

HOZAMFELBONTÁS

Szakdolgozat

BERESNYÁK ANETT RITA

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc.
Kvantitatív pénzügyek specializáció

Témavezető:

DR. MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR



Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Molnár-Sáska Gábornak hatalmas segítségét és szakértelmét, amivel hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Köszönöm családomnak, hogy támogattak tanulmányaim folytatásában és türelmesek voltak velem a nehezebb pillanataimban.

Köszönöm csoporttársaimnak, hogy segítségeikkel, támogatásukkal, humorukkal átsegítettek az egyetemi éveken.

TARTALOMJEGYZÉK

| | |
|--|-----------|
| 1. Bevezetés | 1 |
| 2. Irodalmi áttekintés | 2 |
| 2.1. Nyugdíjpénztárak teljesítménymérése | 2 |
| 2.2. A Fama dekompozíció | 3 |
| 2.3. Névleges portfóliók | 4 |
| 2.4. Holbrook: Investment Performance of Pension Funds (1977) | 4 |
| 3. A Brinson modell | 6 |
| 4. Több periódusos felbontás | 8 |
| 4.1. Geometriai hozamfelbontás | 8 |
| 4.1.1. Interakciót tartalmazó geometriai felbontás | 9 |
| 4.2. Carino algoritmus | 12 |
| 4.3. A Menchero algoritmus | 13 |
| 4.4. Frongello algoritmusai | 15 |
| 4.5. A több periódusú Brinson módszer | 21 |
| 5. Matematikai-statisztikai módszerek | 23 |
| 5.1. Kruskal-Wallis próba | 23 |
| 5.2. Wilcoxon-féle rangpróba | 24 |
| 5.3. Mann-Whitney-próba | 25 |
| 6. Hozamfelbontás algoritmusok összehasonlítása | 26 |
| 7. Adatelemzés eredménye | 31 |
| 7.1. Felbontások időbeli alakulásának szórásának vizsgálata | 31 |
| 7.2. Adott időpontbeli felbontások viszonyának vizsgálata | 36 |
| 7.3. Adott időpontbeli felbontások abszolút értékének viszonya | 41 |

| | |
|---|-----------|
| 7.4. A szelekció és interakció korrelációja | 45 |
| 8. Konklúzió | 47 |
| A. Fontosabb Python kódok | 49 |
| B. A dolgozatban gyakran használt jelölések | 62 |
| C. Hivatkozásjegyzék | 63 |

1. Bevezetés

Aki befektetésekkel foglalkozik, annak az egyik központi kérdés a teljesítmény elemzése, és a vártnál jobb vagy rosszabb eredmény megmagyarázása, okainak feltérképezése. Egy vagyonekezelő szempontjából például kulcsfontosságú, hogy meg tudja magyarázni a befektetőnek egy esetleges alulteljesítés okait, és időben meg tudja ezeket szüntetni, illetve a bizalom kiépítését is segíti, ha a teljesítmény mozgatóinak átfogó megértését tudjuk mutatni.

Tehát azt akarjuk tudni, hogy a realizált magas vagy alacsony hozam melyik befektetési döntésnek milyen mértékben köszönhető, így megállapítva a portfólió erősségeit és gyengeségeit. A modellek többsége, beleértve azokat, amik jelen dolgozatban vizsgálva lesznek, két fő részre bontják fel a hozamot, az eszközallokációra (asset allocation - AA), amely a portfólió egyes eszközosztályainak hozzájárulását méri a portfólió teljes teljesítményéhez, és a szelekciós hatás (selection effect SE), amely a portfólió egyes osztályain belül méri az eszközök kiválasztásának hatását. Emellett megjelenik egy interakciós hatás is, mely a kettő kölcsönhatásából következik. A felbontás két fő megközelítése az aritmetikai és geometriai hozamfelbontás, melynek különbségeit a későbbi fejezetekben igyekszünk ismertetni. Míg előbbiben a hozamprémium a különböző komponensek összegeként, addig utóbbiban azok szorzataként áll össze. Ez alapján a hozamfelbontás megnevezés megtévesztő lehet, mert minden módszerben az abszolút hozam helyett relatív hozamot vizsgálunk, mely a portfólió és egy benchmark portfólió hozamának különbsége.

A dolgozat első három fejezetében ismertetjük a legfontosabb és legismertebb hozamfelbontási módszereket, melyek részvényportfóliókra alkalmazhatóak, a 4. fejezetben felsorolva azokat, melyeket aztán összehasonlítunk egymással. Ezek a módszerek abban térnek el, hogy a perióduson belüli hozamfelbontást hogyan használják fel a több periódusból álló hozamprémium magyarázatára. A Frongello módszer [16] helytállóságáról szóló 4.4.1 Állítás alapján a hozzá hasonló Megfordított és Módosított Frongello módszerekre mi mondtunk ki és bizonyítottunk be hasonló állításokat, melyek szerint a Megfordított és Módosított Frongello módszerrel definiált felbontási tagokat összeadva megkapjuk a hozamprémiumot. A Frongello algoritmus intuitív értelmezését segítő, Frongello által [18]-ben prezentált példát saját számokon mutattuk be. A 4.4.3 Állítás utáni példa, mely a felbontási módszerek különbségeit szemlélteti, Frongello-tól ered [17], de a Módosított Frongello és Megfordított Frongello módszerekhez tartozó értékekkel mi egészítettük ki. Az összehasonlításához szükséges statisztikai eszközöket, a Kruskal-Wallis, Wilcoxon és Mann-Whitney próbákat az 5. fejezetben ismertetjük. Ezek segítségével egyrészt azt vizsgáltuk, hogy a különböző felbontási algoritmusok esetén az allokáció, szelekció és interakció időbeli alakulásának szórása megegyezik, vagy egyes módszerek esetén jobban szóródik, mint a többinél. Másrészt tanulmányoztuk, hogy bizonyos felbontások tagjai magasabbak/alacsonyabbak, vagy abszolútértékben magasabbak/alacsonyabbak-e más módszerekénél. Végül megvizsgáltuk a szelekció és interakció korrelációját, amiről észrevettük, hogy általában távol van a 0-tól.

Az elemzéshez általában 1000, néhány esetben 10000 véletlen részvényportfólióból álló mintát vizsgáltunk, melyek a BUX index részvényeit tartalmazták különböző súlyokkal, benchmarkként pedig a BUX-ot használtuk. A vizsgálatot Pythonban végeztük.

A gyakori jelölések jelentése megtalálható a dolgozat végén lévő B Appendixben.

2. Irodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben áttekintjük a hozamfelbontás korai irodalmát és alkalmazásait, a hozamfelbontás különböző definícióit, és hogy milyen elvárásoknak kell eleget tennie egy jó felbontásnak.

Bacon definíciója szerint [3] a hozamfelbontás egy portfólió benchmarkhoz képesti többlethozamának mérésére szolgáló módszer, mely a befektetési stratégia és a piaci helyzet segítségével magyarázza meg a teljesítményt. Segítségével időben felismerhető, ha egy döntés negatív hatással van a hozamra, és így megakadályozható a további kár. Fischer és Wermers [15] szerint a hozamfelbontás a befektetési portfóliók hozamát befolyásoló kulcstényezők számszerűsítése és leírása, míg DiBartolomeo [12] úgy definiálta, mint a megfigyelt hozamok alkotóelemekre való szétválasztásának folyamata a befektetés erősségeinek és gyengeségeinek megállapításának érdekében. Lord [1] szerint a következő tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy jó felbontási módszernek:

- következetes megközelítés a hozamok elemzéséhez
- szilárd elméleti keret az értékeléshez
- portfóliók és indexek következetes elemzésének képessége
- a portfólióstratégia döntési változóival összhangban lévő attribúciós tényezők
- értékpapírok tulajdonságaiból felépített összefoglaló felbontás elemzés, amelyeknek elérhetőnek és ellenőrizhetőnek kell lenniük
- tranzakciók, illetve robusztus analitikai rendszerek és kiváló minőségű adatok az értelmes hozamfelbontási eredmények érdekében.

Murira és Sierra [1] két fontos elvárása egy felbontási rendszer felé:

- Összhangban kell lennie a portfólió befektetési döntéshozatali folyamatával. A hozamfelbontás akkor a leghasznosabb, ha tükrözi a befektetéskezelési folyamatot, mert ebben az esetben lehetővé teszi a többlethozam forrásainak azonosítását és magyarázatát.
- Kompatibilisnek kell lennie a vállalat teljesítménymérési és kockázatomérő módszereivel. A menedzserek nehezen tudnák a felbontás által nyújtott információt hatékonyan felhasználni, ha az ezzel a folyamattal magyarázott adatok nem voltak összhangban a belső kockázati és teljesítményrendszerekből származó adatokkal.

2.1. Nyugdíjpénztárak teljesítménymérése

Az első törekvéseket a hozamok összehasonlítására Dietz "Pension Funds: Measuring Investment Performance" című könyvében [13] és a Bank Administration Institute [4] "Measuring the Investment Performance of Pension Funds for the Purpose of Inter-Fund Comparison" jelentésében láthatjuk. Ez utóbbi célja olyan módszerek kidolgozása volt, mellyel összehasonlíthatjuk nyugdíjpénztárak teljesítményét, és ez alapján az azokat kezelő menedzserek képességeit. Fő eredményeik a következők voltak:

1. A hozamot nem a költséghez, hanem a piaci értékhez viszonyítva mérjük.
2. A hozamok legyenek teljes hozamok, és idővel súlyozottak.
3. A teljesítmény a hozam mellett a kockázatot is tükrözze .
4. Az alapokat célkitűzéseik szerint csoportosítani kell.

Itt még a hozam felbontása nem jelent meg, de azt felismerték, hogy a portfólión belül a szektorok hozamának összehasonlítása hasznos lehet.

2.2. A Fama dekompozíció

Eugene Fama volt az első, aki elmélyedt a hozamfelbontás témájában 1972-es cikkében [14]. A hozamot két részre, a szelektivitásból (amit az utóbbi időben többnyire szelekciónak hívnak) és a szisztematikus kockázatból származó tagokra bontotta. A szelektivitás abból adódik, hogy egy meghatározott kockázati szintű értékpapírok közül melyeket választjuk, a szisztematikus tag pedig a piaci árfolyammozgások előrejelzésének eredménye, a következő képletek alapján:

$$r - r_f = \overbrace{r - \beta \times (b - r_f) - r_f}^{\text{szelektivitás}} + \overbrace{\beta \times (b - r_f)}^{\text{szisztematikus tag}} ,$$

ahol r a portfólió átlaghozama, r_f az átlagos kockázatmentes hozam, β a portfólió szisztematikus kockázata, b pedig a benchmark átlagos hozama. Teljesen diverzifikált portfólióban az egyedi kockázat eltűnik, így a szisztematikus kockázat a teljes kockázattal egyezik meg. Azonban a befektetők gyakran magasabb nyereség elérése érdekében egyedi kockázatot vállalnak. Így a szelektivitás hatását felbonthatjuk a szelektivitás nettó hozamára és a diverzifikáció egy részének feláldozását kompenzáló többlethozamra. Megjegyezzük, hogy e kettő összege pontosan a Jensen α -val egyezik meg, mely azt méri, mennyire tér el a portfólió átlaghozama a CAPM által előrejelzettől. Mostantól a diverzifikációt úgy értjük, mint a benchmarktól való eltávolodásból és egyedi kockázat vállalásából származó elvárt hozam. Ennek meghatározásához kiszámoljuk azt a bétát, mely mellett a szisztematikus és teljes kockázat megegyezik, ezt nevezzük Fama bétának:

$$\beta_F = \frac{\sigma}{\sigma_b},$$

ahol számlálóban a portfólió kockázata, nevezőben a benchmark kockázata van. Ez az érték legalább akkora, mint a portfólió bétája. Így a teljes diverzifikáció hiányából származó többlethozam a béták különbségéből adódik:

$$d = (\beta_F - \beta) \times (b - r_f)$$

Innen következik, hogy a nettó szelektivitás $\alpha - d$, ami ha negatív, akkor nem sikerült a diverzifikáció feláldozását teljesen kompenzálni.

A szisztematikus tagot is tovább bonthatjuk, megkülönböztetve a befektető szisztematikus kockázatát, vagy célkockázatot (β_I), és a menedzser ettől az irányelvtől való eltérését, amit Fama "timing"-nak nevezett.

$$\beta \times (b - r_f) = \overbrace{(\beta - \beta_I) \times (b - r_f)}^{\text{menedzser szisztematikus kockázata}} + \overbrace{\beta_I \times (b - r_f)}^{\text{befektető szisztematikus kockázata}}$$

2.3. Névleges portfóliók

A 1968-as BAI cikkre [4] válaszul, 1970-ben a Society of Investment Analysts [27] egy csapata is elkezdett a nyugdíjpénztárak teljesítménymérésével foglalkozni. Egyik célkitűzésük a hozammérés egy sztenderd módszerének meghatározása volt, melynek segítségével az alapok összehasonlíthatóak. A második cél az alap teljesítményének két részre való felbontása volt: részvényszektorok, és egyes részvények kiválasztásának hatása. Ehhez piaci indexekből összeállított névleges portfóliókat vizsgáltak és hasonlítottak össze a valódi alappal. Ekkor még a kiválasztás makro szintje az értékpapírpiazi szektorokkal foglalkozott, a mikro szint pedig a szektorokon belüli egyes értékpapírok kiválasztásának hatása volt. Később inkább makro szint alatt az egyes eszköz osztályokat (kötvény, részvény), mikro szint alatt pedig az osztályokon belüli papírok kiválasztását értették. Mi most az első elvet fogjuk követni.

Az elemzőcsoport két névleges alapot hozott létre, a teljesen névleges alapot és a részben névleges alapot. A szektorok hozamait mindkét esetben indexek hozamai adják, de a teljesen névleges esetben benchmark szektor súlyokat, míg a másiknál a valódi súlyokat használtak. Így a teljesen névleges alap egy benchmark portfólió hozamát reprezentálja, amiben minden szektorra a piaci index hozamát benchmark súllyal szorozzuk, tehát

$$b = \sum_{i=1}^n W_i \times b_i,$$

ahol b_i az i -edik szektor indexének hozama, míg W_i ugyanezen szektor benchmark súlya.

A részben névleges alap egy átmeneti hozamot ad, melyet a menedzser által meghatározott valódi súlyokból és a piaci index hozamaiból kapunk.

$$b_S = \sum_{i=1}^n w_i \times b_i,$$

ahol w_i az i -edik szektor valós portfólióbeli súlya. A tényleges portfólió hozama ezek alapján

$$r = \sum_{i=1}^n w_i \times r_i,$$

r_i -vel jelölve a portfólió adott szektorban elért hozamát.

Az alap teljesítménye tehát két faktortól függ, a szektorok kiválasztásától, melyre alokációként szoktak hivatkozni, és a szektorokon belül az egyes értékpapírok kiválasztásától. Az alokáció sikerességét a teljesen és a részben névleges alapok összehasonlításával, a szelekció sikerességét pedig a valódi alap és a részben névleges alap összehasonlításával mérhetjük. Az ezt összefoglaló [27] cikk fontossága abban rejlik, hogy először különítette el a mikro és makro szintű döntéshozást a hozam mérésében.

2.4. Holbrook: Investment Performance of Pension Funds (1977)

Holbrook [19] a fenti három eredmény ötvözésével, a következő döntéshozási folyamatot határozta meg a nyugdíjpénztárak portfóliójának kezelésére:

1. Irányelv, vagyis a vagyonkezelők hosszútávon az eszközök mekkora hányadát melyik befektetési piacokon akarják tartani. Alapvető eleme a részvény- és kötvény típusú befektetések szétválasztása.
2. Stratégia, vagyis annak meghatározása, hogy a mindenkori piaci viszonyok függvényében hogyan térjünk el az irányelvben szereplő súlyoktól, ideértve az alap egy részének rövid távú betétbe helyezését. A stratégiai értekezleteket rendszerint rövid, rendszeres időközönként tartják, emellé rendkívüli megbeszéléseket beiktatva valahányszor úgy gondolják, hogy lényeges változás történt a piaci kilátásokban.
3. Szelekció, adott piacon belül különböző eszközök tartása, adása, vétele.

Holbrook tekintetbe vette az alapkezelők igényeit. Az alapkezelőknek tudniuk kell, hogy az alap megfelelően teljesít-e és tisztában kell lenniük a jól vagy rosszul teljesítés okaival. Ehhez az alapot önmagában, és a különböző szektorokon, piacokon belül is meg kell vizsgálni, és azt is elemezni, hogy az irányelv, a stratégiai és szelekciós döntések hogyan járultak hozzá az összteljesítményhez. Ezeket az eredményeket figyelembe kell venni a jövőbeli befektetési döntésekben, és szükség esetén változtatni az irányelven, vagy a döntéshozási folyamaton.

Holbrook [19] három névleges alapot konstruált, melyek segítségével a hozam irányelvi, stratégiai és szelekciós döntésekre bontható. Az ezekhez tartozó hozamok: r_m a piaci sztenderd súlyokhoz, r_P az alapkezelők irányelvéhez, r_A a valódi allokációhoz tartozik. Innen Holbrook a geometriai hozamprémiumot, vagyis azt a hozamot, melyet az alap a piaci sztenderdhez képest elért, és melyet g -vel jelölt, így írta le:

$$(1 + g) = \frac{(1 + r)}{(1 + r_m)} = \frac{(1 + r_P)}{(1 + r_m)} \times \frac{(1 + r_A)}{(1 + r_P)} \times \frac{(1 + r)}{(1 + r_A)}$$

Az első tag az irányelv piaci sztenderd súlyoktól való eltérésének hozamhoz való hozzájárulása, a második annak a stratégiai döntésnek a hatása, hogy az irányelvhez tartozó súlyokat módosítjuk, az utolsó pedig a szektorokon belüli egyes papírok kiválasztásának eredménye. Holbrook volt az első, akinél az egymást követő névleges portfóliók mindegyike egy-egy döntési szakaszt tükrözött. Ezt az elvet a Fama-dekompozícióval is összekötötte, egyenlővé téve az első tagot a befektető szisztematikus kockázatához tartozó hozammal, a másodikat a menedzser szisztematikus kockázatának hatásával, és a harmadikat a szelektivitással.

3. A Brinson modell

A ma használt leggyakoribb hozamfelbontás modell, ami részvényportfóliókra alkalmazható, a Brinson modell, amit Brinson, Hood, és Beebower "Determinants of Portfolio Performance" [7] című cikkükben mutatnak be. A modell az aritmetikai hozamprémiumot: $r - b$ bontja fel. A hozamot itt is két összetevő adja, a különböző eszközosztályokba vagy szektorokba fektetett súly, és a portfólió osztályokon belüli konkrét összetétele, vagyis hogy pontosan milyen papírt választunk. Mindkét komponenst tekinthetjük passzívnak (vagyis valamilyen benchmark szerint alakulónak) vagy aktívnek (tehát a benchmarktól eltérőnek). Ez alapján a következő 4 hozamot határozhatjuk meg:

| | | Szelekció | |
|------------|---------|---------------------------|-----------------------------|
| | | aktív | passzív |
| Allokáció: | aktív | Q4. $r = \sum w_i r_i$ | Q2. $b_S = \sum w_i b_i$ |
| | passzív | Q3. $\sum W_i r_i$ | Q1. $b = \sum W_i b_i$ |

1. táblázat. Brinson modell hozamai

Az első negyedben, Q1-ben a benchmark hozamot látjuk, ami az eszközosztályok benchmarkjai b_i hozamának a hosszútávú irányelv szerinti W_i súlyokkal kapott értéke. Q2 egy olyan portfólió hozamát tartalmazza, ahol a menedzser aktív döntéseket hoz a különböző osztályokba fektetett értékek mennyiségéről, de az osztályokon belül követi a benchmarkot. A nagyobb hozam elérése érdekében a jobban teljesítő szektorokat túl-, a rosszabbul teljesítőket alulsúlyozza a Q1-hez képest. Ezt a komponenst Brinson és szerzőtársai [7] Fama-hoz hasonlóan "timing"-nak, illetve piac szelekciónak is nevezték, de általában allokációként hivatkoznak rá a későbbi szakirodalmak, és már a korábbi modellekben is megjelent. A $Q2 - Q1$ különbség az allokáció által hozzáadott érték, ami negatív is lehet.

Q3 azt a hozamot mutatja, ahol a menedzser a szektorsúlyok tekintetében az irányelvet követi, de szektorokon belül attól eltér az értékpapírok kiválasztásában. Így $Q3 - Q1$ a szelekció által hozzáadott érték. Végül Q4 a valós portfólió hozama.

Brinson az aritmetikai hozamprémiumot, tehát a $Q4 - Q1$ értéket akarta felbontani, mely a fenti módon az allokáció és szelekció összegzésével még nem teljes. A maradék tag a $Q4 - Q3 - Q2 + Q1$, melyet a két hatás együtt okoz. Így napjainkban interakcióként szerepel a legtöbb cikkben, bár eredetileg a Brinson cikkekben [7] [6] kereszttermékként vagy maradéktagként szerepelt.

$$A = Q2 - Q1, \quad S = Q3 - Q1, \quad I = Q4 - Q3 - Q2 + Q1 \quad (3.1)$$

Brinson és Fachler [6] a következőképp adták meg a pontos képleteket a három felbontási tényező szektoronkénti értékére:

- Az i -edik szektor eszközallokációjának hatása a hozamprémiumra a korábbi jelölésekkel:

$$A_i = (w_i - W_i) \times (b_i - b) \quad (3.2)$$

Ha ezt a szektorokra összegezzük, akkor a b kiesik, mivel a súlyok összege 1, így visszakapjuk a $Q2 - Q1$ -et.

- Az i -edik szektorbeli szelekció hozzáadott hozama:

$$S_i = W_i \times (r_i - b_i)$$

- Végül a szektor interakciója a következő értékkel növeli a hozamot:

$$I_i = (w_i - W_i) \times (r_i - b_i)$$

Ez képezi a mai hozamfelbontás módszerek alapját. A szektoronkénti allokációt néha az $A_i = (w_i - W_i) \times b_i$ képlettel definiálják, ami könnyebben ábrázolható, és a fenti táblázatból ez lenne a kézenfekvőbb, illetve így a 3 szektoronkénti felbontási tényező a hozamprémium adott szektorhoz tartozó tagjára összegződne:

$$A_i + S_i + I_i = (w_i - W_i) \times b_i + W_i \times (r_i - b_i) + (w_i - W_i) \times (r_i - b_i) = w_i \times r_i - W_i \times b_i$$

Ezzel a definícióval azonban a szektor allokációja minden benchmarkhoz képest túlsúlyozott szektor esetén pozitív lesz, ha a szektor benchmark hozama pozitív. Viszont a Brinson-Fachler képlet alapján pontosan akkor lesz pozitív, ha a szektort túlsúlyoztuk, és a szektor hozama nagyobb mint a teljes benchmark hozam, vagy alulsúlyoztuk, és a szektor rosszabbul teljesít mint a benchmark. Tehát ez a megközelítés intuitívabb.

Az interakció értelmezése kevésbé egyértelmű. A szerzők többsége nem maradéktagnak, hanem külön hatásnak tartja, mely az allokációs és szelekciós döntések kombinációjából fakad, és az interakció kifejezés a 90-es évek elejére általánossá vált. Damien Laker [22] szerint "a megfelelően számolt interakció értékes szerepet játszik a portfólió aktív teljesítményének magyarázatában, sőt időnként valójában nagyobb magyarázó erővel bír, mint a többi attribútum." David Spaulding [28] ehelyett azt javasolta, számoljuk ki az interakciót, majd elemzés után döntsük el, hogy melyik taghoz rendeljük hozzá, vagy kezeljük különálló tagként, ha meg tudjuk indokolni. Mások, mint például Stephen Campisi [9] és Carl Bacon [3] úgy gondolták, hogy mivel nem aktív része a döntéshozási folyamatnak, nem kell külön kiszámolni. Ők a szelekció részének tekintették. Ebben az esetben az i -edik szektorhoz tartozó szelekció:

$$S_i = w_i \times (r_i - b_i). \tag{3.3}$$

Az, hogy melyiket használjuk, függ a célunktól. Általában ezt az egyszerűsített eljárást használják, amikor az allokációs döntés hamarabb megtörténik, így a szelekciós döntésnél már figyelembe vehetők a valós súlyok. Amikor azonban az allokáció és szelekció hatását egymástól függetlenül akarjuk vizsgálni, akkor az eredeti módszer a célravezető.

Az ebben a fejezetben leírt formulák már korábban is használatban voltak, de a Brinson és társszerzői által írt cikkek [6] [7] alapozták meg, hogy a portfóliókezelők és befektetők stratégiájának és döntéshozásának felülvizsgálatában fontos szerepet játsszon a hozamfelbontás.

4. Több periódusos felbontás

Az előző fejezetben leírt Brinson felbontás egy időperiódus hozamát bontja fel. Következik-e ebből egy több periódusból álló időszak teljes hozamprémiumának felbontása? Sajnos az időben egymást követő hozamok multiplikatív jellege, és a Brinson modell aritmetikai tulajdonsága miatt a teljes hozam felbontása nem nyilvánvaló. Ugyanis a teljes időtartamra vonatkozó hozam a portfólió, illetve a benchmark esetén:

$$R = (1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \dots \times (1 + r_m) - 1,$$

$$B = (1 + b_1) \times (1 + b_2) \times \dots \times (1 + b_m) - 1,$$

ahol m az időtartamok száma és r_i , illetve b_i az i -edik időtartamhoz tartozó hozamok. Így az egyes periódusok felbontási tényezőit nem elég egyszerűen összeadni, hiszen a hozamprémium sem adódik össze az időben.

$$R - B \neq (r_1 - b_1) + (r_2 - b_2) + \dots + (r_m - b_m).$$

Szorzással hasonlóan rossz eredményhez jutunk.

$$R - B \neq (1 + r_1 - b_1) \times (1 + r_2 - b_2) \times \dots \times (1 + r_m - b_m) - 1 \quad (4.4)$$

Több modell is létrejött több periódus esetén a teljes hozamprémium meghatározására. A továbbiakban néhány példát fejtünk ki.

4.1. Geometriai hozamfelbontás

A többperiódusú felbontás problémája pontosan abból adódik, hogy míg a hozam az időben szorzódik, a felbontás tényezői összegződnek, és a hozamprémiumot is különbséggel határoztuk meg. Így adódik, hogy a probléma kiküszöbölhető, ha eleve máshogy közelítjük meg az egyperiódusú felbontást is. Carl R. Bacon [2] [1], aki a geometriai felbontást preferálta, a következőképp határozta meg a geometriai hozamprémiumot:

$$r_{pr} = \frac{1 + r}{1 + b} - 1,$$

ami azt jelenti, hogy $1 + r = (1 + b) \times (1 + r_{pr})$. Ezzel a megközelítéssel R_{pr} -el jelölve a teljes időtartam hozamprémiumát, r_i -vel, b_i -vel az i -edik periódus hozamait,

$$R_{pr} = \frac{1 + R}{1 + B} - 1 = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + r_i)}{\prod_{i=1}^m (1 + b_i)} - 1 = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1 + r_i}{1 + b_i} \right) - 1 = \prod_{i=1}^m (1 + r_{pr_i}) - 1.$$

Ezzel az (4.4)-ben ismertetett probléma megoldódott, a hozamprémium szorzódik az időben. Emellett Bacon azzal is érvelt [2] a geometriai hozamprémium mellett, hogy átváltható a devizák között. Bacon mellett Bain 1996-ban [5], és Burnie, Knowles, illetve Teder 1998-ban [8] is megalkottak egy-egy geometriai hozamfelbontás modellt, melyek bár egymástól függetlenül, más megközelítésből jöttek létre, valójában ekvivalensek. Ez ékes bizonyítéka a megközelítés robusztusságának. Ez a felbontás is leírható egymást követő névleges portfóliók sorozatával,

melyek mindegyike a top-down befektetési döntési folyamat egy lépésével azonosítható, a következő módon:

$$\begin{aligned}
\text{I. benchmark hozam: } b &= \sum_{i=1}^n W_i \times b_i \\
&\Downarrow \\
\text{II. szemi-névleges hozam: } b_S &= \sum_{i=1}^n w_i \times b_i \\
&\Downarrow \\
\text{III. portfólió hozama: } r &= \sum_{i=1}^n w_i \times r_i
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A II.-I. különbség mutatja hogy az allokáció mennyivel változtatja a hozamot, a III.-II. különbség pedig a szelekció hatását. Itt nincsen interakció, illetve azt a szelekció részének tekintjük, a korábban már említett (3.3)-hoz hasonló módon. Geometriai felbontás esetén a hozamok között a következő áll fent:

$$\frac{1+r}{1+b} - 1 = \overbrace{\frac{1+b_S}{1+b}}^{\text{allokáció}} \times \overbrace{\frac{1+r}{1+b_S}}^{\text{szelekció}} - 1.$$

Bacon [2], illetve a fent említett többi szerző a következő formulákat határozta meg a felbontási tényezőkre:

$$\begin{aligned}
A_i^G &= (w_i - W_i) \times \left(\frac{1+b_i}{1+b} - 1 \right) = \frac{(w_i - W_i) \times (b_i - b)}{1+b} \\
S_i^G &= w_i \times \left(\frac{1+r_i}{1+b_i} - 1 \right) \times \frac{1+b_i}{1+b_S} = \frac{w_i \times (r_i - b_i)}{1+b_S}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A_i^G az i -edik szektor geometriai allokációját, S_i^G a geometriai szelekcióját jelöli. Az allokáció teljesen az algebrai esetnek, (3.2)-nek megfelelő, csak az i -edik szektor teljes portfólióhoz képesti túl- vagy alulteljesítését különbség helyett hányadossal értelmezzük. A szelekcióban is megjelennek az algebrai (3.3) képlet tényezői, de kiegészül egy harmadik komponenssel. Máshogy felírva pedig a számlálóban megjelenik az algebrai allokáció, illetve az interakciót tartalmazó szelekció. A teljes portfólió allokációját és szelekcióját a szektorok összegzésével kapjuk. Emiatt van, aki szemi-geometriainak tartja ezt a módszert. Létezik teljesen geometriai felbontás is, melyet Jose G. Menchero alkotott meg és ismertetett 2000/2001-es írásában [26].

Burnie, Knowles, és Teder 1998-as cikkében [8] leírt geometriai módszertan az egyik legismertebb, bár ők nem foglalkoztak több periódussal. Külön számolást alkottak meg top-down és bottom-up döntési folyamatokhoz. Az eddig ismertetett módszerek a top-down-nak felelnek meg (előbb allokáció, aztán szelekció), a bottom-up ezzel szemben azt feltételezi, hogy a szelekciós döntés történik hamarabb.

4.1.1. Interakciót tartalmazó geometriai felbontás

Arno E. Weber [29] létrehozta a modell egy olyan módosítását, amiben a szelekciót szelekcióra és interakcióra bontja, az interakciót tartalmazó, és azt nélkülöző algebrai modellek különbségének mintájára. Kifejtette, hogy a geometriai felbontás nem szünteti meg az interakció hatását, ahogy néhányan hitték, egyszerűen a Bacon modellben [2] úgy van definiálva a szelekció, hogy már tartalmazza azt. Így Weber modelljében az allokáció és szelekció egymástól függetlenek,

míg az interakciót nem tartalmazó esetben számít ezek meghatározásának sorrendje. Ez az új módosítás a módszer szemi-geometriai tulajdonságát megtartja. Az algebrai változattal ellentétben, interakció itt nem csak szektoronként, hanem a szektorok között is fellép.

Weber definiált névleges allokációs és névleges szelekciós hozamokat, melyek megegyeznek Brinson Q2 és Q3 értékeivel, melyek esetében a másik hatáshoz tartozó döntést passzívnak tekinti. A korábbi jelölésekkel:

$$r_{NA} = \sum w_i \times b_i = b_S, \quad r_{NS} = \sum W_i \times r_i.$$

Algebrai esetben a felbontási tagokat úgy kapjuk, hogy ezekből kivonjuk a benchmark hozamot: $A = r_{NA} - b$ és $S = r_{NS} - b$, míg az egyszerűsített, interakció nélküli esetben az algebrai szelekció $S = r - r_{NA}$. Ennek megfeleltethető a geometriai modell, ahol r_{pr}^G, A^G, S^G sorban a geometriai hozampremiumot, allokációt és szelekciót jelöli, és

$$r_{pr}^G = (1 + A^G) \times (1 + S^G) - 1, \quad A^G = \sum A_i^G, \quad S^G = \sum S_i^G$$

teljesül a Bacon modell-beli szektoronkénti felbontási tagokkal. Ekkor

$$A^G = \frac{1 + r_{NA}}{1 + b} - 1 \quad \text{és} \quad S^G = \frac{1 + r}{1 + r_{NA}} - 1,$$

melynek kapcsolata az algebrai esettel látható.

Weber [29] bizonyítása, hogy a szektoronkénti geometriai allokáció és szelekció valóban a fenti kifejezésekre összegződik, a következő:

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} A^G &= \sum_i A_i^G = \sum_i \left((w_i - W_i) \times \left(\frac{1 + b_i}{1 + b} - 1 \right) \right) = \sum_i \frac{(w_i - W_i) \times (b_i - b)}{1 + b} = \\ &= \frac{\sum_i \left((w_i - W_i) \times (b_i - b) \right)}{1 + b} = \frac{\sum_i \left((w_i - W_i) \times b_i \right)}{1 + b} = \\ &= \frac{r_{NA} - b}{1 + b} = \frac{r_{NA} - b + 1 + b}{1 + b} - 1 = \frac{1 + r_{NA}}{1 + b} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^G &= \sum_i S_i^G = \sum_i \left(w_i \times \frac{r_i - b_i}{1 + b_S} \right) = \sum_i \left(w_i \times \frac{r_i - b_i}{1 + r_{NS}} \right) = \frac{\sum_i (w_i \times (r_i - b_i))}{1 + r_{NS}} = \\ &= \frac{r - r_{NA}}{1 + r_{NS}} = \frac{r - r_{NA} + 1 + r_{NA}}{1 + r_{NS}} - 1 = \frac{1 + r}{1 + r_{NS}} - 1 \end{aligned}$$

□

Így az algebrai eset mintájára Weber a felbontási tényezőket a következőknek választotta:

$$A^G = \frac{1 + r_{NA}}{1 + b} - 1, \quad S^G = \frac{1 + r_{NS}}{1 + b} - 1, \quad I^G = \frac{(1 + r)(1 + b)}{(1 + r_{NA}) \times (1 + r_{NS})} - 1 \quad (4.7)$$

Ezekkel teljesül, hogy

$$r_{pr}^G = \frac{1+r}{1+b} - 1 = (1+A^G) \times (1+S^G) \times (1+I^G) - 1.$$

A két modell hasonlóságának ellenére, előfordulhat, hogy $I = 0$, de $I^G \neq 0$. Ha minden szektor esetén $(w_i - W_i) \times (r_i - b_i) = 0$, tehát egy szektorban csak az allokációs és szelekciós döntés egyike aktív, akkor $I = 0$, de a geometriai I^G még lehet nullától eltérő. Itt már akkor megjelenik az interakció hatása, ha van aktív allokáció és szelekció is, nem feltétlenül egy szektorban. Ezért kell megjelennie a szektorok közti interakciós tagnak.

Weber a következőképp határozta meg a szektoronkénti hatásokat:

$$\begin{aligned} A_i^G &= \frac{(w_i - W_i) \times (b_i - b)}{1+b}, & S_i^G &= \frac{W_i \times (r_i - b_i)}{1+b}, \\ I_i^G &= \frac{(w_i - W_i) \times (r_i - b_i)}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})}, & I_{CS}^G &= \frac{rb - r_{NA}r_{NS}}{(1+r_{NA})(1+r_{NS})}, \\ A^G &= \sum A_i^G, & S^G &= \sum S_i^G, & I^G &= I_{CS} + \sum I_i^G. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Az allokáció természetesen azonos (4.6)-el, hiszen csak a szelekciót akarjuk két részre bontani. A szelekció abban különbözik az eredetitől hogy benchmark súlyt használ a valós súly helyett, és a nevezőben is a benchmark hozamhoz viszonyít a névleges allokáció helyett. Ezért fogja kizárólag a szelekció allokációtól független hatását mutatni, nem pedig azt, hogy milyen hatása van a szelekciónak egy olyan portfólión, amin az allokációs döntéseket már meghoztuk. A szektoronkénti interakció számlálója a másik két faktorhoz hasonlóan megegyezik az aritmetikai megfelelőjével. A nevező a Brinson felbontás interakciójában szereplő $-(Q2 + Q3) = -(r_{NA} + r_{NS})$ tag megfelelője. I_{CS} a szektorok közötti (Cross-Segment) interakciót jelöli.

4.1.1. Állítás. [29] *A Weber által meghatározott (4.8) szektoronkénti allokáció, szelekció, interakció és szektorok közötti interakció valóban a (4.7) értékekre összegződik.*

Bizonyítás. [29] Az allokációra vonatkozó állítás bizonyítását már korábban közöltül.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1+r_{NS}}{1+b} - 1 = \frac{r_{NS} - b}{1+b} = \frac{\sum(W_i \times r_i) - \sum(W_i \times b_i)}{1+b} = \frac{\sum W_i \times (r_i - b_i)}{1+b} = \sum \frac{W_i \times (r_i - b_i)}{1+b} \\ I &= \frac{(1+r) \times (1+b)}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} - 1 = \frac{(1+r) \times (1+b) - (1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} = \\ &= \frac{(r+b+rb) - (r_{NA} + r_{NS} + r_{NA}r_{NS})}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} = \\ &= \frac{(r - r_{NA} - r_{NS} + b) + (rb - r_{NA}r_{NS})}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} = \\ &= \frac{\sum(w_i - W_i) \times (r_i - b_i)}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} + \frac{(rb - r_{NA}r_{NS})}{(1+r_{NA}) \times (1+r_{NS})} = I_{CS} + \sum I_i^G. \end{aligned}$$

Ezzel a állítás bizonyítása készen van. □

4.1.2. Állítás. [29] *A szektorok közötti interakció különböző szektorbeli súlyok és hozamok szorzataiból tevődik össze, ezért nem lehet az egyes szektorokhoz rendelni.*

Bizonyítás. [29] Először bontsuk fel a számlálót:

$$rb - r_{NA}r_{NS} = \sum_i w_i r_i \sum_j W_j b_j - \sum_i w_i b_i \sum_j W_j r_j = \sum_i \sum_j w_i W_j (r_i b_j - r_j b_i)$$

Mivel ez a fenti kifejezés $i = j$ esetén nulla, így elég különböző indexekre összegezni.

$$\begin{aligned} rb - r_{NA}r_{NS} &= \sum_i \sum_{j \neq i} w_i W_j (r_i b_j - r_j b_i) = \sum_i \left(\sum_{j > i} w_i W_j (r_i b_j - r_j b_i) - \sum_{j < i} w_i W_j (r_j b_i - r_i b_j) \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_{j > i} w_i W_j (r_i b_j - r_j b_i) - \sum_{j > i} w_j W_i (r_i b_j - r_j b_i) \right) = \sum_i \left(\sum_{j > i} (w_i W_j - w_j W_i) (r_i b_j - r_j b_i) \right). \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben nincs olyan tag, ami egy konkrét szektort jellemezne, csak különböző szektorok súlyainak és hozamainak szorzatai jelennek meg, ezért félrevezető lenne I^{CS} -t szétszteni és a szektorokhoz rendelni. Ez az oka, hogy Weber definiált egy szektorok közötti interakció hatást. \square

A korábban említett esetben, amikor minden szektorra vagy az allokáció, vagy a szelekció nulla, így az aritmetikai számítással a teljes interakció is nulla, a szektorok geometriai interakciója is nulla lesz, és a nem nulla geometriai interakciót teljesen az I_{CS} adja. Weber szerint ezt a tagot bármilyen más tagba beolvasztani, és így megszabadulni tőle félrevezető lenne.

Hogyan oldja meg a geometriai felbontás a többperiódusú felbontás problémáját? Legyen r_i és b_i az i -edik periódus valós, és benchmark hozama, H_{ji} pedig az i -edik periódus geometriai hozamfelbontásának j -edik tagja (például allokáció). Ekkor a teljes periódus geometriai hozamprémiuma

$$\begin{aligned} \frac{1+R}{1+B} - 1 &= \frac{\prod_i (1+r_i)}{\prod_i (1+b_i)} - 1 = \prod_i \left(\frac{1+r_i}{1+b_i} \right) - 1 = \\ &= \prod_i \prod_j (1+H_{ji}) - 1 = \prod_j \left(\prod_i (1+H_{ji}) \right) - 1 \end{aligned}$$

Így a teljes időtartam j típusú felbontási tényezője egyszerűen kifejezhető a periódusok felbontásából: $H_j = \prod_i (1+H_{ji}) - 1$.

Arra, hogy az aritmetikai felbontást is alkalmassá tegyük több periódus kezelésére, több eljárás is létezik, melyek többsége azon alapul, hogy az egyes periódusok attribútumait meghatározott módon módosítják, amik így már az időben megfelelően összegződnek. Ilyen algoritmust hozott létre David R. Carino [10], Jose G. Menchero [25] és Andrew S.B. Frongello [17]. Carino és Menchero módszere a simító algoritmusok csoportjába tartozik, melynek lényege hogy a megmaradó maradéktagot elosztja a többi faktor között.

4.2. Carino algoritmus

Carino a következő három tulajdonságot határozta meg, mellyel szerinte egy ideális multiperiódusos felbontásnak rendelkeznie kell [10]:

- Általánosság: Az összefűző/simító algoritmus, mely a periódusonkénti felbontást több periódusúvá alakítja, nem függ a periódusokra alkalmazott hozamfelbontási módszertől.

Nem számít, hogy van-e többféle pénznem, interakció, vagy hogy milyen csoportokra osztjuk az értékpapírokat, ugyanaz az eljárás legyen mindre alkalmazható.

- Változatlanság: Az egyes periódusok eredményének, illetve a teljes többperiódusú eredmények értelmezése ne különbözzön.
- Nincs maradéktag: Az eljárás pontosan a relatív alul/felülteljesítést bontsa fel, a felbontási tagok összege legyen egyenlő a hozamprémiummal.

A Carino által meghatározott módszer szerint, ha G_{tbi} a t -edik periódus b -edik attribúciós tényezőjének i -edik szektorhoz tartozó hatása, akkor a módosított hozam legyen

$$F_{tbi} = G_{tbi} \times \frac{K_t}{K}, \quad \text{ahol}$$

$$K_t = \frac{\ln(1 + r_t) - \ln(1 + b_t)}{r_t - b_t} \quad \text{és} \quad K = \frac{\ln(1 + R) - \ln(1 + B)}{R - B}.$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$R - B = \sum_t \sum_b \sum_i F_{tbi}$$

Most a hozamok alsó indexe a periódust jelöli. A módszer az effektív és loghozamok különbségén alapul. Carino szerint a K arányosan elosztja a reziduálist a tagok között. Ezért a módszer helyessége megkérdőjelezhető, mert ahelyett, hogy megmagyaráznánk a többlethozam minden részének eredetét, van egy maradéktag, amit csak egyenletesen elosztunk az összes tag között. Ezt fogalmazta meg kritikájában Frongello [17], aki azt is hozzátette, hogy a Carino algoritmus tagjainak intuitív jelentéstartalma nehezen értelmezhető, és a felbontás nem függ a periódusok sorrendjétől. Jose Menchero [25] pedig azt kritizálta, hogy a logaritmus miatt az átlagosnál kisebb hozamú periódusok nagyobb, a nagyobb hozamúak kisebb súlyt kapnak. Természetesen a módszer a Carino által megfogalmazott három tulajdonságot teljesíti.

4.3. A Menchero algoritmus

Menchero [25] célja a $R - B \neq \sum(r_i - b_i)$ kifejezés jobb oldalát C szorzótényezővel kiegészíteni, hogy az egyenlőség teljesüljön. Ebben a fejezetben r_i és b_i az i -edik periódus hozamait jelenti. Ekkor a felbontási tényezőket ugyanezzel a C számmal szorozva azok már megfelelően adódnak össze és a valós hozamprémiumot adják, a

$$C = \frac{R - B}{\sum(r_i - b_i)} \quad R - B = C \sum(r_i - b_i)$$

megoldást azonban nem tartotta megfelelőnek. Ugyanis amikor C negatív, ami megtörténhet, akkor az i -edik periódus pozitív hozamprémiuma csökkentené a teljes hozamprémiumot, ami ellentmond az intuíciónak. Ezért a C -t úgy fogjuk megválasztani, hogy bár nem fogja visszaadni hiba nélkül a teljes $R - B$ -t, de kifejezze a hozamok időbeli geometriai skálatulajdonságát. Ehhez Menchero az egyperiódusú hozamot a hozamok geometriai átlagához arányosította.

$$C = \frac{1}{T} \frac{R - B}{(1 + R)^{(1/T)} - (1 + B)^{(1/T)}}, \quad (R \neq B)$$

melyre már teljesül, hogy mindig pozitív. $R = B$ esetén a határérték

$$C = (1 + R)^{\frac{T-1}{T}} \quad (R = B)$$

Ezzel a C -vel marad egy kicsi hibatag, ami még nincs megmagyarázva $R - B$ -ből. Ezt Menchero egyenletesen elosztotta a különböző periódusok között α_t tagok felhasználásával:

$$R - B = \sum_i (C + \alpha_t)(r_i - b_i) \quad (4.9)$$

Menchero szerint a legpontosabb és legintuitívabb módszer α_t meghatározására, ha minden periódust igyekszünk ugyanúgy súlyozni, ehhez α_t -nek minél kisebbnek kell lennie, hogy a módosító együtthatók, vagyis a $C + \alpha_t$ tagok minél közelebb legyenek egymáshoz. Ehhez Menchero az

$$f = \sum_{t=1}^T \alpha_t^2$$

függvényt minimalizálta azon α_t számok halmazán, melyek kielégítik az (4.9) egyenlőséget. A megoldás

$$\alpha_t = \frac{R - B - C \sum_{j=1}^T (r_j - b_j)}{\sum_{j=1}^T (r_j - b_j)^2} (r_t - b_t).$$

Ezzel a probléma megoldása elkészült, és az optimális módosító tag $\beta_t^{\text{opt}} = C + \alpha_t$. Innen az egyes periódusok felbontásából már következik a teljes felbontás.

$$R - B = \sum_{t=1}^T \beta_t^{\text{opt}} (r_t - b_t) = \sum_{t=1}^T \beta_t^{\text{opt}} \sum_{i=1}^N (A_{it} + SE_{it} + I_{it}) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (\beta_t^{\text{opt}} A_{it} + \beta_t^{\text{opt}} SE_{it} + \beta_t^{\text{opt}} I_{it})$$

Tehát a módosított felbontási tényezőket szektoronként és időben összegezve kapjuk a hozamprémiumot, a felbontási tagok első indexe a a szektort, második indexe a periódust jelöli. Az algoritmus a felbontási módszertől független, bármilyen felbontási tényezők esetén alkalmazható, el lehet hagyni, vagy hozzá lehet adni hatásokat. Menchero a kutatásában [25], melyben hipotetikus portfóliók hozamát bontotta fel, kimutatta, hogy az általa alkotott optimális együtthatók β_t^{opt} szórása a különböző periódusokra nagyon kicsi, konkrét vizsgált esetében 1.4 és 1.42 közé esett az értéke. Ezzel szemben a másik hasonló elvű, Carino-féle módszer $\beta_t = \frac{K_t}{K}$ együtthatójáról ez nem volt elmondható, ez 1.26 és 1.54 között volt. Ezzel Menchero kísérlete, hogy a maradéktagot egyenletesen ossza el az időben, sikeres volt.

A módszert azonban érték kritikák, többek között Frongellótól [17], aki szerint ez a típusú skálázás nem intuitív, a C együttható jelentéstartalma nehezen értelmezhető, az α_t tagnak pedig nincs jelentéstartalma, hiszen ez a meg nem magyarázott reziduális értékét osztja szét, mely szerinte semmiképp nem optimális. Emellett a Menchero felbontás változatlan marad, ha a periódusok hozamait felcseréljük, ami egyelőre vitatéma, hogy előny vagy hátrány. Ugyancsak tekinthető hátránnyként, hogy az $C + \alpha_t$ módosító együttható függ a periódusok számától, tehát az, hogy a t -edik periódus valamely H hatáshoz tartozó H_t hozzáadott hozamát mennyivel szorozzuk, hogy a teljes időtartam H hozamához hozzáadódjon, függ attól, hogy meddig fogjuk még vizsgálni a hozamprémiumot.

4.4. Frongello algoritmusai

A fenti módszerekhez hasonlóan Frongello [17] is olyan eljárást hozott létre, mellyel az egyes periódusok felbontásai összefűzhetőek. Ebben ő kiemelten fontosnak tartotta, hogy a módosításoknak jelentéstartalma legyen, mely haladó szintű matematika nélkül is elmagyarázható és megérthető. A Carino által leírt három követelményt ugyanennyi további elvárással egészítette ki, így egyben kritikát is fogalmazva meg a Carino- és Menchero-módszerekkel szemben.

- Valódiság: A felbontás a valóságot írja le a lehető legjobban, a többi kívánt tulajdonság teljesülése érdekében nem vezethetők be olyan tagok, vagy lépések, melyeknek nincs jelentéstartalma, vagy nem tükrözik a hozam adott részének eredetét.
- Intuitivitás: Csak olyan szintű matematikát tartalmazzon, ami magas szintű matematikai végzettség nélkül is értelmezhető. A módszer minden lehetséges felhasználója értse a működési elvet.
- Sorrendtől való függés: Bár a periódusok sorrendje nincs hatással az összhozamra, de az összesített felbontási elemeket befolyásolnia kell.

A Frongello által létrehozott módszer [17] a fenti tulajdonságok mindegyikét teljesíti, az előző két algoritmus viszont nem.

Tudjuk, hogy $\sum_t \sum_b \sum_i G_{tbi} \neq R - B$. Módosítsuk úgy G_{tbi} -t F_{tbi} -re, hogy ezzel már teljesül, hogy

$$\sum_t \sum_b \sum_i F_{tbi} = R - B.$$

Ezt az elvet követte Carino és Menchero is, Carino esetében $F_{tbi}^C = G_{tbi} \cdot \frac{K_t}{K}$, Mencheronál $F_{tbi}^M = G_{tbi} \cdot \beta_t^{\text{opt}}$. Ezeket az F értékeket mostantól módosított felbontási tényezőkné fogjuk hívni.

Frongello esetében

$$F_{tbi} = G_{tbi} \prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j) + b_t \sum_{j=1}^{t-1} F_{jbi}.$$

Ebben a fejezetben is r_i -vel és b_i -vel az i -edik periódus portfólió és benchmark hozamát jelöljük. Látható, hogy ebben a módszerben már nem egyszerűen ugyanazzal a konstanssal szorozzuk az összes tagot, mint a korábban ismertett két másikban. Az első tag jelentése, hogy az adott periódus, attribútum és szektor hozamát nem az eredeti befektetett összegben vesszük, mint amikor csak egy periódus van, hanem a teljes összegben, amit már realizáltunk $t - 1$ periódus alatt. A második tag kifejezi, hogy a valós portfólió hozamának benchmark hozammal egyenlő részének realizált értéke különbözik attól, amit a benchmark portfólió ebben az időszakban elér, mert más a periódus kiinduló értéke. Így a benchmark hozamot szorozzuk a portfóliók periódus eleji értékeinek különbségével, mely kifejezhető a módosított attribútumok összegével, így az is meghatározható, hogy melyik taghoz csatoljuk ezt az értéket, mert tudjuk, hogy korábban melyik hatás okozta.

Frongello példáján [18] keresztül a bonyolult képlet könnyen értelmezhetővé válik. A kulcs lépés, hogy ne hozamokban, hanem nominális értékben, dollárban gondolkodjunk. A kiindulási érték 100\$ és a következő táblázat tartalmazza két periódus felbontását. Frongello csak

allokációra és szelekcióra bontotta a hozamprémiumot. A példát általunk választott számokkal mutatjuk meg Frongello gondolatmenete alapján.

| | Portfólió | Benchmark | Prémium | Allokáció | Szelekció |
|-------------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|
| 1. Periódus | 22.00 % | 10.00% | 12.00% | 7.00% | 5.00% |
| 2. Periódus | 13.00 % | 9.00% | 4.00% | 1.00% | 3.00% |
| Teljes | 37.86 % | 19.90% | 17.96% | | |

A már sokat emlegetett többperiódusos probléma itt a $17.96 \neq 7 + 5 + 1 + 3 = 16$ alakot ölti. Nézzük, hogy alakul a felbontás nominálisan, dollárban mérve:

| | Portfólió | | | | Benchmark | | | |
|----|-------------|----------------|---------------|---------------|------------|-------------|---------------|------------|
| | Kezdő érték | Benchmark | Allokáció | Szelekció | Záró érték | Kezdő érték | Benchmark | Záró érték |
| 1. | 100.00 \$ | 10.00\$ | 7.00\$ | 5.00\$ | 122.00\$ | 100.00\$ | 10.00\$ | 110.00\$ |
| 2. | 122.00 \$ | 10.98\$ | 1.22\$ | 3.66\$ | 137.86\$ | 110.00\$ | 9.90\$ | 119.90\$ |

A táblázat értékei a következőképp jönnek ki: $10.98 = 122 \cdot 9\%$, $1.22 = 122 \cdot 1\%$, $3.66 = 122 \cdot 3\%$, $137.86 = 122 \cdot 113\%$, $9.90 = 110 \cdot 9\%$, $119.90 = 110 \cdot 109\%$. A kezdő érték és záró érték közti oszlopokban lévő tagok összege adja a második periódus záró és első periódus kezdő értékek közti különbséget. Tehát ez az összes hozam amit elérünk. A portfólió és a benchmark közti különbségeket a vastagított és zöld számokban figyelhetjük meg.

A második periódusbeli allokációt és szelekciót a már megnövekedett periódus kezdő értéken vesszük, ez felel meg a képlet $\prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j)$ részének, mely most 122. A 9% benchmark hozamot sem mindegy, hogy a 122 vagy 110 értéken vesszük, ezt jelölik a zöld számok. A $(122 - 110) \cdot 9\%$ a hozamprémium része, így szét kell osztanunk a felbontás szerint, de ennek módja kézenfekvő, ugyanis $122 - 110 = 7 + 5$ pont a hozamprémiuma az első periódusnak. Tehát $7 \cdot 9\%$ az allokációhoz, $5 \cdot 9\%$ a szelekcióhoz kerül. Így a teljes időszak hozamprémiuma

$$\begin{aligned}
 17.96\% &= 7.00\% + 5.00\% + 1.22\% + 3.66\% + 1.08\% = \\
 &= (7.00\% + 1.22 \cdot 1\% + 7\% \cdot 9\%) + (5.00\% + 1.22 \cdot 3\% + 5\% \cdot 9\%)
 \end{aligned}$$

Így tehát két periódus esetén szemléletesen láthatjuk a képlet mögötti elvet. A módszer több periódusra hasonlóképp működik. Vegyük észre, hogy az allokáció és szelekció jelentését nem használta ki a példa, így tehát bármely két vagy több felbontási tagra ugyanígy működik. Frongello matematikai bizonyítást is adott, mely ugyancsak nem konkretizálja az egy periódusos felbontás jellegét.

4.4.1. Állítás. [16] *Feltéve, hogy minden periódus hozamprémiuma magyarázható $m \in \mathbb{N}$ db felbontási taggal: G_{tb} -vel jelölve a b tényező t -edik periódushoz tartozó relatív teljesítményét, akkor a teljes időszak b taghoz tartozó relatív teljesítménye*

$$G_{1 \rightarrow n, b} = \sum_{t=1}^n F_{tb}, \quad \text{ahol} \quad F_{tb} = G_{tb} \prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j) + b_t \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb}.$$

Bizonyítás. [16] Periódusok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Két periódus esetén tudjuk, hogy $r_t = b_t + \sum_{b=1}^m G_{tb}$ és hogy két periódus hozama $r_{1,2} = (1 + r_1)(1 + r_2) - 1$. Innen

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \left(1 + b_1 + \sum_{b=1}^m G_{1b}\right) \left(1 + b_2 + \sum_{b=1}^m G_{2b}\right) - 1 = \\
&= \left(1 + b_1 + \sum_{b=1}^m G_{1b}\right) (1 + b_2) + \left(1 + b_1 + \sum_{b=1}^m G_{1b}\right) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) - 1 = \\
&= (1 + b_1)(1 + b_2) - 1 + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) (1 + b_2) + (1 + r_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) = \\
&= b_{1,2} + \sum_{b=1}^m G_{1b} + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) b_2 + (1 + r_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) = \\
r_{1,2} - b_{1,2} &= \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) + (1 + r_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) b_2
\end{aligned}$$

Innen egy konkrét b felbontási tag hozama

$$G_{1 \rightarrow 2, b} = G_{1b} + (1 + r_1)G_{2b} + G_{1b}b_2,$$

ami az állítás szerinti alakú. Tegyük fel, hogy n periódusra már beláttuk az állítást, és lássuk be $n + 1$ -re. Kezeljük az első n periódust egy periódusként, így két periódusunk lesz, amire már ugyancsak beláttuk az állítást.

$$\begin{aligned}
G_{1 \rightarrow n+1, b} &= G_{1 \rightarrow n, b} + (1 + r_{1, n})G_{n+1, b} + G_{1 \rightarrow n, b}b_{n+1} = \\
&= \sum_{t=1}^n F_{tb} + G_{n+1, b} \prod_{j=1}^{(n+1)-1} (1 + r_j) + b_{n+1} \sum_{j=1}^{(n+1)-1} F_{jb} = \sum_{t=1}^{n+1} F_{tb}
\end{aligned}$$

Ezzel $n + 1$ periódusra is igaz az állítás, ezért a bizonyítás készen van. \square

Ez a módszer a Carino és Frongello által előírt tulajdonságoknak eleget tesz. A mögötte lévő tartalom logikus és könnyen érthető, az eredmények annyira közel vannak a valósághoz, amennyire azt az egyperiódusú input adatok engedik. Az eredmény függ a periódusok sorrendjétől. Emellett Menchero módszerével ellentétben a jövőbeli hozamoktól nem függ.

David Cariño a "Refinements in Multi-Period Attribution" [11] című írásában azt a dilemmát járta körül, hogy a Frongelloéhoz hasonló rekurzív módszerekben ha egy periódusban megjelenik valamennyi hozamunk az egyik tényezőnek köszönhetően, majd egy későbbi periódusban ennek "újrabefektetéséből" egy másik tényezőtől származik hozam, akkor ezt melyik tényezőnek tulajdonítsuk. Összefüggésbe hozható több faktoriallal is. A Frongello algoritmus ebben az esetben mindig az utolsóként fellépő komponenshez sorolja. Azonban ez nem feltétlenül az egyetlen helyes megoldás, mert Carino szerint egyéni preferencia kérdése, hogy például az először allokáció, majd szelekció miatt megjelenő hozamot az allokációhoz, a szelekcióhoz, vagy a kettő közé szétosztva tegyük. Így létrehozták a Frongello algoritmusnak két módosított változatát, melyek ezt a kérdést különbözőképpen kezelik. [18]

$$\text{Frongello formula: } F_{tb} = G_{tb} \prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j) + b_t \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb}.$$

Az adott periódusbeli tagokat a teljes befektetett összegre vetítjük, függetlenül attól, hogy korábban melyik tényezőtől jött létre, ezért használjuk a teljes portfólió hozamát. A korábbi tagok a benchmark hozamon szorozódnak a jövőbe. A korábban vázolt szituációban, ha a korábbi időszakokban az allokációnak köszönhetően nőtt az alap, az ezen megszerzett szelekciós hozam a szelekcióhoz sorolódik, mert az történt utoljára.

$$\text{Megfordított Frongello formula: } F_{tb} = G_{tb} \prod_{j=1}^{t-1} (1 + b_j) + r_t \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb}.$$

A jelenbeli attribútumokat csak arra az alapra vetítjük, ami a benchmark hozamnak köszönhetően nőtt, viszont a korábbi periódusok különböző komponensekhez tartozó hozamai a portfólió hozammal szorozódnak a jövőbe. Ez azt jelenti, hogy mindig az először megjelenő tényezőnek tulajdonítjuk a hatást. Az először allokáció, majd szelekció által létrejött hozam az allokációhoz kerül.

$$\text{Módosított Frongello formula: } F_{tb} = G_{tb} \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j) + \prod_{j=1}^{t-1} (1 + b_j) \right) + \frac{1}{2} (b_t + r_t) \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb}.$$

A tagokhoz tartozó jelenlegi hozamokat a valós és a benchmark portfóliók átlagára vetítjük. A korábbi tagok a portfólió és benchmark hozamok átlagával szorozódnak a jövőbe. Az először allokáció, majd szelekció által létrejött hozam fele az allokációhoz, másik fele a szelekcióhoz kerül.

Az algoritmust Frongello [17] elsősorban csak szelekciót és allokációt tartalmazó egyperiódusos felbontáshoz hozta létre, de a képletek általánosak, így bármilyen felbontásra érvényesek. A következő két állítást Frongello 4.4.1 Állításának bizonyítása alapján láttam be.

4.4.2. Állítás. *A Megfordított Frongello formulával definiált F_{tb} módosított felbontási tényezők összege valóban a teljes időszak hozamprémiuma, azaz ha*

$$F_{tb} = G_{tb} \prod_{j=1}^{t-1} (1 + b_j) + r_t \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb},$$

akkor

$$R - B = \sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m F_{tb} \quad \text{és} \quad G_{1 \rightarrow n, b} = \sum_{t=1}^n F_{tb},$$

ahol b tetszőleges tényező, $G_{1 \rightarrow n, b}$ a b tényező által hozzáadott hozam az első n periódus hozamprémiumához.

Bizonyítás. Periódusok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Két periódus esetén tud-

juk, hogy $r_t = b_t + \sum_{b=1}^m G_{tb}$ és hogy két periódus hozama $r_{1,2} = (1 + r_1)(1 + r_2) - 1$. Innen

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \left(1 + b_1 + \sum_{b=1}^m G_{1b}\right) \left(1 + b_2 + \sum_{b=1}^m G_{2b}\right) - 1 = \\
&= (1 + b_1) \left(1 + b_2 + \sum_{b=1}^m G_{2b}\right) + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) \left(1 + b_2 + \sum_{b=1}^m G_{2b}\right) - 1 = \\
&= (1 + b_1)(1 + b_2) - 1 + (1 + b_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) (1 + r_2) = \\
&= b_{1,2} + (1 + b_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) + \sum_{b=1}^m G_{1b} + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) r_2 = \\
r_{1,2} - b_{1,2} &= \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) + (1 + b_1) \left(\sum_{b=1}^m G_{2b}\right) + \left(\sum_{b=1}^m G_{1b}\right) r_2
\end{aligned}$$

Innen egy konkrét b felbontási tag hozama

$$G_{1 \rightarrow 2, b} = G_{1b} + (1 + b_1)G_{2b} + G_{1b}r_2,$$

ami az állítás szerinti alakú. Tegyük fel, hogy n periódusra már beláttuk az állítást, és lássuk be $n + 1$ -re. Kezeljük az első n periódust egy periódusként, így két periódusunk lesz, amire már ugyancsak beláttuk az állítást.

$$\begin{aligned}
G_{1 \rightarrow n+1, b} &= G_{1 \rightarrow n, b} + (1 + b_{1, n})G_{n+1, b} + G_{1 \rightarrow n, b}r_{n+1} = \\
&= \sum_{t=1}^n F_{tb} + G_{n+1, b} \prod_{j=1}^{(n+1)-1} (1 + b_j) + r_{n+1} \sum_{j=1}^{(n+1)-1} F_{jb} = \sum_{t=1}^{n+1} F_{tb} \\
R_{n+1} - B_{n+1} &= \sum_{b=1}^m \left(G_{1 \rightarrow n, b} + (1 + b_{1, n})G_{n+1, b} + r_{n+1}G_{1 \rightarrow n, b} \right) = \sum_{b=1}^m \sum_{t=1}^{n+1} F_{tb}
\end{aligned}$$

Ezzel az állítás bizonyítása készen van. □

4.4.3. Állítás. *A Módosított Frongello formulával definiált F_{tb} módosított felbontási tényezők összege is a teljes időszak hozamprémiuma, azaz ha*

$$F_{tb} = G_{tb} \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^{t-1} (1 + r_j) + \prod_{j=1}^{t-1} (1 + b_j) \right) + \frac{1}{2} (b_t + r_t) \sum_{j=1}^{t-1} F_{jb},$$

akkor

$$R - B = \sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m F_{tb} \quad \text{és} \quad G_{1 \rightarrow n, b} = \sum_{t=1}^n F_{tb},$$

ahol b tetszőleges tényező és $G_{1 \rightarrow n, b}$ a b tényező által hozzáadott hozam az első n periódus hozamprémiumához.

Bizonyítás. Legyen F_{tb}^* a Frongello, F'_{tb} a Megfordított Frongello, és F_{tb} a Módosított Frongello algoritmus b tényezőhöz tartozó módosított felbontási tagja a t időpontban. Látszik, hogy

$$F_{tb} = \frac{1}{2} \left(F_{tb}^* + F'_{tb} \right)$$

Ezért

$$\sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m F_{tb} = \sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m \frac{1}{2} (F_{tb}^* + F'_{tb}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m F_{tb}^* + \sum_{t=1}^n \sum_{b=1}^m F'_{tb} \right) = \frac{2}{2} (R - B) = R - B$$

A másik egyenlőség ugyanígy kapható meg a b -re vonatkozó összegzés elhagyásával. Ezzel a bizonyítás készen van. \square

Frongello [17] különös figyelmet fordított arra, hogy a Frongello-, Carino- és Menchero-módszereket összehasonlítsa. Felismerte, hogy abban a speciális esetben, amikor a periódusok hozamai, és azok egyperiódusos felbontásai megegyeznek, akkor a három algoritmus ugyanazt az eredményt adja a teljes felbontásra. Amikor a periódusok különböznek, akkor a Carino-féle felbontás jellemzően túlsúlyozza az átlagnál alacsonyabb hozamú periódusokat, míg Menchero a lehető legegyszerűbben próbálja súlyozni őket. A periódusok sorrendjét egyikőjük sem veszi figyelembe. Frongello teljesen más megközelítéssel, a hozamok útját figyelve skálázza a felbontást, így itt már szerepet kap a sorrend is. Azt figyelte meg, hogy a módszerek eredményei közti különbség nő, ha a hozamok szintje emelkedik vagy a periódusonkénti hozamok és felbontások volatilitása nő, és akkor is, hogyha a periódusok száma növekszik. A következő portfólióban például, ahol a harmadik periódus felbontása nagyon különbözik az első kettőtől, a többperiódusú eredmények jelentősen eltérnek. A példa Frongellótól származik [17], de a Megfordított és Módosított Frongello felbontásokhoz tartozó értékekkel mi egészítettük ki.

| | Allokáció | Szelekció | Prémium |
|--------------------------------|-----------|-----------|----------|
| 1. Periódus | -4.00% | 52.00% | 48.00% |
| 2. Periódus | -0.50% | 21.50% | 21.00% |
| 3. Periódus | 34.00% | -36.00% | -2.00% |
| <hr/> | | | |
| Teljes, Carino | 41.1514% | 47.8291% | 88.9805% |
| Teljes, Menchero | 38.7726% | 50.2079% | 88.9805% |
| Teljes, Frongello | 57.3948% | 31.5858% | 88.9805% |
| Teljes, Megfordított Frongello | 27.9443% | 61.0363% | 88.9805% |
| Teljes, Módosított Frongello | 42.6695% | 46.311% | 88.9805% |

Carino és Menchero hasonló eredményt ad, míg az eredeti Frongello majdnem 20%–al többet tulajdonít az allokációnak. Ez nagy részben a sorrendtől való függés miatt van, hiszen az utolsó időpont nagy allokációját Frongello a korábbi periódusokban már megszerzett $1.48 \cdot 1.21$ alapra vetíti, ami a harmadik periódus allokációját 60.88-ra növeli. Ezért ebben az esetben a sorrendtől függés vagy nem függés nagy különbséget okoz. Az először szelekció, majd allokáció miatt nyert nagy hozam ekkor az allokációhoz kerül, ellentétben a Megfordított Frongelloval, ahol fordítva, így ott a szelekció lesz jóval nagyobb. A módosított Frongello a kettő átlaga és a legközelebb van a Carino és Menchero módszerhez. A legközelebb a Módosított Frongello és Carino eredménye van egymáshoz, ami nem véletlen, már többen is megállapították, hogy ez a két módszer közel azonos eredményt ad, köztük Yindeng Jiang és Joseph Sáenz 2014-ben [20]. Ha a három periódus sorrendjét megfordítjuk, akkor a következő eredményeket kapjuk:

| | Allokáció | Szelekció | Prémium |
|--------------------------------|-----------|-----------|----------|
| Teljes, Carino | 41.1514% | 47.8291% | 88.9805% |
| Teljes, Menchero | 38.7726% | 50.2079% | 88.9805% |
| Teljes, Frongello | 27.9443% | 61.0363% | 88.9805% |
| Teljes, Megfordított Frongello | 57.3948% | 31.5858% | 88.9805% |

Tehát a Carino és Menchero felbontás nem változott, azonban a Frongello jelentősen. Itt ugyanis az első periódusbeli 34%-os allokáción a második-harmadik periódusban ható szelekció a szelekcióhoz kerül. A Frongello és Megfordított Frongello eredmények felcserélődtek. Az ehhez hasonló szélsőséges példáktól eltekintve azonban általában hasonló eredményeket kapunk az összes módszerrel.

4.5. A több periódusú Brinson módszer

Damien Laker [23] tett kísérletet arra 2002-ben, hogy a Brinson-Fachler módszer [6] gondolatmenetét változtatás nélkül átvigye több periódusra. Ennek alapja, hogy az allokációt, szelekciót, interakciót a névleges portfólió hozamának is tekinthető Q1, Q2, Q3, Q4 negyedek kivonásával és összeadásával kapjuk. Laker ugyanezeket a műveleteket használja a négy általa megalkotott több periódusú névleges portfólión, melyek a Brinson-féle negyedek megfelelői.

| | <i>Aktív szelekció</i> | <i>Passzív szelekció</i> |
|--------------------------|--|--|
| <i>Aktív allokáció</i> | Q4: Portfólió $\prod_t(1 + \sum_j w_j \times r_j) - 1$ | Q2: Névleges allokáció $\prod_t(1 + \sum_j w_j \times b_j) - 1$ |
| <i>Passzív allokáció</i> | Q3: Névleges szelekció $\prod_t(1 + \sum_j W_j \times r_j) - 1$ | Q1: Benchmark $\prod_t(1 + \sum_j W_j \times b_j) - 1$ |

2. táblázat. A többperiódusú Brinson felbontás negyedei

Ekkor az allokáció $A = Q2 - Q1$, a szelekció $S = Q3 - Q1$, az interakció pedig $I = Q4 - Q3 - Q2 + Q1$.

Laker fő érvei, hogy ez a megoldás a Brinson axiómákból egyenesen következik, figyelembe veszi, hogy a hozamok időben szorzódnak, a három tényező pont a megfelelő $Q4 - Q1$ -re összegződik, és a sorrendtől való függés valójában gyengesség. Frongello [16] bírálta Laker érvelését, és hiányolta a magyarázatot, hogy miért szorzódnak össze a névleges portfóliók hozamai az időben. Szerinte Laker logikájának fő hibája, hogy nem veszi figyelembe hogy egy adott periódus hozamát a periódus eleji portfólió értéken értelmezzük, amit befolyásol az előző periódusok hozama. Az allokációt és szelekciót is ezen kell értelmezni, nem elég csak azon a mennyiségen, ami csak az allokáció vagy szelekció mentén változott, csak hogy Laker módszere pontosan ezt teszi. Az, hogy a hozamok az időben szorzódnak, nem jelenti, hogy a felbontási tényezők is. Úgy véli, az allokáció és szelekció is alul van becsülve, és a három tényező összege csak azért megfelelő, mert az interakció, mint egy maradéktag, így lett meghatározva, így ez nem bizonyítja a módszer helyességét.

Frongello [16] bemutatott egy példát is, melyben a 3 egymást követő periódus minden hozammal, felbontással kapcsolatos paramétere megegyezett, és nem volt interakció, csak allokáció és szelekció az egyes periódusokban. A két értékpapírosztály a részvény és kötvény volt. Ekkor a Frongello, Carino, Menchero-féle többperiódusos felbontásban az allokáció, szelekció és interakció aránya a hozamprémiumban megegyezett az egyperiódusossal, a többperiódusos Brinson módszernél azonban nem. Itt megjelent az interakció, annak ellenére, hogy az minden periódusban 0 volt. A Brinson felbontás a hatások szektoronkénti értékét sem tudja megadni, csupán a teljeset.

| | Benchmark | | Portfólió | |
|----------|-----------|-------|-----------|-------|
| | Súly | Hozam | Súly | Hozam |
| Részvény | 60.00% | 5.00% | 80.00% | 6.00% |
| Kötvény | 40.00% | 2.00% | 20.00% | 3.00% |
| Teljes | | 3.80% | | 5.40% |

| | Allokáció | Szelekció | Interakció | Prémium |
|----------------------------------|-----------|-----------|------------|---------|
| Egy periódus | 0.60% | 1.00% | 0.00% | 1.60% |
| Egy periódus, arány | 37.50% | 62.50% | 0.00% | 100.00% |
| Három periódus, Frongello | 1.97% | 3.28% | 0.00% | 5.25% |
| Három periódus, Frongello, arány | 37.50% | 62.50% | 0.00% | 100.00% |
| Három periódus, Brinson | 1.95% | 3.26% | 0.04% | 5.25% |
| Három periódus, Brinson, arány | 37.14% | 62.14% | 0.72% | 100.00% |

Ha a periódusok számát elkezdjük növelni, akkor egyre több hangsúlyt kap az interakció. 2000 periódusnál a hozamprémium 100%-át az interakció fogja magyarázni, úgy, hogy egyik periódusban sem volt interakció.

A különbség oka, hogy Frongello különálló hatásként tekint az interakcióra. Lakernél viszont periódusonkénti interakció nélkül, egymás utáni periódusok allokációjának és szelekciójának egymásra hatásából is kapunk többperiódusos interakciót. Frongello másik példája [16] is ezt mutatja. Ebben az első periódusban csak allokációs döntést hozunk, így az allokáción kívül minden 0, a második periódusban pedig csak szelekció van. A többperiódusos Brinson módszerben itt is jelenik meg interakció, mely Frongello szerint észszerűtlen, mert ő függetlenként tekint az interakcióra.

Laker a sorrendfüggetlenséget előnynek tekinti, és ezt azzal indokolja, hogy az egymás utáni periódusok hozamai szorzódnak, a szorzás pedig multiplikatív és kommutatív, így nincs rá ok, hogy a többperiódusos felbontásnak sorrendtől függőnek kéne lennie. Frongello szerint ez azért hibás, mert a felbontás additív természete miatt a helyes hozamfelbontás módszer nem csak szorzást tartalmaz.

5. Matematikai-statisztikai módszerek

Ebben a fejezetben ismertetjük azokat a statisztikai módszereket, melyeket arra fogunk használni, hogy különbségeket mutassunk ki a felbontási módszerek között. Mind a három próba két, esetleg több mintát hasonlít össze azzal a nullhipotézissel, hogy ugyanabból az eloszlásból jönnek, és alternatív hipotézisként vizsgálható, hogy sztochasztikusan dominálja-e az egyik minta eloszlása a másikat. Közös jellemzőjük, hogy nem szükséges hozzájuk a minták eloszlásának normalitása. Később látni fogjuk, hogy a normalitás nem teljesül az adatainkra, így számos népszerű statisztikai vizsgálatot nem tudunk alkalmazni.

5.1. Kruskal-Wallis próba

A William Kruskal és Allen Wallis [21] által létrehozott próba célja, hogy C darab mintáról, melyek nem feltétlen ugyanakkora elemszámúak, eldöntse, hogy származhatnak-e ugyanabból az eloszlásból. Ez egy rangpróba, ami azt jelenti, hogy nagyság szerint sorba rendezi az összes elemet, így mindegyik kap egy rangot 1-től N -ig. A sorbarendezést nem mintánként kell megtenni, hanem együtt. Ha két megfigyelés megegyezik, akkor a sorszámukat átlagoljuk. Általánosságban a rangpróbák előnye, hogy egyszerűbb a számolás, és nem tesz fel olyan szigorú feltételeket, mint például a t -próbánál a normalitás. A Kruskal-Wallis próba egyetlen feltétele, hogy a minták függetlenek legyenek, és hogy az ugyanabba a mintába tartozó adatokat ugyanabból a populációból vegyüek.

Miután rangot rendeltünk a megfigyelésekhez, és kiszámoltuk minden mintához a rangok összegét, a következőképpen határozzuk meg a statisztikát:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^C \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

ahol C a minták száma, n_i az i -edik minta elemszáma, N ezek összege tehát az összes megfigyelés száma, R_i pedig az i -edik minta rangösszege. A nullhipotézis az, hogy a minták ugyanabból az eloszlásból jöttek, és akkor utasítjuk el, ha H túl nagy. Ha a nullhipotézis teljesül és a minták elemszáma nem túl kicsi, akkor a H $\chi^2(C-1)$ eloszlású, így a χ^2 eloszlás kritikus értékeit használhatjuk.

Ha vannak azonos megfigyelések, akkor H -t még el kell osztani a

$$1 - \frac{\sum(t-1)t(t+1)}{N^3 + N}$$

kifejezéssel, ahol a szumma az ismétlődéseket tartalmazó halmazok fölött van, t pedig az ismétlődő elemek száma minden halmazban. Nagy minták esetén a $\chi^2(C-1)$ eloszlás itt is igaz. A próba ereje más nemparametrikus próbákhoz hasonlóan nehezen meghatározható. Ha elvetjük a nullhipotézist, az azt mutatja, hogy az egyik minta sztochasztikusan dominál egy másik mintát, azaz, ha két csoportból kivesszünk véletlenszerűen egy-egy elemet, 50-50%-tól jelentősen eltér az esélye, hogy melyik csoport kivett elemének értéke nagyobb. Ez azzal is megegyezik, hogy van-e különbség az eloszlások mediánja között. Átlagok összehasonlítására is használják bizonyos esetekben. A próba többféle alternatív hipotézissel elvégezhető, például két minta esetén azzal, hogy az első minta sztochasztikusan dominálja a másodikat.

5.2. Wilcoxon-féle rangpróba

Frank Wilcoxon előjeles rangpróbája [30] azt vizsgálja, hogy két páros minta jöhet-e ugyanabból az eloszlásból. Van olyan verziója is, ahol a két mintának nem kell párosítottnak lenniük. A párosított esetben vesszük az összetartozó megfigyelések különbségét és ezt fogjuk vizsgálni. Az előjeles rangpróba lényege, hogy a különbségekhez kiosztjuk a rangokat az abszolútértékük nagysága alapján, tehát 1-et kap a legkisebb abszolútértékű és a minta elemszámával megegyező egész számot a legnagyobb abszolútértékű. Ezután azoknak a rangoknak, amihez tartozó szám negatív volt, vesszük a -1 -szeresét, majd külön összeadjuk a negatív, illetve pozitív rangokat. A két szám közül a kisebb abszolútértékűt kell vizsgálni. Párosítatlan minta esetén a két minta elemeit együtt rangsoroljuk, a rangszámok átlagát használva a megegyező elemeknél. A két mintára összegezzük a hozzájuk tartozó rangokat, és a kettő közül a kisebbiket vizsgáljuk. Meghatározható, hogy a két eloszlás egyezése esetén mennyi a valószínűsége, hogy a rangösszeg maximum egy adott érték. Ez a próba Friedman hasonló rangpróbájához képest erősebb, mert a különbségeknek nem csak az előjelét, de a nagyságát is figyelembe veszi.

| <i>Block</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>A-B</i> | <i>Rank</i> |
|--------------|----------|----------|------------|-------------|
| 1 | 209 | 151 | 58 | 8 |
| 2 | 200 | 168 | 32 | 7 |
| 3 | 177 | 147 | 30 | 6 |
| 4 | 169 | 164 | 5 | 1 |
| 5 | 159 | 166 | -7 | -3 |
| 6 | 169 | 163 | 6 | 2 |
| 7 | 187 | 176 | 11 | 5 |
| 8 | 198 | 188 | 10 | 4 |

1. ábra. Wilcoxon próbája páros mintával

Nézzük, hogy kapjuk meg a nullhipotézis teljesülése, vagyis megegyező eloszlás esetén az egyes rangok valószínűségét! Párosítatlan minták esetén ha egy minta nagysága q , akkor a rangok az 1 és $2q$ közötti egész számok lesznek. Ezeket egy mintára összegezve a lehető legkisebb érték a $\frac{q(q+1)}{2}$, a legnagyobb $\frac{q(3q+1)}{2}$, és a kettő között minden egész szám előfordulhat. A két legkisebb és két legnagyobb csak egyféleképpen fordulhat elő. Az előfordulások száma megegyezik T (az adott rangösszeg) q -tagú partícióinak számával, ahol a tagok nem ismétlődhetnek és nem lehetnek nagyobbak $2q$ -nál. A tagok jelentik itt a mintához tartozó megfigyelések rangjait. Ezen partíciók száma meghatározható. A nullhipotézis teljesülése esetén annak valószínűsége, hogy a rangösszeg maximum r :

$$P = 2 \frac{1 + \sum_{i=1}^{r-mr} \sum_{j=1}^q \Pi_j^i - \sum_{n=1}^{r-mr-q} ((r - mr - q - n + 1) \Pi_{q-1}^{q-2+n})}{\frac{2q}{q \times q}}$$

Itt q egy minta nagysága, mr a legkisebb lehetséges rangösszeg, Π_j^i pedig i j tagú partícióinak száma.

Páros minta esetén, tegyük fel hogy a két rangösszeg közül a negatív volt a kisebb abszolútértékű, így azt kell vizsgálni. Mivel ez a negatív rangok összege, ezért a legnagyobb érték amit felvehet a 0, és ez egyféleképpen történhet meg, ha minden rang pozitív. A következő a -1 , ez is egyféleképpen lehet. A lehetséges variációk száma a rangösszeg abszolútértékének növekedésével nő, $-r$ esetén r nemegyenlő partícióinak száma, a tagok felső korlátja a mintaelemszám.

A következő formula megadja azt a valószínűséget, hogy a rangösszeg maximum r :

$$P = 2 \cdot \frac{1 + \sum_n^{r-mr-\binom{n}{2}} \sum_{i=n} \Pi_n^i}{2^q}.$$

Itt q egy minta nagysága, mr a legkisebb lehetséges rangösszeg, Π_n^i pedig i n tagú partícióinak száma. Ez alapján szignifikancia szint választás után el tudjuk dönteni, hogy elfogadjuk-e a nullhipotézist.

A páros mintára vonatkozó próba Wilcoxon előjeles rangpróbaként, a párosítatlan próba Wilcoxon-féle rangösszegtesztként ismert. Vizsgálható amellett az alternatív hipotézis mellett is, hogy az egyik eloszlás sztochasztikusan dominálja a másikat.

5.3. Mann-Whitney-próba

H. B. Mann és D. R. Whitney 1947-ben megalkotott statisztikai vizsgálata [24] ekvivalens a Wilcoxon-féle rangösszegteszttel, de Wilcoxon csak néhány pontját adta meg a statisztikája eloszlásának. A kiindulási pont itt is az, hogy van két valószínűségi változó hozzájuk tartozó két mintával, de most nem kell a két mintának megegyező elemszámmal rendelkezni. Feltesszük, hogy a két eloszlás eloszlásfüggvénye folytonos. Jelöljük x -el és y -al a két változót, n -el és m -el a minták elemszámát, és F -el és G -vel az eloszlásfüggvényeket. A nullhipotézis az, hogy a két eloszlás, és így az eloszlásfüggvények F és G megegyeznek, míg az alternatív hipotézis szerint y sztochasztikusan dominálja x -et, azaz $\forall a : F(a) > G(a)$.

Rendezzük nagyság szerint sorba a mintaelemeket. A folytonossági feltétel szerint a mintaelemek 1 valószínűséggel különböznek, így a sorbarendezés egyértelmű 1 valószínűséggel. Párosítsuk össze az x eloszlás mintaelemeit az y eloszlás mintaelemeivel minden lehetséges módon. Az U statisztika azoknak a pároknak a száma, ahol az y eloszlásból jövő elem kisebb az x eloszlásból származónál. A próba ezen U eloszlásán alapul. Megtalálva minden α szignifikancia szinthez azt az \bar{U} számot, melyre a nullhipotézis teljesülése esetén $P(U < \bar{U}) = \alpha$, α szignifikanciaszinten elvetjük a nullhipotézist, amikor $U < \bar{U}$. U megkapható Wilcoxon T statisztikájából, ami az y eloszláshoz tartozó mintaelemek rangjának összege.

$$U = mn + \frac{m(m+1)}{2} - T.$$

Mann és Whitney meghatározta az U varianciáját, momentumait és határeloszlását, és megállapították, hogy a próba konzisztens.

$$E_{nm}(U) = \frac{nm}{2}, \quad D_{nm}^2(U) = \frac{nm(n+m+1)}{12},$$

$$E_{nm}((U - E_{nm}(U))^4) = \frac{nm(n+m+1)}{240} (5n^2m + 5nm^2 - 2n^2 - 2m^2 + 3nm - 2n - 2m)$$

További momentumok vizsgálatával felismerték, hogy

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{E_{nm}((U - E_{nm}(U))^{2r})}{[E_{nm}((U - E_{nm}(U))^2)]^r} = (2r-1)(2r-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

Ebből következik, hogy U határeloszlása normális, ha n és m végtelenbe tart.

6. Hozamfelbontás algoritmusok összehasonlítása

Ebben a fejezetben néhány valós részvényekből összeállított portfólió egy benchmarkhoz képesti hozamprémiumát magyarázzuk a korábban ismertetett geometriai, Carino, Menchero, több típusú Frongello és a többperiódusú Brinson hozamfelbontási módszerek segítségével, és megfigyeljük ezek különbségeit. Az ismételten előforduló jelenségeket összegyűjtjük, majd a következő fejezetben statisztikai vizsgálatokat végzünk rajtuk. Elsősorban a Mann-Whitney-próbát, Wilcoxon előjeles rangpróbát és a Kruskal-Wallis próbát használjuk eloszlások közötti sztochasztikus dominanciák azonosítására. A hozamfelbontást Python nyelvben, Jupyter Notebook felhasználásával végeztük.

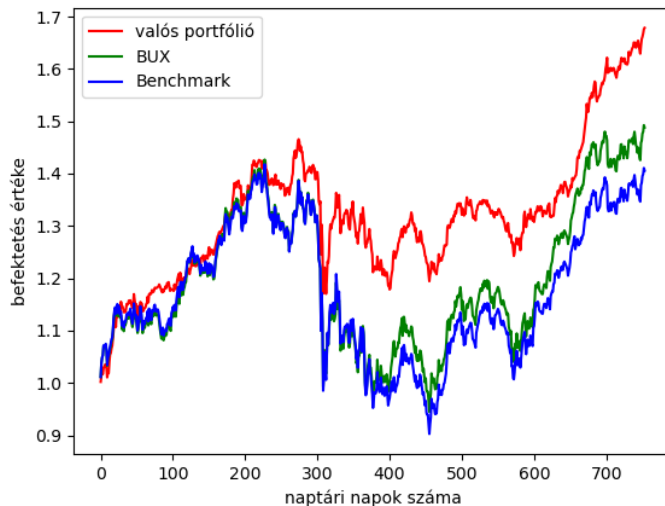
A hozamfelbontás egy portfólió egy benchmarkhoz képesti többlethozamát magyarázza. Mi benchmarkként a BUX index hozamát használtuk 3 éves időhorizonton, 2020.12.05 és 2023.12.05. között. Az ezalatt eltelt kereskedési napok száma 754. A számolás megkönnyítése érdekében ezt a portfóliót statikussá tettük, a BUX 2023.12.04-ei részvénysúlyait tekintve az egész időperióduson. Ez a portfólió tehát értékében és hozamában különbözik a BUXtól, de közel van hozzá, a 3 éves hozam a BUX esetében 48,8%, míg a statikus portfólióé 40,6%. A dolgozat további részében ezt fogjuk Benchmark Portfólióként kezelni. Összetétele a következő:

| Értékpapír neve | Értékpapír súlya a BUX-ban | Értékpapír súlya az 1. vizsgált portfólióban | Értékpapír szektora |
|-----------------|----------------------------|--|-------------------------------|
| OTP HB Eq. | 38,955724 | 12 | Pénzügyi szektor |
| MOL HB Eq. | 25,518847 | 5 | Energiaszektor |
| RICHT HB Eq. | 22,369468 | 15 | Egészségügyi szektor |
| MTELEKOM HB Eq. | 5,405014 | 5 | Kommunikációs szektor |
| OPUS HB Eq. | 2,953787 | 2 | Pénzügyi szektor |
| 4IG HB Eq. | 0,944434 | 4 | Technológiai szektor |
| ANY HB Eq. | 0,631146 | 12 | Ipari szektor |
| MASTERPL HB Eq. | 0,563257 | 8 | Nyersanyagsektor |
| GSPARK HB Eq. | 0,517649 | 5 | Ingatlanszektor |
| AUTOWALL HB Eq. | 0,436442 | 2 | Ciklikus fogyasztási termékek |
| ALTEO HB Eq. | 0,369011 | 8 | Közműszektor |
| BIF HB Eq. | 0,340404 | 8 | Ingatlanszektor |
| PANNONIA HB Eq. | 0,282159 | 2 | Pénzügyi szektor |
| WABERERS HB Eq. | 0,276376 | 2 | Ipari szektor |
| PANNERGY HB Eq. | 0,271492 | 8 | Közműszektor |
| DELTA HB Eq. | 0,16479 | 2 | Kommunikációs szektor |

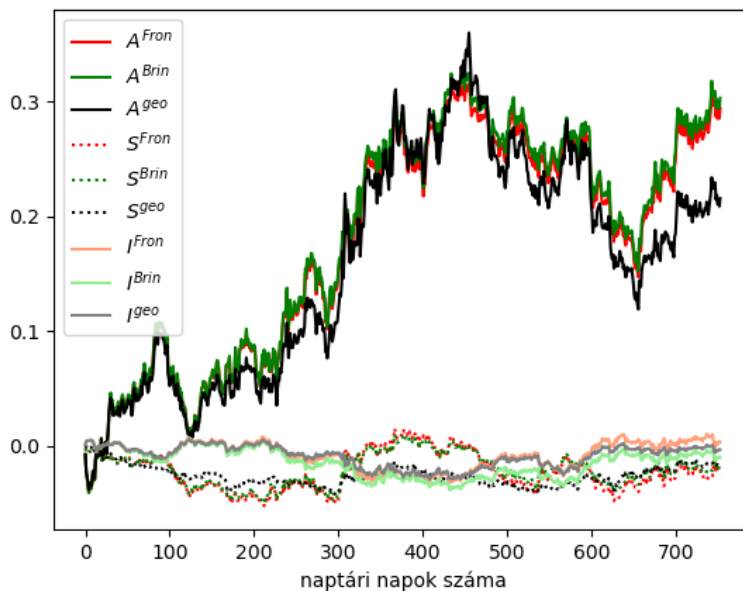
3. táblázat. A BUX index részvényei és azok súlyai

Olyan portfóliók hozamát vizsgáltuk a Benchmarkhoz képest, melyek ugyanebből a 16 értékpapírból állnak, csak eltérő súlyokkal. A 16 értékpapír összesen 10 szektorhoz tartozik. A létrehozott portfóliók 3 éves többlethozamát Geometriai, Frongello, Megfordított Frongello, Módosított Frongello, Carino, Menchero és többperiódusos Brinson felbontással bontottuk fel allokáció, szelekció és interakció összegére, egy kereskedési napot véve az időegységnek és a felbontások különbözőségét vizsgáltuk. Az esetek többségében nagyon hasonló eredményt ad az összes felbontás. Például vegyük azt a portfóliót, melyben az értékpapírok súlyai a 3. táblázatban meghatározottak. Lentebb látható a 2. ábrán a portfólió értékének alakulása, majd néhány különböző felbontási módszer eredménye egymás mellett. Azt is láthatjuk, hogy a Benchmark és a BUX valóban közel van egymáshoz. Ebben az esetben a hároméves aritmetikai hozamprémium 27.28%, a geometriai pedig 19.41%. A 3. ábrán láthatjuk 3 felbontás eredményét.

Valóban nincsen nagy különbség a módszerek között. A geometriai módszer láthatóan kisebb allokációt eredményezett, de ez szükséges is, mivel a geometriai hozamprémium kisebb. Az algebrai módszerek 3 komponense ugyanarra a számra összegződik, míg a geometriai felbontás tényezői egy másik számra szorzódnak, így ez a módszer távolabb van a többitől.



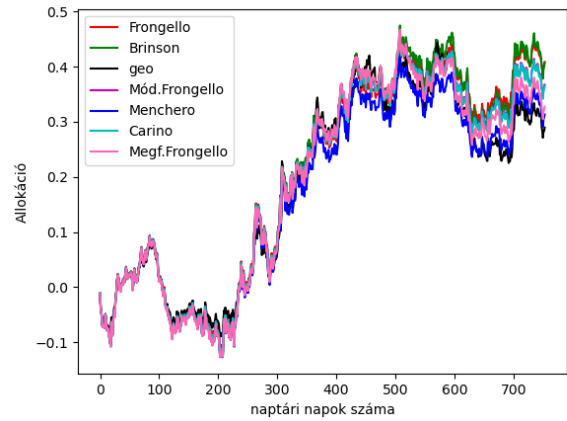
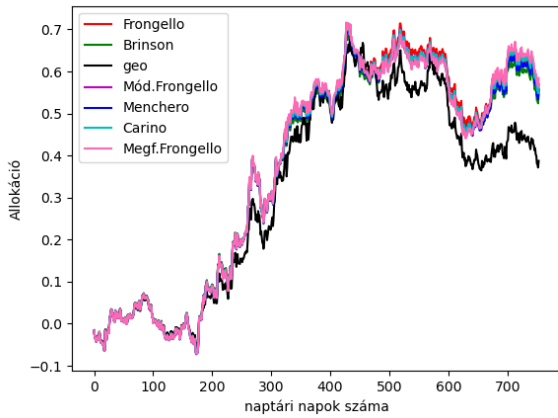
2. ábra. Az 1. vizsgált portfólió, a BUX és a benchmark értékének alakulása



3. ábra. Az 1. vizsgált portfólió geometriai, Frongello és Brinson allokációjának, szelekciónak és interakciójának alakulása

Vizsgáljuk meg, hogy vannak e olyan portfóliók, melyek esetén nagyobb különbséget figyelhetünk meg a felbontási eljárások között! A következő ábrákon 2 portfólió allokációit, szelekciónak és interakcióit láthatjuk. Ezek, és még több más portfólió hozamfelbontását tanulmányozva

megfigyelhető, hogy a geometriai felbontás allokációja gyakran alacsonyabb a többinél, míg a Frongello módszeré általában a legmagasabbak között van.

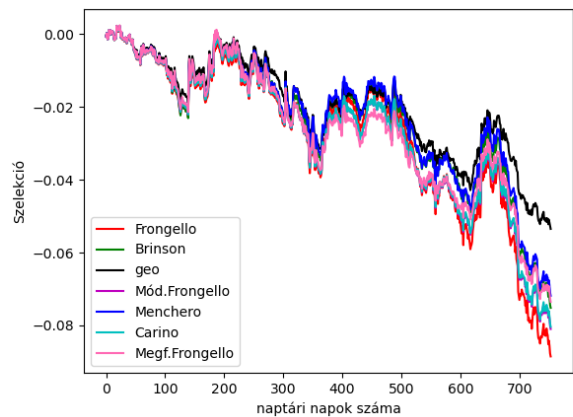
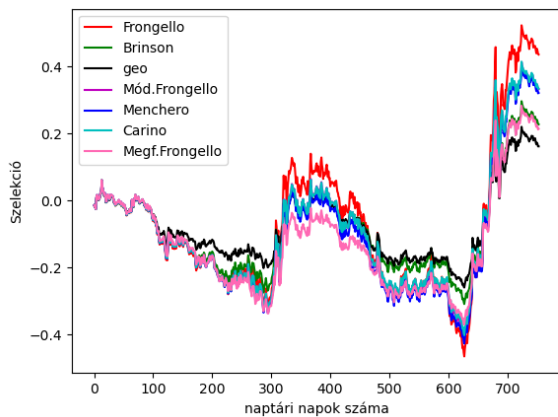


4. ábra.

A 2. portfólió allokációjának alakulása a 7 vizsgált módszerrel

5. ábra.

A 3. portfólió allokációjának alakulása a 7 vizsgált módszerrel

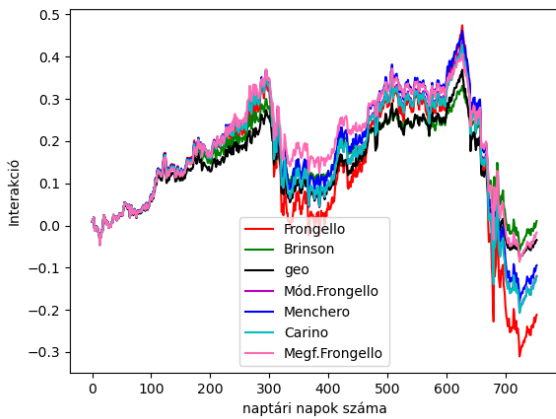


6. ábra.

A 2. portfólió szelekciójának alakulása a 7 vizsgált módszerrel

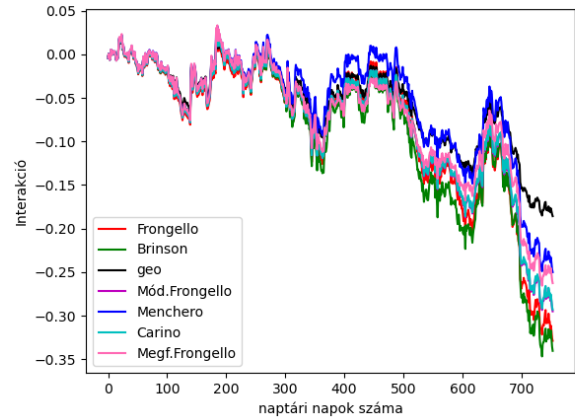
7. ábra.

A 3. portfólió szelekciójának alakulása a 7 vizsgált módszerrel



8. ábra.

A 2. portfólió interakciójának alakulása a 7 vizsgált módszerrel



9. ábra.

A 3. portfólió interakciójának alakulása a 7 vizsgált módszerrel

A szelekciót szemlélve azt láthatjuk, hogy sok esetben mikor a szelekció csökken, akkor a Frongello-féle szelekció a legkisebb, tehát az csökken legjobban, a geometriai pedig a legnagyobb. Növekedéskor ellenkezőleg, a Frongello nő a legjobban, a geometriai legkevésbé. Tehát a Frongello algoritmussal számolt szelekció drasztikusabban változik, nagyobb ingadozások vannak benne. Hasonló figyelhető meg az interakció esetében is. Emellett többször vehetünk észre viszonylag magas geometriai interakciót, és viszonylag alacsony Brinson módszerrel számolt interakciót. Mindhárom felbontást együtt nézve azt látjuk, hogy a Carino és Módosított Frongello eredmények gyakran közel vannak egymáshoz, és hogy az interakciók és szelekciók között erős összefüggés, nagy negatív vagy nagy pozitív korreláció lehet. A Carino és Módosított Frongello hasonlóságát már mások is megfigyelték. [20]

A példaként ábrázolt portfóliókhöz tartozó súlyok:

| Értékpapír neve | Értékpapír súlya a 2. vizsgált portfólióban | Értékpapír súlya a 3. vizsgált portfólióban |
|--------------------|---|---|
| MOL HB Equity | 10 | 0 |
| RICHT HB Equity | 0 | 30 |
| MTELEKOM HB Equity | 10 | 0 |
| OPUS HB Equity | 10 | 0 |
| 4IG HB Equity | 20 | 0 |
| ALTEO HB Equity | 40 | 30 |
| PANNERGY HB Equity | 10 | 10 |
| DELTA HB Equity | 0 | 30 |

4. táblázat. Vizsgált portfóliók összetétele

Vizsgáljuk ezeket a megfigyeléseket egyenként, statisztikai vizsgálatokkal. A következő sejtéseink vannak:

1. A többi felbontáshoz képest a Frongello szelekció és interakció időbeli alakulásának szórása magasabb, a geometriaié alacsonyabb.
2. A többi felbontási módszerhez képest általában alacsonyabb a geometriai allokáció és Brinson-interakció, és magasabb a Frongello féle allokáció és geometriai interakció.
3. Minden módszer esetében a szelekció és interakció alakulásának korrelációja magas abszolútértékű.

7. Adatelemzés eredménye

Ebben a fejezetben 1000, néhány esetben 10000 véletlen portfólión vizsgáljuk az előző fejezetben megfigyelt jelenségeket az 5. fejezetben felsorolt statisztikai módszerek segítségével. A vizsgált területek közé tartozik a felbontási tagok időbeli szórásának viszonya, nagyságának viszonya, abszolútértékes nagyságának viszonya és a szelekció és interakció korrelációja. A portfóliók generálását, azok hozamfelbontását és a statisztikai vizsgálatokat Python segítségével hajtottuk végre, Jupyter Notebook környezetben. A pip csomagkezelőt használtuk, és a következő csomagokat vettük igénybe: numpy, pandas, os, math, random, statistics, matplotlib, scipy, seaborn, tabulate és sklearn. Ezek a csomagok lehetővé tették a szükséges adatkezelési, elemzési és vizualizációs feladatok hatékony végrehajtását. A fontosabb Python kódok megtalálhatóak az A Appendixben.

7.1. Felbontások időbeli alakulásának szórásának vizsgálata

Az allokációk, szelekciók, interakciók minden felbontási módszerrel egy-egy görbét határoznak meg, ahol minden pont az addig az időpontig összegyűlt adott tényezőhöz tartozó hatás, tehát minden X felbontási módszer és $H \in \{A, S, I\}$ esetén $H^X(0) = 0$ és $H^X(x)$ a $[0, x]$ időtartam X módszerrel számolt multiperiódusos H hatása. A kvadratikus variáció számolásához hasonló képlettel vizsgáljuk meg, hogy mennyire szóródnak az egymást követő értékek. A következő értéket számoljuk ki minden X -re és H -ra:

$$\Sigma(H^X) = \sum_{x=0}^{753} (H^X(x+1) - H^X(x))^2,$$

Vegyünk 1000 véletlenszerű portfóliót, melynek Benchmarkhoz képesti többlethozamának felbontását vizsgáljuk. A gyorsabb számolás érdekében a portfóliók százalékos súlyait 10 többszöröseinek választjuk, ahogy az a korábbi két példában is történt. Számoljuk ki a szórásokat mind a 7 felbontási módszerre, 3 felbontási tagra és 1000 portfólióra, és nézzük a szórások különbségét az összes lehetséges felbontási módszer kombinációra. Így kapunk $63 \left(\binom{7}{2} \cdot 3 \right)$ darab 1000 elemű mintát. Ha a sejtésünk igaz, és bizonyos felbontások szórása nagyobb mint másoké, akkor ezen minták eloszlásának várható értéke el kell térjen nullától.

Ahhoz azonban, hogy t-próbát használhassunk a várható érték vizsgálatára, a minták eloszlásának normálisnak kell lenni. Ez a Shapiro-Wilk, és Anderson-Darling próbák szerint azonban nem teljesül. Mindkét vizsgálat nagyon egyértelműen veti el a nullhipotézist, miszerint az eloszlás normális, 10^{-20} nagyságrendű p-értékekkel. Például a Frongello és Megfordított Frongello módszerek interakciójához tartozó mintán elvégzett Anderson-Darling próba statisztikája 126.9, amitől nagyságrendekkel kisebb az 1%-os kritikus érték, 1.088 is. A t-próba tehát nem használható, ezért fordulunk a sztochasztikus dominanciát vizsgáló próbákhoz, melyeknél már nincs ilyen feltétel.

Először használjuk a Wilcoxon előjeles rangpróbát. Ezt a vizsgálatot a Carino és Menehero módszerek számításigényessége miatt csak a többi öt felbontásra végeztük el. Nem baj, hogy páros minta helyett már a minták különbségével rendelkezünk, mert a próbának úgyis ez lenne az első lépése. A következő táblázatok tartalmazzák az elvégzett próbák p-értékeit. Az

alternatív hipotézisünk, hogy a sor felbontási módszerének mintája sztochasztikusan kisebb az oszlopénál¹.

| Allokáció | Geo. | Fron. | Megfordított Fron. | Módosított Fron. | Brin. |
|------------------|------|-------|--------------------|------------------|---------|
| Geo. | 1 | 0.048 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron. | 0.95 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Megf. Fron. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Mód. Fron. | 1 | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 |
| Brin. | 1 | 1 | < 0.001 | 1 | 1 |

5. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok allokációsórásainak különbségeinek mintáján

| Szelekció | Geo. | Fron. | Megfordított Fron. | Módosított Fron. | Brin. |
|------------------|------|---------|--------------------|------------------|---------|
| Geo. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Megf. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | 1 |
| Mód. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | 1 | 1 |
| Brin. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 |

6. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok szelekciósórásainak különbségeinek mintáján

| Interakció | Geo. | Fron. | Megfordított Fron. | Módosított Fron. | Brin. |
|-------------------|------|---------|--------------------|------------------|---------|
| Geo. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Megf. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | 0.9999 |
| Mód. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | 1 | 1 |
| Brin. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 |

7. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok interakciósórásainak különbségeinek mintáján

Ez a vizsgálat tehát meghatározott egy sorrendet a szórások között. Allokáció esetén

$$\Sigma(A^{\text{Geo}}) < \Sigma(A^{\text{Fron}}) < \Sigma(A^{\text{Mód.Fr.}}) < \Sigma(A^{\text{Brin}}) < \Sigma(A^{\text{Megf.Fr.}}).$$

Szelekció és interakció esetén

$$\Sigma(S^{\text{Geo}}) < \Sigma(S^{\text{Brin}}) < \Sigma(S^{\text{Megf.Fr.}}) < \Sigma(S^{\text{Mód.Fr.}}) < \Sigma(S^{\text{Fron}}).$$

Interakcióra ugyanez írható fel. A < jelölés most az eloszlások közötti sztochasztikus dominanciát jelenti. Ez összhangban van a kezdeti megfigyeléssel, miszerint a Frongello szelekció és interakció jobban, a geometriai pedig kevésbé változik az időben.

Nézzük még meg, hogy más, hasonló statisztikai vizsgálatok milyen eredményt adnak. A Kruskal-Wallis és Mann-Whitney próbák független mintákat írnak elő, így most 7000 véletlen portfóliót generálunk, és mind a 7 felbontást másik 1000 portfólión végezzük el. Így 7 db

¹95%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis állandó teljesülése esetén is elvetné a próba a nullhipotézist átlagosan 20-ból egyszer. Mi ennél több szignifikáns eredményt kaptunk.

1000 elemű mintát kapunk allokációk szórására, és ugyanennyit szelekcióra és allokációra. A Kruskal-Wallis próbát, hasonlóan, mint a Wilcoxonnal tettük, kettessel végeztük el. Gyengébb próbának bizonyul, nem veti el minden esetben, hogy a megfigyelések ugyanabból a mintából jönnének.

Az allokációkra vonatkozó minták esetén legtöbbször elfogadja a nullhipotézist 95%-os szignifikancia szinten, egyedül a Frongellonak a Megfordított Frongello, Brinson és Menchero allokációtól való egyezését veti el, de arról nem ad információt, hogy melyik dominálja sztochasztikusan a másikat. A Wilcoxon próba eredményéből kiindulva a Frongello allokáció szórása a kisebb sztochasztikusan, és ezzel összhangban van, hogy a minták mediánját megvizsgálva is Frongello esetén 0.083-at, a másik három esetén 0.087-et kapunk. Az alábbi táblázatok mutatják a kapott p-értékeket².

| ALLOKÁCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|
| Geo | 1.0 | 0.455 | 0.095 | 0.966 | 0.182 | 0.583 | 0.178 |
| Fron | 0.455 | 1.0 | 0.014 | 0.384 | 0.029 | 0.168 | 0.036 |
| FronRev | 0.095 | 0.014 | 1.0 | 0.092 | 0.684 | 0.242 | 0.739 |
| FronMod | 0.966 | 0.384 | 0.092 | 1.0 | 0.182 | 0.57 | 0.183 |
| Brin | 0.182 | 0.029 | 0.684 | 0.182 | 1.0 | 0.424 | 0.943 |
| Car | 0.583 | 0.168 | 0.242 | 0.57 | 0.424 | 1.0 | 0.407 |
| Mench | 0.178 | 0.036 | 0.739 | 0.183 | 0.943 | 0.407 | 1.0 |

10. ábra. Kruskal-Wallis p-értékek allokáció szórására

| SZELEKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 1.0 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 | 0.839 | 0.026 | 0.276 | 0.063 |
| FronRev | < 0.001 | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 | 0.258 | 0.001 | 0.014 |
| FronMod | < 0.001 | 0.839 | < 0.001 | 1.0 | 0.002 | 0.153 | 0.03 |
| Brin | < 0.001 | 0.026 | 0.258 | 0.002 | 1.0 | 0.127 | 0.549 |
| Car | < 0.001 | 0.276 | 0.001 | 0.153 | 0.127 | 1.0 | 0.441 |
| Mench | < 0.001 | 0.063 | 0.014 | 0.03 | 0.549 | 0.441 | 1.0 |

11. ábra. Kruskal-Wallis p-értékek szelekció szórására

| INTERAKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 1.0 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 | 0.861 | 0.377 | 0.674 | 0.29 |
| FronRev | < 0.001 | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 | 0.003 | 0.001 | 0.006 |
| FronMod | < 0.001 | 0.861 | < 0.001 | 1.0 | 0.229 | 0.532 | 0.213 |
| Brin | < 0.001 | 0.377 | 0.003 | 0.229 | 1.0 | 0.566 | 0.875 |
| Car | < 0.001 | 0.674 | 0.001 | 0.532 | 0.566 | 1.0 | 0.529 |
| Mench | < 0.001 | 0.29 | 0.006 | 0.213 | 0.875 | 0.529 | 1.0 |

12. ábra. Kruskal-Wallis p-értékek interakció szórására

²95%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis állandó teljesülése esetén is elvetné a próba a nullhipotézist átlagosan 20-ból egyszer. Mi ennél több szignifikáns eredményt kaptunk.

A szelekció esetén 21 vizsgálatból (ennyi felbontáspár van) 13 elveti az eloszlások egyezését, emellett interakciónál a geometriai és Megfordított Frongello-nál veti el, hogy egymással és a többivel azonos az interakció szórásának eloszlása. A minták mediánjai alább láthatók.

| | Geo. | Fron. | Megfordított Fron. | Módosított Fron. | Brin. | Car. | Mench. |
|------------|-------|-------|--------------------|------------------|-------|-------|--------|
| Szelekció | 0.028 | 0.052 | 0.043 | 0.066 | 0.045 | 0.050 | 0.047 |
| Interakció | 0.015 | 0.027 | 0.021 | 0.028 | 0.027 | 0.025 | 0.024 |

8. táblázat. A szelekció és interakció szórásából álló minta mediánja minden felbontási módszerrel

Ez alapján a Kruskal-Wallis próba által felállított sorrend az interakció szórására a következő. A $<$ újra sztochasztikus dominanciaként értelmezendő. Szelekcióra nem állítható fel egyértelmű sorrend a Kruskal-Wallis próba alapján, de egyértelműen a geometriai szórása a legkisebb.

$$\Sigma(I^{\text{Geo}}) < \Sigma(I^{\text{Megf.Fr.}}) < \Sigma(I^{\text{Car}}) \sim \Sigma(I^{\text{Mench}}) \sim \Sigma(I^{\text{Brin}}) \sim \Sigma(I^{\text{Mód.Fr.}}) \sim \Sigma(I^{\text{Fron}}). \quad (7.10)$$

Ez újfent alátámasztja a kezdeti megfigyelést, és egybehangzó a Wilcoxon-próba eredményével is, kivéve, ami a Brinson és Megfordított Frongello interakciók szórásának viszonyát illeti. Elvégzünk még egy Mann-Whitney próbát is, hasonlóan sztochasztikus dominancia vizsgálatára, mert a Kruskal-Wallis próba nem adott információt a sztochasztikus dominancia irányáról, arra csak a minták empirikus mediánjából következtettünk.

A Mann-Whitney próba szelekcióra és interakcióra ugyanazokban az esetekben fogadja, illetve utasítja el a nullhipotézist, mint a Kruskal-Wallis. Ezt a vizsgálatot már egyoldali alternatív hipotézissel végeztük, azaz kaptunk információt a sztochasztikus dominancia irányáról. Az eredmény megegyezik a korábbi következtetésekkel, amit a mediánok viszonyából vontunk le. Eszerint a (7.10) egyenlőtlenségek a Mann-Whitney próba alapján is felírhatóak. Allokációra újra sok esetben nem tesz különbséget, de 95%-os szignifikanciaszinten elutasítja a nullhipotézist amellet az alternatív hipotézis mellett, hogy a Megfordított Frongello allokációjának szórása nagyobb, mint a Frongello, Módosított Frongello és geometriai szórások, illetve, hogy a Brinsoné és Mencheroé is nagyobb a geometriaiénál. Az alábbi táblázat a p értékeket tartalmazza, amellet az alternatív hipotézis mellett, hogy az oszlophoz tartozó minta sztochasztikusan dominálja a sorhoz tartozót³.

| ALLOKÁCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Geo | 0.5 | 0.7725 | 0.0476 | 0.4831 | 0.0908 | 0.2914 | 0.0891 |
| Fron | 0.2276 | 0.5 | 0.007 | 0.1919 | 0.0143 | 0.0838 | 0.0178 |
| FronRev | 0.9524 | 0.993 | 0.5 | 0.9538 | 0.6578 | 0.8791 | 0.6304 |
| FronMod | 0.5169 | 0.8081 | 0.0462 | 0.5 | 0.0912 | 0.2851 | 0.0916 |
| Brin | 0.9092 | 0.9857 | 0.3422 | 0.9088 | 0.5 | 0.788 | 0.4714 |
| Car | 0.7087 | 0.9162 | 0.1209 | 0.715 | 0.2121 | 0.5 | 0.2037 |
| Mench | 0.911 | 0.9822 | 0.3696 | 0.9084 | 0.5286 | 0.7963 | 0.5 |

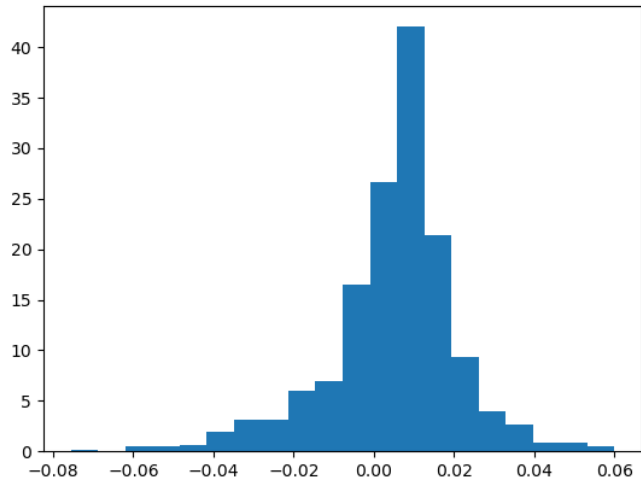
13. ábra. Mann-Whitney p-értékek allokáció szórására

³95%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis állandó teljesülése esetén is elvetné a próba a nullhipotézist átlagosan 20-ból egyszer. Mi ennél több szignifikáns eredményt kaptunk.

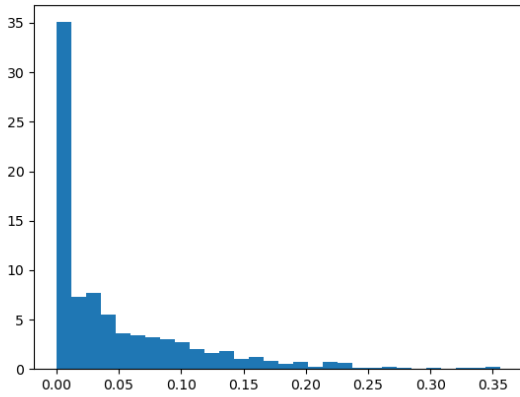
| SZELEKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 0.5 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | 1.0 | 0.5 | 1.0 | 0.4194 | 0.9869 | 0.8622 | 0.9686 |
| FronRev | 1.0 | < 0.001 | 0.5 | < 0.001 | 0.1292 | < 0.001 | 0.007 |
| FronMod | 1.0 | 0.5806 | 1.0 | 0.5 | 0.9991 | 0.9234 | 0.9849 |
| Brin | 1.0 | 0.0131 | 0.8708 | < 0.001 | 0.5 | 0.0635 | 0.2745 |
| Car | 1.0 | 0.1378 | 0.9997 | 0.0766 | 0.9365 | 0.5 | 0.7796 |
| Mench | 1.0 | 0.0314 | 0.993 | 0.0151 | 0.7255 | 0.2204 | 0.5 |

14. ábra. Mann-Whitney p-értékek szelekció szórására

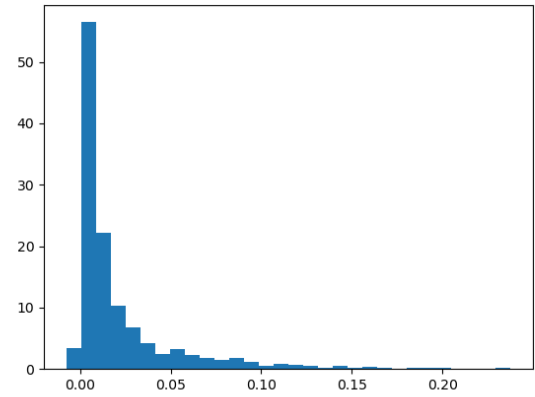
Ez az eredmény ismét alátámasztja a Kruskal-Wallis próbából származó következtetésünket, és a Wilcoxon próbának sem mond ellent, pedig másik mintát használtunk. Észrevehetjük, hogy mindegyik statisztikai vizsgálat szerint a geometriai felbontás értékei ingadoznak a legkevésbé. Allokációnál kevésbé találtunk jelentős eltérést a másik két hatáshoz képest. Az összes próba szerint a Frongello szelekció és interakció a legnagyobb szórásúak közé tartozik, a kezdeti teóriát tehát igazoltnak tekinthetjük. Az eredményeket azonban nem úgy kell értelmezni, hogy egyes felbontásoknál a szórás szinte mindig nagyobb, mint valamely másiknál. Tekintsük azt a mintát, amin a Wilcoxon próbát hajtottuk végre, és nézzük minden portfólióra a szórások különbségét minden felbontáspárra. A statisztikai próbák szerint allokációban a geometriai és Megfordított Frongello, interakcióban és szelekcióban pedig a geometriai és Frongello szórásai között van a legszignifikánsabb különbség. Ezért ezen szórások különbségeit vizsgáljuk meg hisztogramon!



15. ábra. Megfordított Frongello és geometriai allokációk szórásának különbsége



16. ábra. Frongello és geometriai szelekciók szórási különbsége



17. ábra. Frongello és geometriai interakciók szórási különbsége

Ezek alapján szelekció és interakció esetén néhány esetet leszámítva a szórási viszony a fentebb meghatározott irányú. Az allokációnál kevésbé egyértelmű az eltérés.

7.2. Adott időpontbeli felbontások viszonyának vizsgálata

Vegyünk 10000 véletlen portfóliót, amelyekben az egyszerűség kedvéért a részvények százalékos súlyai 10 többszöröse. Vizsgáljuk a portfóliók utolsó egy évi hozamának felbontását. Most 21 ($7 * 3$) db 10000 elemű mintával rendelkezünk, melyek párosítottak, mert ugyanarra a 10000 portfólióra vonatkoznak. A mintaelemek azt mutatják hogy az adott módszer az adott felbontási taghoz az adott portfóliónak mekkora többlethozamát tulajdonítja. Legegyszerűbben akkor tudjuk összehasonlítani a mintákat, ha teljesülnek a t-próba feltételei, ezért vizsgáljuk először a normalitást Shapiro-Wilk és Anderson-Darling próbával.

A vizsgálatokat a minták különbségeire végezzük el minden lehetséges felbontási módszer kombinációra. Szinte mindenhol el kell vetnünk a normalitást, az egyedüli kivétel a geometriai és Brinson allokációk különbsége mindkét vizsgálat alapján. Itt a Shapiro próba statisztikája 0.999, p értéke 0.559, az Anderson próba statisztikája 0.178, ami kisebb a 15%-os kritikus értéktől, 0.576-tól is, ezért el lehet fogadni a nullhipotézist. Nézzünk egy t-próbát, hogy a különbségek várható értéke lehet-e nulla! A vizsgálat egyértelműen, 10^{-148} nagyságrendű p értékkel elveti a nullhipotézist azzal az alternatív hipotézissel, hogy a geometriai allokáció és Brinson allokáció különbségének várható értéke negatív, vagyis várható értékben a Brinson allokáció magasabb. A próbastatisztika -26.31 volt.

Ez eddig egyezik a kezdeti megfigyeléssel, miszerint viszonylag alacsony a geometriai allokáció. Vizsgáljuk a többi algoritmust a Wilcoxon előjeles rangpróbával. A nullhipotézis az eloszlások egyezése. Azzal az alternatív hipotézissel, hogy az oszlop felbontása sztochasztikusan dominálja a sorét, a következő p-értékeket kapjuk⁴ :

⁴95%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis állandó teljesülése esetén is elvetné a próba a nullhipotézist átlagosan 20-ból egyszer. Mi ennél több szignifikáns eredményt kaptunk.

| Allokáció | Geo. | Fron. | Megf. Fron. | Mód. Fron. | Brin. | Car. | Mench. |
|------------------|------|---------|-------------|------------|---------|---------|---------|
| Geo. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Megf. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 |
| Mód. Fron. | 1 | < 0.001 | 1 | 1 | < 0.001 | 1 | 1 |
| Brin. | 1 | < 0.001 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Car. | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | 1 | 1 |
| Mench. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 |

9. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok allokáció-különbségein

Ez alapján az allokációk eloszlása a következő sorrendben dominálja egymást sztochasztikusan:

$$A^{\text{Geo.}} < A^{\text{Mench.}} < A^{\text{Megf.Fron.}} < A^{\text{Car.}} < A^{\text{Mód.Fron.}} < A^{\text{Brin.}} < A^{\text{Fron.}}$$

| Szelekció | Geo. | Fron. | Megf. Fron. | Mód. Fron. | Brin. | Car. | Mench. |
|------------------|------|---------|-------------|------------|---------|---------|---------|
| Geo. | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron. | 1 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | 0.611 | < 0.001 | < 0.001 |
| Megf. Fron. | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.268 | 1 | < 0.001 |
| Mód. Fron. | 1 | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Brin. | 1 | 0.389 | 0.732 | 1 | 1 | 1 | < 0.001 |
| Car. | 1 | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | 1 | < 0.001 |
| Mench. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

10. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok szelekció-különbségein

A szelekciók eloszlására az alábbi relációk érvényesek:

$$S^{\text{Geo.}} < S^{\text{Fron.}} < S^{\text{Mód.Fron.}} < S^{\text{Car.}} < S^{\text{Megf.Fron.}} \sim S^{\text{Brin.}} < S^{\text{Mench.}},$$

kivéve a Frongello és Brinson közötti összefüggést, mert arról a próba nem mond semmit. Ez viszonylag meglepő, mert a Módosított Frongello és Carino szelekció viszont sztochasztikusan nagyobb a Frongellonál és kisebb a Brinsonnál a Wilcoxon próba szerint. A legkisebb p értékeket, vagyis az nullhipotézis legegységelműbb elvetését a geometriai és Menchero szelekciókra kapjuk, melyek a legkisebb és legnagyobb szelekciót adják.

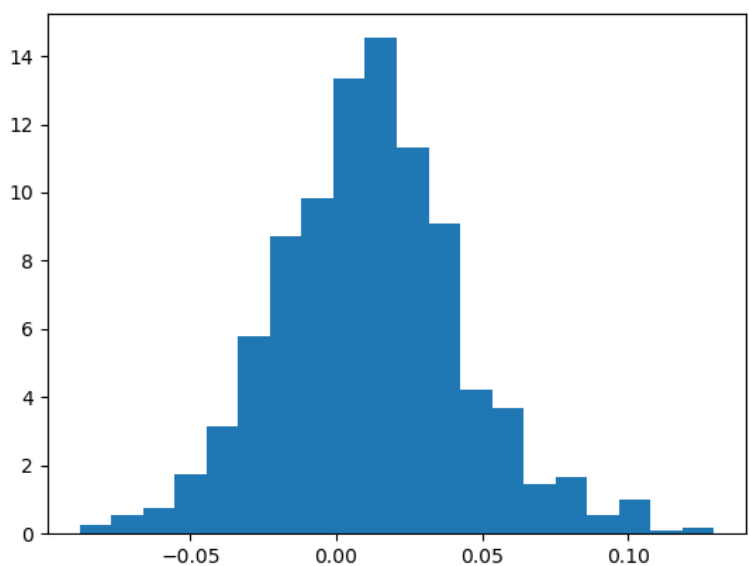
| Interakció | Geo. | Fron. | Megf. Fron. | Mód. Fron. | Brin. | Car. | Mench. |
|-------------------|---------|---------|-------------|------------|-------|---------|---------|
| Geo. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Fron. | < 0.001 | 1 | 0.863 | 0.923 | 1 | 0.707 | < 0.001 |
| Megf. Fron. | < 0.001 | 0.136 | 1 | 0.22 | 1 | 0.053 | < 0.001 |
| Mód. Fron. | < 0.001 | 0.077 | 0.78 | 1 | 1 | < 0.001 | < 0.001 |
| Brin. | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | < 0.001 |
| Car. | < 0.001 | 0.292 | 0.947 | 1 | 1 | 1 | < 0.001 |
| Mench. | < 0.001 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

11. táblázat. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok interakció-különbségein

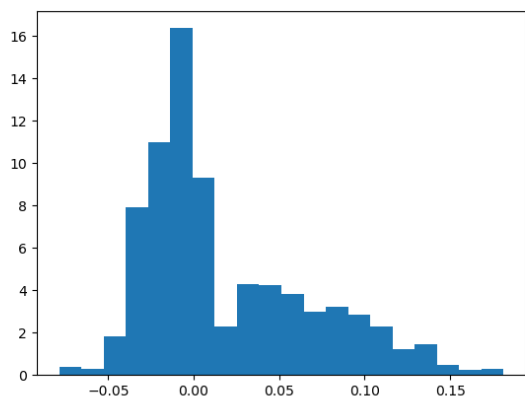
Az interakcióra sem ad teljesen egyértelmű sorrendet. Amellett, hogy a

$$I^{\text{Brin.}} < I^{\text{Fron.}} \sim I^{\text{Megf.Fron.}} \sim I^{\text{Car.}} \sim I^{\text{Mód.Fron.}} < I^{\text{Mench.}} < I^{\text{Geo.}}$$

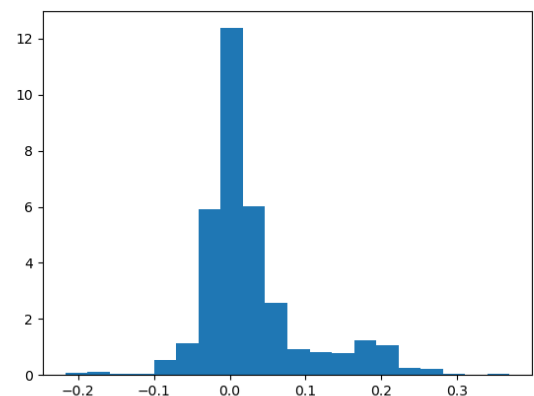
sztochasztikus egyenlőtlenségek teljesülnek, még $I^{\text{Megf.Fron.}} < I^{\text{Car.}}$ és $I^{\text{Mód.Fron.}} < I^{\text{Car.}}$. A kezdeti sejtéseknek megfelelő eredményeket kaptunk, a Brinson interakció sztochasztikusan kisebb, a geometriai interakció sztochasztikusan nagyobb a többinél. Érdekes megfigyelni, hogy a Menchero felbontás minden tagra szélsőséges megoldást ad, a geometriai felbontást nem számítva a Menchero felbontásnak legkisebb az allokációja, és legnagyobb a szelekciója és interakciója is. Ez összecseng azzal az eredménnyel, amit Yindeng Jiang és Joseph Saenz figyelt meg [20], miszerint a Menchero felbontás kilóg a többi aritmetikai módszer közül. Újra fontos kiemelni, hogy az eredmények nem jelentik, hogy a portfóliók nagy többségére teljesülnek ezek a relációk. Nézzük meg allokációra, szelekcióra és interakcióra is a Wilcoxon próba alapján legnagyobbak és legkisebbnek mondott értékek különbségének hisztogrammját!



18. ábra. Frongello és geometriai típusú allokációk különbsége



19. ábra. Menchero és geometriai típusú szelekciók különbsége

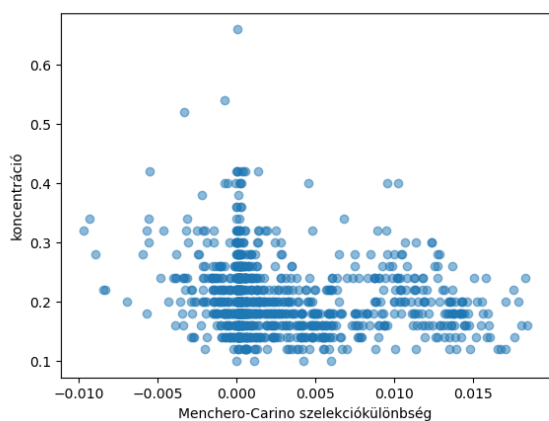


20. ábra. Geometriai és Brinson típusú interakciók különbsége

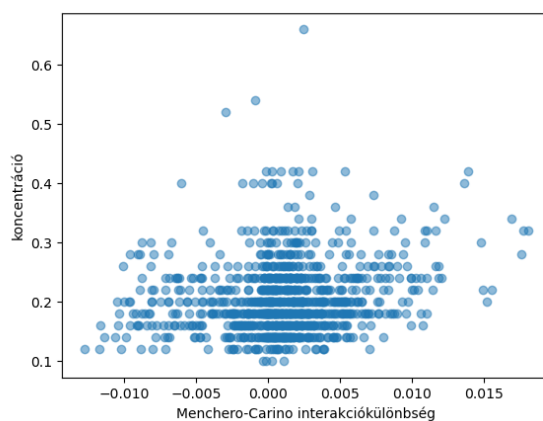
A hisztogramokat 1000es mintára néztük. Azt látjuk, hogy egyáltalán nem csoportosulnak a mintaelemek a pozitív félegyenesre, de az átlagostól jobban eltérő értékek elsősorban pozitívak, az eloszlások jobb oldali vége vastagabb, mint a bal és a legmagasabb értékek magasabb abszolútértékűek, mint a legalacsonyabb értékek. Vezessünk be egy koncentrációs mérőszámot a piaci koncentrációt mérő HHI index alapján, a következőképp:

$$k(P) = \sum w_i^2$$

A szummázás az értékpapírokra történik, a w -k az értékpapírokba fektetett súlyok, k -val jelöljük a koncentrációt, és P -vel a portfóliót. Vajon a koncentráció mennyisége befolyásolja-e hogy melyik módszer tulajdonít magasabb hozamot például az interakciónak? Úgy tűnik, hogy a nagyobb koncentráció növelheti a Menchero interakciót a Carino, Megfordított és Módosított Frongellókhöz képest, ugyanis ezen interakciókülönbségek és a koncentráció között 15-20%-os korreláció van. Ezzel szemben a Menchero szelekcióját csökkenti a magas koncentráció a Carino és Módosított Frongellohoz képest. Allokáció esetén nem találtunk ekkora korrelációt.

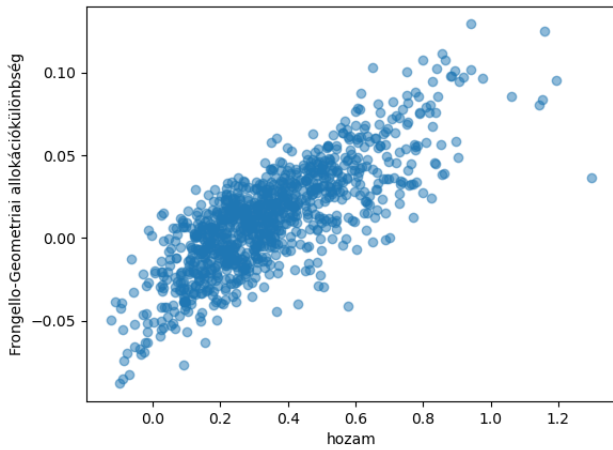


21. ábra. A Menchero-Carino szelekciókülönbség összefüggése a koncentrációval

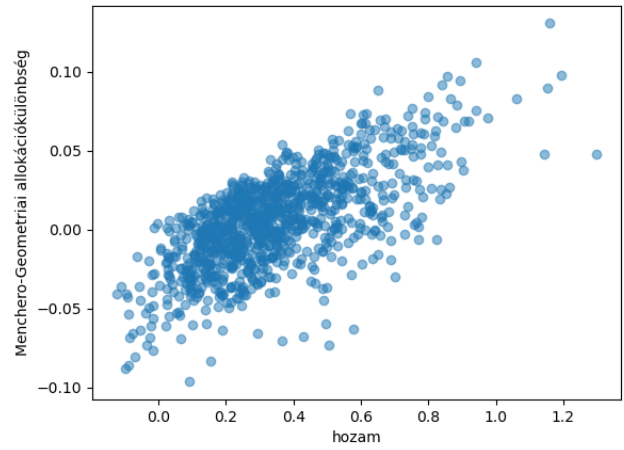


22. ábra. A Menchero-Carino interakciókülönbség összefüggése a koncentrációval

Nézzük, lehet-e összefüggés a portfólió egy év alatt elért hozama, és a módszerek egymáshoz való viszonya között! A mintát újra két dimenziós ábrán ábrázolva egyes esetekben erős lineáris, illetve másodfokú összefüggést vehetünk észre. Leginkább az allokációra van hatással. Ha a két felbontás közül az egyik a geometriai, akkor 60 – 80%-os korreláció van a hozam és az allokációkülönbség között. Minél magasabb hozamot ér el a portfólió, annál alacsonyabb a geometriai allokáció a többi allokációhoz képest.



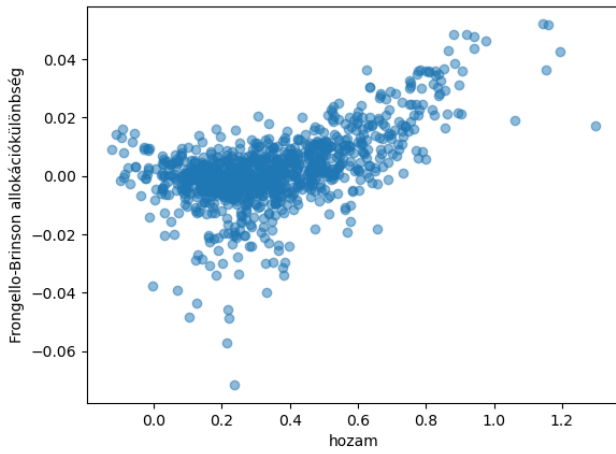
23. ábra. A Frongello-geometriai allokációkülönbség összefüggése a hozammal



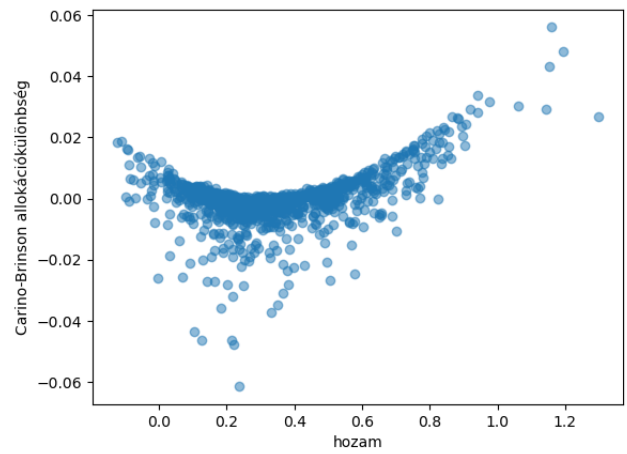
24. ábra. A Menchero-geometriai allokációkülönbség összefüggése a hozammal

A fent ábrázolt allokációkülönbségek és hozam közötti korreláció 79.1% és 68.3%. Ha a differenciákat lineáris regresszióval, a hozam segítségével magyarázzuk, akkor 0.626 és 0.466 nagyságú R négyzetet kapunk. A Frongello és Menchero allokációt másokra cserélve hasonló számokat kapunk, de ha a geometriai helyett is másikat vizsgálunk, akkor csökken ez az összefüggés.

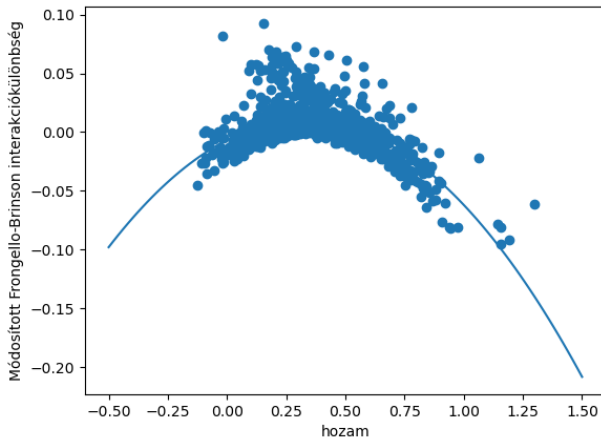
Ha a Brinson allokációt hasonlítjuk össze a többi allokációval, akkor a hozamtól való másodfokú függést tapasztalunk. A nagyon alacsony vagy magas hozamú portfóliók Brinson allokációja kisebb a többinél, és közepes hozam esetén fordul elő leginkább, hogy a Brinson allokáció jelentősen meghaladja a többit. Kvadratikus regressziót felírva a paraméterek szignifikánsak, 0.3-0.4 körüli R négyzetet kapunk. A lent ábrázolt két esetben, amikor a Brinson allokációt a Frongellohoz és a Carinohoz hasonlítjuk a hozam függvényében, a regressziós modellek R négyzetei 0.413 és 0.436. Ezt a másodfokú függést nem csak allokáció, de szelekció, és főleg interakció esetén is megfigyelhetjük. Az interakciókülönbséget kvadratikus regresszió segítségével a hozammal magyarázva alacsony, 2-4%-os R négyzetet, és gyakran nem szignifikáns négyzetes együtthatót kapunk, kivéve, ha az egyik felbontás a Brinson. Ekkor az R négyzet 0.1 és 0.5 közötti, és minden együttható szignifikáns. Az allokációval ellentétben, itt szélsőségesebb hozamok esetén nagyobb a Brinson interakció a többi felbontáshoz képest, és közepes hozam esetén kisebb. A 27-es és 28-as ábrán a Módosított Frongello, illetve a Menchero interakció Brinson interakcióval való különbségét ábrázoltuk a hozam függvényében. A megfelelő kvadratikus regressziók R négyzete 0.397 és 0.394. A felbontások eltérését tehát több esetben erősen magyarázza a portfólió hozama.



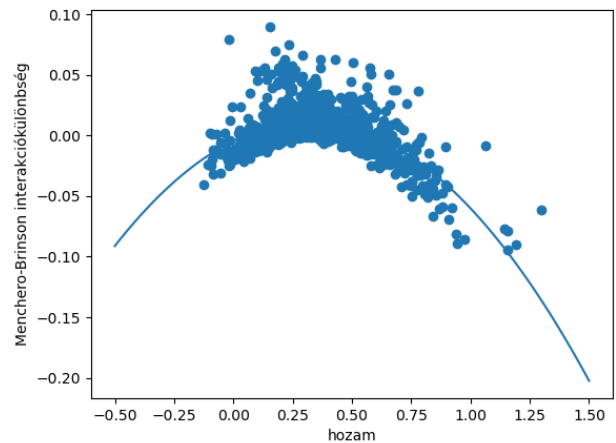
25. ábra. A Frongello-Brinson allokációkülönbség összefüggése a hozammal



26. ábra. A Carino-Brinson allokációkülönbség összefüggése a hozammal



27. ábra. A Módosított Frongello-Brinson interakciókülönbség összefüggése a hozammal



28. ábra. A Menchero-Brinson interakciókülönbség összefüggése a hozammal

Bár a Wilcoxon próba igazolta a kezdeti feltételezéseket, és a geometriai interakció sztochasztikusan dominálja a Brinsonot, a Frongello allokáció pedig a geometriait, de a hisztogramok nem meggyőzőek, nagyon gyakori az ellentétes irányú kapcsolat is. Vizsgáljuk meg a kapcsolatot más szempontból! A portfóliók, amik alapján a hipotéziseket felállítottuk, pozitív allokációval és negatív interakcióval rendelkeztek. Előfordulhat tehát, hogy a valódi összefüggés az értékek abszolútértékére vonatkozik.

7.3. Adott időpontbeli felbontások abszolút értékének viszonya

Számoljuk ki 1000 portfólióra a felbontás komponensekhez tartozó hozamok abszolútértékét, és vegyük ezek különbségét bármely két felbontási módszere. Ez $63 \binom{7}{2} \cdot 3$ db 1000 elemű minta. Minden mintára nézzük meg, hogy melyik előjel fordul elő ritkábban, és számoljuk meg, hogy az 1000 megfigyelésből hány ilyen előjelű van, ez a szám maximum 500. Az alábbi táblázatok

ezeket az értékeket tartalmazzák. A minta mindig úgy jön létre, hogy a sor felbontásából vonjuk ki az oszlopét. Akkor adunk negatív előjelet a számhoz, amikor a mintában a negatív különbségek vannak többségben.

| ALLOKÁCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-----|------|---------|---------|------|------|-------|
| Geo | 0 | -54 | -55 | -12 | 0 | -10 | -50 |
| Fron | 54 | 0 | -492 | -499 | -475 | 497 | 421 |
| FronRev | 55 | 492 | 0 | 487 | -440 | 487 | 429 |
| FronMod | 12 | 499 | -487 | 0 | -480 | 304 | 407 |
| Brin | 0 | 475 | 440 | 480 | 0 | 476 | 422 |
| Car | 10 | -496 | -487 | -304 | -476 | 0 | 408 |
| Mench | 50 | -421 | -429 | -407 | -422 | -408 | 0 |

29. ábra. Az abszolútértékes allokációk különbségének mintáján a ritkább előjel előfordulásának száma

| SZELEKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-----|------|---------|---------|------|------|-------|
| Geo | 0 | -30 | -6 | -7 | 0 | -7 | -3 |
| Fron | 30 | 0 | -130 | -130 | -262 | -134 | -132 |
| FronRev | 6 | 130 | 0 | 131 | 269 | 129 | 181 |
| FronMod | 7 | 130 | -131 | 0 | -462 | 184 | -415 |
| Brin | 2 | 262 | -269 | 462 | 0 | 452 | -500 |
| Car | 7 | 134 | -129 | -184 | -452 | 0 | -403 |
| Mench | 3 | 132 | -181 | 415 | -500 | 403 | 0 |

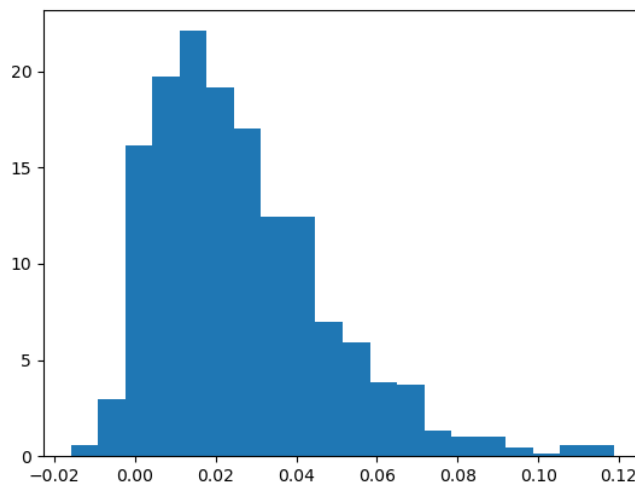
30. ábra. Az abszolútértékes szelekciók különbségének mintáján a ritkább előjel előfordulásának száma

| INTERAKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|------------|-----|------|---------|---------|------|------|-------|
| Geo | 0 | -105 | -40 | -42 | -74 | -43 | -45 |
| Fron | 105 | 0 | -305 | -300 | -317 | -313 | -309 |
| FronRev | 40 | 305 | 0 | 312 | 489 | 300 | 359 |
| FronMod | 42 | 300 | -312 | 0 | -420 | 159 | -365 |
| Brin | 76 | 317 | -489 | 420 | 0 | 414 | 449 |
| Car | 43 | 313 | -300 | -159 | -414 | 0 | -351 |
| Mench | 45 | 309 | -359 | 365 | -449 | 351 | 0 |

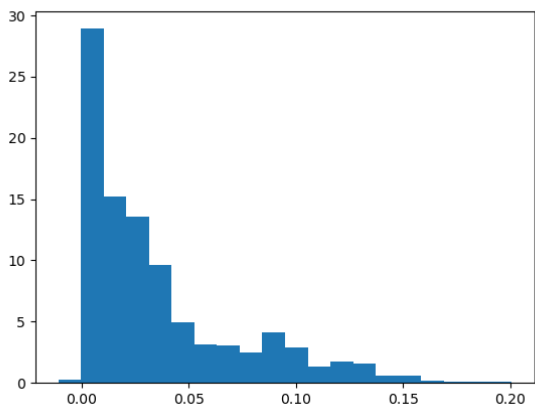
31. ábra. Az abszolútértékes interakciók különbségének mintáján a ritkább előjel előfordulásának száma

A táblázatokból láthatjuk, hogy ha az egyik felbontás a geometriai, akkor az esetek több,

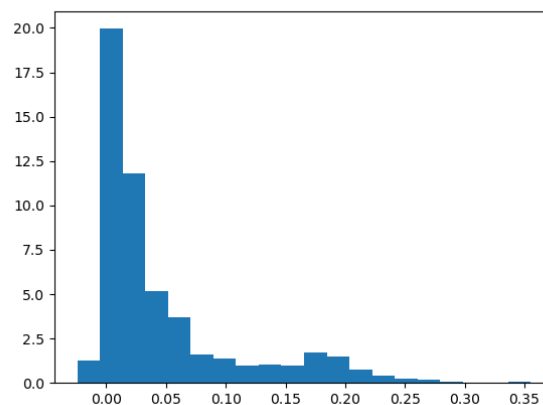
mint 90%-ában a másik módszer allokációja/szelekciója/interakciója nagyobb abszolútértékű a geometriainál. Ez sokkal jelentősebb összefüggés, mint amit az előző pontban kaptunk. Ez jól látszik, ha az alábbi hisztogramokat összevetjük a 18., 19., 20. ábrák hisztogramjával.



32. ábra. Frongello és geometriai abszolútértékes allokációk különbsége



33. ábra. Menchero és geometriai abszolútértékes szelekciók különbsége



34. ábra. Brinson és geometriai abszolútértékes interakciók különbsége

A 29-31 .táblázatok alapján még megfigyelhetjük, hogy a Frongello szelekció az esetek 85%-ában abszolút értékben kisebb más típusú szelekcióknál, kivéve a geometriait, aminél tudjuk, hogy nagyobb, és a Brinsont. A Frongello szelekció a 7.2 fejezet Wilcoxon próbája szerint is sztochasztikusan kisebb a többinél a geometriait leszámítva. A megfordított Frongello szelekció ellenkezőleg, a 30. táblázat szerint 80% -ban abszolút értékben nagyobb a többinél a Brinsonon kívül.

Újra a Wilcoxon próbát alkalmazva a következő 3 táblázatban láthatjuk a p-értékeket allokációra, szelekcióra és interakcióra, amellet az alternatív hipotézis mellett, hogy az oszlop

felbontási algoritmusának allokációja / szelekciója / interakciója sztochasztikusan dominálja a sorét⁵.

| ALLOKÁCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | 1.0 | 1 | 0.67 | 0.84 | 0.183 | 0.927 | 1.0 |
| FronRev | 1.0 | 0.33 | 1 | 0.501 | 0.001 | 0.669 | 1.0 |
| FronMod | 1.0 | 0.16 | 0.499 | 1 | 0.181 | 1.0 | 1.0 |
| Brin | 1.0 | 0.817 | 0.999 | 0.819 | 1 | 0.893 | 1.0 |
| Car | 1.0 | 0.073 | 0.331 | < 0.001 | 0.107 | 1 | 1.0 |
| Mench | 1.0 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 |

35. ábra. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok allokáció-különbségein

| SZELEKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|-----------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | 1.0 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| FronRev | 1.0 | 1.0 | 1 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| FronMod | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 |
| Brin | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | 1.0 | 1 | 1.0 | 0.353 |
| Car | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 | < 0.001 |
| Mench | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | 1.0 | 0.647 | 1.0 | 1 |

36. ábra. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok szelekció-különbségein

| INTERAKCIÓ | Geo | Fron | FronRev | FronMod | Brin | Car | Mench |
|------------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Geo | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| Fron | 1.0 | 1 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 |
| FronRev | 1.0 | 1.0 | 1 | 1.0 | 0.031 | 1.0 | 1.0 |
| FronMod | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | 1 | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 |
| Brin | 1.0 | 1.0 | 0.969 | 1.0 | 1 | 1.0 | 1.0 |
| Car | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | < 0.001 | < 0.001 | 1 | < 0.001 |
| Mench | 1.0 | 1.0 | < 0.001 | 1.0 | < 0.001 | 1.0 | 1 |

37. ábra. Wilcoxon előjeles rangpróba p-értékei a módszerpárok interakció-különbségein

Ez a következő sorrendet állította fel a módszerek között. A < jel sztochasztikus dominanciaként értendő.

$$|A^{Geo.}| < |A^{Mench.}| < |A^{Megf.Fron.}| \sim |A^{Car.}| \sim |A^{Mód.Fron.}| \sim |A^{Brin.}| \sim |A^{Fron}|$$

⁵95%-os szignifikancia szinten a nullhipotézis állandó teljesülése esetén is elvetné a próba a nullhipotézist átlagosan 20-ból egyszer. Mi ennél több szignifikáns eredményt kaptunk.

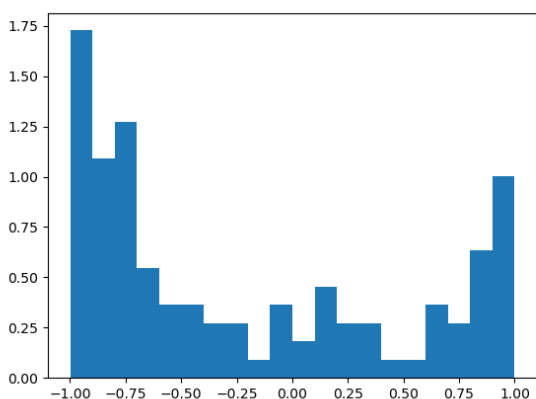
$$|S^{\text{Geo.}}| < |S^{\text{Fron}}| < |S^{\text{Car.}}| < |S^{\text{Mód.Fron}}| < |S^{\text{Mench}}| \sim |S^{\text{Brin.}}| < |S^{\text{Megf.Fron}}|$$

$$|I^{\text{Geo.}}| < |I^{\text{Fron}}| < |I^{\text{Car.}}| < |I^{\text{Mód.Fron}}| < |I^{\text{Mench}}| < |I^{\text{Megf.Fron}}| < |I^{\text{Brin.}}|$$

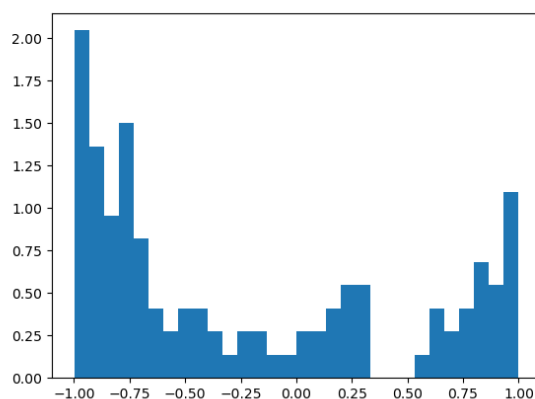
Észrevehetjük, hogy a szelekcióra és interakcióra vonatkozó sorrend majdnem ugyanaz. A Brinson, a Menchero és a Megfordított Frongello szelekciója és interakciója a legnagyobb abszolútértékű, a geometriai és Frongello a legkisebb. Allokációban is a geometriai a legkisebb, de ott a Frongello sztochasztikusan a legnagyobb, a Menchero és Megfordított Frongello pedig a kisebbek közé tartozik. A Brinson felbontás mindhárom tényező esetén a nagyobb abszolútértékűek közé tartozik. Összehasonlítva az előző fejezet eredményével, amikor abszolút érték nélkül rendeztük sorba a felbontásokat, azt látjuk, hogy az allokációra és szelekcióra felállított sorrend hasonló a két esetben, az interakcióé viszont nem. Korábban a Brinson interakció bizonyult sztochasztikusan a legkisebbnek és a geometriai a legnagyobbnak, az abszolútértékükre az ellenkező igaz, mert az interakció gyakran negatív.

7.4. A szelekció és interakció korrelációja

Az összes portfólió, amit vizsgálunk, állandó súlyokkal rendelkezik. Ennek eredményeképpen az egy periódus, vagyis egy kereskedési nap szektoronkénti aritmetikai szelekciója és interakciója $S_i = W_i \times (r_i - b_i)$ és $I_i = (w_i - W_i) \times (r_i - b_i)$ egymásnak számszorosai, pontosabban $\frac{W_i}{w_i - W_i}$ -szeresei, és ez a szám az összes periódusra megegyezik, következésképpen az ezekből alkotott adathalmazok korrelációja 1 vagy -1 bármely szektor esetén. A teljes portfólióra a periódusonkénti szelekciót és interakciót ezek összegeként kapjuk, ekkor már bármilyen korrelációt kaphatunk. A megfigyelések alapján mégis ez a szám, pozitív vagy negatív irányba, de általában messze van 0-tól. Ez akkor sem változik meg, amikor a többperiódusú szelekciós és interakciós idősorokat hasonlítjuk össze, amit úgy kapunk, hogy a periódusonkénti értékeket összegezzük az időben.



38. ábra. Megfordított Frongello módszer szelekciójának és interakciójának korrelációja 1000 portfólión



39. ábra. Carino módszer szelekciójának és interakciójának korrelációja 1000 portfólión

Számoljuk ki 1000 portfólióra a korrelációt az összes felbontási módszerrel, és nézzük meg a hisztogramok alakját. Valóban azt kapjuk, hogy a nagyon alacsony (-0.75 alatti) és nagyon magas korreláció a leggyakoribb. Az összes felbontási módszer hasonló eredményt ad. A negatív értékek a gyakoribbak, 0 környékén pedig kicsi a gyakoriság.

8. Konklúzió

A szakdolgozat első két fejezetében áttekintettük a hozamfelbontás korai releváns irodalmát és felhasználásait, és bemutattuk a Brinson modellt, mely a leggyakrabban használt egyperiódusú hozamfelbontási modell. Ezután részvényportfóliók hozamprémiumának felbontására felhasználható többperiódusú módszereket: a Carino-, Menchero-, Frongello-, Megfordított Frongello-, Módosított Frongello-, többperiódusú Brinson algoritmusokat, és a geometriai felbontást mutattuk be és kíséreltük meg összehasonlítani. Az egyik érdekes szempont, amiben különböznek, az a periódusok sorrendjétől való függőség. A Frongello algoritmusokban a felbontás függött a sorrendtől, és Andrew Frongello [17] ezt a jó hozamfelbontási módszer egyik fontos ismeretójének tartotta. A Carino, Menchero- és Brinson módszerek nem függenek a sorrendtől, amire ellenben a többperiódusú Brinson módszert létrehozó Damien Laker tekintett pozitív jellemzőként [23].

A szemléletes jelentés értelmezhetőségének mértéke is különbözik, mivel a geometriai, Brinson és mindhárom Frongello módszerek könnyebben, a Carino és Menchero nehezebben értelmezhető. Ez utóbbi kettő tartalmaz reziduális tagokat, melyeket próbál minél egyenletesebben szétosztani a hatások között, de ezt nem az alapján teszi, hogy az adott hozamrész miből származik. Érdekes még azt is megjegyezni, hogy a Brinson felbontás nem különbözteti meg az egyes szektorokhoz tartozó hatásokat.

A 7. fejezetben olyan portfóliók felbontását vizsgáltuk, melyek a BUX index részvényeit tartalmazták valamilyen súlyokkal, és benchmarknak a BUX-ot választottuk. Először azt vizsgáltuk, hogy az allokáció, szelekció és interakció időbeli alakulásának szórásáról elmondható-e, hogy valamely felbontások esetén nagyobb, mint a többinél. 1000 véletlen portfólióra kiszámolva a megfelelő szórásokat sztochasztikus dominancia felismerésére alkalmas vizsgálatokat használtunk. A Wilcoxon próba szerint a Frongello allokáció szórása sztochasztikusan a legkisebb. Interakcióra és szelekcióra mindhárom módszer szerint a geometriai szórást sztochasztikusan dominálja a többi, a Frongello pedig a Wilcoxon próba alapján dominálja az összes többit. A legegységesebb eredményt szelekcióra és interakcióra, azon belül a geometriainak a többi felbontással való viszonyára kaptuk, majdnem minden megfigyelés esetén a geometriai szórás a kisebb.

A következő részben az allokáció, szelekció és interakció nagyságának viszonyát vizsgáltuk a különböző eljárások között. Azt az eredményt kaptuk, hogy allokációra a Frongello sztochasztikusan a legnagyobb, a geometriai a legkisebb. A nagyobbak közé tartozott még a Brinson, és a kisebbek közé a Menchero. Szelekcióban a Menchero dominálta sztochasztikusan a többit, és a geometriai és Frongello volt a legalacsonyabb. Interakcióból a geometriai a legnagyobb és a Brinson a legkisebb a Wilcoxon próba eredménye alapján. Vizsgáltuk, hogy milyen portfóliók esetén legjelentősebb a különbség, és azt vettük észre, hogy magas korreláció van a portfólió hozama, és az allokációk különbsége között. Minél nagyobb a portfólió hozama, annál jobban alulmarad a geometriai allokáció a többi allokációhoz képest. Emellett másodfokú függés van a Brinson allokáció és más felbontás allokációjának különbsége és a portfólió hozama között, és ugyanez mondható el interakcióra is. Kifejezetten magas vagy alacsony hozam mellett a Brinson allokáció inkább kisebb a többinél, a Brinson interakció pedig nagyobb a többi felbontásénál, közepes hozam esetén pedig az ellenkező igaz.

Vizsgáltuk még a felbontási tagok abszolútértékes nagyságának viszonyát. Az 1000 portfólióból álló mintánkban bármelyik nem geometriai felbontási módszert kiválasztva az esetek

több mint 90%-ában a geometriai allokáció/szelekció/interakció abszolútértéke kisebb, mint a másik felbontási módszeré. Most is alkalmaztuk a Wilcoxon előjeles rangpróbát, amely alapján szelekcióban a Megfordított Frongello abszolútértéke a legnagyobb, interakcióban pedig a Brinson. Mindhárom tagban a geometriai a legkisebb.

Végül megfigyeltük, hogy a szelekció és interakció időbeli alakulásának korrelációja leggyakrabban nagy abszolútértékű negatív, viszonylag gyakran nagy abszolútértékű pozitív, és csak ritkán van a 0 közelében.

Összességében elmondható, hogy nincs egyértelmű jó választás a módszerek közül, a legtöbb esetben a különböző típusú felbontások eredménye nagyon közel van egymáshoz, és a választás függ a felhasználó preferenciáitól, például, hogy fontos-e neki a különböző szektorok hatásának szétválasztása, a könnyen érthetőség, illetve mi az álláspontja a sorrendtől való függés tekintetében.

A. Fontosabb Python kódok

A BUX.xlsx excel fájlban találhatóak a BUX indexnek és a benne lévő értékpapíroknak a napi hozamai 2020.12.05 és 2023.12.05 között, a BUX as of Dec 04 20231.xlsx fájl pedig az általunk benchmarkként használt súlyokat tartalmazza. A kód a 7.1 és 7.2 fejezetben leírt vizsgálatokhoz tartozik.

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import os
4 from math import prod
5 import random
6 from random import sample
7 os.getcwd()
8 BUX=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='BUX', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
9     nrows=253)
10 OTP=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='OTP', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
11     nrows=253)
12 MOL=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='MOL', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
13     nrows=253)
14 RICT=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='RICT', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
15     nrows=253)
16 MTEL=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='MTELEKOM', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
17     nrows=253)
18 OPUS=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='OPUS', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
19     nrows=253)
20 iG=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='4iG', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
21     nrows=253)
22 ANY=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='ANY', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
23     nrows=253)
24 MPL=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='MASTERPL', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
25     nrows=253)
26 GSP=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='GSPARK', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
27     nrows=253)
28 AUT=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='AUTOWALL', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
29     nrows=253)
30 ALT=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='ALTEO', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
31     nrows=253)
32 BIF=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='BIF', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
33     nrows=253)
34 PANN=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='PANNONIA', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
35     nrows=253)
36 WAB=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='WABERERS', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
37     nrows=253)
38 PERG=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='PANNERGY', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
39     nrows=253)
40 DEL=pd.read_excel('BUX.xlsx', sheet_name='DELTA', usecols=[1,5], skiprows=[0,1],
41     nrows=253)
42
43 wbox=pd.read_excel('BUX_as_of_Dec_04_20231.xlsx', usecols=[0,2], nrows=16)
44
45 EQ=[OTP.iloc[:,1].values.tolist(), MOL.iloc[:,1].values.tolist(), RICT.iloc[:,
```

```

1] .values.tolist(), MTEL.iloc[:,1].values.tolist(), OPUS.iloc[:,1].values.tolist(),
iG.iloc[:,1].values.tolist(), ANY.iloc[:,1].values.tolist(), MPL.iloc[:,
1].values.tolist(), GSP.iloc[:,1].values.tolist(), AUT.iloc[:,1].values.tolist(),
ALT.iloc[:,1].values.tolist(), BIF.iloc[:,1].values.tolist(), PANN.iloc[:,
1].values.tolist(), WAB.iloc[:,1].values.tolist(), PERG.iloc[:,1].values.tolist(),
DEL.iloc[:,1].values.tolist())
29 EQR=[list(reversed(EQ[i])) for i in range(0, len(EQ))]
30 B=list(reversed(BUX.iloc[:,1].values.tolist()))
31 wb=[i/100 for i in wbux.iloc[:,1].values.tolist()]
32 szektor=["FI", "EN", "HC", "CO", "FI", "TE", "IN", "MA", "RE", "CD", "UT", "RE",
"FI", "IN", "UT", "CO"]
33
34 combinations = [[a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, o, p, q, r, 10-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m-
n-o-p-q-r]
35     for a in range(0, 11)
36     for b in range(0, 11-a)
37     for c in range(0, 11-a-b)
38     for d in range(0, 11-a-b-c)
39     for e in range(0, 11-a-b-c-d)
40     for f in range(0, 11-a-b-c-d-e)
41     for g in range(0, 11-a-b-c-d-e-f)
42     for h in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g)
43     for l in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h)
44     for m in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l)
45     for n in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m)
46     for o in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m-n)
47     for p in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m-n-o)
48     for q in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m-n-o-p)
49     for r in range(0, 11-a-b-c-d-e-f-g-h-l-m-n-o-p-q)]
50 minta= sample(combinations, 10000)
51 minta2= sample(combinations, 1000)

```

```

1 szám=0
2 kdiff=[[[[0 for j in range(0,1000)], [0 for j in range(0,1000)] ], [0 for j in range(0,
1000)] ] for i in range(0,5)] for t in range(0,5) ]
3 import random
4 import statistics
5 for wsz in minta2:
6     w=[wsz[i]/10 for i in range(0,len(wsz))]
7     P=[sum(w[j]*EQR[j][i] for j in range(0, len(szektor))) for i in range(0,754)]
8     sect=["FI", "EN", "HC", "CO", "TE", "IN", "MA", "RE", "CD", "UT"]
9     wb_sect=[ 0 for i in sect]
10    for i in range(0,len(sect)):
11        for j in range(0, len(szektor)):
12            if sect[i]==szektor[j]:
13                wb_sect[i]=wb_sect[i]+wb[j]
14    wp_sect=[ 0 for i in sect]
15    for i in range(0,len(sect)):
16        for j in range(0, len(szektor)):
17            if sect[i]==szektor[j]:
18                wp_sect[i]=wp_sect[i]+w[j]
19    dt=1
20    P_dt=[prod(P[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
int(len(P)/dt))]

```

```

21 | B_dt=[prod(B[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
    | int(len(B)/dt))]
22 |
23 | EQR_dt=[[prod(EQR[k][j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
    | int(len(EQR[k])/dt))] for k in range(0,len(EQR))]
24 | prod( (1+i) for i in EQR_dt[0])*(1+EQR[0][750])*(1+EQR[0][751])*(1+
    | EQR[0][752])*(1+EQR[0][753])
25 | dt=1
26 | P_dt=[prod(P[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
27 | B_dt=[prod(B[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
    | int(len(B)/dt))]
28 |
29 | EQR_dt=[[prod(EQR[k][j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
    | int(len(EQR[k])/dt))] for k in range(0,len(EQR))]
30 | prod( (1+i) for i in EQR_dt[0])*(1+EQR[0][750])*(1+EQR[0][751])*(1+
    | EQR[0][752])*(1+EQR[0][753])
31 |
32 | rb_sect=[[0 for t in range(0,int(len(B)/dt))] for i in range(0,len(sect))] #dt
    | szerint
33 | for i in range(0,len(sect)):
34 |     for j in range(0, len(szektor)):
35 |         if sect[i]==szektor[j]:
36 |             for t in range(0,int(len(B)/dt)):
37 |                 rb_sect[i][t]=rb_sect[i][t]+EQR_dt[j][t]*wb[j]/wb_sect[i]
38 |
39 | rp_sect=[[0 for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
40 | for i in range(0,len(sect)):
41 |     if wp_sect[i]!=0:
42 |         for j in range(0, len(szektor)):
43 |             if sect[i]==szektor[j]:
44 |                 for t in range(0,int(len(P)/dt)):
45 |                     rp_sect[i][t]=rp_sect[i][t]+EQR_dt[j][t]*w[j]/wp_sect[i]
46 |     else:
47 |         rp_sect[i]=rb_sect[i]
48 |
49 |
50 | len(rb_sect[0])
51 | [rb_sect[i][0] for i in range(0,len(sect))]
52 |
53 | BB_dt=[sum(EQR_dt[j][t]*wb[j] for j in range(0,len(szektor))) for t in range(0,
    | int(len(B)/dt))]#állandó súlyokat feltételezve a benchmark
54 | AA_sect=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rb_sect[i][t]-BB_dt[t]) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
55 | AA=[sum(AA_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
56 | SE_sect=[[wb_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t]) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
57 | SE=[sum(SE_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
58 | I_sect=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t]) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
59 | I=[sum(I_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
60 | #allokáció, szelekció, interakció szektoronként és összesítve, időegységenként,
    | additívan

```

```

61 | PREM=[P_dt[t]-BB_dt[t] for t in range(0,int(len(P)/dt))] #hozamprémium,
    | időegységenként
62 |
63 | AA_sect_geo=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*((1+rb_sect[i][t])/(1+BB_dt[t]))-1 for t
    | in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
64 | AA_geo=[sum(AA_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
65 | SE_sect_geo=[[wp_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/(1+
    | sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
66 | SE_geo=[sum(SE_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] #eredeti verzió ahol csak allokáció és szelekció van
67 | S_sect_geo=[[wb_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/(1+BB_dt[t]) for t in
    | range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
68 | S_geo=[sum(S_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] #ez már az interakció nélküli szelekció
69 | I_sect_geo=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/((1+
    | sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))))*(1+
    | sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
70 | I_CS_geo=[[BB_dt[t]*P_dt[t]-sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,
    | len(sect)))*sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))]/((1+
    | sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))))*(1+
    | sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
71 | I_geo=[sum(I_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect)))+I_CS_geo[t] for t in
    | range(0,int(len(P)/dt))]
72 |
73 |
74 | AA_geo_multiper=[prod(1+AA_geo[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
75 | SE_geo_multiper=[prod(1+SE_geo[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
76 | S_geo_multiper=[prod(1+S_geo[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
77 | I_geo_multiper=[prod(1+I_geo[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
78 |
79 | geo=[AA_geo_multiper,S_geo_multiper,I_geo_multiper]
80 |
81 | P_multiper=[prod(1+P_dt[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
82 | BB_multiper=[prod(1+BB_dt[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
83 | B_multiper=[prod(1+B_dt[i] for i in range(0,t+1))-1 for t in range(0,
    | int(len(P)/dt))]
84 |
85 | AA_sect_modFron=[ [AA_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    | range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
86 | for i in range(0,len(sect)):
87 |     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
88 |         AA_sect_modFron[i][t]=AA_sect_modFron[i][t]+
    |         BB_dt[t]*sum(AA_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))
89 | SE_sect_modFron=[ [SE_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    | range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
90 | for i in range(0,len(sect)):
91 |     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
92 |         SE_sect_modFron[i][t]=SE_sect_modFron[i][t]+
    |         BB_dt[t]*sum(SE_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))

```



```

93 I_sect_modFron=[ [I_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
94 for i in range(0,len(sect)):
95     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
96         I_sect_modFron[i][t]=I_sect_modFron[i][t]+
            BB_dt[t]*sum(I_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))
97 AA_modFron=[sum(AA_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
98 SE_modFron=[sum(SE_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
99 I_modFron=[sum(I_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
100 AA_modFron_multiper=[sum(AA_modFron[i] for i in range(0,t+1)) for t in range(0,
    int(len(P)/dt))]
101 SE_modFron_multiper=[sum(SE_modFron[i] for i in range(0,t+1)) for t in range(0,
    int(len(P)/dt))]
102 I_modFron_multiper=[sum(I_modFron[i] for i in range(0,t+1)) for t in range(0,
    int(len(P)/dt))]
103
104 modFron=[AA_modFron_multiper,SE_modFron_multiper,I_modFron_multiper]
105
106
107 B1=[prod(1+sum(wb_sect[i]*rb_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
    range(0, t+1) )-1 for t in range(0,int(len(P)/dt))]
108 B2=[prod(1+sum(wp_sect[i]*rb_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
    range(0, t+1) )-1 for t in range(0,int(len(P)/dt))]
109 B3=[prod(1+sum(wb_sect[i]*rp_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
    range(0, t+1) )-1 for t in range(0,int(len(P)/dt))]
110 B4=[prod(1+sum(wp_sect[i]*rp_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
    range(0, t+1) )-1 for t in range(0,int(len(P)/dt))]
111
112 # multiperiódusos
113 AA_Brin_multiper=[B2[t]-B1[t] for t in range(0,int(len(P)/dt))]
114 SE_Brin_multiper=[B3[t]-B1[t] for t in range(0,int(len(P)/dt))]
115 I_Brin_multiper=[B4[t]-B3[t]-B2[t]+B1[t] for t in range(0,int(len(P)/dt))]
116
117 Brin=[AA_Brin_multiper,SE_Brin_multiper,I_Brin_multiper]
118
119 AA_sect_modFronRev=[ [AA_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t
    in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
120 for i in range(0,len(sect)):
121     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
122         AA_sect_modFronRev[i][t]=AA_sect_modFronRev[i][t]+
            P_dt[t]*sum(AA_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
123 SE_sect_modFronRev=[ [SE_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t
    in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
124 for i in range(0,len(sect)):
125     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
126         SE_sect_modFronRev[i][t]=SE_sect_modFronRev[i][t]+
            P_dt[t]*sum(SE_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
127 I_sect_modFronRev=[ [I_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t
    in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
128 for i in range(0,len(sect)):
129     for t in range(0,int(len(P)/dt)):

```

```

130 |         I_sect_modFronRev[i][t]=I_sect_modFronRev[i][t]+
      |         P_dt[t]*sum(I_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
131 | AA_modFronRev=[sum(AA_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      | in range(0,int(len(P)/dt))]
132 | SE_modFronRev=[sum(SE_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      | in range(0,int(len(P)/dt))]
133 | I_modFronRev=[sum(I_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
134 | AA_modFronRev_multiper=[sum(AA_modFronRev[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
135 | SE_modFronRev_multiper=[sum(SE_modFronRev[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
136 | I_modFronRev_multiper=[sum(I_modFronRev[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
137 |
138 | modFronRev=[AA_modFronRev_multiper,SE_modFronRev_multiper,I_modFronRev_multiper]
139 |
140 | AA_sect_modFronMod=[ [AA_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
      | prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
      | in range(0,len(sect))]
141 | for i in range(0,len(sect)):
142 |     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
143 |         AA_sect_modFronMod[i][t]=AA_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
      | BB_dt[t])*sum(AA_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
144 | SE_sect_modFronMod=[ [SE_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
      | prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
      | in range(0,len(sect))]
145 | for i in range(0,len(sect)):
146 |     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
147 |         SE_sect_modFronMod[i][t]=SE_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
      | BB_dt[t])*sum(SE_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
148 | I_sect_modFronMod=[ [I_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
      | prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
      | in range(0,len(sect))]
149 | for i in range(0,len(sect)):
150 |     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
151 |         I_sect_modFronMod[i][t]=I_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
      | BB_dt[t])*sum(I_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
152 | AA_modFronMod=[sum(AA_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      | in range(0,int(len(P)/dt))]
153 | SE_modFronMod=[sum(SE_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      | in range(0,int(len(P)/dt))]
154 | I_modFronMod=[sum(I_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
155 | AA_modFronMod_multiper=[sum(AA_modFronMod[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
156 | SE_modFronMod_multiper=[sum(SE_modFronMod[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
157 | I_modFronMod_multiper=[sum(I_modFronMod[i] for i in range(0,t+1)) for t in
      | range(0,int(len(P)/dt))]
158 |
159 | modFronMod=[AA_modFronMod_multiper,SE_modFronMod_multiper,I_modFronMod_multiper]
160 |
161 | felb=[geo, modFron, modFronRev, modFronMod, Brin, modCar, modMench]

```

```

162
163     for i in range(0,3):
164         for f1 in range(0,5):
165             for f2 in range(0,5):
166                 kdiff[f1][f2][i][szám]=sum(pow(felb[f1][i][j]-felb[f1][i][j-1],2) for
                    j in range(1,len(modCar[i]))) -sum(pow(felb[f2][i][j]-felb[f2][i][j-
                    1],2) for j in range(1,len(modCar[i])))
167
168
169     szám=szám+1
170     print(szám)
171
172 import matplotlib.pyplot as plt
173 plt.hist(kdiff[2][0][1], bins=30, density=True)
174 #plt.savefig('hist_kdiff(1,0,2)')
175 plt.show()
176
177 from tabulate import tabulate
178 import pandas as pd
179 from scipy import stats
180 stats.shapiro(kdiff[1][2][2]).pvalue
181 head = ["Geo", "Fron", "FronRev", "FronMod", "Brin"]
182 tesztvar=[[stats.shapiro(kdiff[i][j][0]).pvalue for j in range(0,5)] for i in
    range(0,5)]
183 print(tabulate(tesztvar, headers=head, tablefmt="grid"))
184
185 head = ["Geo", "Fron", "FronRev", "FronMod", "Brin"]
186 tesztvar=[[1 for j in range(0,5)] for i in range(0,5)]
187 for i in range(0,5):
188     for j in range(0,5):
189         if i!=j:
190             tesztvar[i][j]=stats.wilcoxon(x=kdiff[i][j][2],y=None,
                alternative='less')[1]
191 print(tabulate(tesztvar, headers=head, tablefmt="grid"))
192 #alternatív hip hogy a különbség neg. tehát az oszlop nagyobb

```

```

1 utdiff=[[[[0 for k in range(0,10000)] for j in range(0,3)]for i in range(0,7)] for
    ii in range(0,7)]
2
3 import statistics
4 from tabulate import tabulate
5 from scipy import stats
6 szam=0
7 for wsz in minta:
8
9     w=[wsz[i]/10 for i in range(0,len(wsz))]
10    P=[sum(w[j]*EQR[j][i] for j in range(0, len(szektor))) for i in range(0,253)]
11    sect=["FI", "EN", "HC", "CO", "TE", "IN", "MA", "RE", "CD", "UT"]
12    wb_sect=[ 0 for i in sect]
13    for i in range(0,len(sect)):
14        for j in range(0, len(szektor)):
15            if sect[i]==szektor[j]:

```

```

16         wb_sect[i]=wb_sect[i]+wb[j]
17 wp_sect=[ 0 for i in sect]
18 for i in range(0,len(sect)):
19     for j in range(0, len(szektor)):
20         if sect[i]==szektor[j]:
21             wp_sect[i]=wp_sect[i]+w[j]
22 dt=1
23 P_dt=[prod(P[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
24         int(len(P)/dt))]
25 B_dt=[prod(B[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
26         int(len(B)/dt))]
27 EQR_dt=[[prod(EQR[k][j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
28         int(len(EQR[k])/dt))] for k in range(0,len(EQR))]
29 dt=1
30 P_dt=[prod(P[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
31         int(len(P)/dt))]
32 B_dt=[prod(B[j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
33         int(len(B)/dt))]
34 EQR_dt=[[prod(EQR[k][j]+1 for j in range(i*dt,(i+1)*dt))-1 for i in range(0,
35         int(len(EQR[k])/dt))] for k in range(0,len(EQR))]
36 rb_sect=[[0 for t in range(0,int(len(B)/dt))] for i in range(0,len(sect))] #dt
37 szerint
38 for i in range(0,len(sect)):
39     for j in range(0, len(szektor)):
40         if sect[i]==szektor[j]:
41             for t in range(0,int(len(B)/dt)):
42                 rb_sect[i][t]=rb_sect[i][t]+EQR_dt[j][t]*wb[j]/wb_sect[i]
43
44 rp_sect=[[0 for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
45 for i in range(0,len(sect)):
46     if wp_sect[i]!=0:
47         for j in range(0, len(szektor)):
48             if sect[i]==szektor[j]:
49                 for t in range(0,int(len(P)/dt)):
50                     rp_sect[i][t]=rp_sect[i][t]+EQR_dt[j][t]*w[j]/wp_sect[i]
51     else:
52         rp_sect[i]=rb_sect[i]
53
54 len(rb_sect[0])
55 [rb_sect[i][0] for i in range(0,len(sect))]
56
57 BB_dt=[sum(EQR_dt[j][t]*wb[j] for j in range(0,len(szektor))) for t in range(0,
58         int(len(B)/dt))]#allando sulyokat feltetelezve a benchmark
59 AA_sect=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rb_sect[i][t]-BB_dt[t]) for t in range(0,
60         int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
61 AA=[sum(AA_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
62         int(len(P)/dt))]
63 SE_sect=[[wb_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t]) for t in range(0,
64         int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
65 SE=[sum(SE_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
66         int(len(P)/dt))]
67 I_sect=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t]) for t in range(0,
68         int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]

```

```

59 | I=[sum(I_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
60 |     int(len(P)/dt))]
61 | #allokáció, szelekció, interakció szektoronként és összesítve, időegységenként,
62 |     additívan
63 | PREM=[P_dt[t]-BB_dt[t] for t in range(0,int(len(P)/dt))] #hozamprémium,
64 |     időegységenként
65 |
66 | AA_sect_geo=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*((1+rb_sect[i][t])/(1+BB_dt[t])-1) for t
67 |     in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
68 | AA_geo=[sum(AA_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
69 |     int(len(P)/dt))]
70 | SE_sect_geo=[[wp_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/(1+
71 |     sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
72 |     int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
73 | SE_geo=[sum(SE_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
74 |     int(len(P)/dt))] #eredeti verzió ahol csak allokáció és szelekció van
75 | S_sect_geo=[[wb_sect[i]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/(1+BB_dt[t]) for t in
76 |     range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
77 | S_geo=[sum(S_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
78 |     int(len(P)/dt))] #ez már az interakció nélküli szelekció
79 | I_sect_geo=[[wp_sect[i]-wb_sect[i]]*(rp_sect[i][t]-rb_sect[i][t])/((1+
80 |     sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))))*(1+
81 |     sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
82 |     int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
83 | I_CS_geo=[(BB_dt[t]*P_dt[t]-sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,
84 |     len(sect)))*sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))))/((1+
85 |     sum(wp_sect[j]*rb_sect[j][t] for j in range(0,len(sect))))*(1+
86 |     sum(wb_sect[j]*rp_sect[j][t] for j in range(0,len(sect)))) for t in range(0,
87 |     int(len(P)/dt))]
88 | I_geo=[sum(I_sect_geo[j][t] for j in range(0,len(sect)))+I_CS_geo[t] for t in
89 |     range(0,int(len(P)/dt))]
90 |
91 |
92 | AA_geo_multiper=prod(1+AA_geo[i] for i in range(0,len(P)))-1
93 | SE_geo_multiper=prod(1+SE_geo[i] for i in range(0,len(P)))-1
94 | S_geo_multiper=prod(1+S_geo[i] for i in range(0,len(P)))-1
95 | I_geo_multiper=prod(1+I_geo[i] for i in range(0,len(P)))-1
96 |
97 | geo=[AA_geo_multiper,S_geo_multiper,I_geo_multiper]
98 |
99 | P_multiper=prod(1+P_dt[i] for i in range(0,len(P)))-1
100 | BB_multiper=prod(1+BB_dt[i] for i in range(0,len(P)))-1
101 | B_multiper=prod(1+B_dt[i] for i in range(0,len(P)))-1
102 |
103 | K=[(np.log(1+P_dt[t])-np.log(1+BB_dt[t]))/(P_dt[t]-BB_dt[t]) for t in range(0,
104 |     int(len(P)/dt))]
105 | K.append((np.log(1+P_multiper)-np.log(1+BB_multiper))/(P_multiper-BB_multiper))
106 |
107 | AA_sect_modCar=[ [AA_sect[i][t]*K[t]/K[len(K)-1] for t in range(0,
108 |     int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
109 | SE_sect_modCar=[ [SE_sect[i][t]*K[t]/K[len(K)-1] for t in range(0,
110 |     int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
111 | I_sect_modCar=[ [I_sect[i][t]*K[t]/K[len(K)-1] for t in range(0,int(len(P)/dt))]
112 |     for i in range(0,len(sect))]
113 |
114 | AA_modCar=[sum(AA_sect_modCar[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
115 |     range(0,int(len(P)/dt))]

```

```

93 SE_modCar=[sum(SE_sect_modCar[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
94 I_modCar=[sum(I_sect_modCar[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in range(0,
    int(len(P)/dt))]
95
96 AA_modCar_multiper=sum(AA_modCar[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
97 SE_modCar_multiper=sum(SE_modCar[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
98 I_modCar_multiper=sum(I_modCar[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
99 modCar=[AA_modCar_multiper,SE_modCar_multiper,I_modCar_multiper]
100
101 T=int(len(P)/dt)
102 A=1/T*(P_multiper-BB_multiper)/(pow(1+P_multiper,1/T)-pow(1+BB_multiper,1/T))
103 alfa=[(P_dt[t]-BB_dt[t]) * (P_multiper-BB_multiper-A*sum(P_dt[j]-BB_dt[j] for j
    in range(0,T)))/sum(pow(P_dt[j]-BB_dt[j],2) for j in range(0,T)) for t in
    range(0,T)]
104
105 AA_sect_modMench=[ [AA_sect[i][t]*(A+alfa[t]) for t in range(0,int(len(P)/dt))]
    for i in range(0,len(sect))]
106 SE_sect_modMench=[ [SE_sect[i][t]*(A+alfa[t]) for t in range(0,int(len(P)/dt))]
    for i in range(0,len(sect))]
107 I_sect_modMench=[ [I_sect[i][t]*(A+alfa[t]) for t in range(0,int(len(P)/dt))]
    for i in range(0,len(sect))]
108
109 AA_modMench=[sum(AA_sect_modMench[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
110 SE_modMench=[sum(SE_sect_modMench[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
111 I_modMench=[sum(I_sect_modMench[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))]
112
113 AA_modMench_multiper=sum(AA_modMench[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
114 SE_modMench_multiper=sum(SE_modMench[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
115 I_modMench_multiper=sum(I_modMench[i] for i in range(0,int(len(P)/dt)))
116 modMench=[AA_modMench_multiper,SE_modMench_multiper,I_modMench_multiper]
117
118 AA_sect_modFron=[ [AA_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
119 for i in range(0,len(sect)):
120     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
121         AA_sect_modFron[i][t]=AA_sect_modFron[i][t]+
            BB_dt[t]*sum(AA_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))
122 SE_sect_modFron=[ [SE_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
123 for i in range(0,len(sect)):
124     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
125         SE_sect_modFron[i][t]=SE_sect_modFron[i][t]+
            BB_dt[t]*sum(SE_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))
126 I_sect_modFron=[ [I_sect[i][t]*prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
    range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
127 for i in range(0,len(sect)):
128     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
129         I_sect_modFron[i][t]=I_sect_modFron[i][t]+
            BB_dt[t]*sum(I_sect_modFron[i][j] for j in range(0,t))

```

```

130 AA_modFron=[sum(AA_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      range(0,int(len(P)/dt))]
131 SE_modFron=[sum(SE_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      range(0,int(len(P)/dt))]
132 I_modFron=[sum(I_sect_modFron[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      range(0,int(len(P)/dt))]
133 AA_modFron_multiper=sum(AA_modFron[i] for i in range(0,len(P)))
134 SE_modFron_multiper=sum(SE_modFron[i] for i in range(0,len(P)))
135 I_modFron_multiper=sum(I_modFron[i] for i in range(0,len(P)))
136
137 modFron=[AA_modFron_multiper,SE_modFron_multiper,I_modFron_multiper]
138
139 AA_sect_modFronRev=[ [AA_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t
      in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
140 for i in range(0,len(sect)):
141     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
142         AA_sect_modFronRev[i][t]=AA_sect_modFronRev[i][t]+
            P_dt[t]*sum(AA_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
143 SE_sect_modFronRev=[ [SE_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t
      in range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
144 for i in range(0,len(sect)):
145     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
146         SE_sect_modFronRev[i][t]=SE_sect_modFronRev[i][t]+
            P_dt[t]*sum(SE_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
147 I_sect_modFronRev=[ [I_sect[i][t]*prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t)) for t in
      range(0,int(len(P)/dt))] for i in range(0,len(sect))]
148 for i in range(0,len(sect)):
149     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
150         I_sect_modFronRev[i][t]=I_sect_modFronRev[i][t]+
            P_dt[t]*sum(I_sect_modFronRev[i][j] for j in range(0,t))
151 AA_modFronRev=[sum(AA_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      in range(0,int(len(P)/dt))]
152 SE_modFronRev=[sum(SE_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
      in range(0,int(len(P)/dt))]
153 I_modFronRev=[sum(I_sect_modFronRev[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
      range(0,int(len(P)/dt))]
154 AA_modFronRev_multiper=sum(AA_modFronRev[i] for i in range(0,len(P)))
155 SE_modFronRev_multiper=sum(SE_modFronRev[i] for i in range(0,len(P)))
156 I_modFronRev_multiper=sum(I_modFronRev[i] for i in range(0,len(P)))
157
158 modFronRev=[AA_modFronRev_multiper,SE_modFronRev_multiper,I_modFronRev_multiper]
159
160 AA_sect_modFronMod=[ [AA_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
      prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
      in range(0,len(sect))]
161 for i in range(0,len(sect)):
162     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
163         AA_sect_modFronMod[i][t]=AA_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
            BB_dt[t])*sum(AA_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
164 SE_sect_modFronMod=[ [SE_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
      prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
      in range(0,len(sect))]
165 for i in range(0,len(sect)):

```

```

166     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
167         SE_sect_modFronMod[i][t]=SE_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
            BB_dt[t])*sum(SE_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
168 I_sect_modFronMod=[ [I_sect[i][t]*0.5*(prod(1+BB_dt[j] for j in range(0,t))+
            prod(1+P_dt[j] for j in range(0,t))) for t in range(0,int(len(P)/dt))] for i
            in range(0,len(sect))]
169 for i in range(0,len(sect)):
170     for t in range(0,int(len(P)/dt)):
171         I_sect_modFronMod[i][t]=I_sect_modFronMod[i][t]+0.5*(P_dt[t]+
            BB_dt[t])*sum(I_sect_modFronMod[i][j] for j in range(0,t))
172 AA_modFronMod=[sum(AA_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
            in range(0,int(len(P)/dt))]
173 SE_modFronMod=[sum(SE_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t
            in range(0,int(len(P)/dt))]
174 I_modFronMod=[sum(I_sect_modFronMod[j][t] for j in range(0,len(sect))) for t in
            range(0,int(len(P)/dt))]
175 AA_modFronMod_multiper=sum(AA_modFronMod[i] for i in range(0,len(P)))
176 SE_modFronMod_multiper=sum(SE_modFronMod[i] for i in range(0,len(P)))
177 I_modFronMod_multiper=sum(I_modFronMod[i] for i in range(0,len(P)))
178
179 modFronMod=[AA_modFronMod_multiper,SE_modFronMod_multiper,I_modFronMod_multiper]
180
181 B1=prod(1+sum(wb_sect[i]*rb_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
            range(0, len(P)) )-1
182 B2=prod(1+sum(wp_sect[i]*rb_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
            range(0, len(P)) )-1
183 B3=prod(1+sum(wb_sect[i]*rp_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
            range(0, len(P)) )-1
184 B4=prod(1+sum(wp_sect[i]*rp_sect[i][j] for i in range(0, len(sect))) for j in
            range(0, len(P)) )-1
185
186 # multiperiodosos
187 AA_Brin_multiper=B2-B1
188 SE_Brin_multiper=B3-B1
189 I_Brin_multiper=B4-B3-B2+B1
190
191 Brin=[AA_Brin_multiper,SE_Brin_multiper,I_Brin_multiper]
192 felb=[geo, modFron, modFronRev, modFronMod, Brin, modCar, modMench]
193
194 for i in range(0,3):
195     for f1 in range(0,7):
196         for f2 in range(0,7):
197             utdiff[f1][f2][i][szam]=felb[f1][i]-felb[f2][i]
198         szam=szam+1
199     print(szam)
200
201 head = ["Geo", "Fron", "FronRev", "FronMod", "Brin", "Car", "Mench"]
202 tesztvar=[[stats.shapiro(utdiff[i][j][0]).pvalue for j in range(0,7)] for i in
            range(0,7)]
203 print(tabulate(tesztvar, headers=head, tablefmt="grid"))
204 head = ["Geo", "Fron", "FronRev", "FronMod", "Brin", "Car", "Mench"]
205 tesztvar=[[1 for j in range(0,7)] for i in range(0,7)]
206 for i in range(0,7):

```



```

207     for j in range(0,7):
208         if i!=j:
209             tesztvar[i][j]=stats.wilcoxon(x=utdiff[i][j][2],y=None,
                alternative='less')[1]
210 print(tabulate(tesztvar, headers=head, tablefmt="grid"))
211 #alternatív hip hogy a különbség neg. tehát az oszlop nagyobb
212
213 minta_konc=[sum(pow(j,2) for j in i)/100 for i in minta]
214
215 szektor=["FI", "EN", "HC", "CO", "FI", "TE", "IN", "MA", "RE", "CD", "UT", "RE",
    "FI", "IN", "UT", "CO"]
216 sect=["FI", "EN", "HC", "CO", "TE", "IN", "MA", "RE", "CD", "UT"]
217 wbux=pd.read_excel('BUX_as_of_Dec_04_20231.xlsx', usecols=[0,2], nrows=16)
218 wb=[i/100 for i in wbux.iloc[:,1].values.tolist()]
219 wb_sect=[ 0 for i in sect]
220 for i in range(0,len(sect)):
221     for j in range(0, len(szektor)):
222         if sect[i]==szektor[j]:
223             wb_sect[i]=wb_sect[i]+wb[j]
224 rb_sect=[[0 for t in range(0,int(len(B)))] for i in range(0,len(sect))] #dt szerint
225 for i in range(0,len(sect)):
226     for j in range(0, len(szektor)):
227         if sect[i]==szektor[j]:
228             for t in range(0,int(len(B))):
229                 rb_sect[i][t]=rb_sect[i][t]+EQR[j][t]*wb[j]/wb_sect[i]
230 minta_R=[prod(1+sum(w[j]/10*EQR[j][i] for j in range(0, len(szektor)))) for i in
    range(0,len(EQR[0])))-1 for w in minta]
231 minta_wp_sect=[[0 for i in sect] for wsz in minta] #kívül a minta belül a szektor
232 for i in range(0,len(sect)):
233     for j in range(0, len(szektor)):
234         if sect[i]==szektor[j]:
235             for k in range(0,len(minta)):
236                 minta_wp_sect[k][i]=minta_wp_sect[k][i]+minta[k][j]/10
237 import matplotlib.pyplot as plt
238 plt.scatter(minta_R, utdiff[1][4][0], alpha=0.5)
239 plt.hist(utdiff[0][6][2], bins=20, density=True )
240 #plt.savefig('hist_utdiff(1,0,0).png')
241 plt.show()

```

B. A dolgozatban gyakran használt jelölések

Amennyiben a jelölés használatakor mást nem állítunk, a következő jelölések a szakdolgozat során az alábbi jelentéssel bírnak:

- b a benchmark portfólió hozama egy perióduson
- r a vizsgált portfólió hozama egy perióduson
- b_i az i -edik szektor vagy eszközosztály indexének hozama
- W_i az i -edik szektor vagy eszközosztály benchmarkban lévő súlya
- r_i a portfólió i -edik szektorban vagy eszközosztályban elért hozama
- w_i az i -edik szektor vagy eszközosztály valós portfólióbeli súlya
- B a benchmark portfólió hozama a teljes időtartamon
- R a valós portfólió hozama a teljes időtartamon
- A_i az i -edik szektor eszközallokációjának hatása a hozamprémiumra
- S_i az i -edik szektor eszközszelekciójának hatása a hozamprémiumra
- I_i az i -edik szektor interakciójának hatása a hozamprémiumra
- G_{tbi} a t -edik periódus b -edik attribúciós tényezőjének i -edik szektorhoz tartozó hatása
- F_{tbi} a t -edik periódus b -edik attribúciós tényezőjének i -edik szektorhoz tartozó módosított hozama

C. Hivatkozásjegyzék

- [1] Carl Bacon. Performance attribution: History and progress. *CFA Institute Research Foundation Literature Review*, 1, 2019.
- [2] Carl R. Bacon. Excess returns—arithmetic or geometric? *The Journal of Performance Measurement* 6, pages 23–31, 2002.
- [3] Carl R Bacon. *Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution*. John Wiley & Sons, 2008.
- [4] BAI. Measuring the investment performance of pension funds for the purpose of inter-fund comparison. Technical report, Bank Administration Institute, 1968.
- [5] William G. Bain. *Investment Performance Measurement*. Woodhead Publishing, 1996.
- [6] Gary P. Brinson and Nimrod Fachler. Measuring non-us equity portfolio performance. *Journal of Portfolio Management* 11, pages 73–76, 1985.
- [7] Gary P. Brinson, Jr. L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower. Determinants of portfolio performance. *Financial Analysts Journal*, page 39–44, 1986.
- [8] J. Stephen Burnie, James A. Knowles, and Toomas J. Teder. Arithmetic and geometric attribution. *The Journal of Performance Measurement* 3, pages 59–68, 1998.
- [9] Stephen. Campisi. Debunking the interaction myth. *The Journal of Performance Measurement* 8, pages 63–70, 2004.
- [10] David R. Cariño. Combining attribution effects over time. *The Journal of Performance Measurement*, pages 5–14, 1999.
- [11] David R. Cariño. Refinements in multi-period attribution. *The Journal of Performance Measurement*, pages 45–53, 1999.
- [12] Dan DiBartolomeo. Just because we can doesn't mean we should. *The Journal of Performance Measurement* 7, pages 30–36, 2003.
- [13] Peter O. Dietz. *Pension Funds: Measuring Investment Performance*. Graduate School of Business of Columbia University and Free Press, 1966.
- [14] Eugene F. Fama. Components of investment performance. *Journal of Finance* 28, pages 551–67, 1972.
- [15] Bernd Fischer and Russell Wermers. *Performance Evaluation and Attribution of Security Portfolios*. Elsevier, 2013.
- [16] Andrew S.B. Frongello. Attribution linking: Proofed and clarified. *Journal of Performance Measurement* 7, 1:54–67, 2002.
- [17] Andrew S.B. Frongello. Linking single period attribution results. *Journal of Performance Measurement* 6, 1:10–22, 2002.
- [18] Andrew S.B. Frongello. Linking single period attribution results, 2004.

- [19] J. P. Holbrook. Investment performance of pension funds.”. *Journal of the Institute of Actuaries* 104, pages 15–91, 1977.
- [20] Yindeng Jiang and Joseph Saenz. Comparing performance attribution linking methods: An empirical study. 2014.
- [21] William Kruskal and W. Allen Wallis. Use of ranks in one-criterion variance analysis”. *Journal of the American Statistical Assosiation*, pages 583–621, 1952.
- [22] Damien Laker. “what is this thing called ‘interaction’?”. *Journal of Performance Measurement* 5, 1:43–57, 2000.
- [23] Damien Laker. A view from down under. *The Journal of Performance Measurement*, 1:5–13, 2002 Summer.
- [24] H.B. Mann and D.R. Whitney. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *Annals of Mathematical Statistics*, pages 50–60, 1947.
- [25] Jose G. Menchero. An optimized approach to linking attribution effects over time. *Journal of Performance Measurement* 5, page 36–42, 2000.
- [26] Jose G. Menchero. A fully geometric approach to performance attribution. *Journal of Performance Measurement* 5, pages 22–30, 2000/2001.
- [27] SIA. The measurement of portfolio performance for pension funds. Technical report, Society of Investment Analysts, 1972.
- [28] David Spaulding. Demystifying the interaction effect. *The Journal of Performance Measurement* 8, pages 49–54, 2003/2004.
- [29] Arno E. Weber. Geometric attribution and the interaction effect. *Journal of Performance Measurement* 22, 1:6–19, 2018.
- [30] Frank Wilcoxon. Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, pages 80–83, 1945.