges differencálegyenlet-rendszerre alkalmazni. Ezek után ismertettük az ismételt Richardson-extrapoláció módszerét, illetve ennek három típusát. Végül megvizsgáltuk ezen a típusok a stabilitási függvényeit az explicit Euler, implicit Euler, illetve a középponti módszerrel kombinálva.

A dolgozatban bemutatottak számtalan bővítési lehetőségeket rejtenek magukban. Meg lehetne vizsgálni kisebb lépésközökre az ismételt Richardson-extrapolációt, illetve lehetne egyszerre még több rácshálót kombinálni, hogy ezzel még tovább pontosítsuk a numerikus megoldást. Lehetne vizsgálni a hatékonyságát ezeknek a módszereknek, érdemes-e növelni a lépésközök számát.

Összességében a szakdolgozat készítése közben betekintést nyertem a numerikus matematika világába. Jobban megértettem, hogyan működnek a differenciálegyenletek numerikus módszerei. Fejlődött a tudásom a programozás területén, illetve átfogó képet kaptam a Richardson-extrapoláció módszeréről. Bízom benne, hogy az elsajátított tudást később tanulmányaim, illetve munkám során sikeresen fel tudom majd használni.

Hivatkozások

[1] Havasi Á. (2018) *A Richardson-extrapoláció elméleti vizsgálata és alkalmazásai*

[2] Juhász Sz. (2020) *A Richardson-extrapoláció általánosításai*

[3] Bayleyegn T. (2023) *Theoretical and computational investigation of Richardson extrapolation*

[4] Zlatev Z., Dimov I., Faragó I., Havasi Á. (2017) *Richardson Extrapolation - Practical Aspects and Applications*

[5] Zlatev Z., Dimov I., Faragó I., Georgiev K., Havasi Á. (2019) *Explicit Runge-Kutta Methods Combined with Advanced Versions of the Richardson Extrapolation, Computational Methods in Applied Mathematics*
DOI: https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0016

[6] Zlatev Z., Dimov I., Faragó I., Georgiev K., Havasi Á. (2017) *Stability of the Richardson Extrapolation combined with some implicit Runge-Kutta methods*
DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.03.018

[7] Dahlquist G. (1963) *A special stability problem for linear multistep methods*

[8] Lambert J. D. (1991) *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*