

Szakdolgozat

Horváth Tamás

informatikatanár - matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2024

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi kar

Szakedolgozat

ChatGPT az egyenletmegoldás tanításában

Témavezető:

Koren Balázs

Mestertanár

Készítette:

Horváth Tamás

informatikatanár - matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

Konzulens:

Horváth András

Oktató

2024

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott **Horváth Tamás (GVNL6N)** ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE **informatika-matematika** osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2024. április 22.

Horváth Tamás

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

1. Absztrakt	5
2. A tanulás megújítása	6
3. A ChatGPT felhasználása az egyenletmegoldás tanításában	10
3.1. Anyaggyűjtés	13
3.1.1. Alapvető fogalmak	14
3.1.2. Az egyenletrendezés	19
3.1.3. A grafikus megoldás	21
3.1.4. A másodfokú egyenletek	22
3.1.5. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete	31
3.2. Feladatmegoldás	37
3.2.1. Lineáris egyenletek	37
3.2.2. Másodfokú egyenletek	45
3.3. Kitekintés a ChatGPT 4-re	53
4. Értékelés	62
5. Bibliográfia	66

1. Absztrakt

Munkámban azt vizsgáltam, hogy megállja-e a ChatGPT digitális technológiával működő taneszközként a helyét az egyenletmegoldás témakörében. A céloom az volt, hogy a kiterjesztett Bloom-taxonómia és a SAMR-modell segítségével megtaláljam a választ. A kutatás során mind anyaggyűjtés, mind feladatmegoldás szempontjából megvizsgáltam a felületet, valamint néhány tanóra keretén belül egy 10.-es osztályban is kipróbáltam a ChatGPT ingyenes verzióját. Tapasztalataim alapján a konklúzió az, hogy a 3.5-ös verzió a rengeteg bizonytalan és hibás válasz miatt még nem működhet ilyen eszközként, valamint fel kell hívnunk a diákok figyelmét az OpenAI termékének veszélyeire. Emellett a 4-es verzió hatalmas iramban fejlődik, és megvan annak a lehetősége, hogy a jövőben felhasználjuk majd az oktatásban.

2. A tanulás megújítása

Az idők során az iskolában alkalmazott tanulást támogató segédeszközök hatalmas fejlődésen mentek keresztül. Először megjelent a palatábla, majd a nyomtatás, és ezáltal az első tankönyvek. Az elmúlt évtizedekben az informatikai eszközök fejlődésének köszönhetően a tankönyvek, munkafüzetek már digitálisan is elérhetőek lettek, és a vetítőgépeket leváltotta a számítógépek és a projektorok kompozíciója. Az iskolák felszereltsége elkezdett olyan irányba elmozdulni, hogy a digitális tananyagok elérhetőek legyenek a tantermekben. Megjelentek az információs és kommunikációs technológia eszközei - röviden IKT eszközök - „az oktatásban a pedagógiai célok megvalósítását támogató digitális eszközök és alkalmazások összesége, amelyek hatékony szemléltető és információtovábbító szerepük révén támogatják a tanítási-tanulási folyamatot” (Szűts et al., 2022, Digitális taneszközök: 1. bekezdés). Ezáltal a szemléltetés és az élményszerű tanulás egy új szintre léphetett, ahol először az interaktív tábla, majd később az okostábla és a különböző okoseszközök (pl.: okostelefon, táblagép) segítségével tehettek szert új ismeretekre a diákok, amely lehetőségek természetesen a tanárt is új szerepbe helyezték (Szűts et al., 2022).

E rövid áttekintés után el is érkeztünk jelenünkbe, ahol a legtöbb iskolában már adottak az okoseszközök, és a tanár legnagyobb feladata a tanulás támogatását leginkább elősegítő felületeket, szoftvereket kiválasztani egy-egy anyagrészhez. „A digitális technológiával működő taneszközök elnevezése felváltotta az IKT-eszköz elnevezést, és az alábbi jellemzőkkel bír:

- interaktív, gazdag és kidolgozott grafikával biztosítja a virtuális-valóságos hatást;
- internetkapcsolatot feltételez;
- azonnali visszacsatolást tesz lehetővé;
- személyre szabható;
- tér- és időfüggetlen, és
- további pedagógiai lehetőségeket biztosít, például dokumentálhatja az egyéni tanulási utakat, támogathatja az adaptivitást, a differenciálást és a hatékony mérési környezetet” (Szűts et al., 2022, Digitális taneszközök: 1. és 2. bekezdés).

Természetesen ezen technológiák sem egyformák, és egy nem feltétlen oktatási célra készült platform is működhet megfelelően az osztályteremben. Például egy matematikatanár a GoogleEarth segítségével könnyen szemléltetheti a gömbi geometria alapjait egy repülőgép útvonalának kiszámításán keresztül.

„A digitális kompetenciák fejlesztése interdiszciplináris feladat lett, és keresztanternvi jellege miatt a mindennapi formális oktatási környezethez kapcsolódó eszközzé vált”

(Szűts et al., 2022, A taneszközök nemzedékei: 6. bekezdés). Azaz lehet, hogy az informatika tantárgyat a 2020-as NAT-ban felváltotta a digitális kultúra, és jóval nagyobb hangsúly helyeződik a diákok digitális térben való tájékozódására, de a többi tantárgy feladata is, hogy ezeket a kompetenciákat fejlessze (Szűts et al., 2022).

Az évek során a matematika tantárgy egyik legnépszerűbb digitális eszköze lett a GeoGebra, amely viszonylag egyszerű szintaktikája miatt könnyen programozható, így kiváló szemléltetőeszköz lehet például a geometria és a függvénytan témakörében, valamint lehetőséget biztosít feladatlapok előállítására is. Más felületek (pl.: Redmenta, GoogleForms), a gyors és egyszerű számonkérést, ellenőrzött gyakorlást teszik lehetővé, ezzel is könnyítve az iskolai munkát, és lehetőséget teremtve arra, hogy a tanár a hosszú javításokra szánt időt a töredékére csökkenthesse, és így más elfoglaltságokra, például újabb platformok megismerésére és azok integrálására fordíthassa. Fontos kiemelni, hogy ezzel nem lesz könnyebb egy pedagógus élete, csak a feladatköre változik meg valamilyen mértékben. Egy-egy új felület megismerése hosszú időt és rengeteg készülést vesz igénybe, hogy az a megfelelő módon kerülhessen az osztályterembe és csúnyán fogalmazva értelme is legyen.

Ehhez segítséget nyújthat a tanárnak az úgynevezett kiterjesztett Bloom-taxonómia.

A Bloom-féle digitális taxonómia					
Tevékenységek digitális eszközökkel					
Alkotás új szempontok alapján történő létrehozás	blogolás	filmezés	podcastkészítés	rendezés	magasabb szintű gondolkodási képességek
Értékelés vélemény- és ítéletalkotás	osztályozás	tesztírás	posztolás	moderálás	↑ ↓
Elemzés az egyes részek és a köztük lévő összefüggések azonosítása	fogalomtérkép	kérdőívezés	megfigyelés, összekapcsolás	validálás	
Felhasználás az ismeretek új helyzetben történő felhasználása	számolás	grafikus ábrázolás	szerkesztés	frissítés	
Értelmezés jelentések értelmezése instrukciók alapján	újságírás	bejegyzések írása	címkézés	feliratkozás	
Emlékezés adatok, információk megjegyzése, felidézése	könyvjelzők	másolás	kiemelés	keresés	

1. ábra. A kiterjesztett Bloom-taxonómia

(Szűts et al., 2022, 3. ábra), *A kiterjesztett Bloom-taxonómia részei*

Matematika órán például így alakulhat egy-egy konkrét példa:

- Emlékezés: A tanuló az írott jegyzetét tablet vagy más okoseszköz segítségével készíti el.

- **Értelmezés:** A tanuló keres egy sokaságot az interneten, majd meghatározza annak móduszát, mediánját, átlagát és szórását.
- **Felhasználás:** A tanuló a GeoGebra felületén a megfelelő képlet segítségével függvényt ábrázol, majd megold grafikusán egy egyenletet ennek segítségével.
- **Elemzés:** A tanuló a GeoGebra felületén ábrázol egy függvényt, majd megvizsgálja, hogy tényleg ott vannak-e a szélsőértékek, ahol lenniük kell.
- **Értékelés:** A tanuló egy GeoGebra feladatlap során az ellenőrzés gombra kattintva látja, hogy mely válaszai voltak helyesek. Látja ezek miéértjét, a hibás válaszainál rájön arra, mit és hol rontott el.
- **Alkotás:** A tanuló készít a GeoGebra felületén egy olyan feladatlapot, ami generál egy véletlenszerű másodfokú egyenletet, majd a kiszámított gyökökről megadja a felület, hogy helyesek-e, s erről visszajelzést is ad (*Szűts et al.*, 2022).

Érezhető tehát, hogy ez egy lépcsőzetesen épülő szerkezet, ahol az emlékezés van a legalsó, míg az alkotás a legfelső szinten. Előfordulhat, hogy bizonyos szintek között a határ elmosódik, valamint egy-egy digitális technológiával működő taneszköz több szintet is lefedhet. Például a tanuló a talált sokaságot felviszi egy felületre, ahol meghatározza az átlagot, móduszt, mediánt és szórást, majd az ellenőrzés gombra kattintva végignézi, értékeli a megoldásait (<https://www.geogebra.org/m/gPqAVIF8#material/ofvrWMci>). Először tehát érdemes átgondolni, hogy a kiválasztott digitális technológiával működő taneszköz milyen szerepet tölthet be, milyen szinten működhet a fent látható taxonómiában.

Egy másik megközelítést nyújthat a digitális technológiával működő taneszközök osztályozására a SAMR-modell: „A SAMR-modell vagy más néven SAMR-létra egy olyan súlyozásos elvre épülő elképzelés, amely azt mutatja be, hogy a technológia hogyan jelenik meg a tanítás és tanulás folyamatában, és ez milyen szinten következik be. Négy részből áll: substitution, azaz helyettesítés; augmentation, azaz kiterjesztés; modification, azaz változtatás; redefinition, azaz újrafogalmazás. A technológia segítségével a szemléltetéstől a tevékenykedtetésig vezető folyamatot modellezi” (*Szűts et al.*, 2022, A SAMR-létra: 1. bekezdés).

A technológia integrálásának SAMR-modellje				
SAMR				
NINCS TECHNOLÓGIA	HELYETTESÍTÉS A technológia alkalmazása a tanításba nem hoz új funkciót.	KITERJESZTÉS A technológia alkalmazása a tanításban új funkciót teremt.	VÁLTOZTATÁS A technológia a tanítási tevékenységek jelentős újratervezését teszi lehetővé.	ÚJRAFOGALMAZÁS A technológia alkalmazása új tanítási tevékenységek tervezését teszi lehetővé.
	BŐVÍTÉS		ÁTALAKULÁS	

2. ábra. A SAMR-modell

(Szűts et al., 2022, 4. ábra), *A SAMR-létra elemei*

Ezáltal egy tanár osztályozhatja az általa kiválasztott felületet, és felmérheti, hogy várhatóan milyen előnyei lesznek a platformnak, valamint milyen módon tudja azt integrálni az oktatásba. Például:

- Helyettesítés: A tankönyvből kiképmetszőzött ábrát a tanár a táblára vetíti.
- Kiterjesztés: A GeoGebra felületén képlet segítségével ábrázolunk egy függvényt. Ellenőrizzük hogyan kell kinéznie, minden rendben van-e, mielőtt a füzetbe rajzolnánk.
- Változtatás: A Google Slides vagy a Microsoft Whiteboard segítségével egy közös digitális táblára írnak a diákok és a tanár is. A diákok megjegyzéseket, kérdéseket írhatnak, amihez aztán mindenki hozzáfér a későbbiekben is.
- Újrafogalmazás: Egy olyan felület készítése GeoGebrában, ahol egy $y = ax^2 + bx + c$ alakú függvény együtthatói egyesével állíthatóak egy-egy csúszka segítségével, miközben a felület ábrázolja a függvény képét (Szűts et al., 2022).

Látható, hogy amíg bővítésről beszélünk, addig nem történik különösebben izgalmas dolog ezekkel az eszközökkel. A fő cél az, hogy valami szebb, látványosabb legyen, illetve időt, plusz munkát spóroljunk. Például egy számítógéppel ábrázolt függvényt könnyebb újrageneráltatni, ha valami hibás, mint a füzetben a ceruzát kiradírozni, majd újra lerajzolni. A digitális technológiával működő taneszközök tehát akkor mondhatók igazán jónak, ha az átalakulás kategóriájába esnek, akkor ugyanis valami pluszt, valami újat tudnak hozni a tanórába, és jobban megéri a befektetett időt.

Természetesen ez csak a tervezés szintje. Könnyen előfordulhat, hogy egy-egy felület nem váltja be a hozzá fűzött reményeket a gyakorlatban, ezért szükségszerű a kísérletezés, próbálkozás. Az elmúlt időszak egyik - ha nem a legnagyobb - szenzációja a mesterséges intelligencia. Viszonylag egyszerű hozzáférhetőségük miatt a diákok akarva-akaratlanul is találkoznak olyan felületekkel, amelyek mesterséges intelligenciával vannak felruházva, így a pedagógusok szerepe ismét bővül. A tanulók digitális

kompetenciáit úgy kell fejleszteni, hogy képesek legyenek ezen felületek korrekt, etikus használatára, valamint fel kell hívni a figyelmet az esetleges veszélyekre is. A legkézenfekvőbb megoldás erre az, ha egy kicsit belelátunk a tanóra keretein belül is egy-egy ilyen felület működésébe, és ellenőrzött körülmények között ismerkednek meg a felület lehetőségeivel, határaival.

Hwang és Tu cikkéből kiderül, hogy érdemes lehet a mesterséges intelligenciát felhasználni a matematika oktatásában és megvizsgálni annak hatékonyságát (*Hwang és Tu, 2021*). Így felmerül a kérdés, hogy lehet-e a mesterséges intelligenciával felruházott felületeket az oktatásba integrálni és ezek milyen határfokkal tudnak működni. Milyen szintet foglalhat el a kiterjesztett Bloom-taxonómiában, és melyik osztályba sorolható a SAMR-modellben? Munkám során azt vizsgáltam, hogy az OpenAI terméke - a ChatGPT - mennyire állja meg a helyét, mint digitális technológiával működő taneszköz az egyenletmegoldás témakörében. A rendelkezésre álló verziók közül a 3.5-öst választottam a feladatra, hiszen ez az, ami ingyenesen, bárki számára hozzáférhető. Általánosságban elmondható, hogy ennek van most a legnagyobb divatja a diákok körében, valamint a közélet is az OpenAI chatbot-ját kapta fel leginkább. Fontos megemlíteni, hogy a ChatGPT 4 már rendelkezik azon funkcióval, hogy bizonyos úgynevezett PlugIn-eket építsünk be a beszélgetésbe. Ilyen lehet például a WolframAlpha, ami még magasabb határfokra vezethet, viszont ez a része még nem ingyenes a szolgáltatásnak. Úgy gondolom, azzal érdemes igazán foglalkozni, ami mindenki számára könnyen és nem utolsó sorban ingyenesen hozzáférhető, hiszen ez az, amihez a legtöbben fordulnak és az oktatásban is különösebb anyagi terhelés nélkül felhasználható.

3. A ChatGPT felhasználása az egyenletmegoldás tanításában

A ChatGPT felülete könnyen elérhető és egy egyszerű regisztráció után egyből használható. Véleményem szerint a legegyszerűbb egy Google fiókkal szinkronizálni. Mint ismeretes, a ChatGPT képes tanulni, megváltoztatni a saját válaszát, ha megfelelően jelzünk vissza neki. Azonban ez egy igen csak felszínes kijelentés, a mögöttes tartalom ennél jóval komplexebb, így a következő néhány bekezdésben összegzem, mit érdemes tudni az OpenAI chatbot-járól.

A GPT kifejezés a Generative Pre-trained Transformer rövidítése (https://hu.wikipedia.org/wiki/Mesterséges_intelligencia). Ez annyit tesz, hogy ez a felület a kiadott utasításunk szerint egy előre betanult tudást felhasználva generál nekünk választ. Sokan gondolják, hogy minden egyes diskurzussal segíthetik vagy nehezíthetik a ChatGPT fejlődését. Úgy is mondhatjuk, hogy képesek vagyunk tanítani vagy butítani a felületet. Ez viszont így, ebben a formában, nem teljesen igaz. Ahogy a rövidítésben is

olvasható, ez egy előzetesen betanított mesterséges intelligencia, tehát a tudás, amit használ, már adott a számára, és mezei felhasználókként nem vagyunk arra képesek, hogy csak úgy beleszóljunk a globális információs bázisába (*Földesi, R., 2024.02.03.*) (*Ouyang et al., 2022*).

Az első lehetőségünk a ChatGPT személyes okítására, hogy egy-egy témakört külön beszélgetésbe, úgynevezett chat-be szedünk vele. Ez azt jelenti, hogy egy beszélgetésen belül az OpenAI terméke képes emlékezni arra, hogy miben javítottuk ki a választ. A helyesbítés után nagy valószínűséggel már nem rontja el a felület az azonos, vagy hasonló feladatra generált kimenetet. Viszont egy adott beszélgetésen belül is végesek a tanítás lehetőségei. Ha egy diskurzus túl hosszúra nyúlik, akkor egy idő után a felület elkezdi elfelejteni azt, amit a beszélgetés elején már megtanítottunk neki. Az is előfordulhat, hogy nem képes már új információkat megjegyezni. Ezért ha egy-egy hibát többszörös kérésre sem képes javítani, akkor érdemes egy új beszélgetést kezdeni az OpenAI termékével. Azonban, ha új chat-et kezdünk, akkor ez előző beszélgetésben megtanítottakat nem fogja tudni felhasználni a felület az új diskurzusban (*Földesi, R., 2024.02.03*) (*Ouyang et al., 2022*).

A hosszú távú új tudás betanítását maga az OpenAI végzi. A ChatGPT minden egyes generált válaszában lehetőségünk van jelezni a gyártónak, hogy hasznosnak bizonyult-e a termékük által generált válasz. Ezt lényegében úgy kell érteni, hogy ha nem jelzünk vissza, hogy elrontotta a választ, akkor jónak veszi az általa generált kimenetet. Bizonyos időközönként ezt összesítik és elvégzik a tudás bővítését/felülírást. Fontos azonban, hogy ezt az új tudást statisztikai alapon állítják össze a felhasználók visszajelzése alapján, így ha sokan mondják azt egy rossz válasza, hogy hasznosnak bizonyult, akkor a felület nagy valószínűséggel egy ilyen újratanítási fázis során a rossz választ fogja megőrizni, mint helyes megoldás. Hasonló a helyzet akkor is, ha egy rossz válasza nem jelzünk vissza valamilyen módon. Ekkor a kimenetet kielégítőnek tekinti, így az újratanítási folyamat során meg van rá az esély, hogy a rossz válasz él tovább (*Földesi, R., 2024.02.03*) (*Ouyang et al., 2022*).

Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy vajon hogyan jöhet a mesterséges intelligencia az egyenletmegoldáshoz és annak oktatásához. Megkérdeztem tehát a ChatGPT-t, hogy miben nyújthat ő segítséget a témakörön belül. Az OpenAI termékét működtető algoritmus miatt elenyésző annak a valószínűsége, hogy ha valaki az itt leírt kérdéseket felteszi a ChatGPT-nek, akkor szóról szóra ugyanazt a választ kapja majd, mint amit én. Az idő múlásával az egyes újratanulási műveletek miatt az is előfordulhat, hogy a felület lényegesen más választ ad egy-egy kérdésre, ezért a szövegbe szűrve, animációként - lényegében diavetítésként - jelenítem meg a beszélgetéseimet a mesterséges intelligenciával, amit az egyes ábrák alatt az animáció kulcsszóval is jelezni fogok. Sajnos az animációk lejátszását nem támogatják a böngészők PDF olvasó módjai, így a szakdolgozat olvasására az Adobe Acrobat Reader-t ajánlom. Az animációk lejátszá-

sa automatikusan elindul, amikor az adott ábrához ér az olvasó, és ha ellapozás után visszatér az adott ábrához, akkor előlről kezdődik. A képernyőképek fontos elemei a szakdolgozatnak, a kutatás nagy részében ezekre reflektálok, így tanulmányozásuk ajánlott a folyószöveg értelmezéséhez. A kényelmetlenségek kiküszöbölése végett minden képernyőfelvétel megtalálható a mellékletben is, így a szakdolgozat szövevezését a melléklet segítségével is követni lehet. A mellékletben jelöltem, hogy hol kezdődnek az egyes ábrák elemei a könnyebb tájékozódás érdekében.



You

Szedd pontokba, miben segíthet a ChatGPT az egyenletmegoldás területén!



ChatGPT

ChatGPT segíthet az egyenletmegoldás területén többféle módon:

1. **Egyenletek megértése és magyarázata:** ChatGPT segíthet az egyenletek megértésében és magyarázatában. Ha fennállnak kérdéseid az egyenletek struktúrájával vagy az alkalmazott matematikai elvekkel kapcsolatban, segít magyarázni.
2. **Egyenletek megoldása:** Ha konkrét egyenlettel vagy rendszerrel kapcsolatos problémáid vannak, bemutatathod azokat, és ChatGPT segíthet azok megoldásában. Akár elsődökü, másodfokú vagy komplex egyenletekről van szó, a modell segíthet a megoldásban.
3. **Matematikai lépések bemutatása:** Ha szeretnéd látni a matematikai lépéseket egy adott egyenlet megoldásához, a ChatGPT bemutathatja ezeket a lépéseket. Ez segíthet abban, hogy jobban megértsd a folyamatot és tanulhass belőle.
4. **Matematikai problémák megoldása:** Akár egy matematikai problémával, például egy matematikai feladvánnyal vagy alkalmazással kapcsolatban van kérdésed, a ChatGPT segíthet a megoldásban vagy azok irányításában.
5. **Gyakorló feladatok és példák:** ChatGPT készíthet neked egyéni gyakorló feladatokat vagy példákat az egyenletmegoldás témaköréből, hogy fejleszthesd a készségeidet.

Fontos megjegyezni, hogy bár a ChatGPT segíthet matematikai kérdésekben és problémákban, mindig ellenőrizni kell az eredményeket, és meg kell győződni arról, hogy helyesek és értelmesek. A modellek nem mindig hibátlanok, és a matematikai problémák esetében fontos a pontos számítás és logika.



3. ábra. ChatGPT az egyenletmegoldásban

Nagy pozitívum, hogy a felület képes a magyar nyelvű kommunikációra, így a teljes kutatás alatt anyanyelvünket használtam. Megjegyezném, hogy a magyar nyelv tökéletes alkalmazásától még messze van a rendszer, így előfordultak nyelvtani helytelenségek, magyartalan megfogalmazások. Ezeket a hibákat nem szándékoztam minden egyes válasznál külön kiemelni, ezért ha a matematikai tartalom lényegesen nem változtatott egy-egy nyelvtani hiba, akkor figyelmen kívül hagytam.

Fontos tisztáznunk, hogy ez a mesterséges intelligenciát felhasználó felület is egy számítógép. A számítógép pedig akkor működik hatékonyan, ha pontosan fogalmazzuk meg, mit várunk tőle. A legegyszerűbb talán úgy elképzelni ezt, hogy van egy hatalmas gépházunk benne rengeteg processzorral, amik egymással párhuzamos módon képesek

számításokat végezni. A bemeneti feladat feldolgozása után ez a rengeteg számítási egység egy-egy külön utat jár be a tanítási folyamat során létrejött modellben, és minden egyes úthoz egy bizonyos valószínűségi értéket rendel a megtanult összefüggések alapján. A válasz elemei így a számítás végén a legnagyobb valószínűséggel rendelkező útvonalak végpontjai lesznek (Földesi, R., 2024.02.03) (Ouyang et al., 2022).

Munkám során a ChatGPT használatát két nagy területre bontottam. Először az-zal foglalkoztam, hogy mennyire alkalmas a felület arra, hogy az emberiség által már felhalmozott tudást előkerestessük vele. Mondhatnánk azt is, hogy keresőmotorként (pl.: Google, Bing, DuckDuckGo) tekintetem a ChatGPT-re, de ez nem lenne teljesen helytálló. A keresőmotor ugyanis egy bizonyos adatbázis alapján találatokat listáz ki nekünk, amik közül mi aztán szabadon választhatunk. A keresés úgynevezett kulcsszavak segítségével történik, és informatika - vagy most már digitális kultúra - órán az első dolog, amit megtanítanak az internetes keresés témakörében az az, hogy nem célszerű teljes mondatokat írni a keresőmotorba, hiszen nem tudja azokat értelmezni.

Ezzel ellentétben a ChatGPT képes arra, hogy kerek mondatokat értelmezzen. Sőt, a találatok közül ő az általa gondolt leghatékonyabb válasszal rukkol elő nekünk, akár több forrásból kinyert információk összefésülésének segítségével, így rengeteg időt és energiát spórolhatunk. Meg kell jegyezni azonban, hogy az OpenAI chatbotja csak a 2021-ig világhálóra került adatokat képes elérni a modelljében, így ha valami nagyon friss információra van szükségünk, akkor nem helyettesítheti a fent említett keresőmotorokat.

Az anyaggyűjtés határfokának vizsgálata után a tényleges feladatmegoldás került a fókuszba. Miben tud segíteni a felület a diákoknak vagy akár a tanároknak az egyenletmegoldás témakörében? Tud-e lépésről lépésre elmagyarázni egy feladatot? Mennyire kell egy feladatnak összetettnek lennie ahhoz, hogy belebukjon a mesterséges intelligencia? Lényegében tehát a feltett kérdésre kapott fentebb látható válaszban található pontok hatékonysága került a fókuszba.

A ChatGPT-vel történő beszélgetéseket 2024. január 1. és 2024. április 15. között végeztem. A mesterséges intelligenciával felruházott felületeket a leghatékonyabban az úgynevezett prompt parancsokkal lehet koordinálni. Ezek használata azonban nem eredményezett matematikailag korrektebb levezetéseket. A hibás részeket nem javította az ilyen utasítások végrehajtásakor sem a rendszer, csak a körítés lett más. Így a kutatás elvégzése során lehetőleg rövid, tömör mondatokat, instrukciókat használtam, ahogy azt egy átlagos felhasználó is tenné.

3.1. Anyaggyűjtés

Ebben a fejezetben azt vizsgáltam, mennyire bizonyul hatékony eszköznek a ChatGPT az anyaggyűjtésben. Arra voltam kíváncsi, hogy milyen mértékben lehet segítségünkre

a már megtanult fogalmak átismétlésénél és a megtanulandó új anyag megismerésénél az eszköz használata.

3.1.1. Alapvető fogalmak

Először azt szerettem volna kideríteni, hogy mit tud a ChatGPT mondani az egyenletekről általánosságban. Ezért az első utasításom az volt, hogy írja le az egyenlet definícióját. Az általa adott válasz definíciónak nem volt nevezhető. Csak nagy vonalakban mesélt az egyenletekről, de magyarázatnak elfogadhatónak találtam. Ezután megkértem, hogy az érthetőség kedvéért mutasson egy példát. A válasz generálása közben a rendszer hibába futott, így arra kellett kérnem az OpenAI termékét, hogy próbálja meg újra összeállítani a mondandóját. Ezt a regenerate gombbal lehet megtenni. Fontos azonban kiemelni, hogy a felület mindig csak az aktuális választ képes újraalkotni, a régebbiekben már nem képes módosításokat végezni. Az új válasz egy egyszerű lineáris egyenlet lett, amely segítségével el tudta magyarázni a felület egy egyenlet lényegét.

4. ábra. Animáció: Az egyenlet definíciója és típusai (5 kép)

Kíváncsi voltam, hogy milyen egyenlettípusokat tud felsorolni, amikkel középiskolában is találkozhatunk. Első próbálkozásra öt pontba gyűjtötte az általa helyesnek vélt információkat, azonban ebből kettő tartalmilag ugyanazt fejezte ki. A mesterséges intelligencia nem tudott különbséget tenni a másodfokú és a kvadratikus egyenlet

kifejezés között, így a másodfokú egyenleteket kétszer sorolta fel, bár a másodfokú kifejezés használatakor egy egyenlőtlenséget hozott példának. Az is könnyen lehet, hogy az egyenlőtlenséget és az egyenletet nem tudta megfelelően megkülönböztetni. Több alapvető típust is kihagyott, illetve volt tehát olyan eset, amikor rossz példát mutatott. A generált szöveg végén említette, hogy ez nem az összes típus, így a következő kérésem az volt, hogy az összes olyan típust listázza ki, ami középiskolában előfordulhat. Így már szélesebb palettáját mutatta be az egyenleteknek, valamint egyenletrendszerekről is beszélt, de az eredmény még így sem volt kielégítő.

A felület tanítását illetően ebben az esetben a lokális tanítást választottam, azaz azt szerettem volna elérni, hogy a beszélgetésen belül emlékezzen arra, amit kijavítottam a válaszában. Először is felhívtam a figyelmét, hogy a másodfokú egyenleteket két pontban is említi, valamint közöltem vele, hogy az egyenletrendszerek témáját nem szeretném érinteni. Megjegyezném, hogy a kilistázott egyenletrendszer kétismeretlenes és lineáris, nem pedig másodfokú. Az eredmény egy korigált lista lett, ahol az imént említett hibákat javította. Ezt a lista kiegészítése követte. A középiskolai anyagból kiindulva a trigonometrikus és a gyökös egyenletek hiányoztak szembetűnően a felsorolásból, így a következő utasítás arra vonatkozott, hogy egészítse ki ezekkel a választát. A trigonometrikus egyenleteknél különbséget tett a lineáris és a kvadratikus előfordulások között, ezt nem tartottam rossz ötletnek. A gyökös egyenleteknél is két archetípust említett, mégpedig a négyzetgyökös egyenleteket és a "négyzetgyöktől független" négyzetgyökös egyenleteket. Ez további kérdéseket igényelt. Mint kiderült, a "négyzetgyöktől független" gyökös egyenletek alatt azt értette, hogy van olyan része az egyenletnek, amelyben a változó nincs négyzetgyök alatt, így az magasabb fokú egyenlethez vezet, bár ahhoz, hogy ezt a saját következtetést levonhassam, többször is le kellett vele generáltatnom a választ. Alapvetően én nem tennék ilyen szinten különbséget a négyzetgyökös egyenletek körében, a megnevezés mindenesetre becsapós és meglátásom szerint nem jól fejezi ki a tartalmi lényegét. Másrészt ha úgy gondolunk rá, hogy magasabb fokú egyenletre vezet, akkor lehet értelme külön osztályba sorolni ezt az archetípust, de semmiképpen sem a "négyzetgyöktől független" megnevezéssel.

A lista újboli kialakításánál már csak egy pont volt tartalmilag félreérthető. A törtes egyenleteknél olyan példát hozott, ahol csak a tört számlálójában szerepel a változó. Természetesen ez nem hiba, de úgy gondolom, hogy jobb ennél a típusnál olyan példát mutatni, amelyben a tört nevezőjében is szerepel változó, hiszen ezek a feladatok ettől lesznek izgalmasabbak. Az akadályt jól vette a felület, még az egyenlet megoldásának első lépéseit is leírta, bár ezt nem kértem tőle. A felsorolás negyedszeri kiiratására így sikerült egy szép összegzést készíteni arról, hogy milyen egyenletekkel találkozhat egy középiskolás a tanulmányai során. Fontos kiemelni, hogy a hozott példák az általánosságra törekvés mellett is csak példák, nem tekinthetők definícióknak.

5. ábra. Animáció: Középiskolában előforduló egyenletek (9 kép)

Megjegyezném, hogy a listában egy hibát következetesen elkövetett a felület a próbálkozások során. Az egyes egyenletekre adott példákban az együtthatókról végig csak annyit mondott, hogy konstansok vagy megfelelő értékek. Ezzel azért kell vigyázni, mert sehol nem említette az OpenAI terméke, hogy például egy logaritmikus egyenletnél mi nem lehet a logaritmus alapja, egy törtes egyenletnél mi nem lehet például b értéke az általa használt betűs kifejezésben, vagy hogy $dx + e$ értéke legalább 0 kell, hogy legyen a gyökjel alatt, stb...

Miután a ChatGPT nem kevés munka árán bemutatta a középiskolai egyenlettipusok palettáját, áttértem az egyenletek megoldásánál alkalmazandó módszerekre. Az általános kérdésre - Milyen egyenletmegoldási módszereket használunk középiskolában? - többszöri próbálkozásra is változatos, ám sok pontban átfedő, és helytelen megfogalmazásuktól hemzsegő, hibás választ adott a felület. Gondolok itt többek között az "egy polinom nulláinak megkeresésére" kifejezésre.

A lineáris egyenletek megoldásához alkalmazott módszerekhez első próbálkozásra az egyenlet rendezését, azaz a mérleg elvet tudta összegyűjteni, ami középiskolában használható. A feladat során hibát vétettem, mert nem kötöttem ki, hogy középiskolában alkalmazott módszereket listázzon, így pontosítottam a kérdést. A téma szűkítése után már egy elegánsabb válasszal szolgált, ami az egyenletrendezést és a grafikus ábrázolást mutatta be, valamint a lineáris egyenletrendszerek kapcsán az egyenlő együtthatók elvét és a hagyományos behelyettesítéses módszert is bemutatta, bár a megadott példák-

ból nem feltétlen látszott, hogy minek is kellene történnie a módszerek alkalmazásakor. A magyarázatok tehát általánosan elég gyengére sikerültek, de legalább a módszerek valamennyire elkülöníthetőek voltak. Megjegyezném, hogy számomra furcsa az, hogy az egyenletek témakörébe ennyire bele szeretné helyezni az egyenletrendszereket is a mesterséges intelligencia. Meglátásom szerint ez egy elkülönülő téma, ami az egyenletek megoldásának elsajátítására épül. Közöltem a ChatGPT-vel, hogy csak a hagyományos egyenletekre vagyok kíváncsi, ám ez csak nagyobb zavart keltett. A javított válaszából a grafikus ábrázolás eltűnt, míg az egyenletrendezést, amit addig egy pontban említett, szétszedte három külön részre nem kis átfedéssel. Ezen a ponton úgy éreztem, hogy a ChatGPT-nek erős fogalmi zavara van a témában, és nem próbálkoztam tovább.

6. ábra. Animáció: Egyenletek megoldási módszerei, lineáris egyenletek megoldási módszerei (8 kép)

A másodfokú egyenletek megoldásához az OpenAI terméke szerint is a megoldóképletet alkalmazzuk, miután nullára redukáltuk az egyenletet. A harmadik pontban felsorolt módszer viszont érthetetlenre sikerült, nem láttam a gondolatot mögötte, így azt inkább nem firtattam. Léteznek azonban módszerek, melyekkel speciális esetekben érdemes lehet megoldani egy másodfokú egyenletet, így érdeklődtem, hogy mit tud a teljes négyzetté és a szorzattá alakításról. A teljes négyzet alakot illetően félig tudtam igazat adni az OpenAI chatbot-jának. A diszkriminánst meglátásom szerint nem lehet egyszerűbben kiszámolni a teljes négyzet alakból, sőt az általa megadott alakból a

megfelelő együtthatókat jóval nehezebb kiolvasni. Abban viszont igaza volt, hogy általában ez a technika nem vezet egyből megoldásra, utána még szorzattá kell alakítani a kifejezést - ha egyáltalán lehet - ahhoz, hogy lássuk a kvadratikus kifejezés gyökeit.

A szorzattá alakítás esetében a gyöktényezőös alakot hozta fel példának, ami alapvetően egy jó megközelítés. Ezekből az ismeretekből egy megfelelő példán keresztül már be lehetne mutatni, hogyan lehet a megoldóképlet nélkül egy másodfokú egyenlet megoldásait a teljes négyzetté alakítás és a szorzattá alakítás módszerekkel meghatározni. A kimenetben feltűnt, hogy a teljes négyzetté alakítást inkább technikának gondolja, mint módszernek, ezért megkértem arra is, hogy írja le milyen technikákkal lehet megoldani egy másodfokú egyenletet. Ebben a válaszban már feltűntek az előbb említett eljárások, valamint a grafikus ábrázolás is előkerült. Sajnos azonban a metódusokhoz tartozó magyarázatok néhol inkább voltak félrevezetőek, mint hasznosak. A teljes négyzetté alakítás kapcsán a megoldóképletre hivatkozott. Elképzelhető, hogy a megoldóképlet bizonyítása miatt következtetett arra, hogy ez lenne a jó lépés. A szorzattá alakítás leírása viszont zavaros volt. Kellő háttértudással persze érthető, hogy mire szeretne rávilágítani a felület, ám egy diákot nagyon könnyen összezavarhat ez a megfogalmazás.

7. ábra. Animáció: Másodfokú egyenletek megoldási módszerei (4 kép)

3.1.2. Az egyenletrendezés

Az egyenletek megoldásának alapja az, hogy tudjuk helyesen rendezni azokat. Lineáris esetben szimplán a mérlegelv használata elvezet a megoldáshoz, míg például egy másodfokú egyenlet esetében a mérlegelvet azért használjuk, hogy megfelelő alakra hozzuk, azaz nullára redukáljuk, majd a megoldóképlet segítségével megoldjuk az egyenletet.

Azt vizsgáltam, hogy mit tud a mesterséges intelligencia az egyenletek rendezéséről, valamint ismeri-e a mérlegelvet, mint megnevezést. Először azt kértem tőle, hogy írja le 5 pontban, hogyan kell egy egyenletet rendezni. A válasz redundáns volt, nem éreztem azt, hogy egy-két ötleten kívül mást ki lehetne nyerni belőle, valamint rengeteg helytelen dolgot állított, ugyanis például ha az egyik oldalon $2x$, a másikon pedig $3x$ van, akkor azokat nem összeadni kell. Itt a globális visszajelzés módszerét választottam. A válasz alatti lefelé mutató hüvelykujjra (dislike jel) kattinva értesíthetjük az OpenAI termékét és magát a gyártót is arról, hogy a megjelenő válasz hibás, nem nyújt igazi segítséget, vagy esetleg félrevezető. Ezt követően a ChatGPT 2024. februárjáig generált egy új választ, amit összevethettünk az előzővel, és nyilatkozhattunk róla, hogy jobban sikerült-e, mint az előző. Sajnos azóta ezt a válaszösszehasonlító metódust eltávolították. Az első választ tehát hibásnak ítélt meg a fentebb említett okok miatt.

A visszajelzés után generált kimenet már érthetőbb volt. Habár az önisméltés jelei még itt is felfedezhetőek voltak, ezúttal nem kötekedtem tovább, hanem áttértem egy érdekesebb problémára. A "változótól való megszabadulás" kifejezés egy egyenlet esetében nem szerencsés, hiszen pont az a lényeg, hogy a változó értékét meghatározzuk. Mint kiderült, arra szeretett volna célozni a mesterséges intelligencia, hogy a végső lépésben el kell érni, hogy a változó együtthatója 1 legyen.

Az egyenletrendezés lépései után megvizsgáltam, tisztában van-e a rendszer a mérlegelvvél. Önerőből nem használta ezt a kifejezést, amikor a módszer mivoltját pedzegettem, azonban amikor jeleztem neki, hogy az egyenletrendezésnél használt módszert mérlegelvnek hívjuk, akkor helyeslő választ adott és javította/kiegészítette választát. Ezek után egy egyszerű példán keresztül nehézkesen, mondhatjuk úgy is, hogy dőcögösen mutatta be a mérlegelv működését. A válaszból látszik, hogy a fentebb javasolt "változó együtthatójának 1-re állítása" kifejezést nem jól értette meg a felület. Az is lehet, hogy az alapproblémát nem sikerült rendesen megfogalmaznia, amire ezt a kifejezést javasoltam. Tehát itt a megfogalmazásbeli nehézségek miatt mondható, hogy nem egészen úgy működik a felület, mint ahogy azt elvárnánk.

8. ábra. Animáció: Egyenletrendezés, mérlegelv (7 kép)

Mielőtt tovább haladtam volna, egy-egy új beszélgetésben hasonló feladatokkal láttam el az OpenAI termékét. Kíváncsi voltam mit mond, ha csak négy pontot kérek tőle az egyenletrendezés kapcsán, illetve hogy mi lesz az eredmény, ha nem adok területi megkötést. Azt tapasztaltam, hogy amikor nem kellett neki egy fix területet kitöltenie, akkor sokkal használhatóbb választ adott, ám tartalmi hibát itt is vétett, ugyanis nem a változó együtthatójával kell szorozni az egyenletet a 2. pontban, hanem annak reciprokával.

9. ábra. Animáció: Egyenletrendezés, mérlegelv más megkötésekkel (3 kép)

3.1.3. A grafikus megoldás

A grafikus ábrázolás talán a legszemléletesebb módja az egyenletmegoldásnak, azonban az egyenlet gyökeit gyakran nem lehet pontosan meghatározni ezzel a módszerrel. A ChatGPT első próbálkozásra még kissé zavarosan és a megoldások meghatározását tekintve helytelenül, de másodjára viszonylag követhetően listázta ki a módszer általános lépéseit, valamint egy egyszerű példán be is mutatta a lényegét. A fontos gondolat, ami kimaradt, hogy az $y = f(x)$ alakban mire kell rendezni az egyenletet, ez ugyanis a lényegi gondolata annak, hogy miért az x tengellyel vett metszéspontját keressük az ábrázolt függvénynek. Nem mellesleg a grafikus megoldásnál arra törekszünk, hogy a lehető legkevesebb algebrai műveletet kelljen végeznünk, így ahelyett hogy egy egyenest vagy görbét csinálunk az egyenletből, érdekesebb a két oldalt két külön alakzatot leíró összefüggésként kezelni. Érdekes módon a konkrét feladat megoldásánál először megpróbálta 0-ra rendezett alakkal megoldani, de nem 0-ra rendezte az egyenletet, hanem x -re, így megkapta a megoldást grafikus ábrázolás nélkül, ráadásul utána sikerült hibáznia is, hiszen az $x = -7$ nem egy vízszintes egyenes. Másodjára nem ezt az utat választotta, hanem az egyenlet két oldalából egy-egy különálló függvényt írt fel. A megoldást illetően egy kis plusz érdeklődést igényelt a diskurzus, ugyanis a válaszból nem volt kivehető, hogy a grafikonok metszéspontjának mely koordinátáját érti az egyenlet megoldása alatt. A kérdésre másodjára már egyértelműen helyesen felelt,

de utána megint visszatért az algebrai megoldásra, ami indokolatlan volt, hiszen pont azt szeretnénk ilyenkor elkerülni, hogy algebrailag kelljen megoldani az egyenletet.

Az OpenAI terméke megmagyarázta, hogy ő egy szövegek be- és kivételére létrehozott felület, ezért ábrát nem tud készíteni a megoldáshoz. Sajnos pont a módszer szemléletessége veszik így el a felület alkalmazása során. Szerencsére léteznek olyan alkalmazások, melyek segítségével könnyen és gyorsan lehet ábrázolni az adott függvények képét. Ilyen például a GeoGebra, vagy a WolramAlpha. Így ennél a témakörnél hasznos lehet további alkalmazások segítségét is kérni. Külön kiemelendő, hogy a felület felhívta a figyelmet a módszer már általam is említett hátrányára is.

10. ábra. Animáció: Grafikus megoldás (8 kép)

3.1.4. A másodfokú egyenletek

Ebben az alfejezetben azt vizsgáltam, hogy mit tud a ChatGPT a megoldóképletről és az abból eredő összefüggésekről. A másodfokú egyenletek definíciójában első próbálkozásra egy fontos tartalmi hibát vétett a mesterséges intelligencia. Az $ax^2 + bx + c = 0$ kifejezésnél az együtthatókról csak annyit mondott, hogy valós számok. Viszont a kifejezés csak abban az esetben másodfokú, ha $a \neq 0$, ezért kitértem a beszélgetésben a lehetséges értékeire, ahol a felület már kikötötte, hogy $a \neq 0$, viszont itt már azt is megjegyezte, hogy b és c komplex is lehet, nem csak valós. Tekintve, hogy nem kötöttem ki milyen alaphalmazon dolgozzon, a válasza korrektnek mondható. Persze

középsikolában komplex számokról legfeljebb matematika tagozaton vagy specializáción beszélünk. Emellett ahhoz, hogy ez definíció legyen, hozzá kellene tenni, hogy az egyenlet algebrai átalakításokkal az említett alakba hozható, valamint az egyik oldalon polinom szerepel, míg a másikon 0. Ugyanis tekintve az $\frac{x^2}{x} = 0$ egyenletet látható, hogy nem lesz másodfokú, holott az ismeretlen legnagyobb hatványa másodfokú. A kvadrátikus egyenletek megoldásához használt képletet egy aprónak tűnő, de semmiképp sem elhanyagolható hibával írta fel az OpenAI chatbot-ja. Az alsó index elhagyása a formulában félrevezethető lehet, ez ugyanis arra utal, hogy az összefüggés csak egy gyököt ad. A magyarázatban kitért arra, hogy a \pm jel arra utal, hogy két megoldás van, de akkor is hibának találom az indexek elhagyását.

A diszkriminánst illetően megfogalmazott pár gondolatot a megoldóképlet leírása után, de szerettem volna, ha ezeket pontokba szedi, ahogy az iskolában is szoktuk. Ez nem okozott nehézséget a felületnek, azonban ahogy már említettem, egy átlagos diák nem ismeri a komplex számokat, így arra utasítottam a ChatGPT-t, hogy a valós számok halmazára vonatkozóan listázza azt, amit a diszkrimináns és a gyökök számának kapcsolatáról tudunk. Az így kapott felsorolás már bevihető egy átlagos osztályba, eltekintve az utolsó mondatról, ahol azért megemlíti, hogy ott vannak a komplex gyökök a $D < 0$ esetben. Érdekes volt, hogy hivatkozott a diszkriminánusra, de a jól megszokott D jelölést nem használta a magyarázatában a $b^2 - 4ac$ értékre.

11. ábra. Animáció: Másodfokú egyenletek elméleti alapjai (4 kép)

A felületnek nem okozott problémát, hogy példákat mutasson a diszkrimináns és a gyökök közötti összefüggések eseteire. Amit itt érdemes lehet megemlíteni az az, hogy a $D = 0$ esetben a megoldóképletet úgy írta fel, hogy a \pm jelből csak a $+$ jelet használta. Ezt a következők miatt tartom pontatlannak: azért lesz két azonos gyök, amit egyként említünk, mert $\sqrt{0} = 0$, így

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

mind az összeadás, mind a kivonás esetében, tehát $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Nem pedig egy gyök van, mert éppen a $+$ jelet volt kedvem választani a megoldóképletből.

12. ábra. Animáció: Példák a diszkrimináns és a gyökök közötti összefüggésre (4 kép)

Kíváncsi voltam, képes-e a ChatGPT bebizonyítani a megoldóképletet. Igyekeztem a lehető legprecízebben megfogalmazni a feladatot, de a felület csak leírta a megoldóképletet. Ezt a feladatot egy új beszélgetésben végeztem el a ChatGPT-vel, és az előző tapasztalatoktól eltérően ebben a beszélgetésben használta a diszkriminánsra a D jelölést. Egy rövid nyomatékosítás után - hogy egy bizonyítást szeretnék látni - már egy hosszabb, de érdekibbnek nem nevezhető választ kaptam. A mesterséges intelligencia megoldásában azt vizsgálta, hogy a diszkrimináns értékétől függően hány gyököt kaphatunk, majd erre hivatkozva azt állította, hogy "ezért a másodfokú egyenletek megoldóképlete helyes". A $D = 0$ esetben azt nyilatkozta, hogy a két megoldás összeadódik, ami viszont egy helytelen állítás.

Eredmény híján újrageneráltattam a választ, és így már egy tényleges bizonyítást

adott, ahol a másodfokú egyenletek nullára redukált alakjából levezette a megoldóképletet. Meglepő fordulat volt, hogy a rengeteg megfogalmazásbeli és fogalmi helytelenség mellett a bizonyítás matematikailag korrekt volt. A levezetést a teljes négyzetté alakításra építette fel az OpenAI terméke, viszont a bizonyítás elindítását és a végső lépést nem úgy alakította, ahogyan a régi mozaikos tankönyv vagy a 2020-as NAT szerinti tankönyv mutatja. Ezt a különbséget úgy a legegyszerűbb prezentálni, hogy bemutatom a két bizonyítást.

A 2020-as NAT szerinti tankönyv bizonyítása a következő:

$$a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ezek után esetszétválasztás következik:

1. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs valós megoldás.
2. Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor $(2ax + b)^2 = 0$, tehát $2ax = -b$, $x = -\frac{b}{2a}$
3. Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

vagy

$$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

így összességében elmondható, hogy a megoldóképlet a következő:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Juhász és Orosz, 2024), (Dr. Kosztolányi et al., 2016).

A ChatGPT a másodfokú egyenlet nullára redukált alakjára nem kötötte ki, hogy $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, de ettől az érdemi vizsgálat érdekében eltekintettem. A bizonyítás

a következő:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

A legnagyobb különbség az, hogy a ChatGPT az első lépésben leosztja az egyenletet a főegyütthatóval, majd $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ -t ad hozzá az egyenlet mindkét oldalához. Természetesen a hiányzó kikötés nélkül, hogy $a \neq 0$ az egész bizonyításnak nincs értelme, hiszen rögtön az első lépésben hibát vétünk az osztással. Ettől eltekintve viszont egy követendő, viszonylag részletes levezetést kapunk. Az egyetlen pont, ahol megtorpantam az értelmezésnél az volt, amikor a $\sqrt{4a^2}$ műveletet elvégezte. Ugyanis itt egy apró, ám egyáltalán nem lényegtelen algebrai gondolat maradt ki a bizonyításban a lépések között:

$$\sqrt{4a^2} = 2|a|$$

Tekintve, hogy a témakör erősen felhasználja ezt a gondolatot - gondoljunk csak az $x^2 = 4$ egyenlet megoldására - egy diákban felmerülhet, hogy ott miért nincs abszolút érték a levezetésben. Az igazság az, hogy ott van, de az abból származó \pm jelet a mindkét oldalból való négyzetgyökvonás által létrehozott \pm magába olvasztja. Ezt esetszétválasztással lehet a legegyszerűbben bemutatni. Ha $a \geq 0$, akkor $|a| = a$, tehát a képlet nem változik. Ha $a < 0$, akkor $|a| = -a$, ami azt eredményezi, hogy a \pm jelből lényegében \mp jel lesz. A gyökök között sorrendi különbséget nem teszünk, azaz mindegy, hogy a két gyök közül melyiket jelölöm x_1 -gyel és melyiket x_2 -vel, így a formula így is helyes eredményt ad, és ugyanúgy írhatunk a \mp helyett is \pm -t.

Ahogy már fentebb megjegyeztem, a bizonyítást kísérő szövegezés inkább zavar, minthogy segítséget nyújtson. Például a levezetés második sorában azt mondja, hogy "most mindkét oldalból kivonjuk $\frac{c}{a}$ -t, majd átrendezzük." Ahogy a bizonyításban láthatjuk, tényleg kivont $\frac{c}{a}$ -t, de utána egyszerűen nincs mit rendezni, lényegében ez a rendezés. A teljes négyzetté alakítás előtt azt írja, hogy "most hozzáadunk mindkét oldalhoz $(\frac{b}{2a})^2$ -t, hogy a bal oldalt teljesítsük a másodfokú kifejezést, és ezt kifejezésbe szorozzuk". Itt csak találgatni lehet, hogy pontosan mit szeretett volna mondani a felület.

A levezetést azonban nem követte semmiféle diszkriminánsvizsgálat, így erre külön rá kellett kérdezni. A mesterséges intelligencia elég szűkszavú volt, és nem jelent meg mind a három pont, amit először bizonyításnak szánt volna, valamint egy tartalmi hibát is vétett, hiszen a négyzetgyök negatív értéket nem vehet fel. Valószínűleg az előjelre akart utalni a képletben, de ez a megfogalmazás nagyon félrevezető. Így ezután konkrétan azt kértem tőle, hogy írja le a diszkrimináns fogalmát. Erre a kérésre már egy megfelelő kimenettel reagált. Ez azért kifejezetten érdekes, mert amikor a megoldóképletről kérdeztem, akkor külön kérés nélkül is írt a diszkrimináns és a gyökök kapcsolatáról. A bizonyítás forrását illetően megkérdeztem, hogy mire alapozza a levezetését, de konkrét helyet nem jelölt meg.

13. ábra. Animáció: A másodfokú egyenlet megoldóképletének bizonyítása és az abból eredő összefüggések (9 kép)

A gyöktényező alakot illetően nem adott téves információt a ChatGPT, habár a kikötést, hogy $a \neq 0$ itt is elfelejtette, amikor a kvadratikus egyenletek általános alakját újra leírta válaszában. Ez azért érdekes, mert nem rég ugyanebben a beszélgetésben tanítottam meg neki, hogy ezt ilyenkor illik leírni. Ami viszont fontosabb, hogy a gyöktényező alak esetében egy szorzatról beszélünk, így ha $a = 0$, akkor az egész szorzat 0, tehát itt mindenképpen érdemes ezt a kikötést megemlíteni. A végén írt egy kis magyarázatot, aminek az első mondata számomra értelmezhetetlen volt. Egy apró javítást végeztem a válaszában, ugyanis a -t főegyütthatónak mondjuk, a vezető együttható megnevezés félreérthető lehet. A felület természetesen igazat adott nekem, majd elmondott pár dolgot a főegyütthatóról, amik összességében igazak voltak, de nem kértem ilyesmire.

Arra a kérdésre, hogy miben segíthet a gyöktényező alak, első próbálkozásra redundáns és nem is feltétlen releváns vagy igaz válaszokat adott a felület. Például nem igazán látom, hogy a gyökök hogyan befolyásolnák a görbületét a polinom grafikonjának. Persze olyan jelentősége van, hogy az x tengelyt a gyökök által meghatározott pontokban metszi a grafikon, de a megfogalmazásból ez nem igazán derül ki. A válasz újragenerálása után már szebb eredmény született, bár még ekkor is bőven tartalmazott ismétlődő elemeket. Középsikolában a gyöktényező alak legnagyobb előnye az, hogy bizonyos esetekben tudunk a segítségével olyan tört kifejezéseket egyszerűsíteni, melyek számlálójában vagy nevezőjében másodfokú polinom szerepel. A ChatGPT által generált kimenetnek talán az 5. pontja volt az, ami az anyag ezen részére utalhatott, bár a megfogalmazás ott is homályosra sikerült. Az egyszerűsítés fogalmát műveletek kapcsán említette a mesterséges intelligencia, bár tény, hogy a törtvonalat felfoghatjuk egy osztás műveletnek, azonban egy a témában még nem annyira jártas diák nagy valószínűséggel nem gondolna erre az alkalmazásra a szöveget olvasva.

Amint konkrét példát kértem egy algebrai törtre, amit a gyöktényező alak segítségével egyszerűsíteni lehet, az OpenAI chatbot-ja már félig helyt állt. Tudom, hogy ilyen esetben a másodfokú nem szerencsés kifejezés, de úgy gondoltam a ChatGPT így jobban megérti azt, hogy mire gondolok. Első próbálkozásra egy olyan törtet adott, amit nem lehet egyszerűbb alakra hozni ezzel a módszerrel. Ennek ellenére egy részletes levezetést adott arról, hogyan lehet $(x - 2)$ -t $(x - 1)$ -gyel egyszerűsíteni. A hiba jelzését követően már egy a feladat szempontjából helyes példát adott, amit jól is vezetett le. Említésre méltó még az a hiba, hogy a négyzetek különbsége kifejezés helyett a különbség négyzetet használta, ami egy másik algebrai azonosság neve.

14. ábra. Animáció: A gyöktényezős alak és alkalmazása (6 kép)

A Viète-formulák esetében az eddig megszokott pontatlanságoktól eltekintve már az első kérésre is jól teljesített a mesterséges intelligencia. Az összefüggések bizonyítását a vezesd le utasításra még nem írta le, de amint pontosan azt kértem, hogy bizonyítsa a formulák helyességét, rögtön egy helyes bizonyítással szolgált. Egyedül az "1-et tartalmazó együttható" kifejezés gondolkodtatott el, de szépen megmagyarázta az OpenAI terméke, hogy ez alatt a konstans tagot érti, hiszen $x^0 = 1$. Alapvetően a gyöktényezős alakból vezette le a formulákat a rendszer, de a megoldóképlet alkalmazásával történő bizonyítás sem okozott neki nehézséget, bár első kérésre nem vitte túlzásba a számítások leírását.

15. ábra. Animáció: A Viéte-formulák (6 kép)

A másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek esetében egy kis elméleti bevezetés után közölte az OpenAI terméke, hogy általánosságban elmondható, hogy egy negyedfokú egyenlet csak speciális esetekben oldható meg a másodfokú egyenlet megoldóképletével. Két hasznos példát mutatott a ChatGPT. Először az $x^4 - 1 = 0$ negyedfokú kifejezést írta, melyben két tag különbségének és összegének szorzata szerepel, azonban az $a^2 - b^2$ kifejezésre itt is úgy hivatkozott, hogy "különbség négyzete", ami egy helytelen állítás, hiszen az $(a - b)^2$. Ezt nem tettem szóvá a felületnek, mert nem ez a része volt hangsúlyos a feladatnak és nem szerettem volna, hogy más irányba vigye a beszélgetést ez a tévedés. A "faktorizálás" szó használata egy diák számára okozhat kellemetlenséget, és általában ezt a kifejezést használta, ezért megkértem, hogy inkább a "szorzattá alakítás" megfogalmazást használja a levezetés során. A második példája az $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ egyenlet volt, amely x^2 -ben másodfokú. Ezt segédváltozó bevezetésével oldotta meg, bár a konkrét gyököket nem határozta meg a felület. A megoldásban egyetlen kivetni valót találtam, ugyanis a megoldóképletben b^2 helyére -10 helyett csak 10 -et helyettesített be.

Olyan harmadfokú egyenletre is kértem példát a ChatGPT-től, amely megoldása során a nullára redukált kifejezést kiemeléssel egy elsőfokú és egy másodfokú tag szorzatára kell bontani. A generált kimenetet nem nevezném egyszerű példának, de a feladatot jól teljesítette az OpenAI terméke. Az egyenlet $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ volt, amelyet két jól megválasztott kiemeléssel egy első és egy másodfokú kifejezés szorza-

tára lehet bontani. Általában az ilyen problémáknál a harmadfokú polinom konstans tagja 0, viszont fakultáción el tudom képzelni, hogy egy ilyen feladatot is megoldanak a diákok.

16. ábra. Animáció: Példák magasabb fokú, másodfokúra visszavezethető egyenletekre (6 kép)

3.1.5. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete

A harmadfokú egyenletek kapcsán kitértem a Cardano-formulára. Azt szerettem volna látni, mit tud a ChatGPT a harmadfokú egyenletek megoldóképletéről és annak bizonyításáról. A másodfokú egyenletek megoldóképletéhez hasonlóan itt is egy tankönyv bizonyítását fogom összevetni a ChatGPT által konstruálttal. Nézzük tehát először a tankönyvi bizonyítást: Tekintsünk egy általános harmadfokú egyenletet:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ahol $a \neq 0$ és $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Feltehetjük, hogy $a = 1$, hiszen ha nem így lenne, akkor leoszthatnánk ezzel az együtthatóval és így a főegyüttható 1 lenne, míg a többi együttható egy-egy másik valós szám.

Tehát az egyenletünk:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

A célunk, hogy teljes köbvé alakítsuk a kifejezést. Felhasználva az

$$\left(x + \frac{b}{3}\right)^3 = x^3 + bx^2 + \frac{b^2}{3}x + \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

összefüggést, átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x^3 + bx^2 = \left(x + \frac{b}{3}\right)^3 - \frac{b^2}{3}x - \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

Tehát $y = x + \frac{b}{3}$ helyettesítéssel az új egyenlet másodfokú tagot már nem fog tartalmazni. Eszerint az új megoldandó egyenletünk az

$$y^3 + py + q = 0$$

egyenlet, ahol p és q adott valós számok. Induljunk ki abból, hogy

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

majd alakítsuk az összefüggést a következőképpen

$$(u + v)^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3$$

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

Vessük most össze a kapott egyenletet az y -t tartalmazó harmadfokú egyenlettel:

$$y^3 + py + q = 0$$

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

Vegyük észre, hogy y -t $(u + v)$ -vel helyettesítve egy hasonló alakú harmadfokú egyen-

letet kapunk. Tehát legyen $y = u + v$, így a megfelelő együtthatókra fennáll:

$$p = -3uv$$

$$-\frac{p}{3} = uv$$

és

$$q = -(u^3 + v^3)$$

$$-q = u^3 + v^3$$

Ezek alapján meghatározható egy másodfokú egyenlet, amelynek u^3 és v^3 gyökei:

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

A másodfokú egyenletek megoldóképletét felhasználva:

$$z_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{4\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}}{2}$$

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Ezek szerint:

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = u^3$$

$$z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = v^3$$

Tehát

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Így az

$$y^3 + py + q = 0$$

egyenlet megoldása $y = u + v$ helyettesítéssel

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ezt az összefüggést nevezzük a harmadfokú egyenletek megoldóképletének, vagy más néven Cardano-formulának. Ezen köbgyökök értéke háromféle lehet, amelyek harmadik egységgyökszörösben térnek el egymástól. Az $uv = -\frac{p}{3}$ kikötés miatt minden lehetséges u értékhez csak egyetlen v érték tartozik, így $y = u+v$ -re három értéket kapunk, melyek kielégítik az

$$y^3 + py + q = 0$$

egyenletet. Nézzük ezeket a megoldásokat. Legyen

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

az egyik harmadik primitív egységgyök. Tehát ha u egy értéke u_1 , akkor $u_2 = \varepsilon u_1$ és $u_3 = \varepsilon^2 u_1$. Az $uv = -\frac{p}{3}$ összefüggésből így v értékei is meghatározhatók a megfelelő u értékből, és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) \end{aligned}$$

Nincs más hátra, mint hogy meghatározzuk, milyen feltételek teljesülése mellett milyen gyököket kapunk. A formulában a négyzetgyökjel alatt szereplő $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ kifejezést nevezzük a harmadfokú egyenlet diszkriminánsának (D). A másodfokú egyenletekhez hasonlóan a gyökök minőségét itt is a diszkrimináns előjele határozza meg. Tekintsük először a $D > 0$ esetet. Ekkor a formulában a két köbgyök alatt két különböző valós szám áll. $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ miatt v_1 is valós lesz, azaz y_1 valós szám. Azonban a másik két gyök (y_2 és y_3) a fentebbi levezetésből láthatóan komplex számok lesznek, ráadásul egymás konjugáltjai. Így ebben az esetben egy valós és két komplex gyöke lesz a valós együtthatós harmadfokú egyenletnek.

Ha $D = 0$, akkor $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. Legyen u_1 a köbgyökök egyetlen valós értéke. Így $v_1 = u_1$ fenn kell, hogy álljon. Ebből látszik, hogy $y_1 = 2u_1, y_2 = -u_1, y_3 = -u_1$. Tehát $D = 0$ esetben minden gyök valós, és ezek közül legalább kettő értékében megegyezik.

A $D < 0$ esetben a négyzetgyök alatt negatív szám áll, tehát a köbgyökök alatt komplex számok vannak.

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{-\left[-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\left[-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}$$

Tehát

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\left[-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}}$$

Ebből v értéke már számolható

$$v = -\frac{p}{3u} = -\frac{p\bar{u}}{3u\bar{u}} = -\frac{p\bar{u}}{3|u|^2}$$

$$|u| = -\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$D < 0$ miatt $p < 0$, azaz $-\frac{p}{3} > 0$. Így $|u|^2 = -\frac{p}{3}$.

v így már meghatározható a következőképpen:

$$v = -\frac{p\bar{u}}{3|u|^2} = -\frac{p\bar{u}}{3(-\frac{p}{3})} = \bar{u}$$

Tehát, ha $u_1 = a + bi$, akkor $v_1 = a - bi$

Az egyenlet gyökei ennek fényében a következők:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2a$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -a + i\frac{\sqrt{3}}{2}2bi = -a - b\sqrt{3}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -a - i\frac{\sqrt{3}}{2}2bi = -a + b\sqrt{3}$$

Látható, hogy ebben az esetben az egyenlet mindhárom gyöke valós és értékükben is különböznek (Kővári, 1975) (Kiss, 2007).

A ChatGPT a Cardano-formula bizonyítását rengeteg próbálkozás után sem volt képes a tankönyvi bizonyításnak megfelelő részletességgel leírni, bár részemről ez nem is volt elvárás, hiszen ez egy matematikailag igen csak bonyolultnak mondható levezetés. Az összevetésben arra a beszélgetésre reflektálok, ahol véleményem szerint a legrelevánsabb információkat adta a mesterséges intelligencia. A bizonyítás elindítását illetően

nem hibázott a felület, bár a már jól megszokott módon itt is elmaradtak a kikötések az egyes együtthatókat illetően. Az első különbség, hogy a felület nem úgy tekinti a harmadfokú egyenletet, hogy a főegyütthatója 1. Így $y = x + \frac{b}{3a}$ helyettesítést alkalmaz a fent látott $y = x + \frac{b}{3}$ helyett. Erre a lépésre Tschirnhaus-transzformáció néven hivatkozott, ami azért okozott kellemetlenséget, mert még nem hallottam róla. Az angol nyelvű Wikipédián (https://en.wikipedia.org/wiki/Tschirnhaus_transformation) találtam egy rövid ismertetőt az eljárásról és úgy értelmeztem, hogy igaza lehet a ChatGPT-nek. Ezt követően már az összefüggés következett a négyzetes tagot nem tartalmazó egyenletre vonatkozóan, így arra kértem, hogy részletezze a levezetést, ha tudja. A ChatGPT öt nagy lépésre bontotta a bizonyítást. Az első lépés maradt annak, amit ezelőtt is leírt, azaz a négyzetes tagtól meg kell szabadulni a megfelelő helyettesítéssel. Második lépésben y -t $u + v$ alakban kereste a már négyzetes tagot nem tartalmazó egyenletben. A harmadik lépésben u -ra és v -re meghatározta a két összefüggést, bár hozzátenném, hogy ezt hibásan tette és a későbbiekben javításra szorult. Ezután y kiszámítása, majd pedig x kiszámítása következett. Általánosan tehát a gondolatok jók voltak, de egy tisztességes bizonyításhoz ez kevés. Miután javítottam az u -ra és v -re vonatkozó összefüggéseket, már csak az azt követő lépéseket írta le újra. A diszkriminánsvizsgálatot tekintve érdekes eredményre jutottam. A diszkriminánst nem q -val és p -vel fejezte ki, hanem az alapegyenlet együtthatóival, valamint a diszkrimináns értéke és a gyökök minősége közötti összefüggéseket sem úgy írta le, ahogy azt megszoktuk, ugyanis a D helyett a Δ kifejezést használta, valamint a $\Delta < 0$ és $\Delta > 0$ eseteket felcserélte. Először azt gondoltam, hogy hibázott a felület, de konkrét egyenleteken próbálkozva fel kellett ismernem, hogy itt a ChatGPT nem arról a diszkriminánsról beszélt, amire én gondoltam. Kis keresgélés után az angol nyelvű Wikipédián (<https://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant>) találtam rá az általa megadott diszkriminánsképletre és a hozzá tartozó gyökvizsgálatra. Azt tapasztaltam, hogy a WolframAlpha felülete is ezt a képletet használja, ugyanis a diszkrimináns kiszámításánál azt az értéket adta vissza, amit a mesterséges intelligencia által leírt képlet eredményez, nem pedig a tankönyvi bizonyítás által kapott formula eredményét. Ezt következetesen jól is használja a Wolfram, így arra következtettem, hogy mind a képlet, mind pedig a gyökvizsgálat jó, csak eltér az általunk megszokottól.

17. ábra. Animáció: A harmadfokú egyenlet megoldóképlete (6 kép)

3.2. Feladatmegoldás

3.2.1. Lineáris egyenletek

A konkrét feladatok megoldásánál külön foglalkoztam a lineáris és a kvadratikus egyenletekkel. Arra voltam kíváncsi, mik a felület határai és mennyire ad megbízható válaszokat az egyes problémákra.

A lineáris egyenletek megoldását egy egyszerű példával kezdtem. A $2x - 4 = 0$ egyenletet helyesen oldotta meg a ChatGPT a mérlegelv segítségével. A felület egyszerűsítésnek nevezi az összevonást, a közös nevezőre hozást, zárójelek kibontását, azonos nemű tagok összevonását és így tovább, ami természetesen megfogalmazásbeli hiba, de a továbbiakban ettől eltekintettem. Ezután az értelmezési tartomány vizsgálata következett. Arra kértem, hogy oldja meg a $3x - 1 = 1$ egyenletet az egész számok halmazán. Ebben az esetben is a mérlegelvet alkalmazta és meghatározta x értékét, majd válaszában kitért arra, hogy nincs megoldás, mert az eredmény nem egész szám.

Az első tesztek után bonyolultabb példák felé vettem az irányt. Az előzőekhez hasonlóan a $2x + 3 = 4x + 2$ egyenletet is helyesen oldotta meg, viszont ellenőrzést eddig egyszer sem végzett a mesterséges intelligencia, holott ez ugyanúgy része kéne legyen egy egyenlet megoldásának. Az ellenőrzésre való felszólítást követően jól helyettesített be az eredeti egyenletbe az OpenAI terméke, és a számolásokat is megfelelően végezte

el. A $2(x + 4) - 3x = 4(1 - x) + 2$ egyenlet esetében a zárójelek felbontását helyesen végezte, utána pedig jól oldotta meg a feladatot, bár a "kiszorozzuk a zárójeleket" nem szerencsés megfogalmazás és egy felesleges zárójelpárt elhelyezett a megoldásában. Ez remek alkalmat nyújtott arra, hogy kipróbáljam a komment funkciót. Az említett eljárás lehetővé teszi, hogy a generált kimenet egy-egy részére külön is tudjunk reflektálni, elősegítve ezzel a hatékonyabb működést. Megjegyeztem tehát a válasz megfelelő részére, hogy az odahelyezett zárójelek feleslegesek. A felület igazat adott nekem, majd erre reagálva leírta ugyanazt a megoldást még egyszer, ugyanúgy elhelyezve a felesleges zárójeleket. Ez volt az első kisebb csalódás a témakörben. Az ellenőrzést itt is helyesen végezte el, bár ebben az esetben is külön kellett erre kérnem a felületet. A megoldással kapcsolatban az egyetlen megjegyezni valóm az volt, hogy csinált felesleges lépéseket, sokszor előfordult, hogy nem vezetett sehova az a lépés, amit éppen leírt, mert nem volt az eljárás aktuálisan alkalmazható az egyenletre.

18. ábra. Animáció: Egyszerű lineáris egyenletek megoldása (8 kép)

A törtes lineáris egyenletek kapcsán sajnos már nem volt olyan meggyőző a ChatGPT. A feladat az volt, hogy oldja meg a

$$\frac{4 + 3x}{3} - \frac{2x + 1}{4} = \frac{x}{12}$$

egyenletet. A ChatGPT első próbálkozásra azt állította, hogy azért 12-vel szorozzuk

meg az egyenletet, mert "ez az egyetlen közös többszöröse a nevezőknek". Ez egy olyan mértékű tévedés, amit nem szívesen néz el az ember feladatmegoldás során. Természetesen lehet arra következtetni, hogy biztos a legkisebb közös többszörösre gondolt, de ez egy erős fogalmi tévedés. Ezt leszámítva a feladat megoldásaként a helyes értéket kapta, más meggondolatlan kijelentést nem tett a levezetés során és a számítások is végig helyesek voltak. A számítások helyességére azért tértem ki külön, mert az ellenőrzés esetében - ami kezdetben itt is elmaradt - már nem sikerült hibamentesen számolnia a felületnek. Alapvetően az is érdekes, hogy ha a feladat megoldása során tett kijelentése alapján a 12 az "egyetlen közös nevező", akkor az ellenőrzésnél konkrét számokat behelyettesítve hogy lehet ennek értéke mégis 60, de ez persze nem kéne hogy problémát okozzon a számításokat illetően. A probléma forrása egy előjeltévesztés volt, ami után következetesen jól számolt, de a végeredményből így az látszott, hogy a megoldásként kapott érték mégsem megoldása az egyenletnek. Ennek ellenére a ChatGPT állította, hogy "az egyenlet mindkét oldala egyenlő, tehát az $x = -\frac{13}{5}$ megoldás helyes".

19. ábra. Animáció: Törtes, lineáris egyenletek megoldása: első próbálkozás (18 kép)

Visszajeleztem a felületnek, hogy hol vétett hibát, de sajnos az újragenerált válasza nem lett jobb. Először azt hitte, hogy a közös nevezőre hozást rontotta el, így azon változtatott, de az elrontott előjellel nem kezdett semmit. Ezt követően pedig már csak magam alatt vágtam a fát. Hiába emeltem ki, hogy az előjellel volt a probléma, arra sem tudott érdemileg reagálni, bár pozitívum, hogy néhány próbálkozást követő-

en legalább az feltűnt neki, hogy nem teljesül az egyenlőség az ellenőrzés végén, így a megoldásnak nem kéne helyesnek lennie. Akármit is próbáltam, nem sikerült rábírni a mesterséges intelligenciát, hogy helyes választ adjon, így kipróbáltam azt a módszert, hogy nyitok egy új beszélgetést vele, ahol előlről kezdek a feladatot. A második próbálkozásnál először nem sikerült helyesen meghatározni az egyenlet gyökét. Emögött számítási hiba állt, de az ellenőrzés során ezt már helyesen meg tudta állapítani az OpenAI chatbot-ja. Más kérdés, hogy a tapasztaltak után elhiszi-e az ember ezt neki, vagy inkább utána számol. A kimenet újragenerálását követően már helyes levezetést adott, és ezúttal sikeresen használta a legkisebb közös többszörös kifejezést is. Az ellenőrzést illetően az első próbálkozás itt sem járt sikerrel, itt is a számegyenesen való mozgás okozott nehézséget a felületnek, valamint újra leírta, hogy helyes a megoldás annak ellenére, hogy az egyenlőség nem teljesült az ellenőrzési metódus végére. Emelett bizonyos karakterek nem jól jelentek meg a válasz egy részében a törtek nevezőjében. Egy újragenerálás után azonban sikerült egy korrekt, hibamentes ellenőrzést produkálnia a mesterséges intelligenciának.

20. ábra. Animáció: Törtes, lineáris egyenletek megoldása: második próbálkozás (7 kép)

Az ellenőrzések hiányára visszatérve, kíváncsi voltam, hogy képes-e a felület utasítás nélkül is felismerni, hogy a megoldott egyenleteket egyből ellenőrizni is kell, elvégre az

anyaggyűjtés során ezt többször is kiemelte. A tapasztalat szerint ezt nem sikerült a rendszernek észrevennie. Sőt, egy új beszélgetésben direkt jeleztem neki, hogy az eredmény ellenőrzése ugyanúgy a feladat megoldásának része, azonban így sem produkálta az elvárt választ.

21. ábra. Animáció: Ellenőrzés tanítása (5 kép)

A lineáris egyenletek megoldásának utolsó fázisában szöveges feladatokkal foglalkoztam, amik elsőfokú összefüggésekre vezetnek. Az első feladat így hangzott: „Egy apa kétszer annyi idős, mint a fia. Tíz évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint a fia. Hány éves most az apa és fia?” (*Dr. Kosztolányi et al.*, 2013, p. 191). A ChatGPT egyből egy egyenletrendszert írt fel a szöveg alapján, amit helyesen oldott meg, magyarázata követhető volt és a szöveges válasz sem maradt el. Azonban ez egy olyan probléma, amit egy változó segítségével is meg lehet oldani, így arra kértem az OpenAI terméket, hogy próbálja meg ilyen módon is megoldani a feladatot. Az eredmény ebben az esetben már nem volt makulátlan. Az apa életkorát jelölte x -szel, viszont a fiú életkorára $\frac{x}{2} - 10$ jött ki neki az adatok felírásakor. Az érdekes az, hogy ezek után az egyenletet mégis csak helyesen írta fel, azaz eljutott az

$$x - 10 = 3\left(\frac{x}{2} - 10\right)$$

összefüggéshez, és ki is számolta, hogy az apa 40 éves, azonban így a fiú életkora csak 10 lett, ami nem felel meg a feladat állításának. Az ellenőrzés hiánya miatt pedig ez

fel sem tűnt a felületnek.

22. ábra. Animáció: Egyszerű, lineáris egyenletre vezető, szöveges feladat megoldása: első próbálkozás (3 kép)

Egy új beszélgetésben ismét arra kértem tehát a ChatGPT-t, hogy oldja meg a fenti feladatot, viszont most kikötöttem azt is, hogy egy ismeretlen bevezetésével írja fel az összefüggést a szövegből és ellenőrizze az eredményt. Az utasítást nem sikerült teljes mértékben megértenie, ugyanis az előző esethez hasonlóan újra egyenletrendszerként dolgozta fel a problémát. Miután újra megkértem egy újabb beszélgetésben, hogy csak egy változóval dolgozzon, sikeresen írta fel az egyenletet, és az apa és a fiú életkorát is megfelelően jelölte, valamint nem igényelt külön utasítást az ellenőrzés elvégzése.

23. ábra. Animáció: Egyszerű, lineáris egyenletre vezető, szöveges feladat megoldása: második és harmadik próbálkozás (4 kép)

A következő feladatnál arra voltam kíváncsi, hogy képes-e a felület összetettebb szövegekből is helyes összefüggéseket felírni. Az utasítás a következő volt:

Írj fel egy egyenletet egyetlen ismeretlen bevezetésével az alábbi szöveg alapján! Oldd is meg az egyenletet!

„Egy könyvkereskedő vásárolt két könyvet, majd eladta őket egyforma áron. Az egyiket 20%-ot nyert, a másikat 20%-ot veszített, így összesen 100 Ft-tal kapott kevesebbet érték, mint amennyiért vette őket. Mennyiért vette és adta el a könyveket” (*Dr. Kosztolányi et al.*, 2013, p. 198)?

Kezdetben a szöveg értelmezésével akadtak problémák. A felület mindenképpen a könyvek eredeti árát szeretne volna ismeretlennel jelölni, ám a két könyv eredeti áráról nem tudjuk, hogy megegyezne, így ez egy hibás feltételezés. Többszöri újragenerálásra sem vette észre a mesterséges intelligencia, hogy rögtön az első lépésben rosszul gondolkodott.

24. ábra. Animáció: Törtes, lineáris egyenletre vezető, szöveges feladat megoldása: első próbálkozás (8 kép)

Egy új beszélgetésben újra megkértem, hogy oldja meg a feladatot, de ugyanazon az úton indult el, mint az előző néhány próbálkozásnál. Úgy döntöttem, itt az ideje egy kis rávezetést adni a megoldáshoz vezető összefüggéshez, így leírtam neki, hogy ha x a könyvek eladási ára, akkor $\frac{x}{1.2}$ és $\frac{x}{0.8}$ a két könyv vételi ára, azonban a megfelelő egyenletet még így sem sikerült felírnia. A kiadott és a bejövő pénz közötti kapcsolatot nem tudta helyesen értelmezni a felület, így itt is segítséget kellett nyújtanom, bár meg kell jegyezzem a feladat megoldása során én is hibáztam, így először rossz irányba kezdtem terelni a mesterséges intelligenciát. Miután elárultam neki, hogy a könyvek eladási ára $2x$, már csak azért nem tudta helyesen meghatározni az összefüggést, mert én butaságot mondtam neki a két oldal értékének eltéréséről. Ebből látszik, hogy a ChatGPT-t könnyen lehet rossz irányba is vinni, ugyanis akkor is igazat ad nekünk, ha nincs igazunk. A helyes egyenlet megoldása is nehézséget okozott az OpenAI termékének. Egy számolási hibának köszönhetően rossz eredményt kapott, így jeleztem, hogy melyik sorban szerepel helytelen állítás, de a felület nem volt képes érdemileg reagálni, külön szólnom kellett, hogy nem változtatott a számításain. Végül eljutottunk x megfelelő értékéhez, de a válasz még így sem volt tökéletes. Visszajelzésként annyit mondtam, hogy az eredmény most már helyes, hátha ellenőriz és a szöveges választ megmásítja, de nem így történt. A külön kért ellenőrzést helyesen végezte el, de a szöveges megoldásában még mindig az szerepelt, hogy "1200 Ft-ért vette és adta el a könyveket", tehát megjegyeztem, hogy nem helyes a válasza a feltett kérdésre, amit

ezután megfelelően javított.

25. ábra. Animáció: Törtes, lineáris egyenletre vezető, szöveges feladat megoldása: második próbálkozás (14 kép)

3.2.2. Másodfokú egyenletek

Az elsőfokú egyenletek megoldása után áttértem a másodfokú egyenletekre. Az $x^2 = 4$ egyenlet megoldását helyesen végezte el, első próbálkozásra a magyarázat elmaradt, de a magyarázat igényének jelzése után a felület megfelelően, bár dőcögős magyarázattal vezette le a megoldást. Kíváncsi voltam, hogy több módszerrel is meg tud-e oldani egy kvadratikus egyenletet az OpenAI chatbot-ja, így a következő feladatban ugyanezt az egyenletet kellett megoldania szorzattá alakítással. A magyarázatban újra előkerült az a hiba, hogy az $a^2 - b^2$ alakú kifejezést "különbség négyzete" néven említette, azonban ez a megfogalmazás még mindig helytelen. Próbáltam megtanítani a ChatGPT-nek, hogy az ilyen alakú kifejezésekre és a hozzájuk kapcsolódó nevezetes azonosságra úgy hivatkozzon, hogy négyzetek különbsége, de az eredmény nem sikerült makulátlanra. A kifejezés javításánál még képes volt felhasználni az új információt, de a megoldás újragenerálásában először csak azt az egy pontot írta le újra, mint az első javításnál, másodjára pedig leírta a megoldást újra, viszont a rossz kifejezést használva.

26. ábra. Animáció: Egyszerű, másodfokú egyenlet megoldása (5 kép)

Az $x^2 + 2x + 1$ egyenletnél azt teszteltem, képes-e a mesterséges intelligencia felismerni a teljes négyzetté alakítható kifejezéseket. A példát első próbálkozásra helyesen megoldotta. A gyökök számát illetően kitértem vele egy kicsit a diszkriminánsra, mert az anyaggyűjtésnél mindig kiemelte, hogy ha $D = 0$, akkor egy gyök van, ami többszörös gyök. Ebben az esetben viszont a többszörös gyök kifejezést nem tudtam kicsikarni belőle.

27. ábra. Animáció: Teljes négyzet alakú egyenlet megoldása (3 kép)

A következő példa az $x^2 + 4x + 4 = 25$ egyenlet volt. Szerettem volna mind szorzattá alakítással, mind a megoldóképlettel megoldatni a ChatGPT-vel a feladatot. A szorzattá alakítás esetében a már tapasztalt "különbség négyzete" kifejezés használatától és néhány felesleges lépéstől eltekintve úgy járt el, ahogy a nagy könyvben meg van írva. Az ellenőrzés módszere elsőre gondot okozott a felületnek, ugyanis az eljárás kérését követően újra megoldotta az egyenletet, ahol ugyanazt kapta eredményül, mint elsőre. Ezzel akarta igazolni a megoldása helyességét. Felszólítottam, hogy úgy ellenőrizzen, hogy behelyettesíti a megoldásokat az egyenletbe. Ezután már a megfelelő eljárást végezte el és nem vétett számítási hibát sem. Az egyenletet a megoldóképlet segítségével is meg tudta oldani és a számolások is helyesek voltak, azonban a már korábban említett hiba, hogy $x_{1,2}$ helyett csak x -et használ, továbbra is fennállt. Az ellenőrzés ebben az esetben már megfelelően történt, de itt is külön kérést igényelt.

28. ábra. Animáció: Másodfokú egyenlet megoldása teljes négyzetté alakítással és megoldóképlettel (5 kép)

Azt is vizsgáltam, képes-e a ChatGPT különböző alaphalmazokon dolgozni, illetve tud-e értelmezési tartományt szűkíteni egy bizonyos alaphalmaz felett. Az $x^2 + 1,5x + 2 = 0$ egyenlet megoldása az egész számok halmazán első generálásra nem sikerült tökéletesen. Jól helyettesített be a képletbe, de a gyökök közelítőértékének számolását elrontotta. Pozitívum, hogy már ebben az esetben is feltűnt a felületnek, hogy a megoldások nem egész számok, tehát nincs megoldása az egyenletnek az egész számok halmazán. Második próbálkozásra már megfelelően számolta ki a gyökök közelítő értékét, azonban a válaszában arra hivatkozott, hogy a kerekített értékek nem egész számok, ezért nem megoldások. Megkérdeztem tehát, hogy ha a kerekített értékek egészek lennének, akkor megoldásai lennének-e az egyenletnek, s a válasz igenlő volt. Ez olyan hiba, ami mellett nehéz elmenni. Az értelmezésében, ha $x = 0.5$ lenne és azt kerekítenénk egészre, akkor jó megoldás lenne. Ezt persze az aktuális gyökökre is meg lehetne csinálni, azaz ilyen logikával a saját válasza sem helyes, hiszen ezt a két számot is lehetne egészre kerekíteni. Ezt a hibát valószínűleg az okozta, hogy a számítás elrontásánál úgy fogalmaztam, hogy a kerekített érték számítását rontotta el, s innen ő úgy vette, hogy a megoldást így kell hívni. A $2x^2 + x + 9 = 0$ egyenlet esetében helyt állt a felület. Jól látta, hogy nincsenek valós gyökei az egyenletnek, azonban ennek a miéértje kissé zavarosra sikerült a negatív értékű diszkrimináns megfogalmazás kapcsán.

Egy gyors kérdést követően azonban meg tudta magyarázni mire gondolt, és javította a téves kijelentést.

29. ábra. Animáció: Alaphalmaz szűkítés, nem létező gyökök (5 kép)

A $2(x - 1) + 2x^2 - 2x = (x + 1)(x + 2)$ egyenlet megoldásához először el kell végezni a megfelelő műveleteket és nullára kell redukálni az egyenletet. Nagy meglepetésre a ChatGPT-nek nem a műveletek elvégzése, hanem az egyenlet helyes rendezése okozott problémát első próbálkozásra, amit csak több visszajelzés után tudott megfelelően javítani. A

$$\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{5}{x + 2} = 2$$

egyenlet kapcsán először az értelmezési tartományt vizsgáltattam meg a mesterséges intelligenciával a valós számok halmazán. Az értelmezési tartományt helyesen szűkítette a felület és a jelölésekben sem találtam kivételt. Egyedül az értelmezési tartomány jelölése az, ami zavaró lehet, hiszen mind az \mathbb{R} -t mind a diszkriminánst D -vel jelöli az OpenAI terméke. Az egyenlet megoldása során már merültek fel problémák. Hasonlóan az előző példához, itt is az egyenlet rendezése okozott nehézséget az OpenAI termékének. A nullára redukált alakban a konstans érték és az elsőfokú tag előjele sem volt megfelelő. Több próbálkozást követően sem sikerült javítania a megoldását a felületnek. Új beszélgetésben is próbáltam vele megoldatni, hátha az megoldja a problémát, de nem éreztem azt, hogy segítene. A megfelelő egyenletre nem

volt képes eljutni, és amikor először közöltem vele a megfelelő nullára redukált alakot, akkor valahogyan abból is rossz levezetést mutatott be. Végül a megfelelő egyenlet közlésével sikerült megoldania az egyenletet, de ezt nem tekinteném a feladat helyes megoldásának. Pozitívum viszont, hogy képes volt a kapott eredményeket összevetni az egyenlet értelmezési tartományával és az ellenőrzést is megfelelően végezte.

30. ábra. Animáció: Összetett, másodfokú egyenlet megoldása és értelmezési tartomány vizsgálat (20 kép)

Az algebrai törtek egyszerűbb alakra hozása terén helyt állt a felület. Először az

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-x-2}$$

kifejezést kellett egyszerűsíteni. A magyarázatában kitért az egyes lépésekre, bár érdekes módon a nevező szorzattá alakításához nem a másodfokú egyenlet megoldóképletét, hanem a Viéte-formulákat alkalmazta. Persze külön kérésre a megoldóképlettel is azonos eredményre jutott. Az

$$\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x-20}$$

kifejezés egyszerűsítése már kicsit több időt vett igénybe. Első próbálkozásra a ChatGPT csak a nevezőt írta fel gyöktényezős alakban, a számlálót nem bántotta. A felület kommunikációjából azt éreztem, hogy nem egészen értette, mire gondolok egyszerűsítés alatt. Miután felszólítottam, hogy a számlálót is át kellene írni gyöktényezős alakba és

egyszerűsíteni kellene a megfelelő taggal, már sikeresen megoldotta a problémát a mesterséges intelligencia. Érdekes módon a nevező gyökeit a megoldóképlet segítségével, míg a számláló gyökeit a Viéte-formulák segítségével határozta meg, valamint mindkét feladatot úgy oldotta meg, hogy egyszer sem írta fel mi az a gyöktényező alak, és hol használja.

31. ábra. Animáció: Algebrai törtek egyszerűbb alakra hozása (6 kép)

A szöveges feladatok témakörében két klasszikus típussal foglalkoztam. Az első feladat így szólt a sárga feladatgyűjtemény 1357. feladata alapján: Egy futballbajnokság során 10 mérkőzést játszottak. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy minden csapat játszott az összes többi csapattal (*Dr. Gerócs et al.*, 2014)?

Első próbálkozásra a ChatGPT egyenlet szerű összefüggéseket írt fel, próbált okoskodással a megoldásra jutni, viszont már az elején téves megállapítással indított, így az eredménye is rossz lett. A hibát ott vétette, hogy a mérkőzések száma a csapatok száma és a csapatonként játszott mérkőzések számának szorzatának felével egyezik meg, hiszen a játszott mérkőzések kölcsönösek, minden meccset kétszer számolunk a szorzatban. Ezt követően feltűnt, hogy magát a problémát is rosszul értelmezte, hiszen azt állította, hogy minden csapat 10 mérkőzést játszott, és így vitte tovább a feladatot. A válasz újragenerálását követően már sikeresen vette az akadályt a mesterséges intelligencia, helyesen oldotta meg az egyenletet és a részletezett magyarázata is elfogadható volt számomra. Az ellenőrzés definíciója először itt is problémát okozott, de másodjára,

mikor részletesebben írtam le instrukcióimat, már nagyjából elfogadhatóan mutatta be a feladat ezen részét is.

32. ábra. Animáció: Egyszerű, másodfokúra vezető, szöveges feladat megoldása (7 kép)

A következő feladat, ami a sárga feladatgyűjtemény 1360-as feladatán alapul, már meghaladta a ChatGPT képességeit: Epret és málnát vásároltunk, mindkettőből 3600 Ft értékben. Az eperből, melynek kg-ja 20 Ft-tal volt drágább, mint a málnáé, két kg-mal kevesebbet vettünk. Hány kilót vásároltunk az egyes gyümölcsökből (*Dr. Gerőcs et al.*, 2014)?

Ez egy másodfokúra vezető, törtes egyenletet adó feladat. Első próbálkozásra az OpenAI terméke rosszul értelmezte a feladatot, ugyanis úgy értette, hogy a két gyümölcsre összesen költöttünk 3600 Ft-ot, valamint a mennyiségek változóval történő kifejezésével is akdatak problémák. A válasz újra- és újragenerálásával, valamint a feladat szövegének kisebb finomításaival egyre közelebb kerültünk a helyes irányhoz, de nem sikerült rájönnie a felületnek, hogyan lehetne a megfelelő összefüggést felírni. Miután közöltem vele, hogyan lehetne az adott jelölésekkel kifejezni a gyümölcsökből vásárolt mennyiséget, hirtelen rájött az összefüggésre, és a helyesen felírt egyenletet helyesen is oldotta meg. Mivel ismeretlennel most nem a vásárolt mennyiséget hanem a kilós árat jelöltük, így kíváncsi voltam elköveti-e azt a hibát, amit az emberek nagy része ilyenkor igen: Megáll-e a feladat megoldásával ott, hogy kiszámította x helyes értékét? Kellems csalódás volt, hogy a ChatGPT az első helyes megoldás során már a helyes választ is

adta, azaz kiszámolta a kérdéses mennyiségeket is a kilós árak meghatározása után. A feladat ellenőrzése során ugyanazok a problémák merültek fel, mint a futbalcsapatos példánál, viszont ebben az esetben nem sikerült elérnem többszöri újragenerálásra sem, hogy a megoldását végigvezesse a feladat szövegén.

33. ábra. Animáció: Törtes, másodfokúra vezető, szöveges feladat megoldása (18 kép)

3.3. Kitekintés a ChatGPT 4-re

Ahogy már a téma bevezetésénél is említettem, a ChatGPT 3.5-ös verziója nem a legfrissebb. A ChatGPT 4 egyelőre nem ingyenes, de mindenképpen érdemes megvizsgálni, hogy egy újabb verzió mivel tud többet, elköveti-e ugyanazokat a hibákat, mint elődje. A ChatGPT 4 egyik legnagyobb előnye matematikai szempontból, hogy összekapcsolható a Wolfram motorjával, így a tényleges számításokat már nem az OpenAI chatbot-ja végzi. Mivel ez csak egy rövid alfejezet, így néhány olyan példát néztem meg, ahol a 3.5-ös verzió nem csak döcögött, hanem gyenge teljesítményt nyújtott.

Először az egyenletmegoldási módszerek terén ütköztem nagyobb hibákba, így az első utasítás az volt, hogy írja le, milyen módszerekkel lehet egy lineáris egyenletet megoldani. A válasz sokkal érthetőbbre sikerült. A magyarázatok szebbek, pontosabban megfogalmazottak voltak, azonban kétszeri generálásra is belevette a felsorolásába az egyenletrendszereket és az egyetemi tartalmat érintő módszereket is. Egy külön kérdés után viszont jól teljesített a felület. Fejlődést mutat, hogy az algebrai átrendezést

folyamatosan egy pontba vette, nem próbálta meg szétszedni úgy, mint az elődje. A grafikus megoldásra is egész jó magyarázatokat adott, valamint megjelent a próbálgatás módszere is. Egyedül a 4. pontban említett törtek egyszerűsítése az a rész, ami egy picit kilóg a sorból, hiszen az egyenlet rendezése során az esetlegesen különböző nevezőjű törteket is kezeljük. Kis köztöködés még, hogy a lineáris egyenletekre azt mondta, hogy általában $ax + b = c$ alakban vannak. Igaz, hogy felírhatók így, de sokszor ez már rendezés eredménye. A másodfokú egyenletek megoldásának kapcsán első próbálkozásra remek választ adott. Válaszában mind a négy módszer megjelent, amit középiskolában alkalmazunk és azok magyarázatai is helyesek voltak. Egyedül a grafikus ábrázolás esetében találtam furcsának a mesterséges intelligencia állítását. Nehezen képzelek el olyan esetet, amikor grafikus megoldással egy pontos értéket kapok egy másodfokú egyenlet megoldására úgy, hogy mellette az algebrai megoldás nehézkes lenne. Elmondható tehát, hogy a 4-es verzió tényleg fejlettebb, és jóval hasznosabb már akár az anyaggyűjtés terén is.

34. ábra. Animáció: GPT 4: Egyenletmegoldási módszerek (6 kép)

A következő problémás rész a mérlegelv volt. Az újabb verzió érthetően és tisztán fogalmazta meg a 6 lépést, és a tartalom nagy részével egyet tudtam érteni. Érdekes gondolat, hogy az egyszerűsítés alá az azonos tagok összevonását és a zárójelek felbontását is belevegyük, de így, hogy kitért rá el tudtam fogadni, valamint a változó izolálása megfogalmazást is a magyarázattal együtt tartottam elfogadhatónak. A ha-

odik pontban a plusz lépésekbe azért kötnék bele, mert a válasza felépítése alapján egy lépési sorrendet is fel véltem fedezni a módszer alkalmazása során. Ezek alapján ha már meg van oldva az egyenlet, akkor nem lehet szükség plusz lépésekre. Persze ez már lehet, hogy csak az én személyes gonoszkodásom.

35. ábra. Animáció: GPT 4: Egyenletmegoldási módszerek (2 kép)

Az egyenletek grafikus megoldását illetően egy lineáris egyenlet megoldása nem okozott problémát, és a WolframAlpha segítségével már ábrát is tudott készíteni, bár a második ábra számomra irrelevánsnak tűnt, nem értettem milyen szerepet játszik. Itt jegyezném meg, hogy a képernyőfelvételeken már nem a ChatGPT jele, hanem a Wolfram jele látható, ez jelenti azt, hogy a wolframalpha.com felülettel áll összeköttetésben a ChatGPT. Egy másodfokú egyenlet grafikus megoldására is megkértem a felületet, ami viszont már szült problémákat. A parabola ábrázolásával egyáltalán nem volt gond, mondhatnánk úgy is, hogy a Wolfram jól végezte a dolgát, de a ChatGPT nem tudta ezt megfelelően értelmezni. Mivel a $4x^2 + 8x + 4$ kifejezés képe egy olyan parabola, ami csak érinti az x tengelyt, így nem talált metszéspontokat. Ebből arra következtetett, hogy nincs valós megoldása az egyenletnek. Egy újragenerálást követően pedig már az y tengellyel kereste a metszéspontot, és ha ez a hiba nem lenne elég, még azt is állította, hogy nincs metszéspont, pedig az ábrán egyértelműen látszik, hogy van. Persze ez a megoldást nem befolyásolja, hiszen alaptól rosszul indult el. Miután közöltem vele, hogy van valós gyöke az egyenletnek, már szépen észrevette, és le is írt minden fontos

dolgot. Ez mutatja, hogy még az új verzióknak is van hova fejlődni.

36. ábra. Animáció: GPT 4: Grafikus ábrázolás (8 kép)

A harmadfokú egyenletek megoldóképletét tekintve is elmondható, hogy az újabb verzió már jóval intelligensebb. Bár a tényleges bizonyítást még ez a kiadás sem tudta magától levezetni, a válasza már jóval összeszedettebb és tisztázottabb volt. A sokat emlegetett "depressziós forma" kifejezés valószínűleg az angol nyelvből származhat, a tartalmi mondanivaló helytálló volt. A bizonyításról először azt nyilatkozta, hogy bonyolult lehet, ezért nem részletezném, de én nem értem be azzal a válasszal, hogy helyettesítsük vissza az y -ra kapott formulát az egyenletbe.

A részletezés kérése után szépen kezdte el levezetni a bizonyítás lépéseit. Itt is $x = y - \frac{b}{3a}$ helyettesítést választott, majd a várva várt $y = u + v$ alakot is szóba hozta y meghatározásához. Ezt követően már egy részletesebb levezetést mutatott u és v meghatározására. A bizonyítás más felépítést követ, mint amit a tankönyv mutatott, valamint találtam megfogalmazásbeli hibát is. Például u^2v és uv^2 -nek nem "kiejteni" kell egymást. Értem, hogy arra szeretett volna utalni a felület, hogy a megfelelő kiemelés követően az $(u + v)$ tag együtthatója $3uv = -p$ -ből következően 0 lesz, de ez nem helyes megfogalmazás. Viszont ha úgy vesszük, így is látszik a két összefüggés, amiből aztán az a másodfokú egyenlet kapható, melynek gyökei lesznek u^3 és v^3 . Ebből pedig szépen felírta Cardano képletét. Természetesen ez még mindig nem olyan részletes, mint amit a harmadfokú egyenlet vizsgálatánál láttunk, de jóval elfogadhatóbb.

Ezt követően a diszkriminánsvizsgálat volt még hátra. Ebben az esetben sikeresen írta fel a jól megszokott összefüggést a diszkriminánsra és a gyökökre vonatkozó feltételek is nagyjából úgy szerepeltek, ahogy vártam. Egyedül $D > 0$ esetben tévesztett, ott ugyanis a két komplex gyököt is valósként említi. Látszik azonban, hogy komplex számokra gondol, hiszen konjugált párokat is emleget.

37. ábra. Animáció: GPT 4: Cardano képlete (6 kép)

A feladatmegoldásnál az első probléma az ellenőrzések hiánya volt. Az volt az általános tapasztalat, hogy a 3.5-ös verzió nem tudta megtanulni, hogy a megoldás része az ellenőrzés is. Ehhez képest a 4-es verzió Wolframmal kiegészített változata már képes volt arra, hogy ezt a folyamatot a megoldásába vegye, bár itt sem első kérésre sikerült ezt elérni.

38. ábra. Animáció: GPT 4: Ellenőrzés tanítása (6 kép)

A szöveges feladatoknál már több problémába ütköztem. Először is az apa-fiú feladatot csináltattam meg a felülettel. A kérésre, hogy egyetlen változó bevezetésével oldja meg az egyenletet első próbálkozásra az új verzió sem volt képes mit kezdeni. Miután megerősítettem, hogy csak egy ismeretlent használjon, már jól oldotta meg a feladatot és az ellenőrzést is helyesen végezte.

39. ábra. Animáció: GPT 4: Egyszerű, szöveges feladat megoldása (3 kép)

A könyvvásárlás feladat esetében a ChatGPT 4 sem tudott helyes egyenletet felírni. Valószínűleg a szövegezés túl bonyolult volt neki. Valamiért a feladatból arra következtetett, hogy egy áron vette az árus a két könyvet, holott ezt sehol nem említi a szöveg. Többszöri újragenerálásra sem sikerült a helyes úton elindulnia, a törtes egyenletre nem sikerült rájönnie. Miután megadtam neki a kellő segítséget, hasonló hibába futott, mint a 3.5-ös verzió, a kiadás és a bevétel közötti kapcsolatot rosszul írta fel. Így ebben az esetben elmondható, hogy nem sikerült érdemileg többet nyújtania az előző verziónál.

40. ábra. Animáció: GPT 4: Törtes, lineáris, szöveges feladat megoldása (4 kép)

A Wolfram és a ChatGPT közötti kommunikáció sajnos április elején megszűnt. A felület újabb fázisba érkezett a fejlesztés terén, így most már nincs szüksége a Wolfram felületére a matematikai problémák megoldásához. A működés annyiban változott, hogy a felírt egyenlet megoldásához a ChatGPT generál egy python kódot, amivel megoldja a feladatot, és ezt a megoldást prezentálja utána a felhasználónak a generált programkóddal együtt. Ez egy újabb előrelépés a felület működésében.

A másodfokúra vezető törtes egyenletet első próbálkozásra ez a verzió sem tudta megoldani, ebben az esetben is az egyenlet rendezése okozott problémát, valamint a válasz újragenerálása csak rosszabb választ eredményezett. Fejlődés azonban, hogy itt elég volt egyszer szóvá tenni ezt a hibát, és a felület önerőből megtalálta, hol rontott. Ezt követően már a megfelelő eredményt adta.

41. ábra. Animáció: GPT 4: Törtes, másodfokúra vezető feladat megoldása (4 kép)

A gyümölcsös feladat kapcsán először hasonló megközelítéssel, két ismeretlennel oldotta meg a ChatGPT a problémát. Első próbálásra is a megfelelő eredményt kapta. A következő lépés az volt, hogy próbálja meg mindezt egyetlen ismeretlennel. Először nem sikerült megértenie, hogy mit szerettem volna, de második generálásra már egy megfelelő választ adott, ami matematikailag korrekt volt. Érthetően vezette le, és az utána kért ellenőrzést is el tudtam fogadni. Itt már jobban érződött, hogy végig tudja vezeteni a feladat szövegén a kapott megoldást.

42. ábra. Animáció: GPT 4: Törtes, másodfokúra vezető, szöveges feladat megoldása (5 kép)

4. Értékelés

Ahogy a kutatásban látható volt, már a ChatGPT 3.5-ös verziója is rengeteg mindenre képes. A tapasztalat az, hogy a felületben hatalmas matematikai potenciál rejtőzik, ám ez a verzió még sokszor bizonytalan, helytelen információkkal szolgál. Az OpenAI chatbot-jának felületén is olvasható, hogy a mesterséges intelligencia képes hibázni, így érdemes lehet a megfelelő forrásokban utánanézni a kétes válaszoknak. A megfogalmazásbeli hibák és a foglamak összekeverése sem volt ritka a ChatGPT 3.5-ös verziójában, ami további bizonytalanságot, pontatlanságot eredményezhet a felület használatakor. A kérdés tehát, hogy lehet-e az osztályteremben használni ezt a verziót, mint digitális technológiával működő taneszköz. A hosszú gyakorlatom során volt szerencsém néhány tanórán kipróbálni a felületet egy csoporttal, majd egy rövid kérdőív segítségével a véleményüket is megoszthatták velem. Először ennek a kérdőívnek a tapasztalatait szeretném bemutatni, amit 12 diák töltött ki. A kérdőív kérdései és eredményei a mellékletben található linken elérhetőek.

Az első fontos tanulság a ChatGPT 3.5-ös verziójának megbízhatóságával kapcsolatos (1. és 2. kérdés). A diákok válaszaiból is az szűrhető le, hogy a felület nem ad mindig pontos vagy akár releváns információkat, de előfordul az is, hogy teljesen rossz

választ generál. Az is felmerült problémaként, hogy nem mindig értik azt, ahogyan a mesterséges intelligencia magyaráz. Itt a megfogalmazásbeli hibákra tudok gondolni, illetve arra, hogy a használt fogalmakat nem mindig ismerik a gyerekek. A kutatásban is láthattunk olyan esetet, hogy középiskolai szinten kértem valamit, majd egyetemi anyagot tartalmazó kimenetet generált a felület. A kérdőívből kiderült, hogy túlnyomó többségben egy egyenlet megoldására a diákok még nem a ChatGPT-t használnák, sokkal inkább a Photomath-et, de megjelent a WolframAlpha is a válaszok között (3. és 4. kérdés). Egy szöveges feladattal viszont már többen keresnék fel a ChatGPT felületét, ami érthető, hiszen a Photomath és a WolframAlpha nem képesek szöveges feladatokat megoldani (5. kérdés). A többség azonban még így is inkább a matematikatanárhoz, vagy egy osztálytárhoz fordulna segítségért (6. kérdés).

A legnagyobb kérdés a témakörben talán az, hogy a ChatGPT helyettesíthet-e egy tanárt (8. kérdés). A válaszok alapján arra lehet következtetni, hogy inkább nem. Tehát a gyerekek is úgy látják, hogy ez a felület még nem alkalmas arra, hogy tanuljanak tőle. Tanulótársi szerep tekintetében is a szülő, az osztálytárs és a magántanár mellett a ChatGPT a középmezőnyben helyezkedik el a négyesben (7. kérdés). A tanulók véleménye szerint ahhoz, hogy rendes tanulótársként lehessen rá tekinteni, pontosabb és érthetőbb válaszokra lenne szükség minden szintnek megfelelően. Jó lenne, ha még ennél is bővebb modellel dolgozhatna, mondjuk hozzáférne az internet egészéhez, valamint forrásait megjelölné (9. kérdés).

A kérdőív eredményével egyet tudok érteni. A legnagyobb probléma, hogy a bevezetőben említett felületektől egy aspektusban lényegesen eltér az OpenAI terméke. A GeoGebrán, Redmentán vagy egyéb hasonló felületeken létrehozott anyagok kimenete - ha úgy tetszik interakciója - statikus. Ez alatt azt értem, hogy a tananyagok, feladatlapok nem tudnak rossz választ adni, nem képesek arra, hogy egy-egy válaszra rosszul reagáljanak mondjuk az ellenőrzés gombra kattintva, feltéve hogy megfelelően vannak elkészítve ezek az anyagok. A ChatGPT ehhez képest egy kérdésre akár több választ is adhat, így a kellő háttértudás nélkül nehéz azt kiszűrni, hogy mikor ad megfelelő információt, visszajelzést a felület. Ezáltal új anyag elsajátításához nem találok alkalmasnak az OpenAI chatbot-jának ezen verzióját.

A saját tanórai tapasztalatom az, hogy az OpenAI termékének beépítése egyelőre problémás. A feladatok menetének kontrollálása nehéz és időigényes, hiszen minden diáknak más és más választ generál a mesterséges intelligencia, valamint a tudásuk általában még nem elég mély ahhoz, hogy kellő pontossággal tudjanak mérlegelni a kimenetek igazságtartalma kapcsán. Könnyen össze is zavarhatja őket. A ChatGPT 3.5-öt jelenlegi hatásfoka mellett egyetlen felhasználásra tudom elképzelni az egyenletmegoldás témakörében. A témakör végén a megismert fogalmak, feladattípusok átismétlésére. Ekkor a diákokban már van egy kialakult kép az új anyagról és van rutinjuk a feladatok megoldásában, így működőképesnek tartom, hogy egy összefoglaló

óra után gyakorlásképpen a ChatGPT-vel is végignézze a csoport az egyes fogalmakat, feladattípusokat. Összevethetik saját tudásukat a mesterséges intelligencia által generált válasszal, megkereshetik hol hibázott, illetve jóváhagyhatják a jól sikerült válaszokat.

A kiterjesztett Bloom-taxonómiában ezt az értékelés szintjére tudnám elhelyezni. A tanulóknak ugyanis a generált válaszról véleményt kell alkotniuk, meg kell tudniuk határozni, hogy az helyes-e, s ha nem, akkor hol és mit hibázott a rendszer. Ahogy a bevezetőben is látható volt, ez a művelet már erősen a magasabb szintű gondolkodási képességekhez tartozik. A kivitelezés tekintetében egy utat látok. A felületet kivetítve az osztály közösen ellenőrzi végig az eredményeket. Ezt azért tartom jó módszernek, mert megfelelő tanári moderálás mellett viszonylag pörgősen lehet haladni az órán, és kicsi a valószínűsége, hogy maradna olyan hiba, amit nem vesznek észre, így biztosan nem rögzül ezáltal téves információ a diákokban, valamint a tantárgyi tudás mellett a kritikus gondolkodást is fejleszti a gyerekekben. Akár egy MS Whiteboard segítségével a vizsgált választ közösen, de mégis önállóan is lehet bírálni. Például készíteni egy-egy képernyőképet, azokat a Whiteboardra szűrni, majd a diákok önállóan írhatják be a közös felületre észrevételeiket. Így az önálló gondolkodás és a megfelelő ellenőrzés is megvalósul. A kisebb csoportokban történő megvalósítás is megoldható, bár nem tartom szerencsésnek, mert nagyon sok időt vinne el egy órán, mire minden csoport generált válaszáat meg tudná nézni a tanár és érdemileg tudná ellenőrizni. Persze megoldás lehetne, hogy a tanár előre generáltat néhány választ, de azzal talán pont a ChatGPT spontán mivoltja veszne el a diákok szemében. Azonban mint tanári segédeszköz, lehetne rá tekinteni.

A SAMR-modellben a táblára vetítős módszert a kiterjesztés kategóriába lehet sorolni. Habár a Bloom-taxonómiában magas szintet foglal el ez a módszer, ezt úgy is meg lehetne valósítani, hogy a tanár magától talál ki rossz feladatmegoldásokat és azt adja ki a tanulóknak kinyomtatva. A Whiteboard-os megvalósítás már a változtatás kategóriába esik, viszont ebben az esetben már a két felület kompozíciója az, ami változtat. Ebből látszik tehát, hogy a ChatGPT 3.5-ös verziója, mint digitális technológiával működő taneszköz, önállóan még nem igazán állja meg a helyét az egyenletmegoldásban.

A ChatGPT 4 azonban már relevánsabb eszközként szolgálhat. Ahogy a kitekintés részben is látható volt, ez az újabb verzió már jóval magasabb fokú megbízhatósággal dolgozik és a magyar nyelvű megfogalmazásai is sokkal tisztábbak. Bár kiderült, hogy még ez a rendszer sem ad mindig makulátlan eredményt, a különbség akkor is hatalmas a két verzió között. Könnyebben el tudom róla képzelni, hogy az oktatásban relevánsan lehet majd alkalmazni mind az egyenletmegoldás tanításában, mind más területeken, mint a 3.5-ös verzióról. A legnagyobb probléma egyelőre az, hogy ez a változat csak előfizetéssel vehető igénybe, valamint a feladatok megoldásához szükséges hatalmas erőforrásigénye miatt előfordul, hogy nagyon lassan érkezik válasz a kérdésünkre, ami

megakaszthatja a tanóra menetét. Mindenesetre az OpenAI terméke jó úton halad afelé, hogy lehessen digitális technológiával működő taneszközként használni.

Természetesen nem csak az számít, hogy hogyan működik a ChatGPT, vagy bármely más mesterséges intelligenciával felruházott felület a tanórán. A diákok akkor is hozzáférnek - és használják is -, ha ebből a tanárok a tanórán semmit nem mutatnak. Sajnos a pedagógusok nem zárkozhatnak el a ténytől, hogy ezek a felületek beléptek a köztudatba, és a diákok okoseszközeiken lényegében bármikor igénybe is vehetik ezen szoftverek, alkalmazások szolgálatát. Ahogy láthattuk, a tanulók rengeteg helytelen információval találkozhatnak, amit a megfelelő felkészítés hiányában el is hisznek.

A tanárok munkájára eddig talán sosem volt ekkora szükség. Ahogy az információ egyre könnyebben áramlik a világban, egyre nehezebb kiszűrni azt, hogy mi igaz az interneten. Természetesen nem baj, ha a gyerekek olyan eszközökhöz nyúlnak, mint a ChatGPT. A probléma az, ha nem ismerik ennek az etikus mivoltját, és ha gondolkodás nélkül elhiszik azt, amit a felület állít. Fontos tehát, hogy tanárként a megfelelő szaktárgyi tudást adjuk át a diákoknak, és a kritikus gondolkodásra, valamint ezen eszközök etikus használatára neveljük őket.

5. Bibliográfia

- Discriminant. (2024. 03. 23.). In *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant>
- Földesi, R. (szóbeli közlés, 2024. 02. 03.)
- Gadanidis, G. (2017), Artificial intelligence, computational thinking, and mathematics education. *International Journal of Information and Learning Technology*, Vol. 34 No. 2, pp. 133- 139.
<https://doi.org/10.1108/IJILT-09-2016-0048>
- Geomatech, Nagyné Szokol, Á. & Nagy M. (2015). *Boxplot-diagram készítése* <https://www.geogebra.org/m/gPqAVIF8#material/ofvrWMci> accessed 2024. 04. 05.
- Gerócs, L., Orosz, Gy., Paróczay, J. & Szászné Simon, J. (2014). *MATEMATIKA. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.* (pp. 182). Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó
- Hwang, G. J. & Tu, Y. F. (2021). Roles and Research Trends of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Bibliometric Mapping Analysis and Systematic Review. *Mathematics*, 9(6), 584. <https://doi.org/10.3390/math9060584>
- Juhász, I., Orosz, Gy. (2024). Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek. In Bosznai, G. & Wintsche, G. (szerk.), *MATEMATIKA 10. Az érthető matematika.* (pp. 99- 100). Oktatási Hivatal
- Kiss, E. (2007), *Algebra1, alapszint, 10. előadás.*, ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék, 2007. 10. 10. https://ewkiss.web.elte.hu/html/bboard/06o.mat/Alg1_pr_10.pdf accessed 2024. 03. 20.
- Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Dr. Urbán, J. & Vincze, I. (2013). Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. In Tóth, K. (szerk.), *Sokszínű matematika 9.* (pp. 191- 198). Mozaik Kiadó
- Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Dr. Urbán, J. & Vincze, I. (2016). A másodfokú egyenlet. In Tóth, K. (szerk.), *Sokszínű matematika 10.* (pp. 64- 79). Mozaik Kiadó
- Kővári, K. (1975). A harmadfokú egyenlet megoldása, Komplex együtthatós algebrai egyenletek. In Csánk, I. (szerk.), *MATEMATIKA. A matematikai osztályok számára II.* (pp. 484- 490, 536- 541). Tankönyvkiadó

- Mesterséges intelligencia. (2024. 02. 11.). In *Wikipedia*. [https://hu.wikipedia.org/wiki/MestersÃIges_intelligencia](https://hu.wikipedia.org/wiki/Mesters%C3%A9ges_intelligencia)
- Mohamed, M. Z. B., Hidayat, R., Suhaizi, N. N. B., Sabri, N. B. M., Mahmud, M. K. H. B., & Baharuddin, S. N. B. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0694. <https://doi.org/10.29333/iejme/12132>
- Ouyang, L., Wu, J., Jiang, X., Almeida, D., Wainwright, C. L., Mishkin, P., Zhang, C., Agarwal, S., Slama, K., Ray, A., Schulman, J., Hilton, J., Kelton, F., Miller, L., Simens, M., Askill, A., Welinder, P., Christiano, P., Leike, J., Lowe, R. & OpenAI (2022), *Training language models to follow instructions with human feedback* <https://arxiv.org/pdf/2203.02155.pdf> accessed 2024. 02. 11.
- Szűts, Z., Lengyelne Molnár, T. & Racsko R. (2022). Az oktatás eszközei és digitális technikái. In Falusi, I. & Szűcs, I. (szerk.), *A didaktika kézikönyve*. Akadémiai Kiadó
- Tschirnhaus transformation. (2024. 03. 21.). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Tschirnhaus_transformation