

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

---

# OPTIMÁLIS MEGÁLLÁS ÉS PÉNZÜGYI ALKALMAZÁSOK

Szakdolgozat

**Szabó Ágnes**

Biztosítási és Pénzügyi Matematika Mesterszak  
Kvantitatív pénzügyek specializáció

*Témavezető:*

**Dr. Szabó Dávid Zoltán**

Egyetemi adjunktus

Befektetések Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem



Budapest, 2024

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Matematikai bevezetés	2
3. Optimális megállás	5
4. Opciók	13
5. Ázsiai opciók	17
6. Szimuláció	24
7. Módszerek	30
8. Konklúzió	43
Irodalomjegyzék	47

# Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Szabó Dávid Zoltánnak, a szakdolgozatom elkészítése során tanúsított segítőkész, lelkiismeretes munkájáért. Külön hálás vagyok a rengeteg belém fektetett idejéért, energiájáért és szakértelméért, mellyel végigkísérte dolgozatom elkészülését.

Továbbá köszönettel tartozom a családomnak, a barátaimnak és a nagyszerű csoporttársaimnak, akik mindvégig mellettem álltak, feltétel nélkül támogattak és folyamatosan ösztönözték munkámat. Adri, Paula, Zsuzsi, nélkületek nem ment volna.

Végül pedig szeretném megköszönni az ELTE, valamint a Corvinus valamennyi oktatójának, akik szakértelmükkel és tudásukkal hozzájárultak az egyetemi tanulmányaimhoz.

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az optimális megállás problémája nem csupán csak matematikai szempontból érdekes, de az ipar számos területén, így például különböző pénzügyi alkalmazásokban is feltűnik. Ezen területeken a probléma megoldásának célja, hogy a megfelelő időpont megválasztása segítségével egy olyan döntést hozhassunk, mely képes maximalizálni a várható bevételünk nagyságát, vagy minimalizálni a költségeinket, esetleges veszteségeinket. Ezen időpont meghatározása viszont erősen függ a probléma felírásának módjától és annak megoldására használt eszközöktől.

Szakdolgozatomban ezt a témát szeretném részletesen körbejárni, amihez először az optimális megállás matematikai háttérét fogom ismertetni. Ezt követően áttérek a pénzügyi alkalmazás területére, ahol külön megvizsgálom a lehetséges alapfolyamatokat, célfüggvény értékeket és megoldási módszereket is. Mivel ez a téma igen szerteágazó, így egy konkrét esetben, azaz az opció árazás területén, azon belül is az ázsiai opció különböző megvalósulásai esetén vizsgálom az optimális megállást. Ehhez először is egy átfogó képet adok a különböző opciók tulajdonságairól, ezen belül pedig külön kitérek az ázsiai opciók családjára is, ahol ismertetni fogom annak különböző fajtáit, illetve az árazási módszereit. A szimulációs részben ezen technikák segítségével fogom a különböző típusú ázsiai opciók árát meghatározni, valamint ezeket össze is hasonlítom egymással. Végül a munkám során felhasznált különböző technikákat részletesen is ismertetem.

## 2. fejezet

# Matematikai bevezetés

**2.0.1. Definíció.**  $(B_t)_{t \geq 0}$  Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, aminek növekményeire  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , ha  $0 \leq s \leq t$ .

**2.0.2. Definíció.**  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  filtráció, ha minden  $t$ -re  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra és  $0 \leq s \leq t$  esetén  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Röviden  $\sigma$ -algebrák bővülő családja.  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  az  $(X_t)_{t \geq 0}$  folyamat természetes filtrációja, ha  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ .

**2.0.3. Definíció.** Ha  $B$  Brown mozgás,  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u : u \leq s)$ . Ekkor  $B_t - B_s$  független  $\mathcal{F}_s$ -től.

**2.0.1. Állítás.**  $B$  folyamat  $\mathcal{F}$  természetes filtrációval, azaz  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \leq t)$  minden  $t \geq 0$ -ra.  $B$  pontosan akkor Brown mozgás, ha nullából indul, folytonosak a trajektóriái és minden  $0 \leq s \leq t$ -re  $B_t - B_s$  független  $\mathcal{F}_s$ -től  $N(0, t - s)$  eloszlással.

**2.0.4. Definíció.**  $(X_t)_{t \geq 0}$  Markov folyamat az  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  filtrációban, ha  $X$  adaptált  $\mathcal{F}$ -hez és tetszőleges  $0 \leq s, t$  esetén  $\mathbb{P}(X_{t+s} \in H | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in H | X_t)$ .

**2.0.5. Definíció.** Egy  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  sztochasztikus folyamat martingál az  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  filtrációra nézve, ha

1.  $M_t$  mérhető az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrára minden  $t \geq 0$  esetén.
2.  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$  minden  $t \geq 0$  esetén.
3.  $\mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t] = M_t$  minden  $t \geq 0$  esetén.

**2.0.6. Definíció.** Egy  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  sztochasztikus folyamat szupermartingál az  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  filtrációra nézve, ha

1.  $M_t$  mérhető az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrára minden  $t \geq 0$  esetén.
2.  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$  minden  $t \geq 0$  esetén.

3.  $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \leq M_t$  minden  $t \geq 0$  esetén.

**2.0.7. Definíció.** Egy  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  sztochasztikus folyamat submartingál az  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  filtrációra nézve, ha

1.  $M_t$  mérhető az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrára minden  $t \geq 0$  esetén.
2.  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$  minden  $t \geq 0$  esetén.
3.  $\mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \geq M_t$  minden  $t \geq 0$  esetén.

**2.0.8. Definíció.**  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  valószínűségi változó megállási idő az  $\mathcal{F}$  filtrációban, ha  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $t \geq 0$ -ra.

**2.0.9. Definíció.**  $\mathcal{F}$  filtráció, az  $X$  folytonos trajektóriájú folyamat adaptált az  $\mathcal{F}$  filtrációhoz,  $H$  zárt halmaz,  $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in H\}$ . Ekkor  $\tau$  megállási idő.

**2.0.1. Lemma.** *A következő állítások ekvivalensek egymással:*

1.  $\tau$  megállási idő
2.  $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $t$  esetén
3.  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $t$  esetén

**2.0.2. Állítás.** 1. *Ha  $\tau$  megállási idő, akkor  $\tau$  mérhető  $\mathcal{F}_\tau$  szerint.*

2. *Ha  $\tau \equiv k$ , akkor  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$ .*
3. *Ha  $\tau$  és  $\sigma$  is megállási idők, akkor  $\min\{\tau, \sigma\} = \tau \wedge \sigma$  és  $\max\{\tau, \sigma\} = \tau \vee \sigma$  is megállási idők.*
4. *Ha  $\sigma \geq \tau$ , akkor  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .*
5. *Ha az  $\{X_t\}_t$  folyamat  $\{\mathcal{F}_t\}_t$ -adaptált és jobbról folytonos, akkor az  $X_\tau$   $\mathcal{F}_\tau$ -mérhető.*

**2.0.10. Tétel.** *Doob–Meyer felbontás. Legyen  $X(t)$  diszkrét idejű  $\mathcal{F}_t$ -adaptált folyamat,  $t \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , továbbá pedig  $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ . Ekkor*

$$X(t) - X(0) = M(t) + A(t),$$

ahol  $M(t)$  martingál,  $A(t)$  előrejelezhető folyamat és  $M(0) = 0$ ,  $A(0) = 0$ . Ez a felbontás egyértelmű.

**2.0.11. Tétel.** *Snell-burkoló Legyen  $X(t)$  egy  $\mathcal{F}_t$ -adaptált folyamat. Definiáljuk rekurzívan a végeről indulva a következő  $Z(t)$  folyamatot:*

$$Z(T) = X(T)$$

$$Z(t) = \max\{X(t), \mathbb{E}[Z(t+1) \mid \mathcal{F}_t]\}$$

ahol  $t = T - 1, \dots, 0$ . Ekkor  $Z(t)$  egy  $\mathcal{F}_t$ -szupermartingál  $Z(t) \geq \mathbb{E}[Z(t+1)|\mathcal{F}_t]$ , amely majorálja az  $X(t)$ -t, sőt az ilyenek közül a legkisebb. Legyen  $v_t$  az a megállási idő, amikor az  $X$  folyamat  $t$ -nél nem korábban először éri el  $Z$ -t:

$$v_t = \min\{s \geq t, X(s) = Z(s)\}$$

tehát  $v_t$  az a legkorábbi  $s$  időpont, amikor  $Z$  már  $X$ -től kapja az értékét a maximum vételekor. Speciálisan  $v_T = T$ . Jelölje  $\mathcal{T}_t$  a  $t$ -nél nem korábbi megállási idők halmazát, vagyis  $\mathcal{T}_t = \{\tau : \tau \in \mathcal{T}, \tau \geq t\}$ . Így definiálva  $v_t \in \mathcal{T}_t$  és

$$Z(t) = \mathbb{E}[X(v_t)|\mathcal{F}_t] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}[X(\tau)|\mathcal{F}_t]$$

Azaz az összes  $t$ -nél nem korábbi megállási idő közül a  $v_t$ -kor megállított folyamat feltételes várható értéke maximális. Ebben az értelemben tehát  $v_t$  az optimális megállítás. Ugyanígy a közönséges várható értékre:

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[X(v_t)] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}[X(\tau)].$$

Speciálisan  $t = 0$ -ra:

$$\mathbb{E}[Z(0)] = \mathbb{E}[X(v_0)] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[X(\tau)],$$

vagyis  $v_0$  az optimális megállítás, az ezzel megállított folyamat várható értéke maximális,  $v_t$  pedig a  $t$ -nél nem korábbi megállítások közül maximalizálja  $\mathbb{E}[X(\tau)]$  kifejezést.

## 3. fejezet

# Optimális megállás

### Motiváció

A pénzügy számos területén elengedhetetlen fontosságú a megfelelő időzítés ahhoz, hogy egy adott befektető a saját hasznossági függvényét maximalizálni tudja és ezáltal haszonra tegyen szert. Erre a kérdéskörre is kitérnek az optimális megállási modellek, amelyek segítségével pontosan vagy közelítőleg meghatározható az adott probléma számára legoptimálisabb megoldási módszer.

A pénzügyi piac minden szegletében fel-fel tűnnek a bizonytalansági tényezők, hiszen a jövőre vonatkozóan nem tudunk sohasem biztosat mondani. A bizonytalansági tényezők a befektetőkre is negatívan hathatnak, hiszen ennek hatására akár téves döntéseket is hozhatnak. Az optimális megállási módszerek ezek elkerüléséhez is jól alkalmazhatóak, hiszen segítségével egy-egy bizonytalansági tényező mellett is racionális döntést hozhatnak a befektetők a számukra rendelkezésre álló információk alapján.

A befektetések témakörében is sok helyen fellelhetőek. Ezen módszerek a valós piacon megfigyelhető adatokat használják fel a sztochasztikus modellekben, melyek segítségével próbálják megfogni a piacon megfigyelhető változásokat, valamint ezek segítségével predikciókat készítenek a jövőre vonatkozóan, amely alapján a befektető már egy megfontoltabb döntést hozhat.

Az optimális megállási feladatokra egy egyszerű, sokak által közismert példa lehet az amerikai put opció  $K$  kötési árral. Feltesszük, hogy az  $X$  részvényárfolyam geometriai Brown-mozgást követ:  $dX_t = rX_t dt + sX_t dB_t$ ,  $X_0 = x$  kezdeti feltétel mellett. A befektetők célja ez esetben az, hogy az opciót addig az optimális  $t$  időpontig tartsák, míg maximális nyereséget nem érnek el. Azaz a probléma a következőképpen fogható meg matematikailag:



$$V(x) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - X_\tau)^+]$$

Az egyenlet megoldása pedig a következőképpen fog alakulni:

$$\tau^* = \min \left\{ \tau : X_\tau \leq \frac{2rK}{2r + \sigma^2} \right\}$$

Az opciót érdemes lehívni, ha az adott részvény árfolyama az előre meghatározott kötési ár alá esik. Az optimális megállási modellekben sokszor kapható egy olyan határ, amely a teret két diszjunk halmazzra osztja. Ez esetben sincs ez másképpen. Ahol a részvény árfolyama meghaladja a kötési árat, azt folytatási halmazznak nevezzük, míg ahol alatta marad, azt megállási halmazznak (13).

## Történelmi háttér

Az optimális megállási modell először Wald 1947-ben(14) publikált művében szerepelt, majd 1948-ban Wolfowitzzel(15) együtt ezt a módszert a szekvenciális elemzésre használták. Az ezt követő években számos tanulmány született, ami az optimális megállási modellek különböző megoldó módszereivel foglalkozott. 1952-ben Snell(16) javasolt egy martingál módszert, aminek a segítségével vizsgálhatóak a diszkrét idejű optimális megállási modellek. Arrow 1949-ben(17) a dinamikus programozási segítségével adott egy új fajta megoldó módszert. Dvoretzky és munkatársai 1953-ban(18) publikált munkájukban folytonos időben vizsgálták az optimális megállási modelleket, valamint megoldást találtak a szekvenciális elemzés problémájára is.

Az egyik klasszikussá vált cikk ebben a témában 1969-ben Merton(10) által lett publikálva, amiben az optimális megállási modelleket arra használta, hogy meghatározza a pénzügyi piac szereplői számára, hogy mikor és milyen mennyiségben lenne érdemes számukra eladni, valamint vásárolni a különböző piacon kereskedett termékekből.

Manapság a folytonos idejű optimális megállási feladatok esetén az egyik legelterjedtebb technika az, amikor a változó határ problémával (angolul: free boundary problem) kombinálják és a kettőt együtt oldják meg. McKean 1965-ben(19), valamint Mikhalevich 1958-ban(20) kombinálta az optimális megállási modelleket az illeszkedési feltételekkel, ami egyfajta kapcsolatot jelent a változó határ problémával. Az optimális megállási modell határvonalának paraméterei a paraméterteret két részre osztják. Az egyik esetben folytatjuk az algoritmust addig, míg az a legoptimálisabb időpontot meg nem találja, a másik esetben, amikor ezt az időpontot megtaláljuk, rögtön megállunk. A változó határ probléma által meghatározott határt, valamint lehetséges megoldást egyszerre kapjuk meg.

Shiryayev 1961-ben(21) és 1963-ban(22) is publikálta tanulmányait a rendezetlenségi probléma (angolul: disorder problem) kapcsán, vagyis hogyan lehet gyorsan meghatározni azt az időpontot, amikor egy sztochasztikus folyamat paraméterei megváltoztak, valamint hogy ezt hogyan lehet megoldani a megfelelő változó határ probléma segítségével. Erre építve 1997-ben Beibel és Lerche(23) levezette a részvények eladásának optimális stratégiáját a diszkontálás utáni részvényár maximalizálásával.

Kezdetben az optimális megállási problémákat végtelen időhorizonton, valamint egydimenziós feladatként fogták fel, de a valóéletbeli használatban igény merült fel arra, hogy csak egy véges időhorizonton belül vizsgáljanak egy adott problémát, amit matematikailag az eredeti modellhez adott plusz idődimenzió segítségével oldották meg, ami ennek hatására kétdimenzióssá változott. Az ilyen típusú változó határ problémák parciális differenciálegyenletekkel való megoldásának analitikus változata viszont számos nehézséghez vezetett. 1965-ben McKean(19) publikálta tudományos munkáját az amerikai opciók árázással kapcsolatban véges időhorizonton a változó határ technika felhasználásával. A 2005-ben(24) publikált cikkjében bizonyította Peskir a megoldás egyértelműségét, valamint a véges időhorizontú amerikai opció árázására analitikus képlettel is szolgált, ami kiterjeszthető más véges időhorizontú problémákra is.

Egyes tanulmányok kitértek az olyan optimális megállási problémákra is, amelyek hasznossági függvényei a folyamat által felvett maximális értéket is tartalmazták. Az egyik ilyen az 1993-ban Shepp és Shiryayev(25) által publikált volt, amiben bemutatták az orosz opciót, aminek a kifizetése függ a tartási periódus alatt elért legmagasabb részvényár nagyságától. A cikkükben megadták továbbá az opció analitikus megoldását is a változó határ probléma segítségével. 1998-ban Peskir(26) által írt cikkben bemutatta a maximum elvet, ami az optimális megállási modellek egyes osztályainak megoldására is alkalmas. 2017-ben Egami és Oryu(27) egy másik megközelítést, vagyis egy kanonikus eljárást alkalmazott az ilyen típusú problémák megoldására, ami kulcsötletként a dimenziócsökkentést használja fel.

Az optimális megállási problémáknak különféle alkalmazási területei léteznek a gazdaságiakon kívül is. Például ennek segítségével állapította meg Jennison és Turnbull 1999-ben(28), hogy az orvostudományban mikor érdemes leállítani a különböző klinikai vizsgálatokat. Az egyes mérnöki területeken is igen elterjedtek az ilyen típusú módszerek, például azoknak az optimális irányelveknek a megadása során, amelyek a karbantartási műveletekhez kapcsolódnak, erről Machida és Miyoshi 2017-ben(29) publikált egy cikket. Ezen kívül pedig az optimális aratási idő megválasztása is ezen módszeren alapszik, melyről részletesebben lehet olvasni Sarkar 2009-ben(30) publikált cikkében.

# Alapfolyamat

Az alapfolyamat megválasztása igen fontos alapköve egy modellezési folyamatoknak, így az optimális megállási modellek esetében is elengedhetetlen fontosságú. Egy adott probléma vonatkozásában is számtalan különböző alapfolyamat is alkalmazható, így ebben a részben szeretnék ezek közül párat kiemelni, amik gyakran elő szoktak fordulni.

Az egyik legelterjedtebb és egyben legegyszerűbb alapfolyamat, amit modellezés céljából használnak, az a közönséges Brown-mozgás. Ha nem is mindig ebből indulnak ki direktben, akkor is sok esetben az adott sztochasztikus folyamatot a tér vagy az idő átskálázásával alakítják át közönséges Brown-mozgássá. Az egyszerűsége és könnyen kezelhetősége miatt igen elterjedt, viszont a valóéletbeli problémák összetettsége meghaladja sok esetben a korlátait.(31) Alakját az alábbi képlet írja le, ahol  $B_t$  egy Brown-mozgást jelöl:

$$X_t = B_t$$

A legelterjedtebb alapfolyamatnak a geometria Brown-mozgás tekinthető, ugyanis a nemnegatívítása miatt alkalmas az eszközárak modellezésére. Modellezési szempontból az egyik előnye egyben a hátránya is, hiszen a paraméterei időinvariánsok, vagyis a sztochasztikus folyamat paraméterei időben változnak. Viszont ezt kihasználva robusztusabban képes megfogni egy folyamat változásait.(32) Képlete a következőképpen alakul  $X_0 = x$  kezdeti feltétel mellett:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

Az egydimenziós diffúziós folyamatok igen elterjedtek az optimális megállási folyamatok modellezésénél, viszont mivel a sztochasztikus folyamatok igen kiterjedt osztályát képesek vagyunk általa leírni, így az általános megoldó módszer helyett inkább egyedileg oldjuk meg az adott problémákat, főleg ha azok összetettebbek.(27) Általános alakja:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

A következő alapfolyamatot legfőképpen a szekvenciális elemzések során alkalmazzák, ugyanis ekkor a sztochasztikus folyamat driftje ismeretlen, aminek értékére valós adatok alapján következtetnek két lehetséges alternatív paraméter közül.(34) Alakja:

$$dX_t = a_t X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

ahol  $a_t \in \{a_h, a_l\}$ ,  $\mathbb{P}(a_0 = a_h) = \pi_0$ ,  $\mathbb{P}(a_0 = a_l) = 1 - \pi_0$ .

A következő folyamat a rezsinváltás egy speciális esete, ami a rendezetlenségi probléma esetén lehet hasznos eszköz. Hasonlatos az előző folyamathoz abban a tekintetben, hogy minkettőnél valós adatok alapján következtetünk az ismeretlen

paraméterekre, de míg az előzőekben azok időben állandóak voltak, addig most megengedjük, hogy időben változzanak. (23)

$$dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

ahol a drift tag  $\mu_1$  értékről  $\mu_2$  értékre változik  $\theta$  valószínűséggel,  $\mathbb{P}(\theta > t) = (1 - p)e^{-\lambda t}$ .

## Célfüggvény

A megfelelő célfüggvény megválasztása elengedhetetlen része az optimális megállási problémák megoldásának, ugyanis ezek nem csak a felmerült problémát oldják meg, hanem sok esetben az ehhez vezető utat is nagyban leegyszerűsítik. Az optimális megállási feladatok sok szempontból csoportosíthatóak, az egyik ilyen hat különböző kategóriába sorolja be őket: szekvenciális elemzési probléma, optimális előrejelzési probléma, buy-low sell-high probléma, rendezetlenségi probléma, opció árazás és mások(12).

## Szekvenciális elemzés

Először is feltesszük, hogy a rendelkezésünkre álló adatok egy olyan sztochasztikus folyamatból származnak, aminek a paraméterei bináris véletlen változók, továbbá pedig a priori eloszlásuk ismert. Folyamatosan veszünk hozzá az adathalmazunkhoz újabb tagokat és ezzel egy időben frissítjük az eloszlás paramétereit, tehát azok időben nem lesznek állandóak. A szekvenciális elemzés létrejöttének alapvető célja, hogy ezen változó paramétereket gyorsan és pontosan azonosítsák. (35)

Az adatgyűjtés előtt akár előre is meghatározhatunk egy megállási szabályt, mely a további adatok bevonását leállítja abban az esetben, ha szignifikáns eredményt talál. Ennek a segítségével a klasszikus hipotézisvizsgálathoz képest akár hamarabb is levonhatunk következtetéseket a mintánkról, ami az adatgyűjtés által generált emberi, illetve a pénzügyi költségek nagyságát is jelentősen tudja csökkenteni.

## Rendezetlenségi probléma

Tegyük fel, hogy az alapfolyamat  $dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma X_t dB_t$  alakú. Egy véletlen változó írja le azt az esetet a pénzügyi piacon, amikor a bull marketből átmegy a bear marketbe. A bull market kifejezést olyan piac leírására használják, amely esetében a piacon elérhető legtöbb részvény értéke növekszik, míg a bear market esetén a legtöbb részvény értéke csökken. Elengedhetetlen a befektetők számára, hogy ezt a pillanatot minél gyorsabban, pontosabban felismerjék és ez alapján

hozzanak pénzügyi döntéseket. A leggyorsabb felismerésre Shiryaev 2002-ben(38), valamint Karatzas 2003-ban(39) publikált cikkében is mutat egy-egy példát:

$$V = \inf_{\tau} \{ \mathbb{P}(\tau < \theta) + c\mathbb{E}[(\tau - \theta)^+] \}$$

$$V = \min_{\tau} \mathbb{E}|\theta - \tau|,$$

ahol  $\mathbb{E}|\theta - \tau| = \mathbb{E}[(\tau - \theta)^+ + (\theta - \tau)^+] = \mathbb{E}[(\tau - \theta)^+] + \mathbb{E}[\theta] - \mathbb{E}[\tau \wedge \theta]$ .

A befektetők számára nem csak az átmenet idejének meghatározása a fontos, de a hasznossági függvényük maximalizálása is.

$$V(x) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}[U(X_{\tau})]$$

Ennek a problémának lehetséges megoldásai Gapeev és Peskir 2006-ban(40) publikált cikke szerint azon hasznossági függvények, melyek előállnak  $U(x) = \ln(x)$  vagy  $U(x) = x$  alakban.

## Optimális előrejelzési probléma

Ha egy befektetőnek eladásra szánt részvénye van, akkor azt a legmagasabb áron szeretné értékesíteni. Viszont annak az időpontnak a meghatározása egy igen nehéz feladat. Ha tegyük fel a részvény Brown-mozgást követ, akkor a befektetőnek az 1 időpont előtt kell döntést hoznia az alábbi függvény tekintetében:

$$V = \inf_{\tau \in [0,1]} \mathbb{E} \left( B_{\tau} - \max_{0 \leq t \leq 1} B_t \right)^2$$

2007-ben Toit és Peskir(41) adott megoldást a driftes Brown-mozgások optimális előrejelzési problémájára. Sok befektető technikai elemzést is végez, aminek során figyelembe veszik a támasz, illetve az ellenállás szinteket is. Angelis és Peskir 2016-ban(42) publikált munkájában az optimális előrejelzési modell segítségével nem csak a legmagasabb szintet, hanem a támasz és ellenállási szinteket is megadták:

$$V = \inf_{\tau \in [0,T]} \mathbb{E}|(B_{\tau} - \mathcal{L})|$$

ahol  $\mathcal{L}$  egy véletlen változó, ami a támasz vagy az ellenállás szintet jelöli az adott eloszlás esetén.

## Buy-low sell-high probléma

Ebben az esetben azt tesszük fel, hogy egy befektető akkor szeretné eladni egy eszközt, amikor annak diszkontált pénzáramlásai a lehető legtöbbet érnek. Erre publikált 2012-ben Van Khanh(11) egy hasznossági függvényt:

$$V(x) = \sup_{\tau \in [0,T]} \mathbb{E}[e^{-r\tau} X_{\tau}]$$

Ellenkező esetben, ha egy befektető egy eszközt szeretne megvásárolni, akkor azt a lehető legalacsonyabb áron szeretné megtenni, vagyis amikor a diszkontált pénzáramlásai a legkisebbek. Erre használható hasznossági függvényt szintén Van Khanh publikált 2014-ben(8):

$$V(x) = \inf_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E}[e^{-r\tau} X_\tau]$$

Valós piacokon a kereskedés nem ingyenes, így ha feltesszük, hogy egy adott eszköz eladása  $K$  költséggel jár az eladónak, akkor az általa elérhető hasznossági függvény a következő alakra módosul:

$$V(x) = \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (X_\tau - K)]$$

Shiryaev 2008-ban(32) publikált cikkében azt a problémát járta körbe, amikor egy befektető a lehető legmagasabb áron szeretné értékesíteni a meglévő eszközét úgy, hogy ennek alapjául az adott eszköz eddig elért maximális értéke szolgál:

$$V(x) = \inf_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E} \left[ 1 - \frac{X_\tau}{S_T} \right]$$

Dai és Zhong 2012-ben(9) publikált cikkében az  $S_T$  értéket az  $A_T$  áruk átlagával helyettesítette. Az  $A_T$  az alábbi módon áll elő:

$$A_T = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log X_v dv\right) & \text{geometriai közép esetén} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \log X_v dv & \text{aritmetikai közép esetén} \end{cases}$$

## Opció árazás

Számtalan különböző típusú opció elérhető a piacokon, amelyek megalkotásának célja és ezáltal a célfüggvényük is eltérő. A következőekben ezekből mutatok pár példát, illetve a szakdolgozatomban egy speciális esetre részletesebben is ki fogok térni.

Az amerikai opció esetén az opció birtokosa a lejárat előtt bármikor eladhatja vagy megvásárolhatja a mögöttes eszközt az előre lerögzített áron. (24)

$$V(x) = \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (X_\tau - K)^+]$$

Az orosz opció vevője a részvény vételi és a lehívási időpontja közötti időszakban felvett maximális árfolyamának diszkontáltját kapja. (25)

$$V(x, s) = \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbb{E}[e^{-r\tau} S_\tau]$$

Az ázsiai típusú opció egy olyan egzotikus opció, melynek lejáratkori értéke megegyezik az alaptermék lejáratkori árának és az opció élettartama alatti átlagárának különbségével, ha ez pozitív értéket ad, különben nulla. (43) (48)

$$V(x, t) = \sup_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}[e^{-r(\tau-t)}[\pm(X_\tau - A_\tau)]^+]$$

A lookback opció lehetővé teszi a tulajdonos számára, hogy az opciót a mögöttes eszköz legkedvezőbb árán hívja le az opció futamideje alatt. (44)

$$V(x, m, K) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(S_\tau - m_\tau)^+]$$

## Megoldó módszerek

Mivel az optimális megállási problémák csak a pénzügyek területén is igen sok, különböző problémát fednek le, így megoldó módszereik is hasonlóan széles skálán mozognak. Egy adott probléma esetén is számtalan különböző megoldó módszer nyújthat azonosan jó eredményt, viszont ezek összetettsége, valamint számításigénye már merőben eltérő lehet egymástól. A szakdolgozatom további részében egy adott probléma vonatkozásában konkrét példákkal is fogok szolgálni, hogy milyen megoldási módszerek léteznek, és ezek közül melyiket érdemes használni.

## 4. fejezet

# Opciók

A fejezet célja, hogy egy átfogó képet adjak a szakdolgozatomban szereplő opciókról és azok főbb tulajdonságairól.

## Európai opció

Az európai vanilla call (vételi) opció egy olyan pénzügyi szerződés, amely az opció birtokosának jogot, de nem kötelezettséget biztosít arra, hogy egy adott eszközt a jövő egy előre meghatározott időpontjában, előre meghatározott mennyiségben és áron megvásároljon. Az opció eladójának kötelessége részt venni az ügyletben, ha az opció birtokosa úgy dönt, hogy él az opció által biztosított jogával és lehívja azt. Az opció kiírója tetszőlegesen nagy veszteséget is elszenvedhet, ha a piac a víziójával ellentétes irányba változik. Ennek a potenciális kockázatnak a kompenzálására az opció vevőjének egy előre meghatározott összeget kell fizetnie, melyet az opció árának nevezünk. Az opcióval való kereskedés előtt meg kell határozni annak fair árát, ami nem teszi lehetővé a vele való kockázatmentes arbitrázst. (48)

Az európai vanilla opció értéke nagymértékben függ a mögötte lévő részvény árfolyamának jövőbeli mozgásától. Ha például az árfolyam emelkedik, és egyúttal jelenősen meghaladja a lehívási árat, akkor a call opció birtokosa nagy nyereséget fog elérni, míg a put opció birtokosa semmit sem fog keresni az adott ügyleten. Így ebben az esetben a call opció sokat ér, míg a put szinte semmit sem.

Az opciók árának analitikus meghatározásához szükség van olyan matematikai modellekre, melyek leírják az opció mögött álló részvény árfolyamának viselkedését.

Az európai vanilla call opció árazására 1973-ban Fischer Black és Myron Scholes(1), valamint Robert C. Merton(10) mutatott be egy olyan modellt, ami felteszi, hogy a mögöttes részvényárfolyam geometriai Brown-mozgást követ kons-



tans drifftel és volatilitással. Ez a modell Black-Scholes (vagy Black-Scholes-Merton) néven vált az egyik legismertebb opció árazási modellé.

Széles körben használják a pénzügyi piacokon az európai opciók elméleti árának meghatározásához, mely elég közel áll a piacon megfigyelhető valódi árakhoz. A képletben rejlő hibáktól függetlenül sok más, jóval összetettebb opciók árazási képletének megszületéséhez is hozzájárult, mint például az amerikai vanilla opcióéhoz.

## Amerikai opció

Az amerikai vanilla opció erősen hasonlít az európai verziójához, viszont míg az előző lejárat előtt bármikor, az utóbbi csak a lejárat pillanatában hívható le. Ez a korai lehívási jog teszi az amerikai opciókat értékesebbé az európaiakhoz képest. Viszont ezáltal az árazása is jóval összetettebb és sok esetben bonyolultabb is.

A korai lehívási jog létezése vezetett a változó határ problémához, mivel az árazási tartomány határai az idő előrehaladtával változnak és azokat a megoldás részeként kell meghatározni. Ezáltal az árazás egy nemlineáris problémává válik.

2006-ban Zhu publikált egy zárt árazó képletet(4), ami az amerikai call opció árát képes bármilyen pontossággal meghatározni. Ez volt az akkoriban elérhető legpontosabb megoldás, viszont a képlet kiértékelése sok időt vett igénybe.

A megoldást közelítő módszerek viszont ettől sokkal gyorsabbak, illetve elég nagy pontossággal képesek meghatározni a vanilla opció árát. Az amerikai típusú opciók árának meghatározására általában két nagy közelítő módszer családot szoktak használni: a numerikus, illetve az analitikus módszereket.

A numerikus módszerek közül érdemes kiemelni pár elterjedtebbet, mint például a véges differenciák módszerét(6), a binomiális fát(2), a Monte Carlo szimulációt (3) és a legkisebb négyzet módszerét(45). Az analitikus módszerre pedig példa a Laplace-transzformáció(7) és a kvadratikus közelítő módszer(5).

## Exotikus opció

Az opciók besorolása viszont nem csak a fent felsorolt két csoportba történhet, ugyanis léteznek sokkal összetettebb opciók is a pénzügyi világban, amit összefoglaló néven egzotikus opcióként szokás nevezni. Mivel egy ilyen típusú opció egy sokkal bonyolultabb pénzügyi problémára nyújt megoldást, így az árazása jóval összetettebb feladat, mely nagyban függ a felírt modelltől fajtájától is. (51)

Az egzotikus opciók igen változatos formát képesek felvenni, viszont a követ-

kező hat tulajdonság alapján sokkal könnyebben megfoghatóak: időfüggés, pénzáramlás, útvonalfüggés, dimenzió, rend, beágyazott döntések.

Az időfüggés alatt nem a Black-Scholes-képletben lévő kamatlábak, osztalék valamint volatilitás időbeli változását értjük, hanem a konkrét opciós szerződés időfüggőségét, amire példa az egyes időpontokban vagy időszakokban lehetséges korai lehívás lehetősége. Az ilyen típusú opciók numerikus módszerrel való árazása esetén elkerülhetetlen az idő diszkretizálása, ami fontos, hogy egybeessen az opció által meghatározott események bekövetkezésével.

Egy opció pénzáramlása lehet diszkrét, illetve folytonos is. Diszkrét esetben a szerződés értéke csak bizonyos időpontokba változik, vagy más néven ugrik az opció által biztosított pénzáramlás miatt, míg folytonos esetben minden időpillanatban bekövetkezik ez a pénzáramlás. Erre a második esetre egy példa, amikor az opció tulajdonosa minden olyan nap kap egy azonos összegű kifizetést, ha az adott részvény egy bizonyos szint felé emelkedik.

Sok opció kifizetése nem csak a mögöttes eszköz lejárati pillanatában felvett értékétől, hanem az általa megtett út alakulásától is függ. Az ilyen típusú opciókat útvonalfüggőnek is szokás nevezni, amin belül megkülönböztetjük a gyenge és az erős útvonalfüggőket is. Gyenge útvonalfüggő opcióra példa a barrier opció, ami akkor aktiválódik vagy szűnik meg, amikor a mögöttes termék ára meghalad egy előre meghatározott szintet. Erős útvonalfüggő opcióra pedig az ázsiai opció a példa, mely árának meghatározása során szerepet játszik a mögöttes termék áralakulásának átlaga egy előre meghatározott időintervallumon.

A dimenzió szó alatt a mögöttes független változókra kell gondolnunk. Például egy vanília opció esetén a dimenzió kettőnek tekinthető, hiszen egy ilyen fajta opció értékét két független változó határozza meg: az idő  $t$  és a mögöttes eszköz ára  $S$ . Általában a gyengén útvonalfüggő és a nem útvonalfüggő opciók két dimenziósak szoktak lenni. Három dimenziósak tekinthetjük az erősen útvonalfüggő opciókat, hisz ebben mindenféleképpen megjelenik egy olyan új változó, mely a mögöttes eszköz által bejárt utat kell, hogy tárolja. Továbbá akár olyan három vagy több dimenziós opció is elképzelhető, melynek az értéke az idő dimenzióin túl két vagy több mögöttes eszköz árának alakulásától is függ.

Az exotikus opciók esetén a rendre is érdemes kitérni. Első rendűnek nevezzük azokat az opciókat, melynek a kifizetése csak a mögöttes eszköztől függ, amelyet közvetlenül modellezünk. Magasabb rendű opciókról akkor beszélünk, ha az opció kifizetése és ezáltal értéke egy másik opció(k) értékétől függ közvetlenül.

Beágyazott döntéseknek tekinthetőek azok az opcióba beépített lehetőségek, amiknek a segítségével az opció tulajdonosa élhet egy előre meghatározott időpontban vagy időintervallumba és ezáltal egy kedvezőbb helyzetbe kerülhet. Erre egy példa az amerikai típusú opciókban lévő korai lehívás lehetősége, aminek megfelelő megválasztása esetén maximalizálható az opció által kínált haszon vagy más esetben minimalizálható a lehetséges veszteség nagysága.

## Példák exotikus opciókra

- **ázsiai opció**  
Az ázsiai opció végső kifizetése függ a mögöttes eszköz egy bizonyos időszak alatt elért átlagárától.
- **barrier opció**  
A barrier opció akkor aktiválódik vagy szűnik meg, ha a mögöttes eszköz egy előre meghatározott szintet, más néven barrier elér.
- **chooser opció**  
A chooser opció az opció tulajdonosának egyfajta jogot biztosít arra, hogy az opció futamideje során egy előre meghatározott időpontban döntsön arról, hogy call vagy put opciót szeretne-e.
- **lookback opció**  
A lookback opció kifizetése az opció élettartama alatt bekövetkező legalacsonyabb vagy legmagasabb eszköz ártól függ.
- **binary opció**  
A bináris opció kifizetése egy fix összeg, ha a mögöttes eszköz ára elér egy előre meghatározott szintet, minden más esetben pedig nulla.

## Árazási módszerek

Az exotikus opciók összetettsége miatt az árazásuk is jóval bonyolultabb feladat, mint egy sima európai vagy amerikai opcióé. Sok esetben zárt képlet sem létezik mindegyik opcióra, viszont a következő módszerek segítségével meghatározható az áruk. A módszerek működését részletesen taglalom a (7.) fejezetben.

- Monte Carlo szimuláció
- Binomiális fa modellek
- Analitikus módszerek
- Numerikus módszerek
- Sztochasztikus volatilitás modellek

## 5. fejezet

# Ázsiai opciók

Az ázsiai opciót 1987-ben David Spaughton és Mark Standish dolgozta ki a kereskedelmi forgalomban használható nyersolaj átlagárához kötött opciókhoz. Az ázsiai megnevezés csupán csak onnan ered, hogy a technika kidolgozása során mindketten Tokióban tartózkodtak egy üzleti út kapcsán. (52)

Az ázsiai opció az egzotikus opciók útvonalfüggő családjába sorolható, ugyanis az opció kifizetése az alapjául szolgáló eszköz árának időbeli alakulásától függ egy átlagolási módszeren keresztül. A valóságban ez általában olyan opciós szerződéseken keresztül valósul meg, mely során annak megvásárlója jogot szerez arra, hogy az opcióhoz tartozó alaptermék megvásárolja egy előre meghatározott időintervallumon elért átlagárért cserébe. Az ázsiai opciókkal elsősorban az OTC piacokon, vagyis a tőzsdén kívül kereskednek, viszont ezen kívül még megtalálhatóak az árucikkek, illetve a devizákkal összefüggésbe hozható kereskedések során is.

Az opció kifizetésfüggvényében szereplő átlagolási technikák számos módon megnyílvánulhatnak. Megkülönböztetjük a fixed-strike vagy más néven average-rate típusú ázsiai opciókat, ahol az alapterméknek az átlag tekinthető, valamint a floating-strike típusú ázsiai opciókat, ahol az opció lehívási ára az alaptermék áralakulásának átlagával egyezik meg. Az átlag számítás módszereiről is érdemes pár szót szólni. Ezen számítás alapjául szolgálhat diszkrét, illetve folytonosan megfigyelt adat is egyaránt. Továbbá az átlagolás két leteleterjedtebb módszere ez esetben az aritmetikai, más néven számtani, illetve a geometriai, másik néven mértani átlag számítás. Ezen kívül pedig akár súlyozott átlaggal is számolhatunk, ahol a súlyok megválasztása lehet egyenlő vagy akár tetszőleges is. Ezen kívül, mint oly sok más opció esetén, itt is megkülönböztetünk európai típusú ázsiai opciókat, valamint amerikai típusú ázsiai opciókat is egyaránt.

Az amerikai típus a szakirodalomban néha ameriasian vagy hawaiian option néven is feltűnik, míg az európai változatot egyes cikkek eurasian néven említik. Az ázsiai opciókkal kapcsolatos tanulmányok nagy része legfőképpen az európai típusal foglalkozik, ugyanis az amerikai típusban rejlő korai lehívás lehetősége

részben ellentmond az ázsiai opciók megalkotásának céljával. Ez nem volt más, mint hogy ennek segítségével elkerülhessék, hogy a spekulánsok felhajtsák a lejáratához közeli alaptermék árakat, melyek segítségével nagyobb nyereségre tehetnek szert. Kemna és Vorst(36) is érvelt az amerikai típusú ázsiai opciók ellen, ugyanis véleményük szerint ez újra visszahozná az ármanipuláció lehetőségét a piacra, ha rögtön az átlagolás megkezdését követően lehívnák az opciót. Zhang(37) viszont számszerű eredménnyel támasztotta alá, hogy az ilyen fajta kockázat szinte elhanyagolható. Ezekről függetlenül viszont a valóságban a kereskedések nagy része az amerikai típussal valósul meg.

Az európai típusú ázsiai opciók esetén az analitikus árazási módszerek még mindig aktív kutatási területet képeznek, így ezen opciók árazása esetén a numerikus megközelítések váltak közkedvelté. Árazásuk több különböző különböző eljárással is megvalósulhat, mint például a Taylor-féle kiterjesztés, a Laguerre-sorozat kiterjesztése és a Laplace-transzformáció inverziós technikája nyomán is.

Az amerikai típus esetén is a numerikus módszerek váltal elterjedtebbé az árazásában. Ilyen például az 1993-ban Hull and White(33) által bemutatott binomiális fa modell vagy a 2001-ben Longstaff és Schwartz(45) által bemutatott least square Monte Carlo módszer, ami az alap Monte Carlo módszer egy továbbfejlesztésének is tekinthető.

## Átlagolás

Az ázsiai opciók esetén fontos szerepet játszanak az átlagok, melyet  $A(t)$  fog jelölni a továbbiakban. A következőekben felsorolom a négy legerjedtebb eset konkrét képletét.

Aritmetikai (számtani) átlag diszkrét minta esetén:

$$A(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$$

Aritmetikai (számtani) átlag folytonos minta esetén:

$$A(t) = \frac{1}{n} \int_1^t S(u) du$$

Geometriai (mértani) átlag diszkrét minta esetén:

$$A(t) = \left( \prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Geometriai (mértani) átlag folytonos minta esetén:

$$A(t) = \exp\left\{\frac{1}{n} \int_1^t \ln S(u) du\right\}$$

## Kifizetésfüggvény

Az ázsiai opció kifizetésfüggvényének alakulása függ attól, hogy call vagy put opciót szeretnénk-e ársani, valamint továbbá attól is, hogy fixed vagy floating típusú strikeről beszélünk az adott esetben.

Fixed-strike call opció kifizetésfüggvénye a  $t$  időpillanatban:

$$\max(0, A(t) - K)$$

Fixed-strike put opció kifizetésfüggvénye a  $t$  időpillanatban:

$$\max(0, K - A(t))$$

Floating-strike call opció kifizetésfüggvénye a  $t$  időpillanatban:

$$\max(0, S(t) - A(t))$$

Floating-strike put opció kifizetésfüggvénye a  $t$  időpillanatban:

$$\max(0, A(t) - S(t))$$

## Ázsiai opció árazási módszerei

Az európai, valamint az amerikai típusú ázsiai opciók árának meghatározása számtalan különböző módszer segítségével is megvalósulhat.

### Zárt képlet

A jelenleg elérhető szakirodalmak tekintetében csak az olyan ázsiai opciók esetén érhető el zárt árazási formula, amelyek geometriai átlagolást használnak. 1990-ben Kemna és Vorst(49) publikálták cikkükben az ilyen típusú opciók zárt képletét. Az emögött lévő gondolat csupán annyi volt, hogyha a mögöttes eszköz áraknak vesszük a geometriai átlagát, akkor az lognormális eloszlást fog követni, míg ha ugyanezen eszközöknek vesszük az aritmetikai átlagukat, az már nem teljesíti ezt a feltételt.

Tehát a geometriai esetben a zárt képlet nem lesz más, mint:

$$\begin{aligned}\text{call} &= S_0 e^{(b-r)(T-T_0)} N(d_1) - K e^{-r(T-T_0)} N(d_2) \\ \text{put} &= K e^{-r(T-T_0)} N(-d_2) - S_0 e^{(b-r)(T-T_0)} N(-d_1)\end{aligned}$$

ahol  $r$  a kockázatmentes kamatlábat, a  $T_0$  a kezdeti, míg  $T$  a lejárat időpontját jelöli, továbbá pedig

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (b \mp 0,5\sigma_A^2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}$$

A  $\sigma_A$  jelöli a kiigazított volatilitást, a  $b$  pedig az osztalékhozamot

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{1}{2} \left( r - D - \frac{\sigma^2}{6} \right)$$

ahol a  $\sigma$  a megfigyelt volatilitást jelöli, míg a  $D$  az osztalékhozamot.

### Közelítő formula

Mint azt az előző részben láthattuk jelenleg nem létezik zárt árazó képlet az aritmetikai átlagoláson alapuló ázsai opciókra. 1991-ben viszont Turnbull és Wakeman (50) publikált a call és a put opcióra is egy közelítő képletet. Ezekhez feltették, hogy a mögöttes termék árának aritmetikai átlaga közelítőleg lognormális eloszlást követ, valamint az opció árazásához az átlag első, illetve második momentumának használatát javasolták. Ez esetben az opciók árát a következő közelítő képletek adják meg:

$$\begin{aligned}\text{call} &\approx S e^{(b-r)T^*} N(d_1) - K e^{-rT^*} N(d_2) \\ \text{put} &\approx K e^{-rT^*} N(-d_2) - S_0 e^{(D-r)T^*} N(-d_1)\end{aligned}$$

ahol a  $T^*$  a lejáratig hátralévő időt jelöli, ami kezdetben pont  $T^* = T$  egyezik meg, későbbiekben pedig a  $T^* = T - \tau$ , ahol  $\tau$  az eltelt időt jelöli.

$$d_1 = \frac{\ln SK + (b + 0.5\sigma_A^2)T^*}{\sigma_A \sqrt{T^*}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A - \sqrt{T^*}$$

ahol a kiigazított volatilitás és az osztalékhozam a következőképpen alakul

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln M_2}{T} - 2b}$$

$$b = \frac{\ln M_1}{T}$$

A képletekben szereplő  $M_1$  és  $M_2$  az első és a második momentumot jelöli, feltéve, hogy az átlagolási időszak még nem kezdődött el.

$$M_1 = \frac{e^{(r-D)T} - e^{(r-D)\tau}}{(r-D)(T-\tau)}$$

$$M_2 = \frac{2e^{(2(r-D)+\sigma^2)T} S^2}{(r-D+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)T^*} + \frac{2S^2}{(r-D)T^2} \left( \frac{1}{2(r-D)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-D)T}}{r-D+\sigma^2} \right)$$

Ha az átlagolás alapjául szolgáló időszak már elkezdődött, akkor a kötési ár az alábbi képlet szerint fog alakulni, ahol a  $T$  továbbra is az eredeti lejáratot, a  $T^*$  a lejáratig hátralévő idő, a  $K$  az eredeti kötési árat és az  $S_{avg}$  a mögöttes eszközár alakulásának átlagát jelöli.

$$K_A = \frac{TK}{T^*} - \frac{(T-T^*)S_{avg}}{T^*}$$

## Fán való árazás

Az ázsiai típusú opciók árazása binomiális, illetve akár trinomiális fa segítségével is lehetséges, melyek első dokumentált megjelenései Hull és White 1993-ban, illetve 1994-ben(33) publikált cikkeihez köthetőek. Az opció értéke bármely időpontban meghatározható, hiszen az csak a megtett pályán felvett átlagártól függ csupán.

Árazása során az alap binomiális fa árazásából indulunk ki, de mivel az opció értékének meghatározása során kulcsfontosságú szerepet tölt be annak átlagára, így létre kell hozni egy kiegészítő rácsot is, amely leköveti az átlagarakat az egyes időpontokban. Az opció kifizetését ismerjük a lejárat időpontjába és ezt felhasználva visszafelé haladva minden egyes csomópontba meg kell határozni az opció értékét a következő képlet segítségével:

$$V(i, j) = e^{-r\Delta t} [pV(i+1, j+1) + (1-p)V(i+1, j)]$$

ahol  $V(i, j)$  az opció értéke az  $i$ -edik időszak  $j$ -edik csomópontjában. Minden időlépésnél frissíteni kell az átlagarakat, valamint az opció kifizetését is.

## Véges differenciák módszere

1995-ben Rogers és Shi(53) publikálta módszerét, ami egy egydimenziós parciális differenciálegyenlet segítségével írja fel az ázsiai opció értékét, melyenek egyenlete a következőképpen fog alakulni:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - (\rho(t) + rx) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = 0$$



A peremfeltétel megválasztása függ az ázsiai opció fajtájától, így a floating-strike esetben

$$f(T, x) = (1 + x)$$

lesz, míg a fixed-strike ázsiai opció esetén

$$f(T, x) = x$$

Ez a parciális differenciál egyenlet a véges differenciák módszerével megoldható és a floating-strike esetben az opció ára  $S_0 f(0, 0)$  lesz, míg fixed-strike esetén  $S_0 f\left(0, \frac{K}{S_0}\right)$ . A megoldás során probléma léphet fel a rövid lejáratú idők, illetve alacsony volatilitás esetén.

## Monte Carlo szimuláció

Mint azt már korábban említettem az ázsiai opciók erősen útvonalfüggő opciónak számítanak, vagyis az áruk meghatározásához szükség van az alaptermék áralakulásának ismeretéhez. Éppen ezért vált népszerűvé az ázsiai opció Monte Carlo szimulációval való beárazása.

Ennek alapjául az szolgál, hogy feltesszük, hogy az alaptermék geometriai Brown-mozgást (GBM) követ és a bemeneti paramétereink segítségével minden egyes időpillanatra meghatározzuk az alaptermék áralakulását a következő módon:

$$S_{t+1} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\sqrt{dt}z_t}$$

ahol  $dt$  az időlépés hosszát, míg a  $z_t$  egy normális eloszlású véletlen változót jelöl. Minden trajektória esetén eltároljuk ezeket a közbülső értékeket is, ugyanis ezek segítségével tudjuk csak meghatározni az adott trajektória átlagos árát. Erre azért van szükség, mert ennek segítségével tudjuk meghatározni az opció lejáratkori kifizetését, amit ezt követően vissza is diszkontálunk. Ezzel a módszerrel több trajektóriát is generálunk majd vesszük a visszadiszkontált kifizetések átlagát, mely megadja számunkra az opció árát.

## Monte Carlo control variate technika

A Monte Carlo szimuláció során a pontosság növelése érdekében vagy a szimulációk számát érdemes növelni, vagy a varianciát érdemes csökkenteni különböző módszerek segítségével. Az ázsiai opció esetén a control variate technika egy nagyon jó eszköz, melynek a segítségével a szimulációk számának megnövelése nélkül kaphatunk a korábbinál pontosabb eredményt. Ez a módszer azért alkalmazható az ázsiai opciók esetén, mert az aritmetikai és a geometria típusú átlagolással kapott eredmény hasonló egymáshoz, továbbá pedig a geometriai esetnek létezik zárt képletes alakja. A módszer alkalmazása során generálni kell trajektóriákat, vagyis jelen esetben alaptermék árfolyamokat, amelyek esetén ki kell számítani

az opció értékét mindkét esetre nézve. Jelölje  $V_A^*$  az így kapott aritmetikai átlagolással készült ázsiai opció árat, míg  $V_G^*$  a geometriai típusút. Tudjuk, hogy a geometriai esetben létezik zárt képlet, így az általa adott opció árat jelölje  $V_G$ . A control variate módszer képletébe behelyettesítve ezeket megkaphatjuk az aritmetikai átlagolással kapott valódi opció árat:

$$V_A = V_A^* - V_G^* + V_G$$

### Least square Monte Carlo módszer

Az amerikai típusú ázsiai opciók árának meghatározásához használható a least square Monte Carlo módszer (LSMC) is. Ennek alapjául a Longstaff-Schwartz algoritmus szolgál, amit eredetileg amerikai opciók árazására fejlesztettek ki.

Ázsiai opció esetén először generálni kell a Monte Carlo szimuláció segítségével jövőbeli részvényárakat. Ezt követően minden egyes szimulált trajektória esetén meg kell határozni az opció kifizetését, amihez szükséges az adott trajektórián felvett átlagos árának meghatározása is. A módszer egyedisége abban rejlik, hogy egy regresszió illesztének segítségével határozzuk meg azt minden egyes trajektória esetén, hogy mikor lesz érdemes élni az opciós jogunkkal és lehívni azt. Ezt az eljárást visszafelé haladva végezzük el, ugyanis lejáratkor ismert számunkra az opció értéke. Ha azt meghatároztuk, akkor minden további lépésnél regressziót illesztünk a diszkontált jövőbeli kifizetésekre az aktuális árak függvényében. Ennek a segítségével meg tudjuk becsülni a folytatási értéket (continuation value), vagyis, hogy érdemes-e élni az opciós jogunkkal vagy sem. Ha az opció lehívásából nagyobb hasznunk származik, mint a folytatási érték, akkor érdemes az opciót azonnal lehívni, míg ellenkező esetben tartjuk tovább az opciónak legalább a következő időpontig. Végül pedig a diszkontált kifizetések átlagát vesszük, mely megadja az ázsiai opció árat.

## 6. fejezet

### Szimuláció

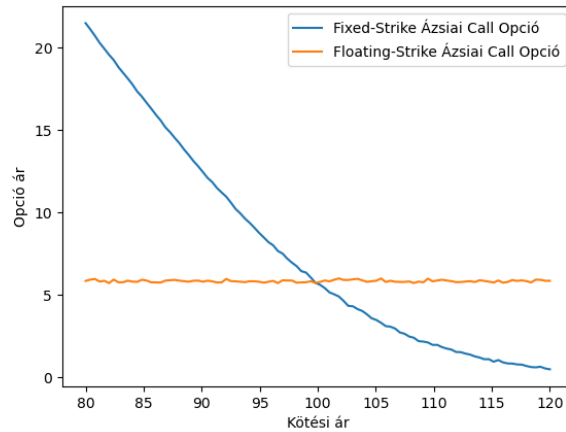
Ebben a fejezetben az előző fejezetben bemutatott módszerek segítségével árazom be az ázsiai opció különböző verzióit. A szimulációkhoz a következő paraméter értékeket fogom használni, melyektől az esetleges eltérést külön hangsúlyozni fogom. Itt az  $S_0$  az alaptermék kezdő árfolyamát, a  $K$  a kötési árfolyamot,  $T$  a lejáratot években, az  $r$  a kamatlábat, a  $\sigma$  a szórást, a  $numsim$  pedig a szimulált trajektóriák számát jelöli. Ezekon kívül a szimulációk során meg fog jelenni a  $numper$  paraméter, mely a periódusok számát fogja jelölni.

paraméter	$S_0$	$K$	$T$	$r$	$\sigma$	$numsim$
érték	100	90	1	0,05	0,2	10000

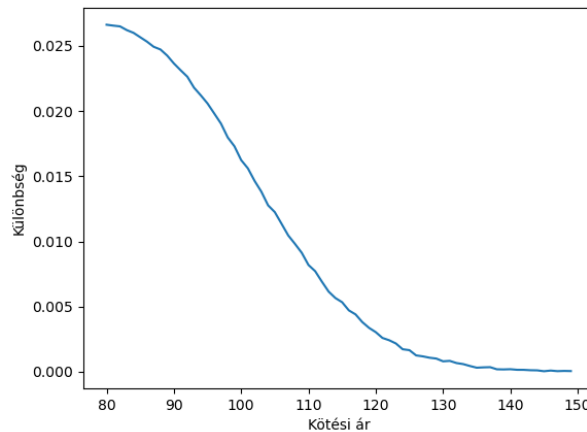
6.1. táblázat. Szimulációkhoz használt alapparaméterek.

A fixed-strike, illetve a floating-strike típusú ázsiai opciók közötti különbségek leginkább akkor mutatkoznak meg, amikor azonos paraméterek mellett generálunk szimulációkat a Monte Carlo módszer segítségével. Ebből is látszik, hogy a kötési árfolyamnak a floating-strike esetben nincs jelentősége, ahogy azt a definíciójából már láthattuk, csupán csak az alaptermék áralakulásának és az átlagolási módszer megválasztásának. A szimuláció alapjául a (6.1) paraméterek szolgálták és az opció árát  $K = 80$  és  $K = 120$  között minden kötési árfolyamra lefutattam.

Az ázsiai opciók árának meghatározása során fontos figyelembevenni az átlagolás módját, ami lehet aritmetikai és geometria típusú is. A (6.2) ábrán az aritmetikai és a geometriai átlagolással meghatározott árak különbsége látható különböző kötési árfolyamok mellett. Más paraméterek mellett is az aritmetikai átlagolással meghatározott opció árak bizonyultak magasabbnak, mégha ezen kettő közti különbség minimálisnak is mondható. Az ábra az (6.1) paraméterek alapján készült a Monte Carlo szimuláció segítségével.

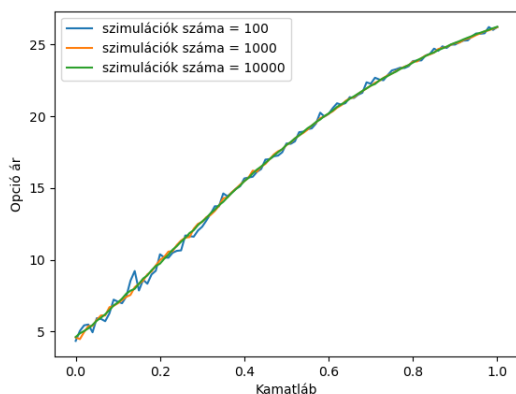


6.1. ábra. Fixed-strike és floating-strike típusú ázsiai opciók áralakulása különböző kötési árak mellett.

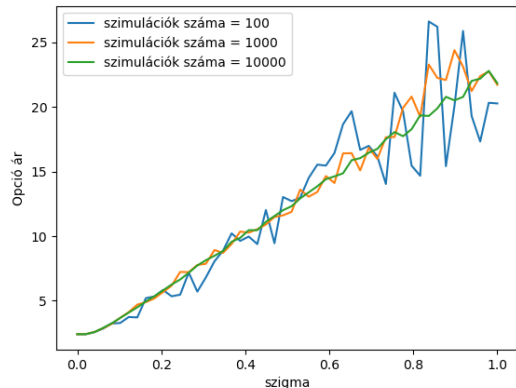


6.2. ábra. Az aritmetikai és a geometriai fixed-strike ázsiai opció árának különbsége különböző kötési árak mellett.

A kamatláb növekedésének hatására az opció ára is nőni fog. Ebben az esetben a Monte Carlo módszert különböző szimuláció méret esetén is lefutattam, viszont az így kapott eltérések között minimális volt az eltérés, ami a (6.3) ábrán látható. A volatilitás növelésének hatására is növekszik az opció értéke. Ha a (6.4) ábrát megfigyeljük, láthatjuk, hogy komoly eltérések figyelhetők meg a különböző szimuláció méretek esetén, hisz az alaptermék ára a volatilitás növelésének hatására jobban kileng. Viszont ha ez esetben növeljük a szimulációk számát, akkor sokkal stabilabb eredményt kapunk az opció árának alakulására. Az ábrákon a fixed-strike ázsiai opció értékek láthatóak, melyek az (6.1) paraméterek alapján készültek.

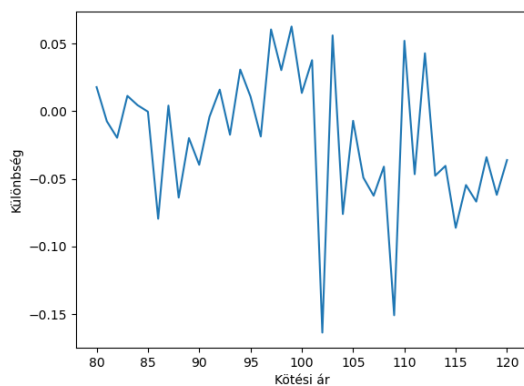


6.3. ábra. Az opció árának alakulása különböző kamatlábak esetén.

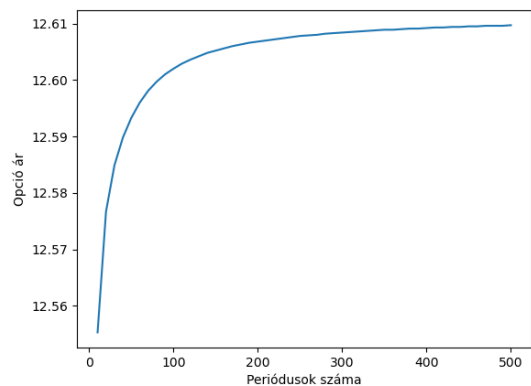


6.4. ábra. Az opció árának alakulása különböző szigma értékek esetén.

Az európai típusú fixed-strike ázsiai opció árazása a Monte Carlo szimuláció mellett a binomiális fa segítségével is lehetséges. A (6.5) ábra alapján látszik, hogy a két módszer közti eltérés minimális, viszont egyértelműen nem megmondható, hogy melyik módszer ad magasabb vagy alacsonyabb opció értéket azonos bemeneti paraméter esetén. A Monte Carlo szimuláció az (6.1) táblázat paramétereinek alapján készült, a binomiális fa modell pedig ezt kiegészítve a  $numper = 100$  alapján. A binomiális fa esetén a periódusok számának növelése hatására az opció ára konvergál egy adott értékhez, ami a (6.6) ábrán is látszik.



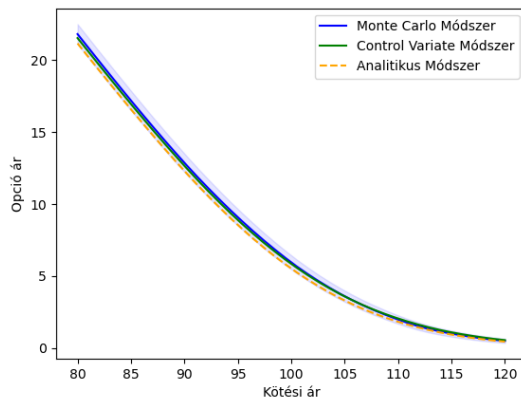
6.5. ábra. A Monte Carlo és a binomiális fa által kapott opció árak különbsége különböző kötési árak mellett.



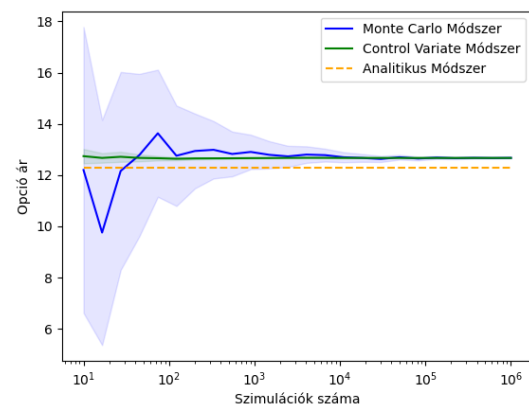
6.6. ábra. A fixed-strike ázsiai opció árának alakulása különböző periódusok mellett a binomiális fa modellben.

A control variate módszer jól alkalmazható az ázsiai opciók esetén is. A következő szimulációban a Monte Carlo Módszer a sima MC szimulációval kapható aritmetikai típusú opció árának alakulását jelöli, az Analitikus Módszer a geometriai típusú ázsiai opció zárt képlettel kapható árat, míg a Control Variate Módszer a control variate technikával meghatározott aritmetikai típusú ázsiai opció árát jelöli. A (6.7) ábrán is látszik, hogy a Monte Carlo módszerrel és a control variate

módszerrel meghatározott opció árak minimális eltérést mutatnak azonos paraméterekből szimulált minták esetén. Viszont, ha a szimulációk számát növeljük, akkor a control variate módszer már egészen minimális szimuláció szám esetén is stabil eredményt ad, amire a Monte Carlo módszer esetén közel 10000 szimulációra lenne szükség. Ezen kívül azt is láthatjuk, hogy a konfidencia intervallum jóval kisebb a control variate módszer esetén, mint a másik esetben. Ez is leolvasható a (6.8) ábráról.

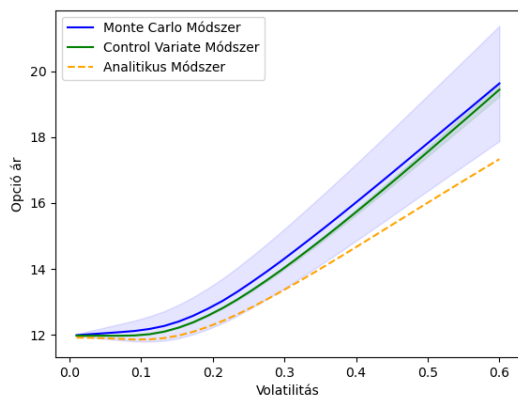


6.7. ábra. Az ázsiai opciók árának alakulása a kötési ár függvényében.

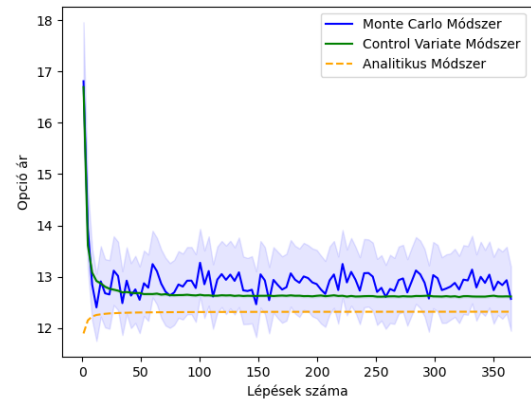


6.8. ábra. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző szimulációk esetén.

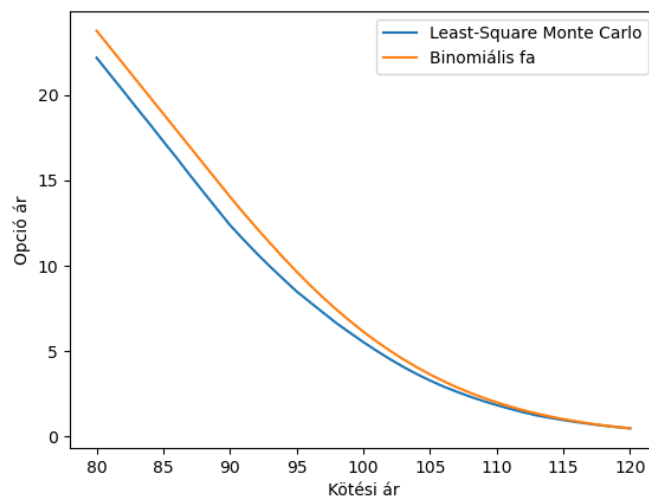
A volatilitás paraméter növelésének hatására az opció ár az analitikus, Monte Carlo, valamint a control variate módszer esetén is növekszik. Ezen kívül a (6.9) ábráról azt is megfigyelhetjük, hogy a volatilitás paraméter hatására az opció alaptermékének ára jóval nagyobb kilengéseket produkál, aminek hatására a Monte Carlo szimulációnál a konfidencia intervallum is szélesebbé válik. A control variate esetben a megnövekedett volatilitás hatására is minimális vastagságú marad a konfidencia intervallum. Láthatjuk, hogy a (6.10) ábrán, hogy a lépések száma már egészen minimális érték esetén is megbízható opció árat ad a control variate esetben, míg látható, hogy ehhez képest igen magas lépés szám esetén is igen volatilis alakul az opció ára a sima Monte Carlo szimuláció esetén. Mint azt ahogy a szakdolgozatom korábbi fejezeteiben is kifejtettem az ázsiai opciók esetén az európai verzió mellett létezik amerikai típusú is. Egy amerikai típusú ázsiai opció árazása több módszerrel is lehetséges, de ezek közül a két legelterjedtebb a least square Monte Carlo módszer és a binomiális fával történő árazás. A (6.11) ábráról is jól látszik, hogy a binomiális fával meghatározott árak különböző kötési árak mellett is magasabb opció árat mutatnak a másik módszerhez képest úgy, hogy azonos paraméter készletből lettek szimulálva.



6.9. ábra. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző volatilitások mellett.



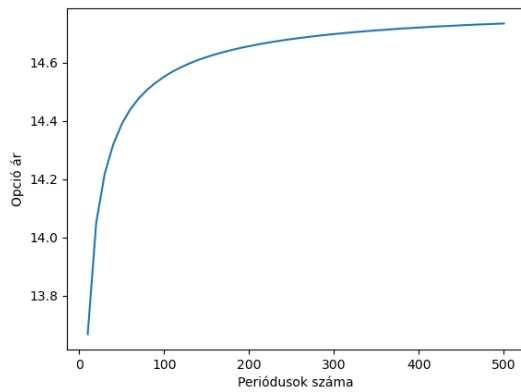
6.10. ábra. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző lépés számok mellett.



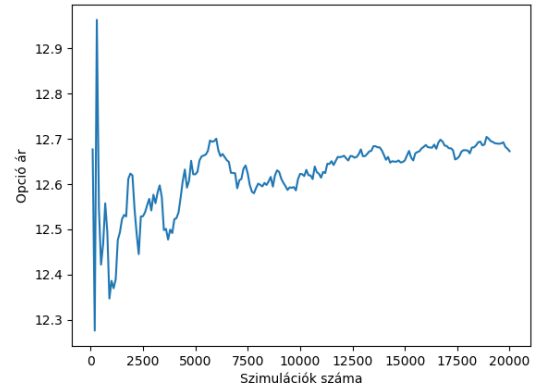
6.11. ábra. Az amerikai típusú ázsiai opció árának alakulása.

A (6.12) ábráról is látszik, hogy az amerikai típusú ázsiai opció esetén alkalmazott binomiális fa modell is a periódusok számának növelésének hatására egy konkrét árhoz fog konvergálni. A least square Monte Carlo módszernél a szimulációk számának növelésével az opció ára szép lassan kezd konvergálni egy fix érték felé, viszont már igen magas szimuláció szám esetén is megfigyelhető egyfajta bizonytalanság az opció árának meghatározásánál. Mivel magas szimuláció szám esetén a programkód futása igen időigényes, így ez esetben, akármennyire is magasabb opciós árat ad a binomiális fával meghatározott modell, mégis a rövidebb futtatási sebessége sokkal szimpatikusabbá teszi.

Végül pedig érdemes összehasonlítani az európai, illetve amerikai típusú ázsiai opciók áralakulását. A (6.14) ábrán az európai opció árak a Monte Carlo szimuláció segítségével készültek, míg az amerikai verzió a least square Monte Carlo módszerrel. Igaz, hogy mindkét módszer alapja a Monte Carlo szimuláció, vi-

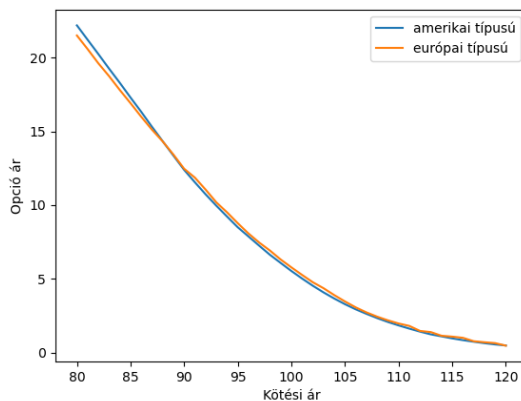


6.12. ábra. Az ázsiai opció árának alakulása különböző periódus szám mellett a binomiális fa modellben.

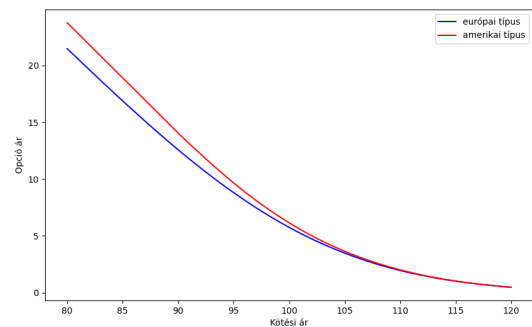


6.13. ábra. Az ázsiai opció árának alakulása különböző szimuláció szám mellett a LSMC esetén.

szont ez esetben nem kijelenthető, hogy azonos bemeneti paraméterek mellett az amerikai verzió ára magasabb lesz minden kötési ár esetén. Ez a különbség a módszerek elvi eltéréseiből, illetve az LSMC módszer regressziós illesztéséből adódhat. A (6.15) ábrán viszont már jól láthatjuk, hogy az amerikai verzió ára minden kötési ár mellett magasabb lesz az európai verzió árához képest. Ez esetben az európai és az amerikai binomiális fa modell is azonos paraméterek alapján lett szimulálva.



6.14. ábra. Az ázsiai opció árának alakulása európai, illetve amerikai típus esetén a Monte Carlo szimulációban.



6.15. ábra. Az ázsiai opció árának alakulása európai, illetve amerikai típus esetén a binomiális fa modellben.

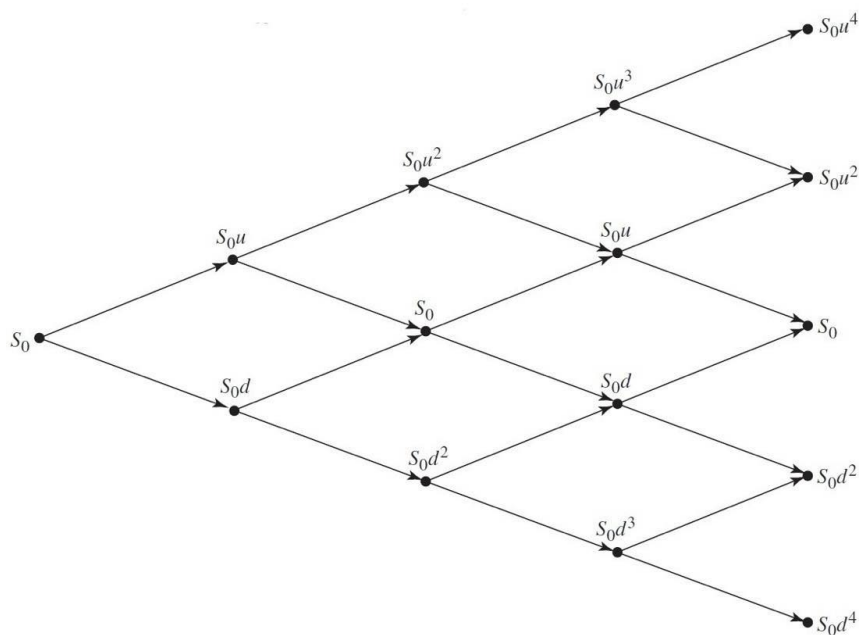


## 7. fejezet

# Módszerek

## Binomiális fa modell

Az opció árazó módszerek egyik legelterjedtebb fajtája a binomiális fa modell. A módszer megalkotása Cox, Ross és Rubinstein nevéhez köthető, akik 1979-ben publikálták ezt tanulmányukba(54)(47).



7.1. ábra. Binomiális fa modell. Kép forrása: (47)

Először is feltesszük, hogy a vizsgált piacon nincs arbitrázs, továbbá létezik egy részvény, mely a  $t = 0$  időpillanatban  $S_0$  értéket vesz fel, végül pedig erre a részvényre létezik egy opció, mely  $T$  időpontban jár le és az értéke éppen  $f$ . A részvény árfolyama a kezdeti  $S_0$  értékből kétfelé is tud ágazni. Felfelé mozgás esetén  $S_0u$  lesz az értéke, ahol  $u > 1$ , míg lefelé mozgás esetén az  $S_0d$  értéket fogja

felvenni, ahol  $d < 1$ . A részvény megváltozása százalékosan az előző időszakhoz képest felfelé mozgás esetén  $u - 1$ , míg lefelé mozgásnál  $1 - d$ . A részvény árának változása befolyásolja az opció értékét is, így felfelé mozgás esetén az opció értéke  $f_u$  lesz, míg lefelé mozgásnál  $f_d$ .

Tegyük fel, hogy adott egy portfóliónk, mely áll  $\Delta$  darab long részvény pozícióból és egy short opció pozícióból. Ha a részvény ára felfelé mozdul, akkor a portfóliónk értéke az első időszak végén  $\Delta S_0 u - f_u$  lesz, míg a másik esetben  $\Delta S_0 d - f_d$ . Ha ezt a kettőt egyenlővé tesszük egymással és kifejezzük belőlük a  $\Delta$  értékét, akkor a portfóliónk kockázatmentes lesz. Továbbá, hogy ne legyen arbitrázs ezen a piacon, a kockázatmentes kamatlábon kell kereskedni.

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Ebből látszik, hogy a  $\Delta$  az opció árának és a részvényárfolyam megváltozásának a hányadosa. Jelölje  $r$  a kockázatmentes kamatlábat, aminek a segítségével kifejezhető a portfólió jelenértéke, ami nem más, mint a  $(\Delta S_0 u - f_u) e^{-rT}$ . Ezen kívül tudjuk, hogy ez megegyezik a portfólió létrehozásának költségével, ami  $\Delta S_0 - f$ , így ha ezeket egyenlővé tesszük egymással, akkor kifejezhető lesz belőlük az  $f$  értéke.

$$f = \Delta S_0 (1 - u e^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Itt  $\Delta$  helyére behelyettesíthetjük a fenti képletet, majd az egyenletet átrendezve a következő képletet kapjuk:

$$f = e^{-rT} [p f_u + (1 - p) f_d],$$

ahol  $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$  értékkel. Ez az egyenlet teszi lehetővé egy opció beárazását abban az esetben, ha a részvényárfolyamok mozgását egy egylépéses binomiális fa adja meg. Az egyenlethez csupán csak arra volt szükségünk, hogy a piacon ne legyen arbitrázs.

A származtatott termékek árazása lehetséges kockázatmentes mérték szerint is, ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy egy származtatott termék értékének meghatározásakor feltesszük, hogy a piacon lévő befektetők kockázatmentesek, vagyis nagyobb kockázat vállalásért cserébe sem várnak el nagyobb hozamot. Persze a való világ nem feleltethető meg ennek a kockázatmentes világnak, hiszen a befektetők nagyobb kockázat vállalásáért cserébe magasabb hozamot várnak el. Viszont az opció árának kockázatmentes mérték szerinti beárazása egyúttal megadja a valós árat is, ami által eltekinthetünk attól az információ mennyiségtől, ami az opció vevői, illetve eladói oldalának kockázatkerülési hajlandóságát adja meg. Az opciók alapvetően kockázatos befektetési formának számítanak, viszont az árképzésüket csak a mögöttes részvény árfolyamának megváltozása határozza meg, az egyes befektetők kockázati preferenciái nem. Amint a piac változásainak megfelelően az egyes befektetők kockázatkerülőbbé válnak, úgy a részvények árai csökkenni fognak, de az opciós árakat a részvényárhoz viszonyító képletek változatlanok maradnak. Tehát a kockázatmentes mértéknek a származtatott ügyletek árazására szóló két legfontosabb állítása:

1. A részvény, vagy bármely más befektetés várható hozama a kockázatmentes kamatláb.
2. Az opció várható kifizetéséhez használt diszkontráta pedig szintén a kockázatmentes kamatláb.

Ezeket figyelembevéve a  $p$  paramétert a kockázatsemleges mérték szerinti felfelé lépés valószínűségének tekintjük, amiből következik, hogy a lefelé lépés valószínűsége  $1 - p$  lesz, hiszen a kettő összegének egyet kell adnia. Feltesszük továbbá, hogy az  $u > e^{rT}$  és  $p \in (0, 1)$ . A  $pf_u + (1 - p)f_d$  kifejezés megadja az opció várható kifizetéseinek értékét a kockázatsemleges mérték szerint, vagyis ennek a segítségével megadható az opció mai értéke, ami nem más, mint az opció várható kifizetéseinek értékei a kockázatsemleges kamatlábbal vett diszkontáltjai. Ha a  $p$  a felfelé lépés valószínűsége, akkor a  $T$  időpontban lévő részvényárfolyam a következőképpen fog adódni:

$$\begin{aligned} E[S_T] &= pS_0u + (1 - p)S_0d \\ &= pS_0(u - d) + S_0d \\ &= S_0e^{rT} \end{aligned}$$

Ezen kívül az is bemutatatható, hogy az eredmény továbbra is fenn fog állni függetlenül attól, hogy mit teszünk fel a részvényárak alakulására. Egy származtatott termék kockázatsemleges beárazásához csupán csak arra van szükségünk, hogy meghatározzuk az egyes lehetséges kimenetek valószínűségeit a kockázatsemleges mérték szerint, majd ezt követően kiszámoljuk a származtatott követelések várható kifizetéseit, amiket a végső lépésben a kockázatmentes kamatláb segítségével visszadiszkontálunk.

A valóságban persze nem csak egy lépéses binomiális fát szoktak használni egy opció árának meghatározásához, hanem kellően sokat. Így, hogy ezen esetekbe is betekintést nyerhessünk nézzük meg a kétlépéses esetet, ami jól reprezentálja, hogy milyen változásokon esnek át a modell egyes paraméterei, a lépések növelése által.

A kétlépéses esetben is az  $S_0$  kezdeti részvényárból indulunk ki, amely értéke minden lépés után vagy  $u$ -szorosára növekszik,  $d$ -szeresére csökken. Ezeken kívül pedig továbbra is az  $r$  jelöli a kockázatmentes kamatlábat, illetve minden lépés során  $\Delta t$  idő telik el, aminek hatására az egy lépéses esetben megismert képletek a következőképpen alakulnak:

$$f = e^{-r\Delta t} [pf_u + (1 - p)f_d],$$

ahol  $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ . Ennek a segítségével felírhatóak az  $f_u$  és az  $f_d$  képletei is:

$$f_u = e^{-r\Delta t} [pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}]$$

$$f_d = e^{-r\Delta t} [pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}]$$

Ha ezeket az egyenleteket behelyettesítjük az  $f$  képletébe, akkor a következő alakra jutunk:

$$f = e^{-2r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p) f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

Ez teljes mértékben megfelel a fent említett kockázatsemleges mérték szerinti áraznak. A  $p^2$  a második időpillanat felső, a  $2p(1-p)$  ugyanezen időpont középső, míg az  $(1-p)^2$  az alsó csomópont elérésének valószínűsége. Az opció ára most is megegyezik a kockázatsemleges világban várható kifizetés a kockázatmentes kamatlábbal vett diszkontáltjával. Ebből következik, hogyha a binomiális fához további lépéseket adunk, akkor a kockázatsemleges árazási módszer továbbra is működőképes marad.

Egy részvényre szóló opció esetén a  $\Delta$  az opció árfolyamváltozásának és a mögöttes részvény árfolyamváltozásának hányadosa. Ez jelöli, hogy hány egység részvényt kell tartanunk ahhoz, hogy a portfóliónk kockázatmentes tudjon maradni. Az ilyen típusú portfóliók kialakítását szokás delta fedezésnek is nevezni. A call opció deltája pozitív, míg a puté negatív.

Az előzőekben láthattuk, hogy egy  $\Delta t$  időléptékű binomiális fa esetén az  $u, d$  és a  $p$  paramétereknek van igazán jelentőségük. Az  $u$  és  $d$  megadását követően a  $p$  értékét úgy kell megválasztani, hogy a várható hozam pont az  $r$  kockázatmentes kamatláb legyen. Azt már beláttuk, hogy  $p$  a következő alakban áll elő:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

A  $u$  és  $d$  paraméterek megválasztása során viszont figyelembe kell venni a részvény volatilitását, mint tényezőt. Egy részvény vagy más eszköz volatilitását, vagyis  $\sigma$  úgy definiáljuk, mint hozamának átlagától vett átlagos eltérését egy  $\Delta t$  időszak alatt, ami megegyezik  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  értékkel. Továbbá pedig a hozamának varianciája  $\Delta t$  idő alatt  $\sigma^2\Delta t$ . Egy  $X$  valószínűségi változó varianciája  $E[X^2] - E[X]^2$  alakban definiálható. Egy részvény  $\Delta t$  idő alatt  $p$  valószínűséggel biztosít  $u - 1$  nagyságú hozamot, míg  $1 - p$  valószínűséggel  $d - 1$  nagyságút. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \sigma^2\Delta t &= [p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2] - [p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)]^2 \\ &= e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} \end{aligned}$$

Ennek az egyenlet a megoldása előáll a következő formában:

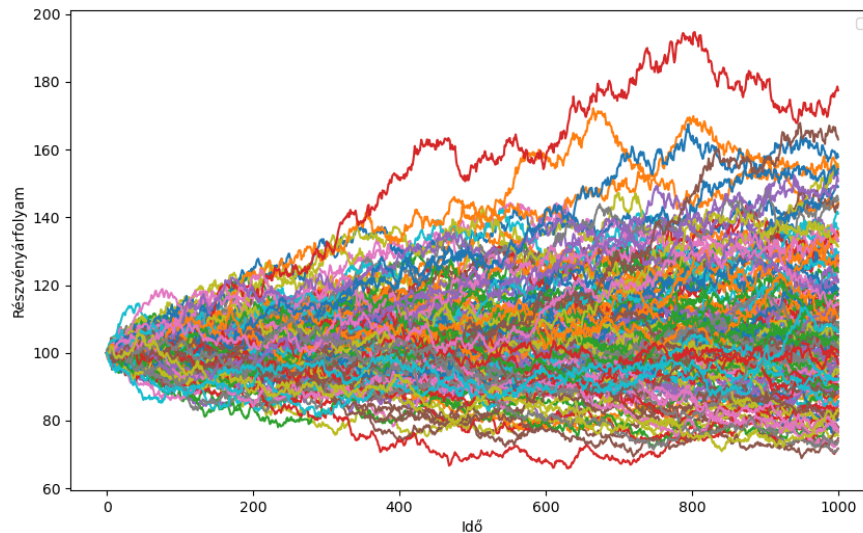
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{és} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Ugyanezek az  $u$  és  $d$  paraméterek szerepeltek Cox, Ross és Rubinstein 1979-ben(54) publikált cikkében is.

# Monte Carlo

## Monte Carlo módszer

A Monte Carlo szimuláció nagyszerű eszköz arra, hogy különböző pénzügyi termékeket pl.: opciókat árazzunk általa. Ezzel a módszerrel kockázatmentes módon tudunk árazni, ami annyit jelent, hogy a várható kifizetés meghatározásához mintákat generálunk, majd az így kapott értékeket a kockázatmentes kamatlábbal diszkontáljuk. (47)



7.2. ábra. Monte Carlo módszerrel generált részvényárfolyam trajektóriák.

Legyen adott egy származtatott termék, amelynek áralakulása csupán csak az  $S$ -től függjön, és lejáratkor, vagyis a  $T$ . időpontban kifizetést biztosítson. Ha emellett feltesszük, hogy a kamatláb állandó az időben, akkor a származtatott termék árát a következőképpen tudjuk meghatározni:

1. Generálni kell egy véletlen mintát, ami az alaptermék árfolyamának alakulását hivatott reprezentálni a kockázatmentes világban.
2. A származtatott termék kifizetésfüggvényének felhasználásával számoljuk ki annak lejáratkori kifizetését.
3. Az első két lépést ismételjük, míg kellően nagy mintát nem kapunk.
4. Határozzuk meg a mintában lévő kifizetések átlagát, hogy megkaphassuk a kockázatmentes világban várható kifizetés becslését.
5. Végül pedig diszkontáljuk az így kapott értéket a kockázatmentes kamatlábbal, hogy megkaphassuk a származtatott érték árát.

Tegyük fel, hogy a kockázatsemleges világban az alaptermék dinamikája a következő lesz

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \quad (7.1)$$

ahol  $dz$  egy Wiener-folyamat, a  $\hat{\mu}$  a kockázatsemleges várható hozamot, míg a  $\sigma$  a volatilitást jelöli. Az alaptermék, vagyis az  $S$  áralakulásának szimulációjához az egész intervallumot  $N$  darab  $\Delta t$  hosszúságúra bontjuk, aminek a segítségével az előző egyenletet közelíteni tudjuk

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

ahol  $S(t)$  az  $S$   $t$ . időpontbeli értékét jelöli, míg az  $\epsilon$  egy véletlen mintát jelöl a normális eloszlásból, melynek várható értéke nulla, a szórása pedig egy. Az  $S$  teljes útvonalát  $N$  darab normális eloszlásból vett véletlen minta segítségével kell meghatározni. A valóságban viszont elterjedtebb az  $\ln S$  szimulációja, melynek dinamikája leírható az Itó-lemma segítségével

$$d \ln S = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right]$$

Ezt felhasználva elkészíthetjük az  $S$  által megtett utat. Ha  $\ln S$  használjuk, akkor nagyobb pontosságot érhetünk el és, ha a  $\hat{\mu}$ , valamint a  $\sigma$  értékeit állandónak választjuk meg, akkor

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \epsilon \sqrt{T}$$

$$S(T) = S(0) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \epsilon \sqrt{T} \right]$$

A Monte Carlo szimuláció nagy előnye, hogy általa olyan származtatott termék ára is meghatározható, melynek az áralakulása nem csak a lejáratkori  $S$  értékétől, hanem a köztes időpontokban felvett értékétől is függ. Ezen kívül az  $S$  akár más sztochasztikus folyamatot is követhet, vagy akár a származtatott termék árára több mögöttes termék áralakulása is hatással lehet. A módszer hátránya viszont, hogy könnyen számításigényessé tud válni, valamint az amerikai opciókra jellemző korai lehívást nem tudja kezelni.

Érdeemes pár szót szólni arról az esetről is, amikor a származtatott termék ki-fizetése  $n$  darab  $\theta_i$  paramétertől függ. Definiáljuk  $s_i$  változót a  $\theta_i$  volatilitásaként,  $\hat{m}_i$  változót a  $\theta_i$  várható növekedési ütemeként a kockázatsemleges világban, és a  $\rho_{ik}$  változót a  $\theta_i$  és a  $\theta_k$  Wiener-folyamatok közötti korrelációként. Az egyváltozós esethez hasonlóan a származtatott termék élettartamát  $N$  darab  $\Delta t$  hosszú részintervallumra osztjuk.

$$\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t) = \hat{m}_i \theta_i(t) \Delta t + s_i \theta_i(t) \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (7.2)$$

ahol az  $\epsilon_i$  egy véletlen mintát jelöl a normális eloszlásból. Az  $\epsilon_i$  és az  $\epsilon_k$  közötti korrelációs együtthatót  $\rho_{ik}$  jelöli. Egy kísérlet alkalmával  $N$  darab  $\epsilon_i$  mintát veszünk a többváltozós standard normális eloszlásból. Ezeket felhasználjuk a fenti egyenletbe, aminek a segítségével minden egyes  $\theta_i$  esetre egy szimulált utat kapunk, amiknek az összességével kiszámíthatjuk a származtatott termék értékét.

A módszer által adott eredmény pontossága a próbák számától függ. A szimulációk által kapott diszkontált kifizetések szórását és átlagát is meg szokták határozni. Az elsőt jelölje  $\omega$ , míg a másodikat  $\mu$ . A  $\mu$  változó nem más, mint a szimuláció által a származtatott termék értékére adódó becslés, melynek standard hibája

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

ahol  $M$  a próbák számát jelöli. Az  $f$  derivátiva árára vonatkozó 95%-os konfidenciaintervallum:

$$\mu - \frac{1,96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1,96\omega}{\sqrt{M}}$$

## Variancia csökkentés

Ha a derivátiva árazása során az alaptermék árának meghatározásához a (7.1) vagy a (7.2) sztochasztikus folyamatot használjuk, akkor sok szimulált trajektória esetén igen számításigényessé tud válni, de elengedhetetlen ahhoz, hogy pontos eredményt kaphassunk. Viszont létezik számos variancia csökkentő eljárás, ami mellett pontos eredményt kaphatunk lényegesen kevesebb szimulált trajektória szám esetén is. (47)

## Antithetic variable technika

Ebben a módszerben a derivátiva értékét 2 különböző módszer segítségével is meg kell adni.

Az  $f_1$  értéket a szokásos módon számítjuk ki, míg az  $f_2$  értékénél a standard normális eloszlásokból vett összes véletlen minta előjelét megváltoztatjuk és így határozzuk meg az értékét. A derivátiva értéke az  $f_1$  és az  $f_2$  átlaga lesz. Ez azért működik jól, mert ha az egyik érték a valódi érték felett van, akkor a másik biztosan alatta lesz, és fordítva. Jelöljük  $\tilde{f}$  az  $f_1$  és az  $f_2$  átlagát:

$$\tilde{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

A derivátiva értékének becslése az  $\tilde{f}$  értékek átlaga. Ha az  $\tilde{\omega}$  ezen  $\tilde{f}$  értékek szórása, és  $M$  a szimulációs kísérletek száma, akkor a becslés standard hibája

$$\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{M}}$$

Ez jóval kisebb, mint a hagyományos esetben kapott érték.

## Control variate technika

Ez módszer akkor alkalmazható, ha van két hasonló derivatívánk. Az  $A$  derivatívát szeretnénk beárzni, melyhez a  $B$  derivatívát használjuk fel, amely rendelkezik analitikus megoldással is. Párhuzamosan szimuláljuk a két derivatíva értékét ugyanazokkal a véletlenszámokkal, valamint  $t$  értékekkel. Jelölje  $f_A^*$  az így kapott becslés értékét az  $A$  termékre nézve, míg  $f_B^*$  a  $B$ -re nézve. Továbbá pedig az  $f_B$  jelölje a  $B$  derivatíva zárt képlettel adódó értékét. Az  $A$  értékre nézve jobb becslést kaphatunk az  $f_A$  segítségével, ha annak felírása során felhasználjuk az  $f_B$  értékét az alábbi módon:

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B$$

## Importance sampling

Ezt a módszert egy példával lehet legegyszerűbben szemléltetni. Tegyük fel, hogy adott egy  $K$  kötési árfolyamú,  $T$  lejáratú, deep-out-of-the-money európai call opció, amelynek az árát szeretnénk meghatározni. Ha a  $T$  időpontban az alaptermék árát a szokásos módon mintavételezzük, akkor az az esetek többségében nulla kifizetéshez fog vezetni. Mivel a nulla kifizetésű pályák alig járulnak hozzá az opció értékének meghatározásához, ezért érdemes csak azokat a pályákat kiválasztani, amelyeknél a részvényárfolyam lejáratkor a  $K$  felett van. Legyen  $F$  a  $T$  időpontbeli részvényárfolyam eloszlásfüggvénye, valamint  $q$  annak a valószínűsége, hogy a részvényárfolyam a lejáratkor nagyobb lesz, mint  $K$ . Ekkor  $G = F/q$  jelöli a részvényárfolyam eloszlását, feltéve, hogy a részvényárfolyam nagyobb, mint  $K$ . Az importance sampling megvalósításához  $F$  helyett  $G$ -ből veszünk mintát és az opció értéke a diszkontált kifizetések átlagának  $q$ -val való szorzata.

## Stratified sampling

A reprezentatív értékek mintavételezése szemben az eloszlásból vett véletlen értékekkel általában pontosabb eredményt képes adni. Ennek egyik fajtája a stratified sampling, magyarul rétegzett mintavételezés. Ez esetben tegyük fel, hogy 1000 darab mintát szeretnénk kiválasztani egy eloszlásból. Ekkor az eloszlást 1000 darab egyenlő valószínűségű intervallumra bontjuk szét és minden intervallumhoz kiválasztunk egy reprezentatív értéket, ami vagy az átlag vagy a medián lesz. Egy standard normális eloszlás esetén például, ha  $n$  darab intervallumunk van, akkor az  $i$ -edik reprezentatív értékét a következőképpen kaphatjuk meg

$$N^{-1} \left( \frac{i - 0,5}{n} \right)$$



## Moment matching

A módszer során a standard normális eloszlásból vett mintákat úgy igazítjuk ki, hogy az első, második és esetleg ennél magasabb momentumai megegyezzenek. A mintavételezés történjen pl.: egy nulla várható értékű, egy szórású normális eloszlásból úgy, hogy meghatározzuk az adott változó értékének változását az adott időszakban. Legyen ez a minta  $\epsilon_i$ , ahol  $i \in [1, n]$ . Az első két momentum egyezésének meghatározásához ki kell számolni a minta  $m$  átlagát és az  $s$  szórását. Ebből a kiigazított minta a következőképpen adódik:

$$\epsilon_i^* = \frac{\epsilon_i - m}{s}$$

A kiigazított mintáknak a helyes átlaga nulla, míg a helyes szórás egy kell, hogy legyen. Minden számításhoz ezeket a kiigazított mintákat kell használni. A módszer gyors, viszont memóriaproblémákhoz vezethet, mivel minden egyes mintavételezett számot a szimuláció végéig tárolni kell.

## Least square Monte Carlo modell

2001-ben Francis A. Longstaff és Eduardo S. Schwartz (45) publikálta ezt az új megközelítést kifejezetten az amerikai típusú lehívási jellemzőkkel rendelkező derivatívák árazására, illetve az optimális lehívásuk minél pontosabb meghatározására. A módszer alapvető gondolata nem más, mint hogy a legkisebb négyzetek módszerének felhasználásával az opció tulajdonosa minden lépésben meg tudja határozni a folytatásból származó feltételes várható értékét a kifizetésnek. Ebből kifolyólag ez a technika jól alkalmazhatóvá válik az olyan típusú opciók árának meghatározásához is, amik útvonalfüggőséggel rendelkeznek, vagy több tényező is hatással van az áralakulásukra.

Egy amerikai vagy amerikai típusú opció tulajdonosának minden lehívási időpontban van lehetősége mérlegelni, vagyis összehasonlítani, hogy az opció azonnali lehívásából vagy a folytatásból származó várható kifizetésből származik-e nagyobb haszna, emiatt az optimális megállási stratégiát az opció életben tartásából származó kifizetésére vonatkozó feltételes várakozás határozza meg. Ebben a módszerben a feltételes várakozást a szimuláció keresztmetszeti információiból a legkisebb négyzetek módszerének segítségével becsüljük meg, vagyis a folytatásból származó ex-post kifizetéseket az állapotváltozók értékeinek függvényeire regresszáljuk. Ezen regresszióból származó illesztett értékek közvetlen becslést adnak a feltételes várakozási függvényre. Ennek a függvénynek a segítségével minden egyes lehívási időpontra meghatározható az optimális lehívási stratégia az összes lehetséges kimenet esetén. A módszer relatíve egyszerűen megvalósítható, hiszen csak a legkisebb négyzeteket kell kiszámítani ahhoz, hogy megkapjuk az optimális startégiát.

Az algoritmus könnyebb megértése érdekében nézzük a következő példát. Adott egy amerikai put opció egy osztalékot nem fizető részvényre. Az opció kötési ára

1,1 legyen, a kockázatmentes kamatláb 6% és az opció lehívható a  $t = 1, 2, 3$  időpontok bármelyikében. A példa egyszerűségének kedvéért a részvényárfolyam a következő 8 útvonalat járhatja be, amik a kockázatsemleges mérték szerint lettek generálva.

Útvonal	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

7.1. táblázat. A részvényárak lehetséges alakulásai.

Azt a megállási szabályt szeretnénk megtalálni, amely az opció értékét maximalizálja a lehetséges útvonalak minden pontjában. Az algoritmus rekurzív jellege miatt viszont szükségünk lesz ehhez a köztes mátrixokra is. Tegyük fel, hogy az opciót a  $t = 3$ . időpont előtt nem hívtuk le, így az opció tulajdonosának ebben az időpontban az alábbi pénzáramlásai adódnak az optimális stratégiája által.

Útvonal	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	$(1, 1 - 1, 34)^+ = 0, 00$
2	-	-	$(1, 1 - 1, 54)^+ = 0, 00$
3	-	-	$(1, 1 - 1, 03)^+ = 0, 07$
4	-	-	$(1, 1 - 0, 92)^+ = 0, 18$
5	-	-	$(1, 1 - 1, 52)^+ = 0, 00$
6	-	-	$(1, 1 - 0, 90)^+ = 0, 20$
7	-	-	$(1, 1 - 1, 01)^+ = 0, 09$
8	-	-	$(1, 1 - 1, 34)^+ = 0, 00$

7.2. táblázat. Kifizetés mátrix  $t = 3$  időpontban.

Ha a  $t = 2$  időpontban a put opció in-the-money állapotban van, akkor az opció birtokosának el kell döntenie, hogy azonnal lehívja azt, vagy tartja az opcióját legalább a következő időpontig. Ha megvizsgáljuk a részvényárfolyamok lehetséges alakulását bemutató táblázatot, láthatjuk, hogy öt olyan állapot van, amikor az opció a  $t = 2$  időpontban in-the-money állapotban van. Jelölje  $X$  ezen öt kimenetet  $t = 2$  időben, valamint  $Y$  ugyanezen kimenetekhez tartozó  $t = 3$  időpontbeli diszkontált pénzáramlást, ha a put opciót nem hívtuk le  $t = 2$  időben. Elég az in-the-moneyban lévő útvonalakat használni a feltételes várható érték függvény

relevánsabb becsléséhez, ami az algoritmus hatékonyságát is javítja. Az  $X$  és az  $Y$  értékeinek alakulását a következő táblázat mutatja.

Útvonal	$Y$	$X$
1	$0,00 \times 0,94176$	1,08
2	-	-
3	$0,07 \times 0,94176$	1,07
4	$0,18 \times 0,94176$	0,97
5	-	-
6	$0,20 \times 0,94176$	0,77
7	$0,09 \times 0,94176$	0,84
8	-	-

7.3. táblázat. Regresszió a  $t = 2$  időpontban.

Az opció le nem hívásából származó várható pénzáramlás becslése a  $t = 2$  időpontban érvényes részvényárfolyam függvényében az  $Y$  konstansra,  $X$ -re, valamint  $X^2$ -re való regresszáltjából következik. Ebből adódik az  $E[Y|X] = -1,070 + 2,983X - 1,813X^2$  alakú feltételes várható érték függvény. Ezt kell összehasonlítni a  $t = 2$  időpontban lehetséges azonnali lehívás értékével.

Útvonal	Opció lehívása	Folytatási érték
1	$(1,10 - 1,08)^+ = 0,02$	0,0369
2	-	-
3	$(1,10 - 1,07)^+ = 0,03$	0,0461
4	$(1,10 - 0,97)^+ = 0,13$	0,1176
5	-	-
6	$(1,10 - 0,77)^+ = 0,33$	0,1520
7	$(1,10 - 0,84)^+ = 0,26$	0,1565
8	-	-

7.4. táblázat. Optimális döntés  $t = 2$  időpontban.

Az azonnali lehívás értéke megegyezik az in-the-money állapotban lévő útvonalak  $1,10 - X$  belső értékével, míg a folytatásból származó értéket az  $X$  feltételes várható érték függvényébe való behelyettesítés segítségével kapjuk. Vagyis a negyedik, hatodik és a hetedik állapot esetén  $t = 2$  időpontban érdemes lehívni az opciót, míg az első és a harmadik állapotban a folytatás az optimális döntés az algoritmus alapján.

Ezen az elven továbbhaladva megállapítható a  $t = 1$  időpont esetére is az optimális stratégia. A következő táblázatban egyes jelöli azokat az eseteket, amikor az algoritmus alapján az opció lehívásra kerül.

Útvonal	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

7.5. táblázat. Megállási szabály.

A megállási szabályok figyelembevétele mellett a következő pénzáramlás adódik az algoritmus által.

Útvonal	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	0,00
7	0,18	0,00	0,00
8	0,22	0,00	0,00

7.6. táblázat. Opció kifizetései.

Az opció árazásához minden egyes pénzáramlást vissza kell diszkontálnunk a  $t = 0$  időpontra, majd ezt követően az összes útvonalra átlagot kell vonnunk. Ezáltal az amerikai put opció ára 0,1144 lesz, ami több, mint kétszerese az ugyanazon realizációkból számolt európai put opció árának, ami 0,0564. A példában a feltételes várakozási függvényt arra használtuk, hogy azonosítsuk általa azt a lehívási döntést, amely az egyes pályák mentén minden egyes időpontban maximalizálni tudja az opció értékét. Mint láthattuk, az LSM algoritmus könnyen megvalósítható, mivel egyszerű regresszió kívül semmi másról nem volt szó.

## Árazó módszer

Legyen adott a  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  valószínűségi mező a  $[0, T]$  időhorizonton. Továbbá  $F = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$  jelölje a gazdaságban fellelhető értékpapírok releváns árfolyama által létrehozott filtrációt, amiről feltesszük, hogy  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Ezen kívül pedig az

arbitrázsmentesség miatt feltesszük, hogy létezik a gazdaságban egy  $Q$  ekvivalens martingál mérték.

Mivel most olyan amerikai típusú származtatott termékeket szeretnénk be-  
 árazni, ahol véletlenszerű pénzáramlások vannak a  $[0, t]$  időintervallumon. A  $C(\omega, s; t, T)$   
 jelölje az opció által generált pénzáramlások egyes realizációit, feltéve, hogy az  
 opciót a  $t$  időpontban vagy az előtt nem hívták le, továbbá pedig, hogy az op-  
 ció birtokosa optimális megállási stratégiát követ minden  $s$  időpontban, ahol  
 $t < s \leq T$ . Az algoritmus célja, hogy az útvonalankénti megközelítéssel ad-  
 jon egy olyan megállási szabályt, amely maximalizálja az amerikai opció értékét.  
 Tegyük fel, hogy az opció lehívása csak  $K$  diszkrét esetben lehetséges, vagyis  
 $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_K = T$  időpontokba. Ha az algoritmusban a  $K$  szá-  
 mot kellően nagyra választjuk meg, akkor az amerikai típusú opciók árazására is  
 alkalmas lesz, hiszen azok minden időpillanatban lehívhatóak.

Egy  $t_k$  időpontban az opció lehívásából származó pénzmennyiség azonnal is-  
 mert a befektető számára, míg a folytatásból származó nem. Az arbitrázsmentes  
 árazás szerint viszont a folytatásból származó pénzáramlások értéke, vagy ezzel  
 ekvivalens opció értéke, feltéve, hogy az opciót csak  $t_k$  után lehet lehívni, meg-  
 egyezik a fennmaradó  $C(\omega, s; t_k, T)$  pénzáramlások  $Q$  kockázatmentes mérték  
 szerinti diszkontáltjával. Tehát egy  $t_k$  időpontban a folytatásból származó pénz-  
 áramlás nagysága kifejezhető az alábbi képlet segítségével:

$$F(\omega; t_k) = E_Q \left[ \sum_{j=k+1}^K \exp \left( - \int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds \right) C(\omega, t_j; t_k, T) \mid \mathcal{F}_{t_k} \right],$$

ahol  $r(\omega, t)$  a kockázatmentes kamatlábat jelöli, az  $\mathcal{F}_{t_k}$  pedig a  $t_k$  időpontban  
 elérhető információhalmaz. Ezzel a módszerrel a optimális lehívás problémája  
 arra egyszerűsödött, hogy az azonnali lehívási értéket össze kell hasonlítani a  
 feltételes várakozással. Az opció lehívásra kerül, ha az azonnali lehívási értéke  
 pozitív és legalább a feltételes várakozás értékével egyezik meg. A least square  
 Monte Carlo módszer lényege, hogy a folytatási értéket a legkisebb négyzetek  
 regressziójának segítségével közelíti meg minden olyan időpillanatban, amikor az  
 opció lehívása lehetséges. Az állapotváltozókra szóló regresszió a Monte Carlo-  
 szimulációval kapott adatok alapján történik, olyan pályák segítségével, ahol az  
 opció in the money állapotban van. Amikor az opció lehívása lehetséges, a foly-  
 tatásból származó pénzmennyiség az ortogonális alapfüggvények, mint például a  
 Hermite-, Legendre-, Chebyshev-, Jacobi-, Power-, és Laguerre-polinomok lineáris  
 kombinációjának segítségével fejezhető ki. Ez a 2007-ben Lima(55) által publikált  
 cikkből következik, amely a véges varianciájú függvényterbe tartozó,  $L^2$  által rep-  
 rezentált kifizetési függvényeket vette figyelembe. Mivel az  $L^2$  egy Hilbert-tér, így  
 bármely  $F$  függvény, amely ebbe a térbe tartozik, felírható ortogonális alapfügg-  
 vények lineáris kombinációjaként. Az  $F$  függvény megadható az alábbi formában  
 is:

$$F(\omega; t_k) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Theta_j,$$

ahol  $a_j$  együtthatók előzetesen nem ismertek, de lineáris regresszióval megbecsülhetőek.(56)

## 8. fejezet

### Konklúzió

Szakedolgozatom céljául az optimális megállás témakörének pénzügyi szempontból való elemzését tűztem ki. Első lépésként áttekintettem a mögötte lévő matematikai háttérrel, majd elemeztem a pénzügyi vonatkozású kutatásokat és publikációkat, hogy átfogó képet kapjak a probléma alkalmazási területeiről. Külön figyelmet fordítottam a probléma felírásánál alkalmazható alapfolyamatokra, a főbb kategóriákra, és az ezekhez elérhető megoldó módszerekre. Ezt követően kiválasztottam az opció árazást, mint a probléma egyik alkalmazási területét. Részletesen bemutattam a főbb opció típusokat, majd egy konkrét esetre, az ázsiai opció árazására tértem át. Vizsgáltam a különböző átlagolási módszertanokat, amelyek jelentős szerepet játszanak az egyes alfajták kifizetésfüggvényeinek alakulásában. Ezenkívül kitértem az opció vonatkozásában elérhető árazási módszerekre, mint például a zárt vagy közelítő formulákra, a Monte Carlo szimuláció különböző típusaira és az árak binomiális fával való közelítésére is. A szimulációs fejezetben ezeket a módszereket felhasználva áraztam be az ázsiai opció európai, majd amerikai típusú változatát. Megvizsgáltam, hogy az egyes módszerek milyen hatékonysággal bírnak, illetve hogy a különböző piaci viszonyok hogyan befolyásolják a termék áralakulását. Dolgozatom zárásául a felhasznált módszereket általános esetben is bemutattam.

# Ábrák jegyzéke

6.1. Fixed-strike és floating-strike típusú ázsiai opciók áralakulása különböző kötési árak mellett. . . . .	25
6.2. Az aritmetikai és a geometriai fixed-strike ázsiai opció árának különbsége különböző kötési árak mellett. . . . .	25
6.3. Az opció árának alakulása különböző kamatlábak esetén. . . . .	26
6.4. Az opció árának alakulása különböző szigma értékek esetén. . . . .	26
6.5. A Monte Carlo és a binomiális fa által kapott opció árak különbsége különböző kötési árak mellett. . . . .	26
6.6. A fixed-strike ázsiai opció árának alakulása különböző periódusok mellett a binomiális fa modellben. . . . .	26
6.7. Az ázsiai opciók árának alakulása a kötési ár függvényében. . . . .	27
6.8. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző szimulációk esetén. . . . .	27
6.9. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző volatilitások mellett. . . . .	28
6.10. Az ázsiai opciók árának alakulása különböző lépés számok mellett. . . . .	28
6.11. Az amerikai típusú ázsiai opció árának alakulása. . . . .	28
6.12. Az ázsiai opció árának alakulása különböző periódus szám mellett a binomiális fa modellben. . . . .	29
6.13. Az ázsiai opció árának alakulása különböző szimuláció szám mellett a LSMC esetén. . . . .	29
6.14. Az ázsiai opció árának alakulása európai, illetve amerikai típus esetén a Monte Carlo szimulációban. . . . .	29
6.15. Az ázsiai opció árának alakulása európai, illetve amerikai típus esetén a binomiális fa modellben. . . . .	29

7.1. Binomiális fa modell. Kép forrása: (47) . . . . .	30
7.2. Monte Carlo módszerrel generált részvényárfolyam trajektóriák. . .	34



# Táblázatok jegyzéke

6.1. Szimulációkhoz használt alapparaméterek. . . . .	24
7.1. A részvényárak lehetséges alakulásai. . . . .	39
7.2. Kifizetés mátrix $t = 3$ időpontban. . . . .	39
7.3. Regresszió a $t = 2$ időpontban. . . . .	40
7.4. Optimális döntés $t = 2$ időpontban. . . . .	40
7.5. Megállási szabály. . . . .	41
7.6. Opció kifizetései. . . . .	41

# Irodalomjegyzék

- [1] Black, F. and Scholes, M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 141–183
- [2] Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. 1979. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7:229–263
- [3] Garcia, D. 2003. Convergence and biases of monte carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27:1855–1879
- [4] Zhu, S.-P. 2006. An exact and explicit solution for the valuation of American put options. *Quantitative Finance*, 6:229–242
- [5] Barone-Adesi, G. and Whaley, R. E. 1987. Efficient analytic approximation of American option values. *The Journal of Finance*, 42:301–320.
- [6] Merton, R. C., Brennan, M. J., and Schwartz, E. S. 1977. The valuation of american put options. *The Journal of Finance*, 32:449–462.
- [7] Zhu, S.-P. 2006. A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9:1141–1177.
- [8] Van Khanh, Pham. 2014. Optimal stopping time to buy an asset when growth rate is a two-state markov chain. *American Journal of Operations Research* 2014: 45682.
- [9] Dai, Min, and Yifei Zhong. 2012. Optimal Stock Selling/Buying Strategy with Reference to the Ultimate Average. *Mathematical Finance* 22: 165–84.
- [10] Merton, Robert C. 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics* 51: 247–57.
- [11] Van Khanh, Pham. 2012. Optimal stopping time for holding an asset. *American Journal of Operations Research* 2: 527–35.
- [12] Liu, Zhenya, and Yuhao Mu. 2022. Optimal Stopping Methods for Investment Decisions: A Literature Review. *International Journal of Financial Studies* 10: 96.

- [13] David S. Bunch & Herb Johnson. 2000. The American Put Option and Its Critical Stock Price. *Journal of Finance*, American Finance Association, vol. 55, pages 2333-2356
- [14] Wald, Abraham. 1947. *Sequential Analysis*. Hoboken: J.Wiley Sons, Incorporated.
- [15] Wald, Abraham, and Jacob Wolfowitz. 1948. Optimum Character of the Sequential Probability Ratio Test. *The Annals of Mathematical Statistics* 19: 326–39.
- [16] Snell, James Laurie. 1952. Applications of martingale system theorems. *Transactions of the American Mathematical Society* 73: 293–312.
- [17] Arrow, Kenneth J., David Blackwell, and Meyer A. Girshick. 1949. Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. *Econometrica, Journal of the Econometric Society* 17: 213–44.
- [18] Dvoretzky, Aryeh, Jack Kiefer, and Jacob Wolfowitz. 1953. Sequential Decision Problems for Processes with Continuous time Parameter. Testing Hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics* 24: 254–64.
- [19] McKean, Henry P. 1965. Appendix: A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics. *Industrial Management Review* 6: 32–39.
- [20] Mikhalevich, Vladimir S. 1958. A bayes test of two hypotheses concerning the mean of a normal process. *Visnik Kiiivskogo Nacionalnogo Universitetu* 1: 254–64.
- [21] Shiryaev, Albert N. 1961. Problem of most rapid detection of a disturbance in sationary processes. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 138: 1039.
- [22] Shiryaev, Albert N. 1963. On Optimum Methods in Quickest Detection Problems. *Theory of Probability Its Applications* 8: 22–46.
- [23] Beibel, Martin, and Hans Rudolf Lerche. 1997. A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance. *Statistica Sinica* 7: 93–108.
- [24] Peskir, Goran. 2005a. On the American Option Problem. *Mathematical Finance* 15: 169–81.
- [25] Shepp, Larry, and Albert N. Shiryaev. 1993. The Russian Option: Reduced Regret. *The Annals of Applied Probability* 3: 631–40.
- [26] Peskir, Goran. 1998. Optimal Stopping of the Maximum Process: The Maximality Principle. *The Annals of Probability* 26: 1614–40.
- [27] Egami, Masahiko, and Tadao Oryu. 2017. A direct solution method for pricing options involving the maximum process. *Finance and Stochastics* 21: 967–93.

- [28] Jennison, Christopher, and Bruce W. Turnbull. 1999. *Group Sequential Methods with Applications to Clinical Trials*. Boca Raton: CRC Press
- [29] Machida, Fumio, and Naoto Miyoshi. 2017. Analysis of an optimal stopping problem for software rejuvenation in a deteriorating job processing system. *Reliability Engineering System Safety* 168: 128–35.
- [30] Sarkar, Sudipto. 2009. Optimal fishery harvesting rules under uncertainty. *Resource and Energy Economics* 31: 272–86.
- [31] Gravarsen, Svend Erik, Goran Peskir, and Albert Nikolaevich Shiryaev. 2001. Stopping Brownian Motion Without Anticipation as Close as Possible to Its Ultimate Maximum. *Theory of Probability Its Applications* 45: 41–50.
- [32] Shiryaev, Albert, Zuoquan Xu, and Xun Yu Zhou. 2008. Thou shalt buy and hold. *Quantitative Finance* 8: 765–76.
- [33] J. Hull, A. White. 1993. Efficient procedures for valuing European and American path-dependant options, *Journal of Derivatives* (Fall) 21–31.
- [34] Van Khanh, Pham. 2012. Optimal stopping time for holding an asset. *American Journal of Operations Research* 2: 527–35.
- [35] Peskir, Goran, and Albert Shiryaev. 2006. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Berlin/Heidelberg: Springer.
- [36] A. Kemna, A. Vorst. 1990. A pricing method for options based on average asset values, *Journal of Banking and Finance* 14 113–129.
- [37] P. Zhang. 1995. *Flexible European-style Asian Options*. Learning Curves: The Guide to Understanding Derivatives, Institutional Investor, Inc., New York
- [38] Shiryaev, Albert N. 2002. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. In *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000*. Berlin/Heidelberg: Springer, pp. 487–521.
- [39] Karatzas, Ioannis. 2003. A note on Bayesian detection of change-points with an expected miss criterion. *Statistics Decisions* 21: 3–14.
- [40] Gapeev, Pavel V., and Goran Peskir. 2006. The Wiener disorder problem with finite horizon. *Stochastic Processes and their Applications* 116: 1770–91.
- [41] du Toit, Jacques, and Goran Peskir. 2007. The trap of complacency in predicting the maximum. *The Annals of Probability* 35: 340–65.
- [42] De Angelis, T., and G. Peskir. 2016. Optimal prediction of resistance and support levels. *Applied Mathematical Finance* 23: 465–83.
- [43] Hansen, Asbjørn T., and Peter Løchte Jørgensen. 2000. Analytical Valuation of American-Style Asian Options. *Management Science* 46: 1116–36.

- [44] Woo, Min Hyeok, and Geon Ho Choe. 2020. Pricing of American lookback spread options. *Stochastic Processes and Their Applications* 130: 6300–18.
- [45] Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. 2001. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14:113–147.
- [46] Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein, 1979, "Option pricing: A simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, ISSN 0304-405X, Issue 3, 229-263.
- [47] Hull, John *Options, futures, and other derivatives* / John C. Hull, University of Toronto.—Ninth edition.
- [48] Opció s ügylet Wikipédia [https://hu.wikipedia.org/wiki/Opci%C3%B3s\\_%C3%BCgylet](https://hu.wikipedia.org/wiki/Opci%C3%B3s_%C3%BCgylet)
- [49] A. G. Z. Kemna, A. C. F. Vorst. 1990. A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values. *Journal of Banking and Finance*, pp.113–129.
- [50] S. M. Turnbull, L. M. Wakeman. 1991. A Quick Algorithm for Pricing European Average Options. *Journal of Financial and Quantitative Finance*, pp.377–389.
- [51] Wilmott, Paul. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Incorporated, 2006
- [52] S. Gounden, J.G. O'Hara. 2010. An analytic formula for the price of an American-style Asian option of floating strike type. *Applied Mathematics and Computation* Volume 217, Issue 7, Pages 2923-2936
- [53] L. Rogers, Z. Shi. 1995. The Value of an Asian Option. *Journal of Applied Probability*. pp.1077–1088.
- [54] Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M. 1979. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*. 7: 229.
- [55] Lima EL. 2007. *Espaços métricos*, 4th edn. Pure and Applied Mathematic Institute. IMPA, Rio de Janeiro
- [56] de Lima, U.S.M., Samanez, C.P. 2016. Complex derivatives valuation: applying the Least-Squares Monte Carlo Simulation Method with several polynomial basis. *Financial Innovation* 2,