

# WISHART FOLYAMAT SZTOCHASZTIKUS VOLATILITÁS ÉS KORRELÁCIÓ LEÍRÁSÁRA

MSc szakdolgozat

Készítette: Jónás Bence  
Témavezető: Dr. Márkus László  
egyetemi docens

BIZTOSÍTÁSI ÉS PÉNZÜGYI MATEMATIKA  
Kvantitatív pénzügyek szakirány



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Előkészületek</b>	<b>3</b>
2.1. Mátrix tulajdonságok . . . . .	3
2.2. Mátrixváltozós sztochasztikus folyamatok . . . . .	6
<b>3. Wishart folyamatok</b>	<b>9</b>
3.1. Általánosan . . . . .	9
3.2. Szimulálás Euler-Maruyama sémával . . . . .	13
<b>4. Paraméterek becslése</b>	<b>19</b>
4.1. Maximum likelihood becslés . . . . .	19
4.2. Numerikus teszt . . . . .	24
<b>5. WASC modell</b>	<b>29</b>
5.1. Általánosan . . . . .	29
5.2. Alkalmazás . . . . .	31
<b>6. Összefoglalás</b>	<b>36</b>
<b>A. Technikai lemmák</b>	<b>39</b>
<b>B. Euler Maruyama Szimuláció kód</b>	<b>41</b>
<b>C. MLE becselő függvények</b>	<b>43</b>
<b>D. WASC modell</b>	<b>46</b>

## Ábrák jegyzéke

1.	Wishart folyamat 1 realizációja . . . . .	15
2.	Sajátértékek alakulása . . . . .	16
3.	$\beta = 100$ esetében 1 Wishart realizáció . . . . .	16
4.	$\beta = 100$ esetében a sajátértékek alakulása . . . . .	17
5.	M csökkentésének esetében 1 Wishart realizáció . . . . .	18
6.	M csökkentésének esetében a sajátértékek alakulása . . . . .	18
7.	$2 \times 2$ folyamat paraméter becslés hibáinak eloszlása . . . . .	26
8.	$3 \times 3$ folyamat paraméter becslés hibáinak eloszlása . . . . .	27
9.	MSFT, AAPL, NVDA napi szintű loghozamaik . . . . .	31
10.	MSFT és AAPL szórása és korrelációja . . . . .	32
11.	MSFT, AAPL 1 WASC realizációja . . . . .	33
12.	Nvidia szórása és korrelációja a többi részvénnyel . . . . .	34
13.	MSFT, AAPL, NVDA 1 WASC realizációja . . . . .	35

## Táblázatok jegyzéke

1.	Becslések MSE hibája N növelésével . . . . .	25
----	--	----

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Márkus László Tanár úrnak, aki felkeltette a figyelmemet az alábbi téma iránt és ötletekkel segítette a szakdolgozat megvalósulását. Továbbá köszönöttem tartozom páromnak és családomnak akik végig törhetetlenül bíztattak minden egyetemi félév alatt.

# 1. Bevezetés

A pénzügyi matematika területén a sztochasztikus folyamatok kulcsfontosságú szerepet játszanak a piacok dinamikájának megértésében és modellezésében. Különösen a volatilitás és a korrelációs struktúrák pontos megfogalmazása vált alapvetővé a kockázatkezelés és a derivatív árazás területén. A sztochasztikus volatilitási modellek közül a Wishart folyamat kiemelkedik komplexitásával és pontosságával, mivel mátrixváltozós sztochasztikus folyamatok segítségével képes a volatilitás és a korreláció dinamikáját egyaránt leírni.

A többdimenziós modellek fontossága abban rejlik, hogy valósághűbben tükrözik a piaci folyamatokat, hiszen a pénzügyi eszközök ármozgásai gyakran szorosan összefüggenek. Ennek ellenére viszonylag kevés olyan modell létezik, amely képes többdimenziós módon, azaz több eszközre egyidejűleg kezelni a volatilitást és a korrelációt. A Wishart folyamat ebben a tekintetben kiemelkedő, mivel képes a teljes variancia-kovariancia mátrix időbeli alakulását modellezni, ami jelentős előrelépést jelent a pénzügyi matematikai modellezés területén.

Ezen szakdolgozat a Wishart folyamat bemutatására és a pénzügyi alkalmazására összpontosít. A dolgozat célja, hogy részletesen bemutassa a Wishart folyamatok matematikai alapjait, szimulációs módszerét, valamint a paramétereik becslési technikáit. Továbbá, hogy hogyan alkalmazható ez a folyamat a valós piaci adatokon.

A dolgozat felépítése a következőképpen alakul: a 2 fejezet bevezetőként szolgál, amely megismerteti az olvasót a mátrixváltozós sztochasztikus folyamatok alapjaival. A 3 fejezet részletesen tárgyalja a Wishart folyamat matematikai alapjait, bemutatva a definíciókat, tulajdonságokat és egy szimulációs technikát, amely az Euler-Maruyama módszeren alapul. A 4 fejezet a paraméterek becslési módszerére koncentrál, maximum likelihood becslésen keresztül. Végül, a 5 fejezet bemutatja a Wishart Affine Sztochasztikus Korreláció (WASC) modellt, és tárgyalja annak alkalmazását valós piaci adatokon, különböző részvények példáin keresztül.

Ezen keresztül a dolgozat célja, hogy átfogó képet nyújtson a Wishart folyamatok elméletéről és alkalmazásáról.

## 2. Előkészületek

Ebben a fejezetben Oliver Pfaffel [3], Harry Bensusan [4] és Alessandro Gnoatto [5] cikkei segítségével, a Wishart folyamatokhoz előzetesen elengedhetetlen, definíciókat, lemmákat és tételeket mutatjuk be. Első sorban különböző mátrix definíciókat, tulajdonságokat és műveleteket járjuk körbe. Majd ezután a mátrixváltozós sztochasztikus folyamatokat vezetjük be és ezen témakört ismertetjük röviden. Felépítjük azt, hogy hogyan jutunk el egészen a véletlen mátrixoktól, a Wishart folyamatig, amely jelen szakdolgozat fő témáját képviseli.

### 2.1. Mátrix tulajdonságok

A következőekben már az előbb említett, mátrix jelölésekkel, tulajdonságokkal és műveletekkel fogunk foglalkozni. Definiáljuk különböző számhalmazokon értelmezett mátrixokat, illetve elnevezzük a különböző definitéssel rendelkezőket.

#### 2.1. Definíció.

- (i) Jelölje  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  az  $n \times m$  valós mátrixok halmazát.  
Ha  $n = m$  a jelölés az alábbi módon egyszerűsödik  $M_n(\mathbb{R})$ .
- (ii) Legyen  $GL(n)$  az  $n \times n$  invertálható valós mátrixok halmaza.
- (iii) Jelölje  $\sigma(M)$  az  $M$  mátrix sajátértékeinek halmazát, továbbiakban ezt az  $M$  mátrix spektrumának nevezzük.
- (iv)  $S_n(\mathbb{R})$  jelölje a szimmetrikus valós mátrixok halmazát.
- (v) Jelölje  $S_n^+(\mathbb{R})$  ( $S_n^-(\mathbb{R})$ ) a pozitív (negatív) szemidefinit valós mátrixok halmazát.  
Vagyis  $M \in S_n^+(\mathbb{R})$  esetén  $\forall \lambda \in \sigma(M) \lambda \geq 0$ .
- (vi) Legyen  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  ( $S_n^{--}(\mathbb{R})$ ) a pozitív (negatív) definit valós mátrixok halmaza.  
Vagyis  $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  esetén  $\forall \lambda \in \sigma(M) \lambda > 0$ .

(vii)  $A^T$  jelölje az  $A$  mátrix transzponáltját.

(viii) Legyen  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , ekkor  $Tr(A)$  jelöli az  $A$  mátrix nyomát.

A továbbiakban a pozitív szemidefinit mátrixok halmazán definiáljuk a mátrixváltozós négyzetgyök függvényt.

**2.2. Definíció.** Legyen  $A \in S_n^+$ , ekkor az  $A$  mátrix az alábbi alakban írható  $A = P^T D P$ , ahol  $P$  egy unitér mátrix és  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , ahol  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ . Ekkor az  $A$  mátrix négyzetgyöke az alábbi módon írható fel,  $\sqrt{A} = P^T(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$ , továbbá  $\sqrt{A} \in S_n^+$ .

Ekkor a négyzetgyök  $\sqrt{A}$  jól definiált és független a  $P$  megválasztásától.

**2.1. Következmény.** Ha  $A \in S_n^{++}$  akkor  $\sqrt{A} \in S_n^{++}$

Alább bevezetjük a mátrixváltozós függvény differenciálását.

**2.3. Definíció.** Legyen  $S \in M_n(\mathbb{R})$ . Ekkor  $D = (\frac{\partial}{\partial S_{ij}})_{i,j}$ ,  $\forall$  valós értékű differenciálható függvényre  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , mint a mátrix minden parciális deriváltjára  $\frac{\partial}{\partial S_{ij}} f(S)$ .

A következő, determinánsra használt számítási szabályokat bizonyítás nélkül közöljük.

**2.1. Lemma.**  $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), S \in GL(n)$  és  $H_t : \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$  differenciálható ekkor

$$(i) \det(AB) = \det(A)\det(B) \text{ és } \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \text{ Ha } A \in GL(n) \text{ vagy } B \in GL(n) \text{ ekkor } \det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$$

$$(iii) \frac{\partial}{\partial t} \det(H_t) = \det(H_t) \text{tr}(H_t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} H_t)$$

$$(iv) D(\det(S)) = \det(S)(S^{-1})^T$$

$$(v) \det(A) \text{ az } A \text{ mátrix sajátértékeinek szorzata}$$

Ha  $S$  szimmetrikus is akkor



$$(vi) D(\det(S)) = \det(S)S^{-1}$$

$$(vii) \frac{\partial^2}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}}(\det(S)) = \det(S)[(S^{-1})_{kl}(S^{-1})_{ij} - (S^{-1})_{ik}(S^{-1})_{lj}] \text{ ahol az } (S^{-1})_{ij} \text{ jelöli az } S^{-1} \text{ mátrix } i, j\text{-edik elemét.}$$

**2.2. Lemma.**  $\forall A, B, S \in M_n(\mathbb{R})$  ekkor

$$(i) \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \text{ és } \operatorname{tr}(\alpha A + B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(ii)  $\operatorname{tr}(A)$  az  $A$  mátrix sajátértékeinek összege.

A következő definíció a mátrixok és a vektorok között teremt kapcsolatot vagyis egy mátrixot, hogyan tudunk vektorizálni.

**2.4. Definíció.** Legyen  $A \in M_{n,m}$  ahol  $a_i \in \mathbb{R}^n$  jelöli az  $A$  mátrix  $i$ . oszlopát, ekkor  $\operatorname{vec} : M_{n,m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$

$$\operatorname{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Az alább bevezetésre kerülő kronecker-szorzat a mátrixokkal végzett számításokban igen sokszor használt definíció.

**2.5. Definíció.** Ha  $A$   $m \times n$  és  $B$   $p \times q$  méretű mátrix, akkor  $C = A \otimes B$  kronecker-szorzat nem más, mint

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

**2.3. Lemma.**

$$(i) \text{ Legyen } A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ ekkor } \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{vec}(A)^T \operatorname{vec}(B)$$

(ii) Legyen  $A \in M_{p,m}(\mathbb{R}), B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$  és  $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Ekkor

$$\operatorname{vec}(ACB) = (B^T \otimes A) \operatorname{vec}(C)$$

## 2.2. Mátrixváltozós sztochasztikus folyamatok

**2.6. Definíció.** Egy  $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, Q)$  négyest, filtrált valószínűségi mezőnek nevezünk ha,  $\Omega$  egy halmaz,  $G$  egy  $\sigma$ -algebra az  $\Omega$ -n,  $(G_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  egy növekvő  $\sigma$ -algebra család a  $G$ -n,  $Q$  pedig egy valószínűségi mérték a  $(\Omega, G)$ -n. A filtrált valószínűségi mező teljesíti a szokásos feltételeket, ha

(i) a filtráció jobbról folytonos, vagyis  $\bigcap_{s>t} G_s = G_t \forall t \geq 0$  és

(ii) ha  $(G_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  teljes

A következőekben  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  filtrált valószínűségi mezőt vesszük, mely teljesíti a szokásos feltételeket.

**2.7. Definíció.** Legyen  $X$  egy mérhető függvény,

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (M_{n,m}(\mathbb{R}), B^{n,m}) \quad (2.2)$$

akkor  $X$ -et egy  $n \times m$ -es véletlen mátrixnak nevezzük.

Vagyis az előbbi  $X$ -et úgy is tudjuk értelmezni, hogy a mátrix minden eleme egy-egy valószínűségi változó. A továbbiakban erre a véletlen mátrixra vezetjük be az alapokat, mint várható érték, sűrűség függvény, karakterisztikus függvény, stb... Majd végre sort kerítünk a mátrixváltozós sztochasztikus folyamatra is, amely megalapozza az utat, a Wishart folyamat felé.

**2.8. Definíció.** Legyen  $f_X$  egy nem negatív mérhető függvény, úgy hogy

$$P(X \in M) = \int_M f_X(A) dA \quad \forall M \in B^{n \times m} \quad (2.3)$$

akkor  $f_X$ -et az  $X$  véletlen mátrix sűrűségfüggvényének nevezzük.

**2.9. Definíció.** Legyen  $X$  egy  $n \times m$ -es véletlen mátrix, ekkor minden függvényre  $h = (h_{ij})_{i,j} : M_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{r,s}(\mathbb{R})$  ahol  $h_{i,j} : M_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ , ekkor a várható értéke  $h(X)$ -nek

$$E(h(X))_{ij} = E(h_{ij}(X)) = \int_{M_{n,m}(\mathbb{R})} h_{ij}(A) P^X(dA) = \int_{M_{n,m}(\mathbb{R})} h_{ij}(A) f_X(A) dA \quad (2.4)$$

Az utolsó egyenlőség akkor áll fenn, ha az  $X$  véletlen mátrixnak létezik sűrűségfüggvénye.

**2.10. Definíció.** Legyen  $X$  egy  $n \times m$ -es véletlen mátrix, ekkor karakterisztikus függvénye az alábbi alakban írható fel.

$$E[e^{tr(iXZ^T)}] = \int_{M_{n,m}(\mathbb{R})} e^{tr(iAZ^T)} P^X(dA) \quad (2.5)$$

minden  $Z \in M_n(\mathbb{R})$ .

A következőekben a Laplace transzformáltat vezetjük be véletlen mátrixokra.

**2.11. Definíció.** Legyen  $X \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  egy  $n \times n$ -es véletlen mátrix, ekkor a Laplace transzformált az alábbi alakban írható fel.

$$E[e^{tr(-UX)}] = \int_{S_n^{++}} e^{-tr(UA)} P^X(dA) \quad (2.6)$$

$\forall U \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ -re.

**2.12. Definíció.** Legyen  $X$  egy  $n \times m$ -es véletlen mátrix és  $Y$  egy  $p \times q$ -es véletlen mátrix. Ekkor  $X$  és  $Y$  kovarianciáját az alábbi módon tudjuk felírni,

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(\text{vec}(X^T), \text{vec}(Y^T)) \quad (2.7)$$

$$= \mathbb{E}[\text{vec}(X^T) \text{vec}(Y^T)^T] E[\text{vec}(X^T)] E[\text{vec}(Y^T)]^T \quad (2.8)$$

A következőekben bevezetjük a jelen szakdolgozat egyik legfontosabb definícióját a mátrixváltozós sztochasztikus folyamatot.

**2.13. Definíció.** Legyen  $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R})$  egy mérhető függvény a megfelelő mérhető terek között:  $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) = X_t(\omega)$ , ahol  $X_t(\omega)$  egy véletlen mátrix minden  $t \in [0, \infty)$ -re. Ekkor  $X$ -et egy mátrixváltozós sztochasztikus folyamatnak nevezzük.

**2.14. Definíció.** Egy  $X$  mátrixváltozós sztochasztikus folyamat lokális martingál, ha minden komponense lokális martingál. Azaz ha létezik a megállási időknél végtelenbe tartó szigorúan monoton növekedő sorozata  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $T_n \rightarrow \infty$  úgy, hogy  $X_{\min\{n, T_n\}, ij}$  martingál minden  $i, j$ -re.

A továbbiakban bevezetjük a mátrixváltozós Brown mozgást, ami Wishart folyamat előállításának egy fontos részét fogja képezni.

**2.15. Definíció.** Legyen  $X$  egy  $n \times p$  véletlen mátrix, amely mátrixváltozós normális eloszlást követ.  $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  várható értékkel és  $\Sigma \otimes \Psi$  kovarianciával, ahol  $\Sigma \in S_n^{++}$ ,  $\Psi \in S_p^{++}$ , akkor ha  $\text{vec}(X^T)$  egy  $\mathbb{R}^{np}$  többdimenziós normális eloszlást követ,  $\text{vec}(M^T)$  várható értékkel és  $\Sigma \otimes \Psi$  kovariancia mátrixsal, vagyis  $\text{vec}(X^T) \sim \mathcal{N}_{np}(\text{vec}(M^T), \Sigma \otimes \Psi)$ .

A következőekben az alábbi jelölést használjuk  $X \sim \mathcal{N}_{n,p}(M, \Sigma \otimes \Psi)$ .

**2.16. Definíció.** Legyen  $X \sim \mathcal{N}_{n,p}(M, \Sigma \otimes \Psi)$ . Ekkor  $X$  karakterisztikus függvénye az alábbi alakban írható fel.

$$E(e^{tr(iXZ^T)}) = e^{tr(iZ^T M - \frac{1}{2}Z^T \Sigma Z \Psi)} \quad (2.9)$$

**2.17. Definíció.** A mátrixváltozós Brown mozgás  $B \in [0, \infty) \times M_{n,m}(\mathbb{R})$  olyan mátrixfolyamat, amelyben a mátrix minden eleme időben egy egydimenziós Brown mozgás. Azaz  $B = (B_{ij})_{i,j}$ , ahol  $B_{ij}$  egy egydimenziós Brown mozgás,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ . Ezt az alábbi alakban írjuk a továbbiakban  $B \sim \mathcal{BM}_{n,m}$ .

**2.2. Következmény.**  $B_t \sim \mathcal{N}_{n,p}(0, tI_{np})$

### 3. Wishart folyamatok

Ebben a részben röviden bemutatásra kerülnek a Wishart folyamat alapjai, tulajdonságai és levezése, O. Pfaffler [3] és H. Bensusan [4] cikkei nyomán. A fejezet második részében egy szimulációs technika kerül bemutatásra.

#### 3.1. Általánosan

A Wishart folyamatokat eredetileg Marie-France Bru [1] vezette be 1991-ben, mint a klasszikus négyzetgyök folyamat többdimenziós kiterjesztése. Majd rá csak 19 évvel, 2010-ben, Christian Gourieroux és Razvan Sufana mutatta be alkalmazását a pénzügyek világában. Ezek után a Wishart folyamatok úttörését kitűnően mutatja, hogy számos kutató fejlesztett sztochasztikus volatilitás modelleket, amelyeket a Wishart folyamat hajt meg.

A Wishart elnevezés a Wishart eloszlásból származik, ami a  $\chi^2$  eloszlás többdimenziós általánosítása. Alább definiáljuk a Wishart eloszlást.

**3.1. Definíció.** *Legyen  $X_1, \dots, X_n$   $n$  darab független többdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó. Vagyis  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ ,  $i = 1, \dots, n$  és  $\forall X_i \in \mathbb{R}^p$ . Ekkor az alábbi  $S = \sum_{i=1}^n X_i X_i^T$   $p \times p$  véletlen mátrixot Wishart-eloszlásúnak nevezzük.*

*Amikor  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$   $i = 1, \dots, n$ , akkor  $S = \sum_{i=1}^n X_i X_i^T$   $p \times p$  véletlen mátrixot nem-centrált Wishart eloszlásúnak nevezzük.*

A következőekben definiáljuk a Wishart folyamatot.

**3.2. Definíció.** *Legyen  $B_t$  egy  $n \times n$  dimenziós Brown mozgás. A Wishart folyamat alatt az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet megoldását értjük az  $S_n^+(\mathbb{R})$  halmazon.*

$$\begin{aligned} d\Sigma_t &= (\Theta\Theta^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \sqrt{\Sigma_t}dW_tQ + Q^T dW_t^T \sqrt{\Sigma_t}, \\ \Sigma_0 &\in S_d^+(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ahol  $\Theta, Q, M \in M_n(\mathbb{R})$ .

Az 3.1 sztochasztikus differenciálegyenlet a mátrix analógja az átlaghoz visszahúzó négyzetgyökös diffúziós folyamatnak. A legáltalánosabb esetben azt gondoljuk, hogy 3.1 egyenletben megtalálható mátrixok összes eleme nem 0. Azért, hogy a folyamatba beágyazzuk az átlaghoz húzás, illetve a stacionaritás tulajdonságát, elvárjuk, hogy az  $M$  mátrix negatív szemidefinit legyen. Mindemellett  $\Theta$ -ra teljesüljön, hogy  $\Theta\Theta^T = \beta Q^T Q$  ahol  $\beta$  egy valós paraméter és  $\beta > n - 1$ .

A négyzetgyök folyamat teljes analógiájában  $\Theta\Theta^T$  a  $\Sigma_\infty$  hosszú távú várható variancia-kovariancia mátrixhoz kapcsolódik az alábbi lineáris egyenleten keresztül.

$$-\Theta\Theta^T = M\Sigma_\infty + \Sigma_\infty M^T. \quad (3.2)$$

Továbbá a  $Q$  mátrix jelöli a volatilitás volatilitását, ezen mátrix paraméterei döntő fontosságúak lesznek a részvénypiacon megfigyelhető stilizált hatások magyarázatához. A  $Q$  mátrixot szimmetrikus pozitív definit mátrixnak tekintjük.

Továbbiakban a Wishart folyamatot a paramétereivel az alábbi módon jelöljük  $\Sigma \sim \mathcal{WP}_n(Q, M, \beta, \Sigma_0)$ .

A 3.1 és 3.2-ből könnyen láthatjuk, hogy közeli kapcsolatban áll a Wishart- és a CIR folyamat egymással. Ha  $n = 1$ -nek választjuk a dimenziót a 3.1-ben akkor a skalár CIR folyamathoz lyukadunk ki, amit az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet definiál.

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \mu\sqrt{v_t}dB_t, \quad (3.3)$$

$$v_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (3.4)$$

ahol  $\kappa, \theta$  és  $\mu$  szigorúan pozitív paraméterek és  $B_t$  egy skalár Brown mozgás. A Wishart folyamat egy említésre méltó tulajdonsága, hogy az elemei között egy nem triviális összefüggőségi struktúra van. Ezt jól mutatja a kvadratikus variációja amelyet az alábbi lemma részletez.

**3.1. Lemma.** *Legyen  $\Sigma \sim \mathcal{WP}_n(Q, M, \beta, \Sigma_0)$ . Ekkor*

$$d[\Sigma_{ij}, \Sigma_{kl}]_t = \Sigma_{t,ik}(Q^T Q)_{jl} dt + \Sigma_{t,il}(Q^T Q)_{jk} dt + \Sigma_{t,jk}(Q^T Q)_{il} dt + \Sigma_{t,jl}(Q^T Q)_{ik} dt.$$

*Ez igaz ha  $\Sigma$  létezik.*

**Bizonyítás:** Legyen  $H_t := \sqrt{\Sigma_t} dB_t Q + Q^T dB_t^T \sqrt{\Sigma_t}$ . Ekkor  $[\Sigma_{ij}, \Sigma_{kl}] = [H_{ij}, H_{kl}]$ .

$$H_{t,ij} = \sum_{m,n} (\sqrt{\Sigma_t})_{in} dB_{t,nm} Q_{mj} + Q_{mi} dB_{t,nm} (\sqrt{\Sigma_t})_{nj}$$

Az első szummája a  $d[H_{ij}, H_{kl}]_t$  egyenlő

$$\sum_{m,n} (\sqrt{\Sigma_t})_{in} (\sqrt{\Sigma_t})_{kn} Q_{mj} Q_{ml} dt$$

Mivel a  $\Sigma_t$  szimmetrikus ezért az alábbi alakra egyszerűsödik az előző sor

$$\Sigma_{t,ik}(Q^T Q)_{jl} dt$$

A másik három szumma hasonló módon felírható.

□

A Wishart folyamat az affin folyamatoknak egy speciális esete  $S_d^+(\mathbb{R})$ -en, amelyekre vonatkozó általános eredményeket Cucherio [6] 2011-ben megjelent cikke tartalmazza. Ezen írásnak csak a fő eredményét ismertetjük.

**3.1. Állítás.** *Legyen  $X(t)$  egy általános affin folyamat folytonos trajektóriákkal  $S_d^+(\mathbb{R})$ -en az alábbi alakban*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (D_X + \mathcal{L}(X(s))) ds + \int_0^t (\sqrt{X(s)} dW(s) C_X + C_X^T dW^T(s) \sqrt{X(s)}),$$

ahol  $X(0), D_X \in S_d(\mathbb{R})$ ,  $C_X \in M_d(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{L} : S_d^+(\mathbb{R}) \rightarrow S_d^+(\mathbb{R})$  egy lineáris transzformáció. A folyamatnak létezik egyértelmű gyenge megoldása  $S_d^+(\mathbb{R})$  halmazon ha,

$$(i) D_X - (d-1)C_X^T C_X \in S_d^+(\mathbb{R}),$$

(ii)  $\forall P_1, P_2 \in S_d^+(\mathbb{R})$ , úgy hogy  $\text{Tr}(P_1 P_2) = 0 \implies \text{Tr}(\mathcal{L}(P_1)) P_2 \geq 0$ .

Ha pedig  $X(0)$ -tól elvárjuk, hogy  $S_d^{++}(\mathbb{R})$ -ből halmazból származzon, ekkor ha (i) lecseréljük egy erősebb feltételre

(iii)  $D_X - (d+1)C_X^T C_X \in S_d^+(\mathbb{R})$ ,

akkor a fenti sztochasztikus differenciálegyenletnek egyértelmű erős megoldása létezik a  $S_d^{++}(\mathbb{R})$ -n.

Ezt közvetlenül össze tudjuk hasonlítani a Wishart folyamattal úgy, hogy a fenti egyenletbe az alábbi módon helyettesítünk be.  $D_X = \Theta \Theta^T$ ,  $C_X = Q$ , és  $\mathcal{L}(P_0) = M P_0 + P_0 M^T$  és az  $X(t)$  helyére pedig  $\Sigma_t$  írunk. Továbbá, ha még korlátozásokat vezetünk be a drift determinisztikus részére

$$\Theta \Theta^T = \beta Q^T Q, \quad (3.5)$$

illetve a fentebbi állítás 3.1, (i) és (iii) feltételeit nézzük az alábbi tulajdonságokat kapjuk vissza.

$$\beta \geq d - 1 \quad (3.6)$$

és

$$\beta \geq d + 1. \quad (3.7)$$

Továbbá ha (i) feltétel nem teljesül akkor az egész folyamat rosszul definiált.



### 3.2. Szimulálás Euler-Maruyama sémával

Ebben a fejezetben a Wishart folyamat szimulálásával fogunk foglalkozni Oliver Pfaffel [3] cikkének nyomán. Megmutatjuk, hogy hogyan tudjuk diszkretizálni a folyamatot és hogy hogyan tudjuk megtartani a kovariancia-variancia mátrix pozitív szemidefinit tulajdonságát.

Először is vegyük a 3.2 definícióval felírt alakot és ezt írjuk fel  $\forall t \in \mathbb{R}_+, h > 0$ -ra integrál alakban a  $[t, t + h]$  intervallumon.

$$\begin{aligned} \Sigma_{t+h} = & \Sigma_t + \beta Q^T Q h + \int_t^{t+h} M \Sigma_s ds + \int_t^{t+h} \Sigma_s M^T ds + \\ & + \int_t^{t+h} \sqrt{\Sigma_s} dB_s Q + \int_t^{t+h} Q^T dB_s \sqrt{\Sigma_s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Sigma_0 \in S_d^+(\mathbb{R})$$

Ezt a sztochasztikus differenciálegyenletet szeretnénk úgy közelíteni, hogy numerikusan tudjuk szimulálni a Wishart folyamatot. Erre a legalkalmasabb módszer az Euler közelítés vagy másnéven az Euler-Maruyama közelítés.

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{t+h} = & \hat{\Sigma}_t + (\beta Q^T Q + M \hat{\Sigma}_t + \hat{\Sigma}_t M^T) h + \sqrt{\hat{\Sigma}_t} (B_{t+h} - B_t) Q + \\ & + Q^T (B_{t+h}^T - B_t^T) \sqrt{\hat{\Sigma}_t}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

ahol  $\hat{\Sigma}$  a diszkretizált Wishart folyamat. Mivel tudjuk, hogy a Brown mozgás stacionárius és a növekmények függetlenek, ezért az eloszlása a  $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}_p(0, hI_{2p})$ , ami független a többi növekménytől. Ezért 3.9 felírást tudjuk használni arra, hogy szimuláljuk a  $\hat{\Sigma}$  bármilyen fix  $h > 0$  lépésközzre. Ekkor a  $(0, h, 2h, \dots, T)$  időskálán egy folyamatot kapunk, ami bármilyen  $T \in \mathbb{R}_+$ -ra, a  $(\hat{\Sigma}_0, \hat{\Sigma}_h, \hat{\Sigma}_{2h}, \dots, \hat{\Sigma}_T)$ .

Ami itt a problémát jelenti, hogy a Wishart folyamat diszkretizáltja lehet nem pozitív definit mátrix is. Ekkor a szimulációt meg kell állítanunk, mielőtt elérjük a  $T$ , mert a négyzetgyök folyamat többé nem jól definiált.

Ahhoz, hogy ezt a problémát feloldjuk, megfigyeljük, hogy  $\hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  ha  $h \rightarrow 0$ . Így eltudjuk érni, hogy  $\hat{\Sigma}$  pozitív szemidefinit mátrix marad, amed-

dig a  $h$  kellőképpen kicsi. Ezért az algoritmust úgy módosítjuk, hogy egy változó lépésközt vezetünk be.

Tegyük fel, hogy adott a diszkrétizált Wishart folyamat  $(\hat{\Sigma}_0, \hat{\Sigma}_h, \hat{\Sigma}_{2h}, \dots, \hat{\Sigma}_t)$  és a diszkrétizált Brown mozgás  $(0, B_h, B_{2h}, \dots, B_t)$ ,  $t < T - h$ -ig. Tegyük fel, hogy kiszámítjuk  $\hat{\Sigma}_{t+h}$  (és így  $B_{t+h}$ ) a 3.9 alapján. Amikor ellenőrizzük a  $\hat{\Sigma}_{t+h}$  definitségét, kiderül, hogy nem pozitív definit, vagyis a legkisebb sajátértéke negatív. Ekkor a lépésközt a felére csökkentjük és kiszámítjuk a  $\hat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2}}$  értékét. A következő lépésben ismét ellenőrizzük, hogy a legkisebb sajátérték negatív-e, ha igen akkor iteratívan folytatjuk a lépésköz felezését, ameddig nem lesz  $\hat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2^n}}$  pozitív szemidefinit vagy pedig nem lesz a  $h < \epsilon$ , azaz a lépésköz konvergál nullához. Az  $\epsilon$  értéke pythonban  $2,22 * 10^{-16}$ .

Ahhoz, hogy megkapjuk  $\hat{\Sigma}_{t+\frac{h}{2}}$  értékét, szükségünk van  $B_{t+\frac{h}{2}}$  értékére, amely feltételesen adott a  $t$ -ig bekövetkezett Brown mozgásokra. Mivel a Brown mozgás Markov folyamat, ezért a  $B_{t+\frac{h}{2}}$  feltételes értéke ugyanaz  $(B_t, B_{t+h})$ -ra nézve. Tekintsük általánosan  $i, j$ -edik elemét  $B_{ij}$  a  $B$  Brown mátrixnak. Ekkor Paul Glasserman [7] cikkéből tudjuk, hogy.

$$\begin{aligned} B_{ij, t+\frac{h}{2}} | (B_{ij, t} = x, B_{ij, t+h} = x + y) &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\frac{h}{2}x + \frac{h}{2}(x + y)}{h} + \sqrt{\frac{\frac{h}{2} \frac{h}{2}}{h}} Z_{ij} \\ &= x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{h}}{2} Z_{ij} \end{aligned}$$

ahol  $Z_{ij} \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$ . Mátrix alakban felírva a következőképpen néz ki.

$$(B_{t+\frac{h}{2}} - B_t) | (B_{ij, t} = X, B_{ij, t+h} = X + Y) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{h}}{2}Z$$

ahol  $Z \sim \mathcal{N}_{p,p}(0, I_{2p})$ .

A fenti módszernek az implementációját a  $B$  fejezet tartalmazza. Ez a kód python nyelven lett megírva.

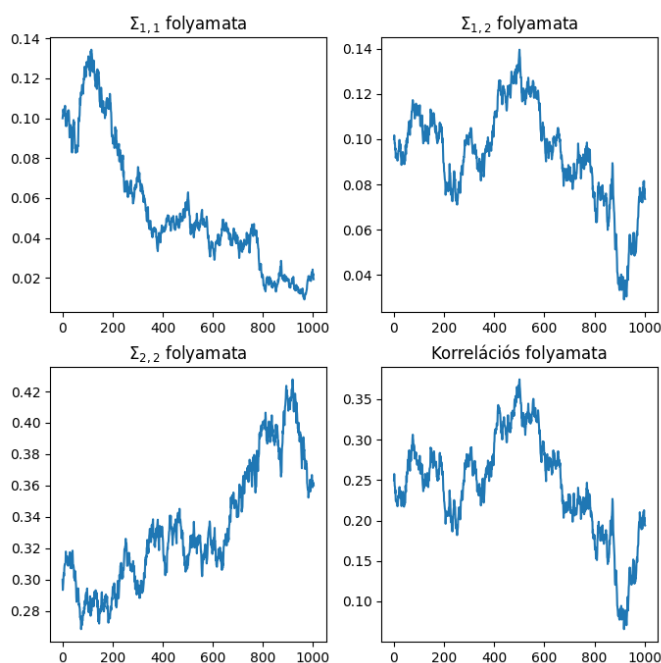
A következőekben az algoritmus működését mutatjuk be a Wishart folyamat különböző paraméterezései mellett. Bemutatjuk a különböző mátrix értékek alakulását, illetve a paraméterek változásának hatását is szemléltejük.

**3.1. Példa.** *Először tekintsük a Wishart folyamatnak egy realizációját az alább adott paraméterezés mellett.*

$$T = 1, \quad N = 10000, \quad \beta = 3, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.141 & -0.07 \\ 0 & 0.07 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -0.02 & -0.02 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix},$$

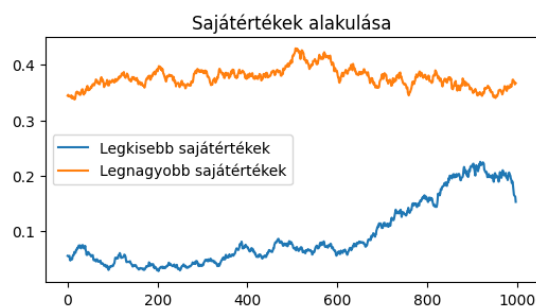
$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Alább a  $\Sigma_{1,1}$ ,  $\Sigma_{2,2}$  szórásnégyzetnek és a  $\Sigma_{1,2}$  kovarianciának a fejlődését láthatjuk, illetve sztochasztikus volatilitás modellben előforduló korrelációs folyamatot.



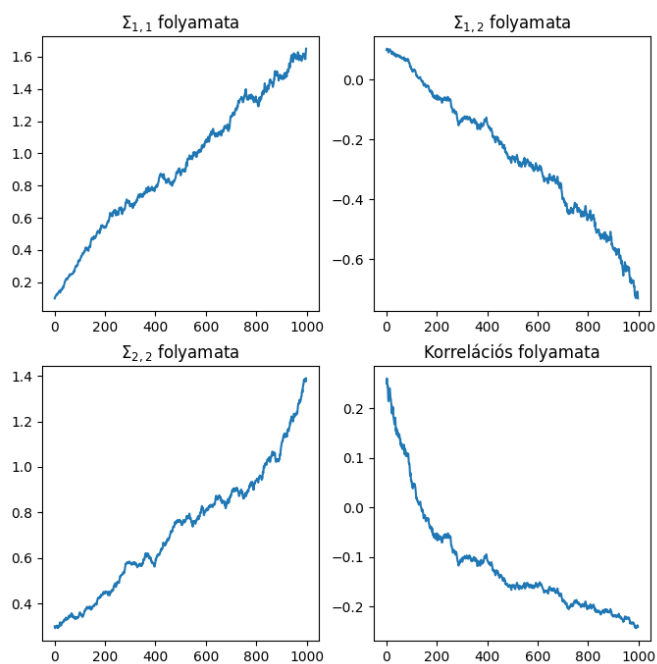
1. ábra. Wishart folyamat 1 realizációja

A szimulálás során a legkisebb lépésköz az eredetileg megválasztott  $T/N = 10^{-3}$  maradt, vagyis nem kellett tovább csökkenteni azt. A legnagyobb és legkisebb sajátértékek alakulása az alábbi ábrán látható.



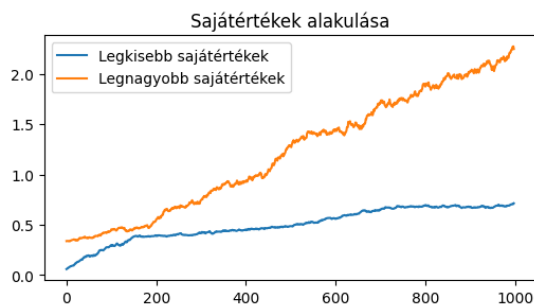
2. ábra. Sajátértékek alakulása

Tegyük fel, hogy az előbbi paraméterezések mellett az  $\beta = 100$ -ra változtatjuk, akkor az alábbi realizációt kapjuk.

3. ábra.  $\beta = 100$  esetében 1 Wishart realizáció

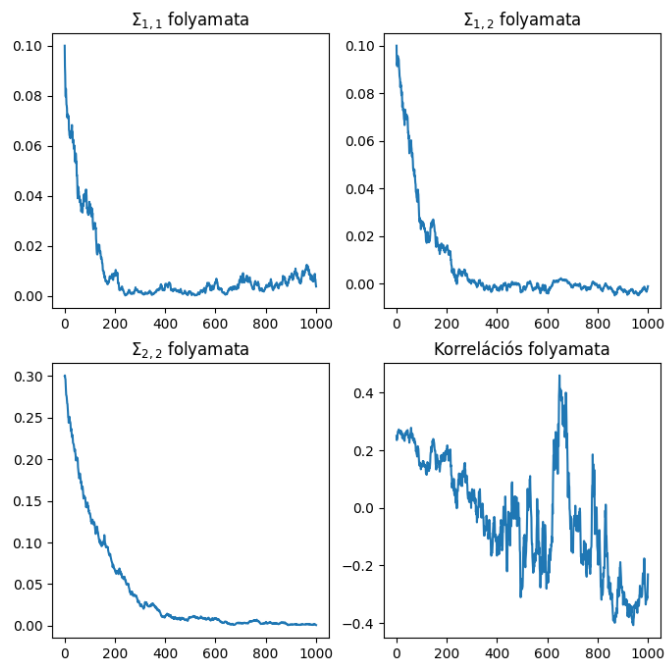
Ekkor azt láthatjuk, hogy a nagy  $\beta$  paraméter választása egy egyértelmű trendet határoz meg a volatilitás mátrix változásában. Ebben az esetben

is a lépésköz az eredetileg megválasztott  $T/N = 10^{-3}$  maradt. Továbbá a sajátértékek alakulásában is trendet figyelhetünk meg: a legnagyobb sajátérték erőteljesen növekszik, míg a legkisebb sokkal lassabban ugyan, de szintén emelkedik.



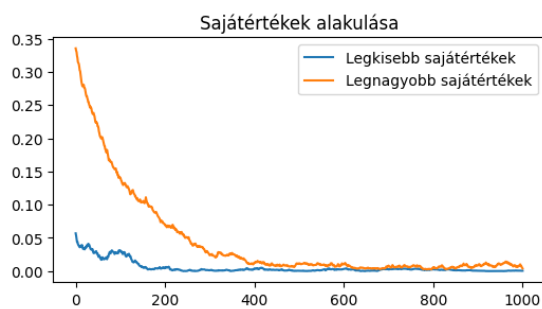
4. ábra.  $\beta = 100$  esetében a sajátértékek alakulása

A következőekben változtassuk meg az  $M$  mátrix főátlóbeli elemeit  $-5$ -re azaz  $M = \begin{pmatrix} -5 & -0.02 \\ -0.01 & -5 \end{pmatrix}$ . Ezzel az átlaghoz visszahúzás erősségét növeltük, meg vagyis azt kell látnunk, hogy a hosszútávú átlaghoz rohamosan fog tartani a folyamat.



5. ábra.  $M$  csökkentésének esetében 1 Wishart realizáció

A sajátértékek alakulásában, pedig azt vehetjük észre, hogy drasztikusan tartanak a 0-hoz közel.



6. ábra.  $M$  csökkentésének esetében a sajátértékek alakulása

## 4. Paraméterek becslése

Ebben a fejezetben először egy Maximum Likelihood becslést mutatunk a Wishart folyamat paramétereire, majd a becslés jóságát numerikusan teszteljük.

### 4.1. Maximum likelihood becslés

Az elmúlt évszázadban, igen jelentősen megnőtt az érdeklődés a Wishart folyamatokkal való modellezés iránt, ez a pénzügyi alkalmazásokra nagyon is igaz. Ezzel ellentétben csak nagyon kevés tanulmány, cikk és kutatás irányul a Wishart folyamat paramétereinek becslésére. Ebben a fejezetben Aurélien Alfonsi [8] cikke nyomán mutatjuk be a drift paramétereinek Maximum Likelihood becslését. A következőekben a Maximum Likelihood Becslést MLE-nek rövidítjük.

Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat teljes pályáját  $(\Sigma_t, t \in [0, T])$ , ahol  $T > 0$ . Ez a választás matematikai szempontból lesz kényelmes MLE konvergenciájának vizsgálatához. A gyakorlatban a pontos becslés tanulmányozása releváns abban az esetben, ha a folyamatot csak diszkrét időben tudjuk megfigyelni. A későbbiekben numerikus kísérletek is végzünk, amibe bemutatjuk, hogy az diszkrét időpontokra az MLE elég jó becslést ad a Wishart folyamat paramétereire.

Mivel már megfigyeltük a folyamat pályáját  $(\Sigma_t, t \in [0, T])$ , ekkor a  $Q^T Q$  paraméter ismert. Ezt azért tudjuk, mert adott a kvadratikus variáció a 3.1 lemma alapján. Ezt át tudjuk rendezni  $Q^T Q$ -ra az alábbi módon:

$$\begin{aligned} (Q^T Q)_{ii} &= \frac{1}{4} [\Sigma_{ii}]_T \left( \int_0^T (\Sigma_s)_{ii} ds \right)^{-1} \\ (Q^T Q)_{ij} &= \left( \frac{1}{2} [\Sigma_{ij}, \Sigma_{ii}]_T - (Q^T Q)_{ii} \int_0^T (\Sigma_s)_{ij} ds \right) \left( \int_0^T (\Sigma_s)_{ii} ds \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ahol  $1 \leq i, j \leq d$  és  $j \neq i$ . Tudjuk, hogy ezek az értékek jól vannak definiálva addig ameddig a pályának  $(\Sigma_t, t \in [0, T])$  véges a kvadratikus

variációja és  $\Sigma_t \in S_d^+$ . Azt feltételezzük, hogy  $Q^T Q \in S_d^+$  és  $Q \in M_d$  egy invertálható mátrix, ekkor  $Q^T Q$ -nak az  $Q$  lehet például a négyzetgyöke vagy pedig a Cholesky dekompozíciója. Mi az utóbbit fogjuk majd használni a becslésnél. Továbbá tudjuk azt is, hogy  $Y_t = (Q^T)^{-1} \Sigma_t Q^{-1}$  ekkor  $Y \sim \mathcal{WP}_d(I_d, (Q^T)^{-1} M Q^T, \beta, (Q^T)^{-1} \Sigma_0 Q^T)$  eloszlású lesz. Ezért elegendő, ha  $\beta$  és  $M$  becslésére öszpontosítunk, ahol  $Q = I_d$ .

Először bemutatjuk az MLE becslését  $\theta = (M, \beta)$ , és a következőképpen jelöljük az eredeti valószínűségi mértéket  $P_\theta$ , amely szerint  $\Sigma$  kielégíti a következő egyenletet:

$$d\Sigma_t = (\beta I_d + M \Sigma_t + \Sigma_t M^T) dt + \sqrt{\Sigma_t} dB_t + dB_t^T \sqrt{\Sigma_t} \quad (4.2)$$

Azt gondoljuk, hogy  $\beta_0 \geq d + 1$  és legyen  $\theta_0 = (\beta_0, 0)$ .  $\beta$  és  $M$  együttes becsléséhez azt feltételezzük, hogy

$$\beta \geq d + 1 \text{ és } \Sigma_0 \in S_d^+ \quad (4.3)$$

A második kikötés a gyakorlatban nem korlátozó feltétel, mivel ha  $\beta \geq d + 1$  akkor  $\Sigma_t \in S_d^+$  bármilyen  $t > 0$ -ra. Ennek a feltételezésnek köszönhetően, Mayerhofer [9] cikke alapján tudjuk, hogy

$$\frac{dP_{\theta_0, T}}{dP_{\theta, T}} := \exp \left( \int_0^T \text{Tr}(H_s dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^T \text{Tr}(H_s H_s^T) ds \right)$$

ahol  $H_t = \frac{\beta_0 - \beta}{2} (\sqrt{\Sigma_t})^{-1} - M \sqrt{\Sigma_t}$

olyan valószínűségi mértéket határoz meg, amely alapján  $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s^T ds$  egy  $d \times d$  Brown mozgás, ahol  $P_{\theta, T}$  a megszorítása  $P_\theta$ -nak az adott  $\sigma$ -algebrán  $\sigma(B_s, s \in [0, T])$ . Ekkor

$$d\Sigma_t = \beta_0 I_d dt + \sqrt{\Sigma_t} d\tilde{B}_t + d\tilde{B}_t^T \sqrt{\Sigma_t}$$

és a likelihood függvénye az alábbi módon definiált.



$$L_T^{\theta, \theta_0} = \frac{1}{\mathbb{E} \left( \exp \left( \int_0^T \text{Tr}(H_s dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^T \text{Tr}(H_s H_s^T) ds \right) \middle| \mathcal{F}_T^\Sigma \right)} \quad (4.4)$$

A következő állítást bizonyítás nélkül közöljük, a bizonyítása megtalálható Aurélien Alfonsi [8] cikkében.

**4.1. Állítás.** Legyen  $\Sigma \in S_d^+$  és  $\mathcal{L}_X : S_d \rightarrow S_d$  egy lineáris leképezés az alábbi módon  $\mathcal{L}_X(Y) = XY + YX$ . Ez invertálható és a likelihood függvénye  $(\Sigma_t, t \in [0, T])$  adott az alábbi alakban

$$\begin{aligned} L_T^{\theta, \theta_0} = & \exp \left( \frac{\beta - \beta_0}{4} \log \left( \frac{\det(\Sigma_T)}{\det(\Sigma_0)} \right) - \frac{\beta - \beta_0}{4} \left( \frac{\beta + \beta_0}{2} - 1 - d \right) \int_0^T \text{Tr}(\Sigma_s^{-1}) ds - \right. \\ & - \frac{\beta T}{2} \text{Tr}(b) + \frac{1}{2} \int_0^T \text{Tr}(\mathcal{L}_{\Sigma_t}^{-1}(M\Sigma_t + \Sigma_t M^T) d\Sigma_t) - \\ & \left. - \frac{1}{4} \int_0^T \text{Tr}(\mathcal{L}_{\Sigma_t}^{-1}(M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)(M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)) dt \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Az állítás bizonyítása tartalmaz egy fontos részletet mégpedig  $\frac{dP_{\theta_0, T}}{dP_{\theta, T}} \in \mathcal{F}_T^\Sigma$  akkor és csak is akkor, ha  $M \in S_d$ , ekkor a likelihood függvény az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} L_T^{\theta, \theta_0} = & \exp \left( \frac{\beta - \beta_0}{4} \log \left( \frac{\det(\Sigma_T)}{\det(\Sigma_0)} \right) - \frac{\beta - \beta_0}{4} \left( \frac{\beta + \beta_0}{2} - 1 - d \right) \int_0^T \text{Tr}(\Sigma_s^{-1}) ds - \right. \\ & \left. - \frac{\beta T}{2} \text{Tr}(b) - \frac{1}{2} \int_0^T \text{Tr}(M^2 \Sigma_s) ds + \frac{\text{Tr}(M\Sigma_T) - \text{Tr}(M\Sigma_0)}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

mivel  $\mathcal{L}_{\Sigma_t}^{-1}(M\Sigma_t + \Sigma_t M^T) = M$ .

Most a likelihood függvényt szeretnénk maximalizálni és azt akarjuk megfigyelni, hogy az exponenciális kitevőjében lévő mennyiség kvadratikusan  $(M, \beta)$  tekintetében és tart a mínusz végtelenbe, amikor  $\|(M, \beta)\| \rightarrow +\infty$ . Az A.1 lemma miatt  $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\mathcal{L}_{\Sigma_t}^{-1}(M\Sigma_t + \Sigma_t M^T))$ . Ekkor a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\begin{aligned}
|Tr(\beta M)| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T Tr \left( \sqrt{2} \mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1} (M \Sigma_s + \Sigma_s M^T) \sqrt{\Sigma_s} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{\Sigma_s^{-1}} \right) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{T} \int_0^T Tr [(\mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1} (M \Sigma_s + \Sigma_s M^T))^2 \Sigma_s] ds + \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{T} \int_0^T Tr(\Sigma_s^{-1}) ds \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^T Tr (\mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1} (M \Sigma_s + \Sigma_s M^T) (M \Sigma_s + \Sigma_s M^T)) ds + \\
&\quad + \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{T} \int_0^T Tr(\Sigma_s^{-1}) ds
\end{aligned} \tag{4.7}$$

és itt az egyenlőtlenség majdnem biztosan szigorú, amely adja azt, hogy a kvadratikus alak a likelihood függvény kitevőjében negatív definit. Így a likelihood függvénynek egyértelmű globális maximuma van az  $\mathbb{R} \times M_d$  halmazon. A.2 lemmából tudjuk, hogy  $\mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1}$  önadjungált, és egyszerű számításokból megkapjuk, hogy MLE  $\hat{\theta} = (\hat{M}_T, \hat{\beta}_T)$  a következő egyenletrendszer karakterizálja.

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \log \left( \frac{\det(\Sigma_T)}{\Sigma_0} \right) - \frac{\hat{\beta}_T - 1 - d}{4} \int_0^T Tr(\Sigma_s^T) ds - \frac{T}{2} Tr(\hat{M}_T) = 0, \\ \int_0^T \mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1} (d\Sigma_s) \Sigma_s - \int_0^T \mathcal{L}_{\Sigma_s}^{-1} (\hat{M}_T \Sigma_s + \Sigma_s \hat{M}_T^T) ds - \frac{\hat{\beta}_T T}{2} I_d = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

A következőekben azzal az esettel fogunk foglalkozni amikor az  $M$  mátrix szimmetrikus. Ez ahhoz segít elő, hogy követhetőbbek legyenek a képletek, akkor is, amikor a számítások már eléggé bonyolultak. Emellett az igaz, hogy azon Wishart folyamatok, amelyekben az  $M$  mátrix szimmetrikus egy igen érdekes családot alkotnak és jól használhatók különböző esetekben. Amikor  $M \in S_d$ , egyértelmű globális maximuma  $\hat{\theta} = (\hat{M}_T, \hat{\beta}_T)$  az  $\mathbb{R} \times S_d$  halmazon, akkor a likelihood függvényt az alábbi egyenlet rendszer karakterizálja.

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \log \left( \frac{\det(\Sigma_T)}{\Sigma_0} \right) - \frac{\hat{\beta}_T - 1 - d}{4} \int_0^T Tr(\Sigma_s^T) ds - \frac{T}{2} Tr(\hat{M}_T) = 0, \\ \frac{\Sigma_T - \Sigma_0}{2} - \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{M}_T \Sigma_s + \Sigma_s \hat{M}_T) ds - \frac{\hat{\beta}_T T}{2} I_d = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Azért, hogy explicit képleteket kapjunk, a lineáris egyenletrendszert invertálnunk kell.  $\Sigma \in S_d$  és  $Q \in \mathbb{R}$  esetében, a lineáris leképezéseket az alábbi módon definiáljuk.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : S_d &\longrightarrow S_d \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_{X,a} : S_d \longrightarrow S_d \\ Y &\mapsto YX + XY \quad \quad Y \mapsto YX + XY - 2aTr(Y)I_d \end{aligned} \quad (4.10)$$

Illetve néhány jelölést vezetünk be a továbbiakban.

$$R_T := \int_0^T \Sigma_s ds, \quad Q_T := \left( \int_0^T Tr(\Sigma_s^{-1}) ds \right)^{-1}, \quad Z_T := \log \left( \frac{\det(\Sigma_T)}{\Sigma} \right) \quad (4.11)$$

Azt meg kell jegyezni, hogy  $Q_T$  és  $Z_T$  akkor definiáltuk, amikor  $\beta \geq d + 1$ , viszont  $R_T$  akkor definiált, amikor  $\beta \geq d - 1$  majdnem biztosan  $S_d^+$ -n. A következőekben az inverz konveszitási tulajdonságát fogjuk használni, ami Mond és Pecaric [10] cikkében található. Tegyük fel, hogy  $\beta \geq d + 1$ , ekkor

$$Tr \left[ \left( \frac{R_T}{T} \right)^{-1} \right] < \frac{Q_T^{-1}}{T}. \quad (4.12)$$

Összefoglalva,  $\hat{\beta}_T = 1 + d + Q_T(Z_T - 2TTr(\hat{M}_T))$  és  $\mathcal{L}_{R_T, T^2 Q_T}(\hat{M}_T) = \Sigma_T - \Sigma_0 - T(Q_T Z_T + 1 + d)I_d$ . A 4.12 és a A.1 lemmából következik, hogy  $\mathcal{L}$  invertálható ami az alábbi egyenletrendszerhez vezet.

$$\begin{cases} \hat{\beta}_T = 1 + d + Q_T \left( Z_T - 2TTr[\mathcal{L}_{R_T, T^2 Q_T}^{-1}(\Sigma_T - \Sigma_0 - (Q_T Z_T + 1 + d)I_d)] \right) \\ \hat{M}_T = \mathcal{L}_{R_T, T^2 Q_T}^{-1}(\Sigma_T - \Sigma_0 - T(Q_T Z_T + 1 + d)I_d) \end{cases} \quad (4.13)$$

A fentebb ismertetett becslések implementációját C függelék rész tartalmazza.

## 4.2. Numerikus teszt

Ebben a fejezetben a fentebb ismertetett MLE 4.13 egyenletrendszer konvergenciáját fogjuk tesztelni. Nagy  $T$ -re fogunk szimulálni Wishart folyamatokat a 3.2 fejezetben ismertetett módszer segítségével, ahol a lépésközt úgy választjuk meg, hogy  $h = T/N$  legyen. Ahol  $N$  jelöli, hogy hány részre szeretnénk felosztani  $[0, T]$  időszakot. Az  $N$  értékét szükségszerűen nagyra választjuk meg.

Alább ismertetjük a trapezoid szabályt, amit egyből használni is fogunk.

**4.1. Definíció.** *A trapezoid szabályt, amikor a rács amin integrálunk nem ekvidisztáns, akkor az alábbi képlet írja le*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x_k, \quad (4.14)$$

ahol  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Az  $R_T$  és  $Q_T^{-1}$  integrálokat trapezoid szabály segítségével fogjuk közelíteni, a szimulálás által használt időszakon. A becslés számításához  $\Sigma_T$  adott értékét fogjuk használni és a  $Q_T^{-1}$  és az  $R_T$  közelített értékét.

Tegyük fel, hogy  $Q$  mátrix egy felső háromszög mátrix és  $(Q^T)^{-1}MQ^T$  szimmetrikus. Ekkor a következő lépéseken át becsüljük meg a Wishart folyamat paramétereit. Először, adott paraméterek mellett szimulálunk egy diszkrét Wishart folyamatot az Euler-Maruyama segítségével. Ezután kiszámítjuk kvadratikus variációból 4.1 kifejtett képlet alapján a  $Q^T Q$  mátrixot, ahol az integrálokra is trapezoid szabályt alkalmazunk. Majd a Cholesky-felbontás segítségével megkapjuk a  $Q$  mátrix becslését  $\hat{Q}$ . Ezután az MLE 4.13 becslést alkalmazzuk az alábbi transzformált Wishart folyamaton  $(\hat{Q}^T)^{-1}\Sigma_t\hat{Q}^{-1}$ . Ekkor  $\beta$ -ra és  $(Q^T)^{-1}MQ^T$  kapunk egy becslést, amiből  $M$ -re is kapunk, mivel  $Q$ -t már megbecsültük.

A következő példákon keresztül a becslés jóságát és pontosságát fogjuk bemutatni, hogy különböző dimenziókban és különböző  $N$  és  $T$  választása mellett, a kapott becsülő függvények hogyan teljesítenek.

**4.1. Példa.** *Először egy  $2 \times 2$ -es Wishart folyamatot vizsgálunk az alábbi paraméterezéssel.*

$$T = 10, \quad \beta = 4.5, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0.2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

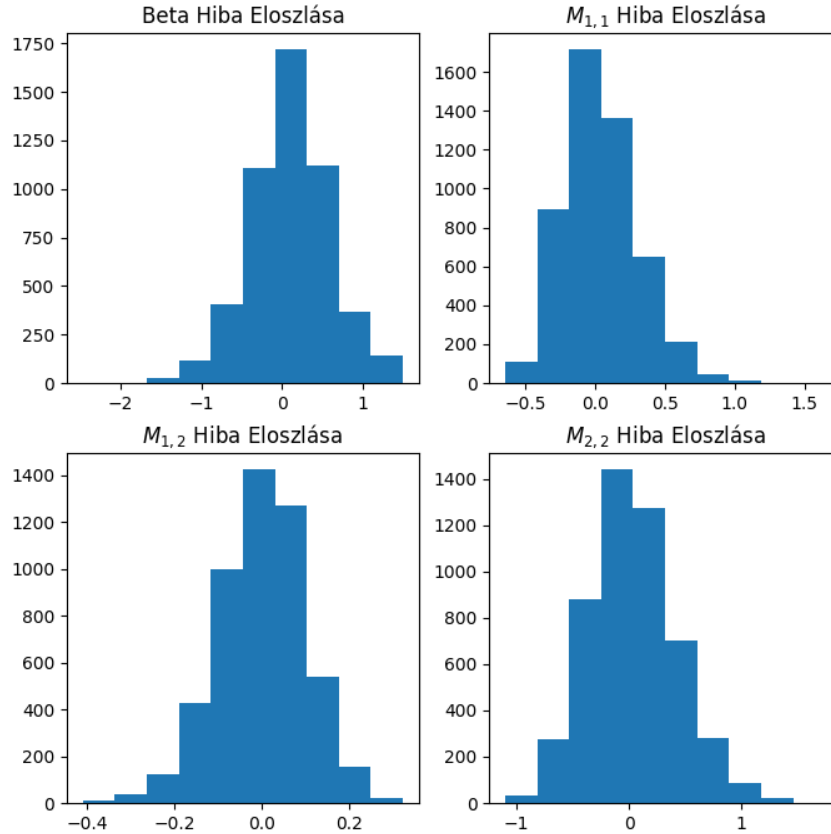
Először változó  $N$  értékek mellett vizsgáljuk meg a becslő függvénynek a legkisebb négyzetes hibáját  $MSE(\hat{\theta}^N | \theta) = \mathbb{E}[|\hat{\theta}^N - \theta|^2]$ , ahol  $\hat{\theta}^N$  a paraméterek becslése adott  $N$ -re és  $\theta = (\beta, M)$ . Az alábbi táblázat foglalja ezt össze, két esetet vizsgálva, amikor ismerjük a  $Q$  mátrix és amikor nem. A  $Q$  mátrix hibáját az alábbi módon becsüljük  $\mathbb{E}[\text{Tr}((Q - \hat{Q}^N)^2)]^{\frac{1}{2}}$ .

Az alábbi táblázat kitűnően mutatja, hogy fix  $T$ -re az  $N$  növelésével tudjuk a becslés pontosságát növelni. Ahol a  $T = 10$  és a generált pályák száma 5000.

Number of time steps	20	100	500	1000	5000
$E[\text{Tr}[(Q - \hat{Q}_N)^2]]^{1/2}$	0.1949	0.0471	0.0101	0.004	0.0019
MSE( $\hat{M}_{1,1}^N   M_{1,1}$ )					
$\hat{Q} = \hat{Q}_N$	0.2193	0.1127	0.0776	0.0224	0.0071
$\hat{Q} = Q$	0.1132	0.0588	0.0595	0.0197	0.0055
MSE( $\hat{M}_{2,2}^N   M_{2,2}$ )					
$\hat{Q} = \hat{Q}_N$	0.8931	0.3076	0.1341	0.0091	0.0015
$\hat{Q} = Q$	0.5959	0.1981	0.0401	0.0018	0.0014
MSE( $\hat{M}_{1,2}^N   M_{1,2}$ )					
$\hat{Q} = \hat{Q}_N$	0.0492	0.0251	0.0121	0.0071	0.0063
$\hat{Q} = Q$	0.0113	0.0137	0.0079	0.0067	0.0054
MSE( $\hat{\beta}^N   \beta$ )					
$\hat{Q} = \hat{Q}_N$	0.5914	0.4712	0.2897	0.0681	0.0396
$\hat{Q} = Q$	0.5850	0.4152	0.2896	0.0614	0.0131

1. táblázat. Becslések MSE hibája  $N$  növelésével

Az alábbi ábrák pedig a  $2 \times 2$  Wishart folyamat becslési hibáinak hisztogramját mutatják. 5000 különböző folyamatot generáltunk  $N = 1000$ -es választás mellett.



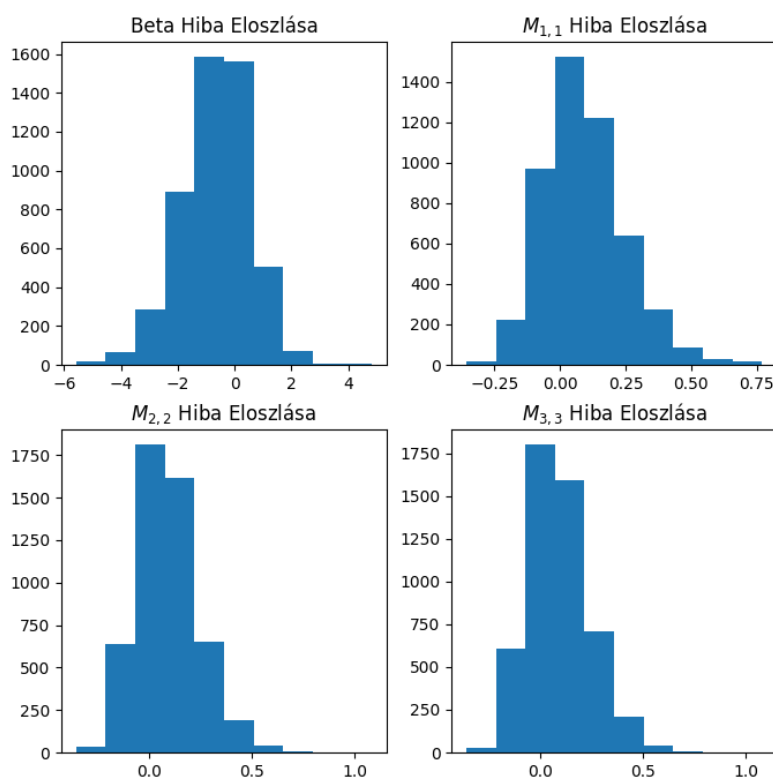
7. ábra.  $2 \times 2$  folyamat paraméter becslés hibáinak eloszlása

A  $Q$  paraméter becslésének a hibája az  $\mathbb{E}[Tr((Q - \hat{Q}^N)^2)]^{\frac{1}{2}} = 0.02486$  lett. Láthatjuk, hogy a többi paraméter becslésének hibája a 0-ra koncentrálódik, illetve, hogy a hibákra egy aszimptotikus szabály is érvényes. Jelen esetben a  $Q$  paramétert a megbecsült paraméternek tekintettük. Ez jól mutatja, hogy  $2 \times 2$  azaz két dimenzióban az MLE igen jól vissza adja a paraméterek becslését.

**4.2. Példa.** A második példában egy  $3 \times 3$ -as esetet fogunk megvizsgálni és ennek a hibatagjainak az eloszlását. A Wishart folyamatot, az alábbi paraméterekkel szimuláljuk.

$$T = 10, \quad \beta = 9.2, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$



8. ábra.  $3 \times 3$  folyamat paraméter becslés hibáinak eloszlása

Itt szintén azt láthatjuk, mint a  $2 \times 2$ -es esetben, hogy a hibatagok 0-ra koncentrálnak és a hibák nagyjából azonosan fordulnak elő. A  $\beta$  paraméter becslése igen stabilan visszaadja az eredetit, míg a többi paraméternél is kicsik a hiba eltérések.

A becslésekhez választott 5000 generált pályát az indokolja, hogy nagyobb mennyiség esetén, jelentősen megemelkedik a futási idő, amely egy 10000-es választás mellett eléri 3-4 órát is. Mind emellett az  $N$  növelésével is nő a futási idő, mivel egyre kisebb intervallumokon kell szimulálnunk a folyamatunkat, ami azt jelenti, hogy egyre több helyen kell.

A fentieket összegezve azt láthatjuk, ha  $T$  és  $N$  is elég nagy, akkor az MLE becslés jól közelíti az eredeti paramétereket, vagyis tudjuk alkalmazni valós adatokra is bizonyos feltételezések mellett.



## 5. WASC modell

Ebben a fejezetben Fonseca cikke [11] alapján bemutatjuk röviden a Wishart Affin Sztohasztikus Korrelációs modellt. Továbbiakban WASC. Ezután ennek valós adatokon történő alkalmazását is ismertetjük.

### 5.1. Általánosan

A WASC modellt 2010-ben Gourieroux és Sufana mutatta be először, mint egy új folytonos idejű folyamatot. Ezt azon feltételezések mellett, hogy az eszközök hozamait Brown mozgások irányítják, míg a sztohasztikus variancia-kovariancia mátrix, pedig Wishart folyamatot követ. Az alábbi felírásban  $n$  darab kockázatos eszközt tekintünk, ahol ezeknek a vektora  $S_t$  és ezen eszközök dinamikáját az alábbi egyenlet írja le.

$$dS_t = \text{diag}[S_t] \left( \mu dt + \sqrt{\Sigma_t} dZ_t \right), \quad (5.1)$$

ahol  $\mu$  a hozamok vektora, és  $Z_t \in \mathbb{R}^n$  Brown mozgások vektora. Továbbá a sztohasztikus variancia-kovariancia mátrix a szakdolgozatban már eddig taglalt Wishart folyamatot követi.

$$d\Sigma_t = (\Theta\Theta^T + M\Sigma_t + \Sigma_t M^T)dt + \sqrt{\Sigma_t} dB_t Q + Q^T dB_t^T \sqrt{\Sigma_t}, \quad (5.2)$$

Emlékeztetőül  $\Theta, Q, M \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\Theta$  invertálható,  $B_t \in M_n$  mátrix értékű Brown mozgás. A következő lineáris kapcsolatot a sztohasztikus variancia-kovariancia folyamat zaja és a kockázatos termékek zaja között szintén Fonseca vezette be:

$$dZ_t = dB_t \rho + \sqrt{1 - \rho^T \rho} dB_t, \quad (5.3)$$

ahol  $dZ_t = (dZ_1, dZ_2, \dots, dZ_n)^T$ ,  $B$  független Brown mozgások vektora és  $Z$  ortogonális  $B$ -re és  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^T$ .

A korrelációs struktúra magával ragadja a pénzügyi idősorokra megfigyelhető úgy nevezett leverage hatást. Ezt két eszköz esetében könnyű megmutatni. Legyen a kovariancia-variancia mátrix az alábbi módon megadva.

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \Sigma_t^{11} & \Sigma_t^{12} \\ \Sigma_t^{12} & \Sigma_t^{22} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Ekkor a koreláció az eszközök és a volatilitás között az alábbi zárt alakot adja kiemelve  $\rho$  paraméter fontosságát.

$$\text{corr}(d \log S_1, d\Sigma^{11}) = \frac{\rho_1 Q_{11} + \rho_2 Q_{21}}{\sqrt{Q_{11}^2 + Q_{21}^2}} \quad (5.5)$$

$$\text{corr}(d \log S_2, d\Sigma^{22}) = \frac{\rho_1 Q_{12} + \rho_2 Q_{22}}{\sqrt{Q_{12}^2 + Q_{22}^2}} \quad (5.6)$$

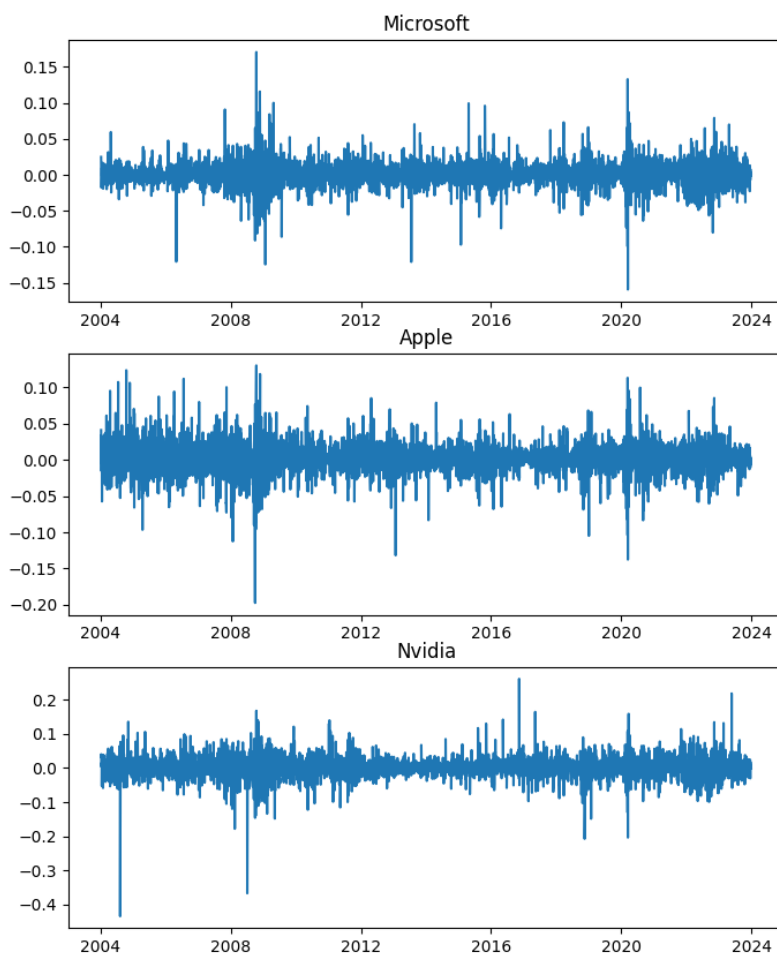
ahol  $\sqrt{\Sigma^{11}}$  az első eszköz szórása. A nagyságát és az irányát a leverage hatásnak a  $Q$  mátrix és a  $\rho$  vektor határozza meg. Ha  $Q$  diagonális, akkor az alábbi alakra egyszerűsödnek az előbbi egyenletek.

$$\text{corr}(d \log S_1, d\Sigma^{11}) = \rho_1, \quad \text{corr}(d \log S_2, d\Sigma^{22}) = \rho_2. \quad (5.7)$$

## 5.2. Alkalmazás

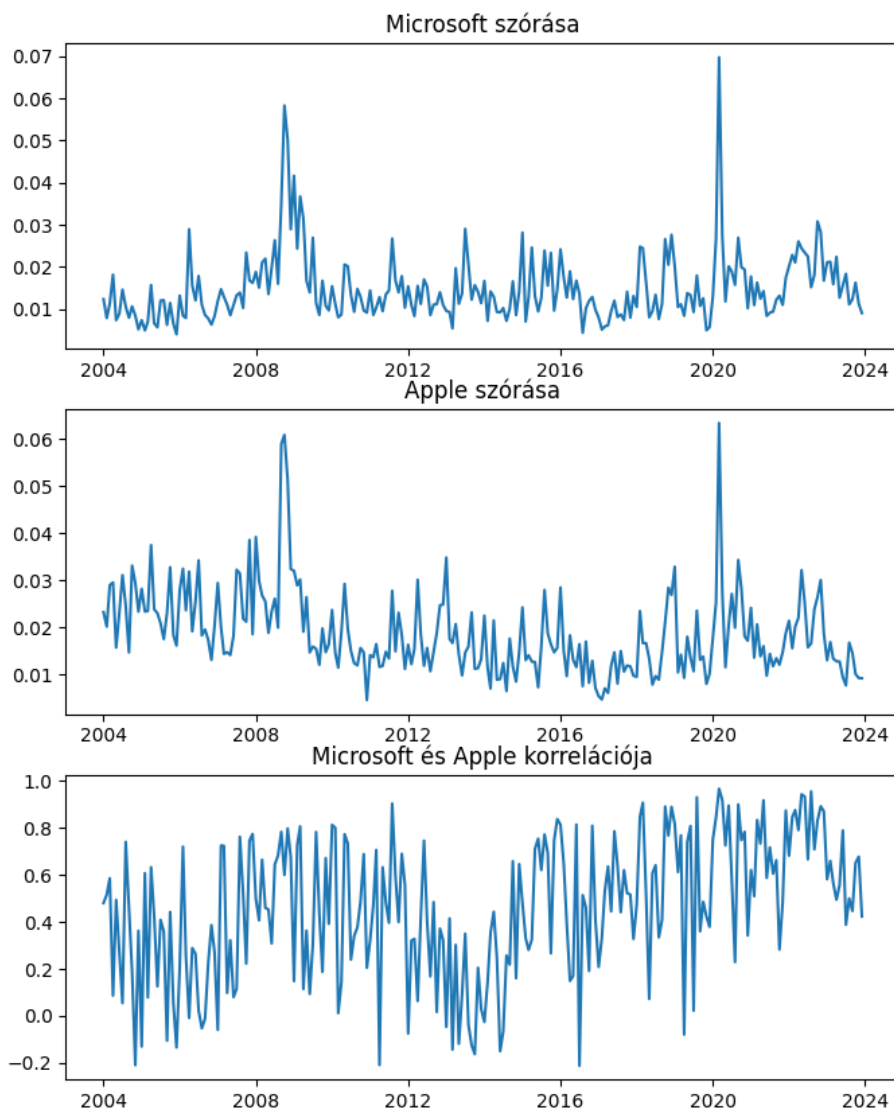
A következőekben bemutatjuk az adatokat, amikkel ezen részfejezetben dolgozni fogunk. Ezután meghatározzuk a Wishart folyamat paramétereit, illetve a zajok közötti korrelációnak a paramétereit is, majd szimulálunk részvény árfolyam mozgásokat.

Először tekintsük az adatokat, melyekhez három különböző részvényt választottunk. Ezek a Microsoft, Apple és Nvidia. Az adatokat 2004-01-01 és 2024-01-01 között vesszük napiszintű felbontásban. Alább a különböző részvények loghozamait tekinthetjük meg.



9. ábra. MSFT, AAPL, NVDA napi szintű loghozamaik

Először vegyük csak az Apple-t és a Microsoft-ot és erre számítjuk ki a havi variancia-kovariancia mátrixot. Ezen folyamatra becsüljük meg Wishart paramétereit. Alább a variancia-kovariancia mátrix fejlődését láthatjuk a Microsoft-ra és az Apple-re.



10. ábra. MSFT és AAPL szórása és korrelációja

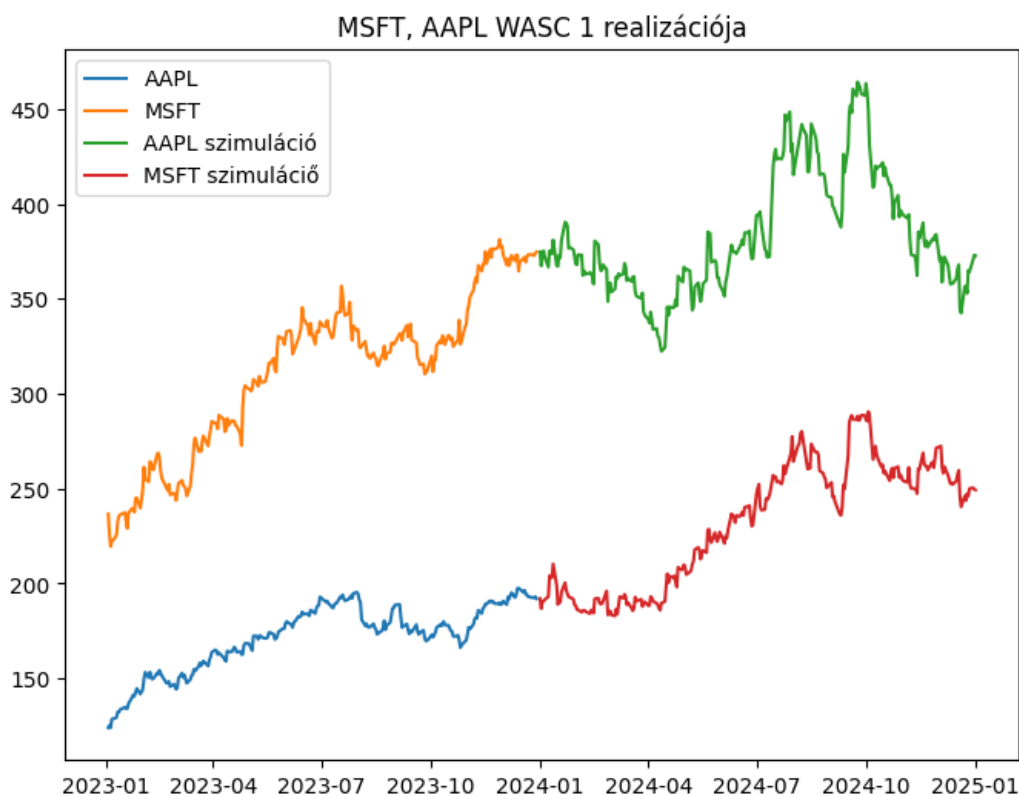
Majd erre a folyamatra alkalmazzuk a 4.1 fejezetben bemutatott becslést. Amely az alábbi paraméterezésű Wishart folyamatot adja, illetve a kiszámí-

tott  $\rho$  értékek amiket a 5.5-ös és 5.6-os képletek segítségével számoltunk ki.

$$\beta = 4.7197, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.0144 & 0.0109 \\ 0.000 & 0.0052 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.556 & -0.198 \\ -1.053 & -0.356 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} -0.013 & 0.403 \end{pmatrix}$$

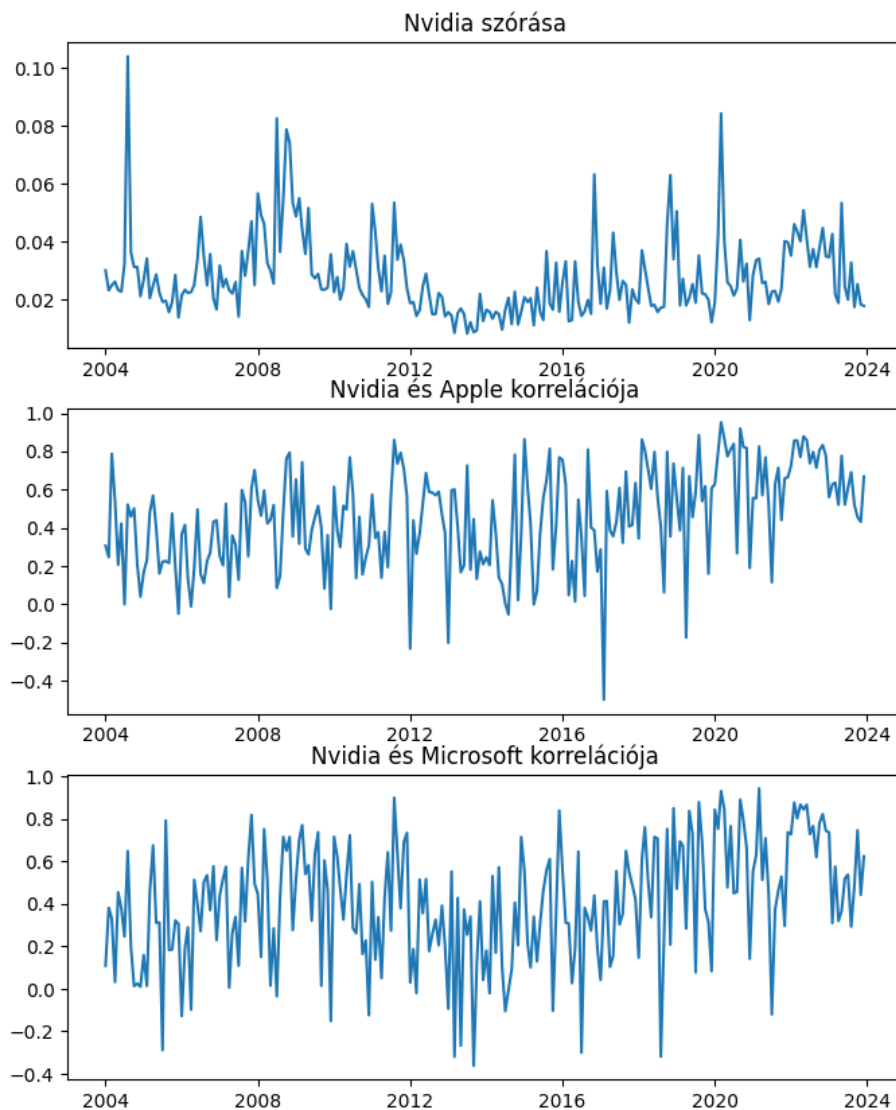
A következőekben pedig szimulálunk egy éves időszakra mindennapra egy részvényárfolyam értéket és ezt megmutatjuk.



11. ábra. MSFT, AAPL 1 WASC realizációja

Most pedig a már fent említett három részvényre Microsoft-ra, Apple-re és Nvidia-ra számítjuk ki 2004-01-01-től és 2024-01-01-ig a variancia-kovariancia mátrix feklődését és illesztünk rá Wishart folyamatot. Alább megtekinhetjük

a Nvidia szórásának fejlődését, illetve az Nvidia-Apple és Nvidia-Microsoft korrelációs folyamatát.



12. ábra. Nvidia szórása és korrelációja a többi részvényvel

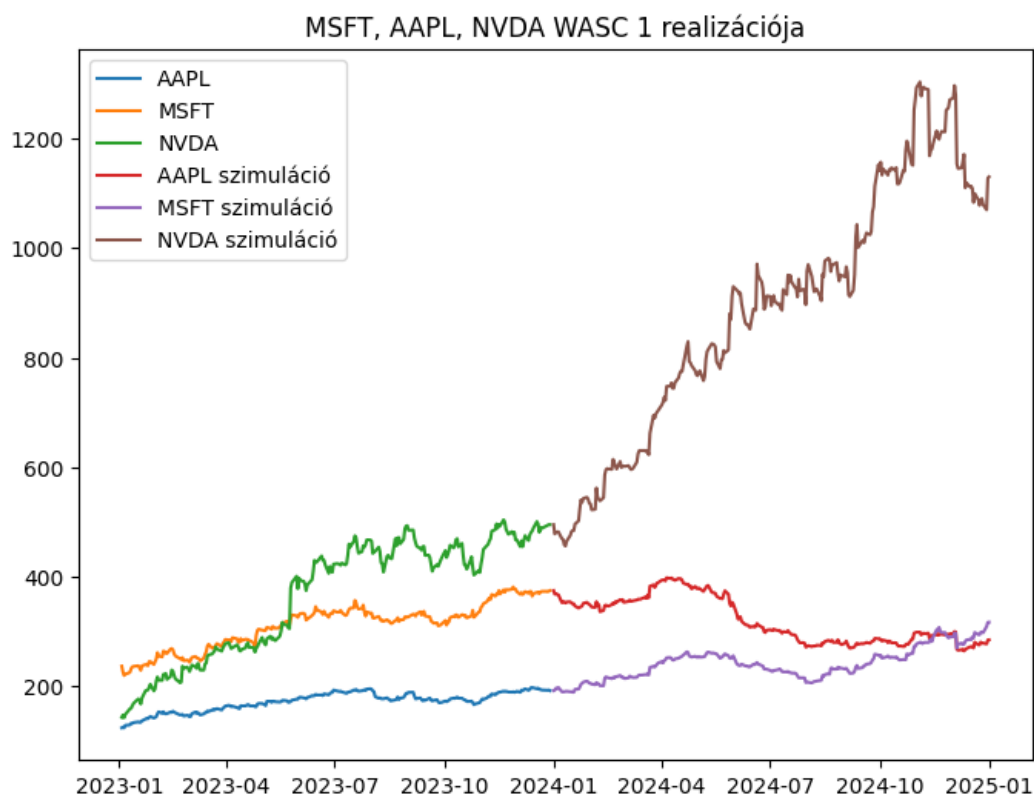
Most pedig az illesztett Wishart folyamat paramétereit tekinthetjük meg, illetve a  $\rho$  értékeit.

$$\beta = 6.101, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.0144 & 0.0109 & 0.016 \\ 0.000 & 0.0052 & -0.006 \\ 0.000 & 0.000 & 0.0146 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.905 & -0.199 & -0.143 \\ -1.411 & -0.488 & 0.079 \\ -1.523 & 0.529 & -1.354 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} -0.143 & 0.509 & 0.447 \end{pmatrix}$$

(5.9)

Ezután a WASC modellel szimulált részvényárfolyamok alakulását láthatjuk a fentebb említett paraméterek mellett.



13. ábra. MSFT, AAPL, NVDA 1 WASC realizációja

Ezen fejezetben a WASC modell szimulációjához tartozó kódot a D kiegészítő fejezetben találjuk meg.

## 6. Összefoglalás

A dolgozat célja az volt, hogy bemutassa, hogyan lehet ezeket a bonyolult matematikai modelleket hatékonyan alkalmazni a volatilitás és a korrelációk dinamikájának leírására, valamint, hogy gyakorlati példákon keresztül szemléltetni tudja a modellek relevanciáját és hasznosságát valós piaci adatok elemzésében.

Az előkészületek részben áttekintettük a mátrixváltozós sztochasztikus folyamatok alapvető elméleti hátterét és előkészítettük a terepet a Wishart folyamatokhoz.

A Wishart folyamatok részben röviden bemutatottuk, a folyamat történelmét, matematikai alapjait, különös tekintettel a definíciókra, tulajdonságokra. Az Euler-Maruyama módszert alkalmaztuk a szimulációk elvégzésére, és bemutatottuk, hogy hogyan lehet biztosítani a variancia-kovariancia mátrix pozitív szemidefinit tulajdonságát a diszkretizáció során. Illetve foglalkoztunk a sajátértékek, továbbá a paraméter változások hatásával különböző extrém esetekben.

A Paraméterek becslése fejezetben a Wishart folyamat paraméterbecslési módszerére koncentráltunk, különösen a maximum likelihood becslésre (MLE). Részletesen bemutatottuk a MLE matematikai hátterét, valamint numerikus példákat és tesztek végeztünk a módszer konvergenciájának és pontosságának igazolására. A numerikus tesztek során különböző dimenziókban és különböző paraméterek mellett vizsgáltuk a becslési hibákat, és megállapítottuk, hogy az MLE módszer megbízhatóan alkalmazható a Wishart folyamatok paramétereinek becslésére. Viszont a többdimenzió szám növelésével a becslés pontatlanabbá válik, kivéve ha az adatok számát, amire modellezük jelentősen tudjuk növelni. A gyakorlatban, viszont véges adatunk áll rendelkezésre és ezek dinamikája az időben is tud változni.

A WASC modell fejezetben bemutatottuk a Wishart Affin Sztochasztikus Korrelációs (WASC) modellt, amely a Wishart folyamatok alkalmazását szemlélteti valós piaci adatokon. A Microsoft, Apple és Nvidia részvé-



nyek adatait felhasználva illesztettük a modellt, és szimulációkat végeztünk a részvényárfolyamok jövőbeli alakulásának előrejelzésére. A WASC modell alkalmazásának eredményei azt mutatták, hogy a Wishart folyamatok hatékony eszközt kínálnak a sztochasztikus volatilitás és korrelációk modellezésére valós piaci környezetben is.

Összességében a szakdolgozat rámutatott a Wishart folyamatok jelentőségére és alkalmazhatóságára a pénzügyi matematika területén. A bemutatott elméleti alapok és gyakorlati példák megerősítették, hogy ezek a többdimenziós modellek képesek pontosabb és valósághűbb leírást nyújtani a pénzügyi piacok dinamikájáról, így hozzájárulva a kockázatkezelési és árazási módszerek fejlesztéséhez.

## Hivatkozások

- [1] Bru M.F. (1991), “Wishart Processes”, *Journal of Theoretical Probability*, 4, 724-743.
- [2] A. K. Gupta and D. K. Nagar. *Matrix variate distributions*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [3] Oliver Pfaffel, *Wishart processes*, September 8, 2008
- [4] A. Benabid, H. Bensusan, N. E. Karoui, *Wishart Stochastic Volatility: Asymptotic Smile and Numerical Framework*, 2008
- [5] A. Gnoatto, *Wishart processes: theory and applications in mathematical finance*,
- [6] Cuchiero, C., Filipovic, D., Mayerhofer, E. and Teichmann, J., *Affine processes on positive semidefinite matrices*. *Annals of Applied Probability*, 2011, 21, 397-463.
- [7] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, 2004
- [8] A. Alfonsi, A. Kebaier, C. Rey, *Maximum Likelihood Estimation for Wishart processes*, March 1, 2022
- [9] E. Mayerhofer. *Wishart Processes and Wishart Distributions: An Affine Processes Point of View*. ArXiv e-prints, Jan. 2012.
- [10] B. Mond and J. E. Pecaric. *On matrix convexity of the Moore-Penrose inverse*. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 19(4):707–710, 1996.
- [11] Fonseca, J. da, Grasselli, M. and Ielpo, F. *Estimating the Wishart affine stochastic correlation model using the empirical characteristic function*. 2007

## A. Technikai lemmák

**A.1. Lemma.** Legyen  $X \in S_d^+$  és  $a \geq 0$  továbbá  $\mathcal{L}_{X,\dagger}$  és  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{X,0}$  egy lineáris függvény az valami alapján definiálva az  $S_d$ . Ha  $\text{Tr}(X^{-1}) \neq 1$ , akkor  $\mathcal{L}_{X,a}$  invertálható és  $\text{Tr}(\mathcal{L}_{X,0}^{-1}(Y)) = \frac{\text{Tr}(X^{-1}Y)}{2(1-a\text{Tr}(X^{-1}))}$ . A mellett, hogy  $(X, Y, a) \mapsto \mathcal{L}_{X,0}^{-1}(Y)$  folytonos az alábbi halmazon  $\{(X, Y, a) \in S_d^+ \times S_d \times \mathbb{R}_+, a\text{Tr}(X^{-1}) \neq 1\}$

**Bizonyítás:** Az invertálhatósága  $\mathcal{L}_{X,a}$  függvénynek, ekvivalens az egyértelmű hozzárendelési tulajdonságával. Mivel  $X \in S_d^+$  ezért létezik ortogonális mátrixa  $O_X$  és diagonális mátrixa  $D_X$  pozitív elemekell úgy, hogy  $X = O_X D_X O_X^T$ . Ekkor

$$\begin{aligned} Y \in \ker(\mathcal{L}_{X,a}) &\iff O_X D_X O_X^T Y + Y O_X D_X O_X^T = 2a \text{Tr}(Y) I_d \\ &\iff D_X (O_X^T Y O_X) = 2a \text{Tr}(Y) I_d - (O_X^T Y O_X) D_X. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Mivel  $D_X$  diagonális mátrix, azt kapjuk, hogy  $1 \leq i, k \leq d$ ,  $((O_X^T Y O_X) D_X)_{i,k} = (O_X^T Y O_X)_{i,k} (D_X)_{k,k}$  és  $(D_X (O_X^T Y O_X))_{i,k} = (D_X)_{i,i} (O_X^T Y O_X)_{i,k}$ . Ha  $i \neq k$  és A.1 alapján kapjuk  $(O_X^T Y O_X)_{i,k} = 0$ . Ha pedig  $i = k$ , akkor  $(O_X^T Y O_X)_{i,i} = a \text{Tr}(Y)$  és ezért

$$\text{Tr}(Y) = \text{Tr}(O_X^T Y O_X) = \text{Tr}(Y) a \sum_{i=1}^d \frac{1}{(D_X)_{i,i}} = \text{Tr}(Y) a \text{Tr}(X^{-1}).$$

Mivel  $a \text{Tr}(X^{-1}) \neq 1$ , ezért  $\text{Tr}(Y) = 0$  és ekkor  $(O_X^T Y O_X)_{i,i} = 0$ , amiből azt kapjuk, hogy  $Y = 0$  és  $\mathcal{L}_{X,a}$  invertálható. Legyen  $c = \mathcal{L}_{X,a}^{-1}(Y)$ . Ekkor  $c + X^{-1}cX - 2a \text{Tr}(c)X^{-1} = X^{-1}Y$ , majd alkalmazva rá nyom függvényt kapjuk,  $2(1 - a \text{Tr}(X^{-1})) \text{Tr}(c) = \text{Tr}(X^{-1}Y)$ . Ezt átrendezve megkapjuk az állítást. Utolsó sorban pedig, a folytonosság triviális, mivel  $(X, a) \mapsto \mathcal{L}_{X,a}$  folytonos és  $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{-1}$  folytonos  $\{\mathcal{L} : S_d \rightarrow S_d \text{ lineáris és invertálható}\}$ .

**A.2. Lemma.**  $X \in S_d^+$  estében az  $\mathcal{L}_X$  önadjungált és pozitív definit:

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_X(Y)Y) \geq 2\underline{\lambda}(X) \text{Tr}(Y^2), \quad (\text{A.2})$$

ahol  $\underline{\lambda} > 0$  a legkisebb sajátértéke  $X$ -nek. Amellett,  $a < \frac{1}{\text{Tr}(X^{-1})}$ , esetében,  $\mathcal{L}_{X,a}$  önadjungált és pozitív definit.

**Bizonyítás:** Legyen  $Y, Z \in S_d$ , ekkor

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_X(Y)Z) = \text{Tr}((XY + YX)Z) = \text{Tr}(Y(XZ + ZX)) = \text{Tr}(Y\mathcal{L}_X(Z))$$

és

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_X(Y)Y) = 2\text{Tr}(XY^2) \geq 2\underline{\lambda}(X)\text{Tr}(Y^2) \quad , \text{ mivel } X - \underline{\lambda}(X)I_d \in S_d^+.$$

Az önadjungált tulajdonság igaz,  $\mathcal{L}_{X,a}$ -ra és a pozitív definitiség a A.1 lemmából származik. Továbbá a folytonossága a sajátértékeknek az  $\mathcal{L}_{X,a}$  tekintettel az  $a$ -ra.

## B. Euler Maruyama Szimuláció kód

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import yfinance as yf
import datetime as dt
from scipy.linalg import sqrtm, cholesky, eigvals
from scipy.integrate import trapezoid
from itertools import permutations
from tqdm import tqdm
from time import sleep
from scipy.optimize import root

def wishart_process(beta: float, Q: list[list], M: list[list],
                   T: float, x: list[list], n: float):
    Q = np.array(Q)
    M = np.array(M)
    x = np.array(x)
    i = 0
    timestep = [0]
    wishartProcess = [x]
    d = Q.shape[0]
    if Q.shape[0] != Q.shape[1] or M.shape[0] != M.shape[1] or
        beta < Q.shape[0]-1 or x.shape[0] != x.shape[1]:
        raise Exception('Nem megfelelő matrikok!')
    h = T/n
    stepsize = h
    t = h
    while t+h < T:
        brownian = np.sqrt(stepsize) *
            np.random.normal(0, 1, (d, d))

```

```

xt = wishartProcess[int(i)]
xt_new = xt + (beta * np.transpose(Q) @ Q + M @ xt +
               xt @ np.transpose(M)) * stepsize +
             sqrtm(xt) @ brownian @ Q + np.transpose(Q)
             @ np.transpose(brownian) @ sqrtm(xt)

while np.any(eigvals(xt_new) < 0):
    stepsize = stepsize/2
    brownian = brownian*1/2 +
              np.sqrt(stepsize) *
              np.random.normal(0, 1, (d, d))
    xt = wishartProcess[int(i)]
    xt_new = xt + (beta * np.transpose(Q) @ Q +
                  M @ xt + xt @ np.transpose(M)) *
                  stepsize + sqrtm(xt) @ brownian @ Q +
                  np.transpose(Q) @
                  np.transpose(brownian) @ sqrtm(xt)

    t += stepsize
    timestep.append(t)
    stepsize = h
    i += 1
    wishartProcess.append(xt_new)
return wishartProcess , timestep

```

## C. MLE becselő függvények

```

def upper_tri_masking(A):
    m = A.shape[0]
    r = np.arange(m)
    mask = r[:,None] < r
    return A[mask]

def residual(M, trc, rt, Y, qT, T):
    M = M.reshape((len(Y), len(Y)))
    estimate = (rt @ M + M @ rt - 2 * (T**2) *
                qT * trc * np.eye(len(rt)) - Y).flatten()
    return estimate

def ata_estimation(process: list[list], timestep: list):
    ata = np.zeros((process[0].shape[0], process[0].shape[1]))
    diag = np.zeros((process[0].shape[0], process[0].shape[1]))
    diagIntegral = np.zeros((process[0].shape[0], process[0].shape[1]))

    for i in permutations(np.arange(0, process[0].shape[0]), 2):
        x = [j[i[0]][i[0]] for j in process]
        x2 = [j[i[0]][i[1]] for j in process]
        diagIntegral[i[0]][i[0]] = 1/trapezoid(x, timestep)
        diagIntegral[i[0]][i[1]] = trapezoid(x2, timestep)

    for i in np.arange(0, len(process)-1):
        for j in permutations(np.arange(0, process[i].shape[0]), 1):
            diag[j[0]][j[0]] += (process[i+1][j[0]][j[0]] -
                                process[i][j[0]][j[0]])**2

    for i in np.arange(0, len(process)-1):

```

```

for j in permutations(np.arange(0, process[i].shape[0]),2):
    diag[j[0]][j[1]] += (process[i+1][j[0]][j[1]] -
                          process[i][j[0]][j[1]]) *
                        (process[i+1][j[0]][j[0]] -
                          process[i][j[0]][j[0]])

for i in permutations(np.arange(0, process[0].shape[0]),2):
    ata[i[0]][i[0]] = 1/4 * diag[i[0]][i[0]] *
                      diagIntegral[i[0]][i[0]]
    ata[i[0]][i[1]] = (1/2 * diag[i[0]][i[1]] -
                      ata[i[0]][i[0]] *
                      diagIntegral[i[0]][i[1]]) *
                      diagIntegral[i[0]][i[0]]

return cholesky(ata)

def beta_estimation(process: list[list], T: int, a: list[list],
                    timestep: list):
    new_process = [np.linalg.inv(np.transpose(a)) @ i @
                   np.linalg.inv(a) for i in process]

    qT = trapezoid([np.trace(np.linalg.inv(i))
                    for i in new_process], timestep)**(-1)

    rt = np.zeros_like(new_process[0])

    for i in permutations(np.arange(0, new_process[0].shape[0]),2):
        rt[i[0]][i[0]] = trapezoid([j[i[0]][i[0]]
                                   for j in new_process], timestep)
        rt[i[0]][i[1]] = trapezoid([j[i[0]][i[1]]
                                   for j in new_process], timestep)

```



```

zT = np.log(np.linalg.det(new_process[-1]) /
            np.linalg.det(new_process[0]))
Y = new_process[-1] - new_process[0] -
    T * (qT*zT+1+len(new_process[0])) * np.eye(len(new_process[0]))

trc = np.trace(np.linalg.inv(rt) @ Y) /
      (2-2*(T**2)*qT*np.trace(np.linalg.inv(rt)))

beta = 1 + len(new_process[0]) + qT*(zT-2*T*trc)
initial_guess = np.eye(len(rt)).flatten()
M = root(residual, initial_guess, args=(trc, rt, Y, qT, T))
M = M.x.reshape((len(Y), len(Y)))
M = np.transpose(a) @ M @ np.linalg.inv(np.transpose(a))
return beta ,M

```

## D. WASC modell

```

def wasc_simulation(beta, Q, M, T, rho, n, x, atlag, y):
    Q = np.array(Q)
    M = np.array(M)
    x = np.array(x)
    y = np.array(y)
    i = 0
    timestep = [0]
    wishartProcess = [x]
    stockProcess = [y]
    d = Q.shape[0]
    if Q.shape[0] != Q.shape[1] or M.shape[0] != M.shape[1] or
        beta < Q.shape[0]-1 or x.shape[0] != x.shape[1]:
        raise Exception('Nem_megfelel_m_ret_m_trixok!')
    h = T/n
    minstepsize=h
    stepsize = h
    t = h
    while t+h < T:
        brownian = np.sqrt(stepsize) *
                    np.random.normal(0, 1, (d, d))
        xt = wishartProcess[int(i)]
        xt_new = xt + (beta * np.transpose(Q) @ Q +
                      M @ xt + xt @ np.transpose(M)) * stepsize +
                    sqrtm(xt) @ brownian @ Q + np.transpose(Q)
                    @ np.transpose(brownian) @ sqrtm(xt)

        while np.any(eigvals(xt_new) < 0):
            stepsize = stepsize/2
            brownian = brownian*1/2+np.sqrt(stepsize) *

```

```

        np.random.normal(0, 1, (d, d))
    xt = wishartProcess[int(i)]
    xt_new = xt + (beta * np.transpose(Q) @ Q + M @ xt +
                  xt @ np.transpose(M)) * stepsize + sqrtm(xt) @
                  brownian @ Q + np.transpose(Q)
                  @ np.transpose(brownian) @ sqrtm(xt)
    t += stepsize
    timestep.append(t)
    if minstepsize >= stepsize:
        minstepsize = stepsize
    brownianstock = brownian @ np.transpose(rho)
    + np.sqrt(1-rho @ np.transpose(rho)) *
    np.random.normal(0, np.sqrt(stepsize), d)
    stockProcess.append(np.diag(stockProcess[i]) @
                        np.exp(np.transpose(atlag)*stepsize+sqrtm(xt_new) @
                        \cite{}brownianstock))
    stepsize = h
    i += 1
    wishartProcess.append(xt_new)
return wishartProcess , stockProcess

```