Biztosítási piacok modellezése Bertrand árverseny mellett

Szakdolgozat

Készítette: Szabó Elek Zsolt

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
Aktuárius szakirány

Témavezető: Mágó Mánuel László

Adjunktus, Budapesti Corvinus Egyetem

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapesti Corvinus Egyetem

2024

Tartalomjegyzék

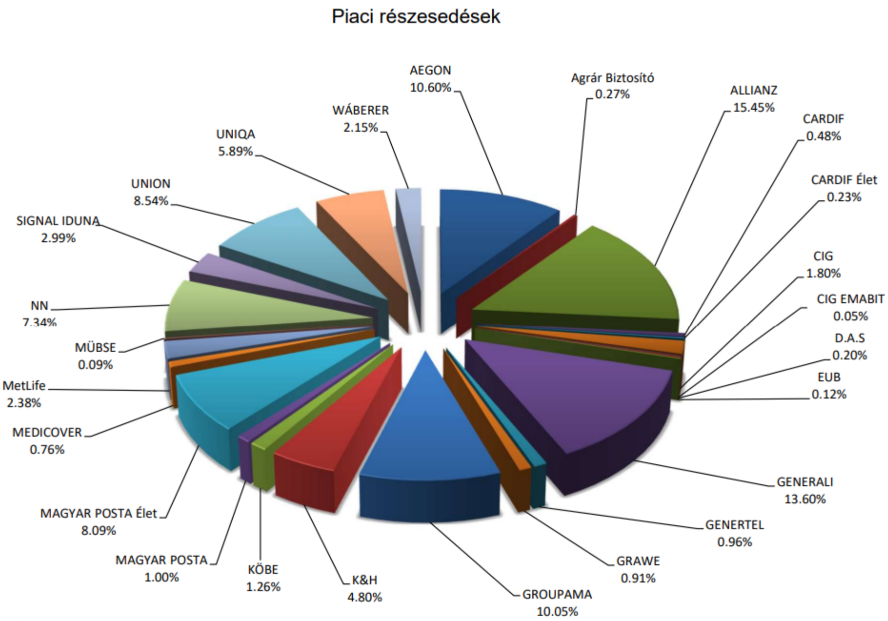
Ábrák jegyzéke

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Mágó Mánuel Lászlónak a témaválasztás során kapott segítségéért, és a szakdolgozatom elkészítése során felmerült kérdések megválaszolásáért.

1. Bevezetés

A szakdolgozat során különböző játékelméleti és mikroökonómiai modelleket fogok ismertetni a biztosítási szektorban. Az első modell ([3]) Bertrand-modell segítségével tanulmányozza a biztosító állományméretéhez való hozzáállásának fontosságát az egyensúlyi árak kialakulásához és ezen egyensúlyi árak kapcsolatát a megszokott termékpiaci egyensúlyi árakkal. Megnézzük azokat az eseteket, amikor a biztosító állománykerülő, illetve állománysemleges hasznosságfüggvénnyel rendelkezik ([3]). Ez a valószínűségszámítás segítségével meghatározott ([1], [2]) díjkalkulációtól eltérő megközelítés, és a hasznosságelméletet hívja segítségül.



1. ábra. MABISZ Negyedéves adatszolgáltatás összesítő, 2021.
Forrás: MABISZ honlapja.

A biztosítási szektor modellezésében oligopóliumot feltételezünk, amely megközelítést számos cikk is alkalmaz ([6], [7]). A 2022-es évben a MABISZ által kiadott Magyar Biztosítók Évkönyvében látható, hogy a biztosítási piac összbevételének majdnem 75 százaléka hét biztosító között oszlik el (Aegon, Allianz, GENERALI, GROUPAMA, MAGYAR POSTA Élet, NN, UNION), tehát el lehet mondani, hogy az oligopólium felé mutatnak ezen adatok is. Az ábrán is látható, hogy a 2021-es negyedik negyedévre megnézve az előbb felsorolt hét biztosító több, mint 65 százalékát teszik ki a piacnak.

A harmadik fejezetben pedig egy tőkekövetelmény feltételt fogalmazunk meg a biztosítási piac oligopol modelljében ([4]), ami a Szolvencia II direktíva egyik fontos eleme. A 2016. január 1-jével hatályba lépett Szolvencia II rendszer két legfontosabb mennyiségi eleme a piaci értékelésre történő áttérés, illetve a biztosító valamennyi kockázatát lefedő tőkeszükséglet ([5]). A tőkeszükségletnél az lesz az egyik feladatunk, hogy meghatározzuk azt az értéket, amely esetén legfeljebb fél százalék annak az esélye, hogy a biztosító tőkéje ennél nagyobb mértékben csökken. A modellünkben a tőkekövetelmény nem teljesítése olyan mértékű büntetéssel jár, hogy a biztosító inkább nem lép be a piacra. Ezek mellett Bertrand modellt fogunk használni, mivel a biztosítók döntenek az árakról ([8]).

A szakdolgozat az alábbi módon épül fel. A második fejezetben bemutatom az állománypreferencia modelljét a [3] cikk alapján, melyben észrevesszük, hogy a Betrand-paradoxon bizonyos formában jelen van. A harmadik fejezetben a [4] cikk alapján megvizsgáljuk a tőkekövetelmény feltételt tartalmazó modell Nash-egyensúlyait különböző feltételek mellett. Ezután pedig a negyedik fejezetben a kockáztatott érték (VaR) paraméterének változtatásával két biztosító esetén megnézzük azt a két-periódusos játékot, ahol az első periódusban a VaR paraméteréről (ahol legalább 99.5 százalékot kell választaniuk) és a második periódusban pedig az árakról döntenek. A modellnek ezen kiegészítése saját hozzájárulás. Érdekességképpen azt kapjuk, hogy bizonyos esetekben a biztosítók még a 99.5 százalékos kockáztatott értéknél is többet választanak, azaz szigorúbb feltételt is teljesítenének. A szigorúbb feltétel teljesítése ellenére a biztosítók technikai eredménye még mindig pozítív, azaz nem áll fent a Bertrand-paradoxon. Az ötödik fejezetben pedig egy összegzés található a megkapott eredménykről, illetve további általánosítási lehetőségek.

2. Állománypreferencia modellje

Ebben a fejezetben forrásom a [3] cikk. Tekintsük a következő modellt. A biztosítási piacon I darab biztosító van, akiknek w_i a tőkéje ($i \in \{1, 2, \ldots, I\}$). Feltesszük, hogy mindegyik biztosítónak ugyanannyi tőkéje van, azaz $\forall i \in \{1, 2, \ldots, I\}$ indexre $w_i = w$. Mindegyik biztosítónak megegyezik a hasznosságfüggvénye $u_i(w) = u(w) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, I\}$, ezt szeretné mindegyik biztosító maximalizálni. Feltételezzük, hogy mindegyik biztosítottat egymástól függetlenül q valószínűséggel K nagyságú kár érint, amit a biztosítók P áron teljesen megtérítenek. A biztosítók várható hasznossága n szerződés (állomány) és P ár esetén a következő:

$$U(w, P, n, q, K) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} u(w + nP - kK)$$

A fenti képlet jelentése az, hogy az összes lehetséges módon megnézzük, hogy a biztosító mennyi tőkével rendelkezik a biztosítás során a károk mennyiségétől függően, és ennek a tőkének a hasznosságát súlyozzuk a megfelelő valószínűségekkel.

2.1. Definíció. *([3] 152. oldal.) Jelentse $P_n(q, K)$ azt az árat, ami mellett a biztosító közömbös aközött, hogy n szerződése van, vagy 0 darab szerződése van, tehát $U(w, P_n(q, K), n, q, K) = u(w)$. Azt mondjuk, hogy az u hasznosságfüggény állománykerülő, ha*

$$U(w, P_n(q, K), n + 1, q, K) < U(w, P_n(q, K), n, q, K)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall q \in (0, 1), \forall K \in \mathbb{R}^+$$

Ha a fenti képletben egyenlőség szerepel, akkor az u hasznosságfüggény állománysemleges, ha pedig nagyobb reláció szerepel, akkor állománykedvelőnek nevezzük.

Megjegyzés. Nem mindegyik hasznosságfüggényt lehet besorolni ezekbe a kategóriákba. Hasonló a helyzet, mint a kockázatkerülő, kockázatsemleges és kockázatkedvelő kategóriák esetén.

Mikroökonómiából megszokott közömbösségi görbéket itt is lehet definiáni. Tekintsük azokat a (P_n, n) ár és állományméret párosokat (rögzített K és q mellett), amelyre a biztosító közömbös, hogy P_n áron ad el n szerződést, vagy 0 darab szerződést ad el. A $\{(P_n, n)\}_{n=0}^{\infty}$ pontokat az ár-állományméret síkon ábrázolva kapjuk az $u(w)$ hasznossági szinthez tartozó közönösségi görbét, ami a kezdeti tőke hasznosságát jelenti. Jelölje $D(P)$ a biztosítás iránti keresletet a P ár függvényében (csak annyit feltételezünk róla, hogy csökkenő függvény). A piacon N darab biztosított van, ezért a keresleti függvény $ND(P)$. A biztosítottak a legalacsonyább árat meghatározó biztosítónál vásárolnak, ha több ilyen biztosító van, akkor egyenletesen oszlanak el közöttük.

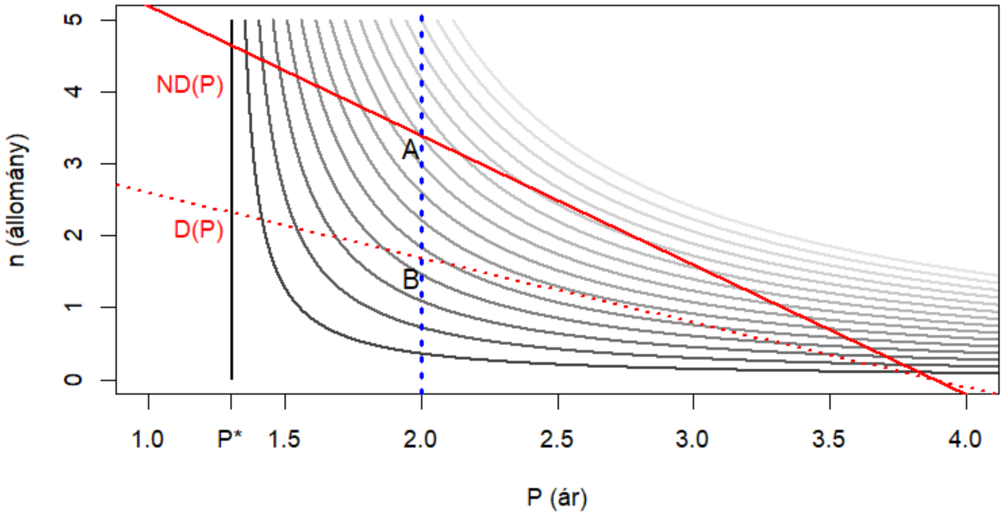
2.1. Állománysemleges biztosító

Állománysemlegességet okoz a konstans mértékű kockázatelutasítás ($-\frac{u''(x)}{u'(x)}$ konstans) esete, tehát legyen például $u(x) = -e^{-rx}$, ahol $r > 0$ a kockázatelutasítás mértéke. Ekkor

$$\begin{aligned}
U(w, P, n, q, K) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} u(w + nP - kK) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} (-e^{-r(w+nP-kK)}) \\
&= -e^{-rw} e^{-rPn} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qe^{rK})^k (1-q)^{n-k} \\
&= -e^{-rw} \left[e^{-rP} (qe^{rK} + (1-q)) \right]^n
\end{aligned}$$

Ha a szögletes zárójelben lévő kifejezés értéke 1, ami a $P^* = \frac{qe^{rK}+(1-q)}{r}$ választással érhető el, akkor valójában csak w-től függ az u, amiből következik, hogy az u hasznosságfüggény állománysemleges. Ha a piacon I biztosító van, és magasabb ár alakult volna ki mint a fenti P^*, akkor bármelyikük egy kicsit engedne az árból, az egész piacot megkapná, tehát P^*-nál magasabb ár nem lehet az egyensúlyi ár. Nyilván P^*-nál alacsonyabb sem lehet, mert akkor a biztosító jobban járna, ha egy szerződést sem értékesítene, tehát P^* az egyensúlyi ár. További eseteket analitikusan nehéz lenne kezelni, ezért a közömbösségi görbékre fogunk hagyatkozni. Rögzítünk egy $\overline{u}$ hasznossági szintet, és az ezekhez tartozó (P, n) párokat ábrázoljuk a $P - n$ síkon, ezzel definiáljuk az $\overline{u}$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbét. Ugyanezt megcsináljunk különböző hasznossági szintekhez (2. ábra)

Minél világosabb a görbe színe, annál nagyobb hasznossági szinthez tartozik az ábrán. Nézzük az előző példát kettő biztosító esetén. Tegyük fel, hogy a kialakult ár nagyobb, mint P^*, legyen ez mondjuk 2, ami a 2. ábrán a kék függőleges szaggatott egyenes. Ekkor mindkét biztosító az B ponton van. Ha az egyik biztosító infinitezimális egységgel csökkenti az árát, akkor az A ponthoz kerül (hiszen az övé lesz ekkor az egész piac), ami magasabb hasznossági szintet jelent. Ezt ismételgetve eljutunk a P^* egyensúlyi árhoz.



2. ábra. Közömbösségi görbék (saját szerkesztés [3] alapján).
($w = 0,\ K = 100,\ q = 0.001,\ r = 0.04,\ P^* \approx 1.3.$)

2.2. Állománykerülő biztosító

Ahogy az előző részben láttuk, állománysemlegesség esetén a biztosítók nem érnek el úgynevezett „extra hasznosságot”, az egyensúlyi ár (P^*) a kezdeti tőke (w) hasznosságával egyezik meg.

2.1. Állítás. *([3] 155. oldal.) Legyen $u(w) = aw - e^{-rw}$ kevert exponenciális hasznosságfüggvény. Ekkor u állománykerülő hasznosságfüggvény.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
U(w, P, n, q, K) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} u(w + nP - kK) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \Big(a(w + nP - kK) - e^{-r(w+nP-kK)} \Big) \\
&= aw + an(P - qK) - e^{-rw} \left[e^{-rP} (qe^{rK} + (1-q)) \right]^n
\end{aligned}$$

Legyen $P = P_n(q, K)$, tehát a biztosító közömbös $P_n(q, K)$ ár mellett között, hogy n darab szerződése van, van 0 darab szerződése van. Ekkor

$$aw + an(P_n(q, K) - qK) - e^{-rw} \left[e^{-rP_n(q,K)} (qe^{rK} + (1-q)) \right]^n = aw - e^{-rw},$$

amit ha átalakítunk, megkapjuk

$$\left[e^{-rP_n(q,K)}(qe^{rK}+(1-q))\right]^n = 1+e^{rw}an(P_n(q,K)-qK).$$

Most számoljuk ki az $U(w,P_n(q,K),n+1,q,K)$ kifejezést.

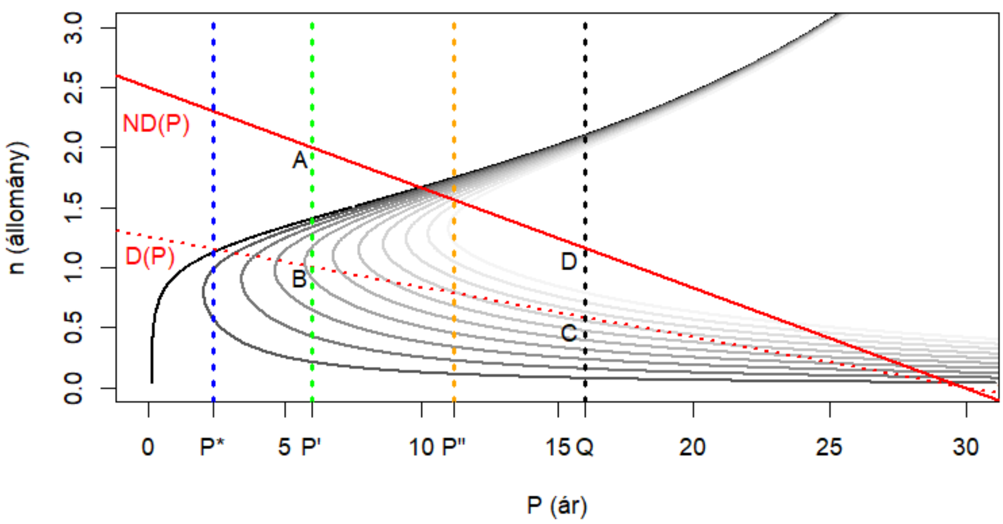
$$\begin{aligned} &aw+a(n+1)(P_n(q,K)-qK)-e^{-rw}\left[e^{-rP_n(q,K)}(qe^{rK}+(1-q))\right]^{n+1} \\ &= aw+a(n+1)(P_n(q,K)-qK)-\Big(1+e^{rw}an(P_n(q,K)-qK)\Big)^{\frac{n+1}{n}} \end{aligned}$$

Tekintsük a $(n+1)x-(1+nx)^{\frac{n+1}{n}}$ kifejezést, ahol $n>0$. Ennek $x=0$ helyettesítéssel -1 az értéke, és $x>0$-ra pedig szigorúan monoton csökkenő (első deriváltja itt létezik, véges és negatív), tehát $(n+1)x-(1+nx)^{\frac{n+1}{n}}<-1$ ha $x>0,\ n>0$. Ezt felhasználva az $x=e^{rw}a(P_n(q,K)-qK)$ szereposztással, kapjuk $U(w,P_n(q,K),n+1,q,K)=$

$$\begin{aligned} &aw+a(n+1)(P_n(q,K)-qK)-\Big(1+e^{rw}an(P_n(q,K)-qK)\Big)^{\frac{n+1}{n}} \\ &< aw-1 \leq aw-e^{-rw}=u(w)=U(w,P_n(q,K),n,q,K). \end{aligned}$$

Azaz $U(w,P_n(q,K),n+1,q,K)<U(w,P_n(q,K),n,q,K)$, amit be akartunk látni. $\square$

Tekintsük az előző állításhoz tartozó hasznosságfüggvény közömbösségi görbéit, és ábrázoljuk ezen is piaci keresleti görbét (3. ábra). Itt is minél világosabb a görbe színe, annál nagyobb hasznossági szinthez tartozik. Érdekesség, hogy a kezdő tőke (w) hasznossági szinthez tartozó görbén kívül mindegyik görbe „visszahajlik”, nem csak monoton növő módon viselkedik. A legalacsonyabb árhoz tartozó egyensúlyi ár P^*. Tegyük fel, hogy ennél egy nagyobb ár alakult ki, az ábrán P'. Mindkettő biztosító a B ponton van. Ez a B pont nagyobb hasznossági szinthez tartozik, mint a kezdeti tőke w hasznossága, tehát extra hasznosságot érnek el. Ha valamelyikük csökkentene az árán (infinitezimális egységgel), akkor övé lenne az egész piac, és átkerül az A pontba. Neki ez nem kedvező, hiszen az A pont hasznossága kisebb, mint a B ponthoz tartozó hasznosság, így nem fog egyik sem árat csökkenteni, marad az ár P'. Olyan példa is van, ahol a piac felének, vagy teljes egészének birtoklása ugyanazon a hasznossági szinten van (ábrán a P''). Általánosan elmondható, hogy a $[P^*,P'']$ intervallumban minden ár egyensúlyi ár lehet, és a P^* kivételével mindegyik hordoz magával extra hasznosságot. Most nézzünk



3. ábra. Kevert exponenciálishoz tartozó közömbösségi görbék (saját szekesztés [3] alapján).
$(w = 0,\ K = 100,\ q = 0.001,\ r = 0.14,\ a = 800)$

egy P''-nél magasabb árat, legyen ez Q az ábrán. Mivel C pont hasznossága kisebb, mint a D pont hasznossága, ezért megéri csökkenteni az árat. Ez a folyamat egészen a P'' árig vezet el minket. Most nézzünk meg egy más alakú hasznosságfüggvényt.

2.2. Állítás. *([3] 158. oldal.) Legyen $u(w) = w - bw^2$ kvadratikus hasznosságfüggvény, ahol $b > 0$ és $w \leq \frac{1}{2b}$. Ekkor u állománykerülő hasznosságfüggvény.*

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
U(w, P, n, q, K) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} u(w + nP - kK) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \Big((w + nP - kK) - b(w + nP - kK)^2 \Big) \\
&= w + n(P - qK) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} b(w + nP - kK)^2 \\
&= w + n(P - qK) - b(w + n(P - qK))^2 - bq(1-q)nK^2
\end{aligned}
$$

Hasonló módon, legyen P_n olyan ár, aminél a biztosító közömbös aközött, hogy n darab szerződése van, van 0 darab szerződése van ($P_n(q, K)$ lenne a helyes jelölés, de most hely szűkössége miatt P_n lesz), tehát

$$
w + n(P_n - qK) - b(w + n(P_n - qK))^2 - bq(1-q)nK^2 = w - bw^2
$$

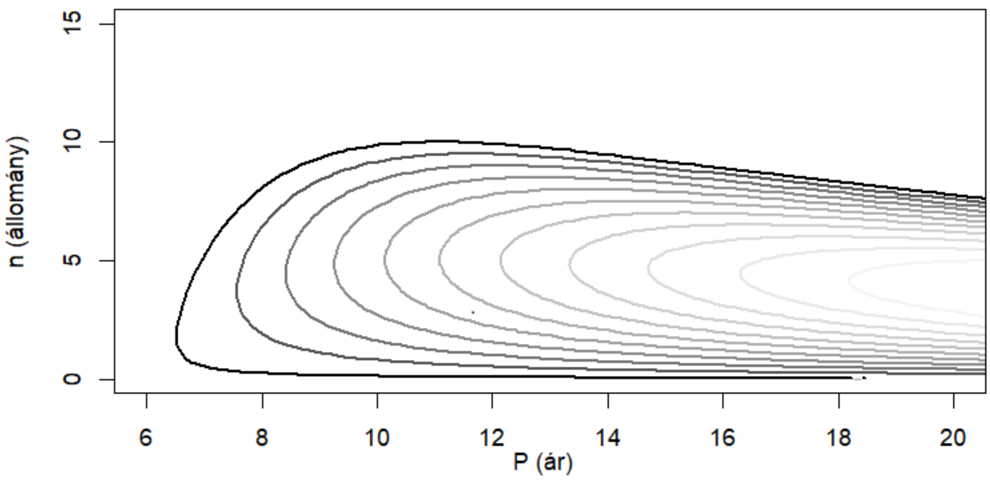
$$\Longrightarrow\ n(P_n - qK) - b(w + n(P_n - qK))^2 + bw^2 = bq(1-q)nK^2$$

Számoljuk ki az $U(w, P_n(q,K), n{+}1, q, K)$ kifejezés értékét, és helyettesítsünk be ahova tudunk ($P_n = P_n(q,K)$). $U(w, P_n(q,K), n+1, q, K) =$

$$\begin{aligned} &w + (n+1)(P_n - qK) - b(w + (n+1)(P_n - qK))^2 - bq(1-q)(n+1)K^2 \\ =&w - bw^2 - b(n+1)(P_n - qK)^2 < w - bw^2 = u(w) \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $P_n \geq qK$, hiszen a biztosítónak hosszútávon biztos nem érné meg a várható érték alatti ár. Azaz megkaptuk, hogy

$$U(w, P_n(q,K), n{+}1, q, K) < U(w, P_n(q,K), n, q, K). \qquad \square$$



4. ábra. Kvadratikus hasznosságfüggvényhez tartozó közömbösségi görbék (saját szerkesztés [3] alapján).

Megjegyzés. A kockázatsemleges hasznosságfüggvény esetén a P^* ár hasznossága megegyezett a kezdeti tőke (w) hasznosságával, tehát a P^* áron történő értékesítés lényegében a biztosítónak olyan, mintha egy szerződést sem értékesített volna. Az állománykerülő hasznosságfüggvény esetében is a P^* áron történő értékesítés hasznossága megegyezett a kezdeti tőke hasznosságával. Ez a jelenség nagyon hasonló a közgazdaságtani Bertrand-paradoxon esetéhez.

3. Tőkekövetelmény modellje

Ebben a fejezetben forrásom a [4]. A biztosítótársaságok működését a Szolvencia II szabályozza, ami egy 99.5%-os kockáztatott értéket (Value at Risk) ír elő. Ebben a részben a tőkekövetelményes feltétel hatását nézzük meg az egyensúlyi árakra és a profitokra vonatkozóan.

Nem-kooperatív játékként modellezük a piacot. Az előző fejezethez hasonlóan a piacon I darab biztosító van (Bertrand oligopóliumot feltételezünk), és az árakról (P_i) döntenek szimultán módon. Minden biztosító ugyanannyi C rögzített tőkével rendelkezik. A potenciális ügyfeleket egymástól függetlenül q valószínűséggel ér egy K nagyságú kár. Amennyiben egy ügyfél rendelkezik biztosítással és a kár bekövetkezik, akkor a biztosító kifizeti a teljes K összeget. Mivel mindegyik biztosító teljes biztosítást nyújt (tehát a termék homogén), ezért az ügyfelek csak az ár alapján döntenek, és a biztosítók kötelesek kiszolgálni őket, nem válogatnak az ügyfelek között.

A keresleti függvény $D(P)$, ami megmutatja, hogy P ár mellett a piac mekkora része venne biztosítást, a $D(P) = \frac{\alpha^2}{P^2}$ alakot fogjuk használni. Mossin tétele alapján a nettó díjon (qK) mindenki venne biztosítást, ezért $N_{max} = \frac{\alpha^2}{q^2K^2}$. Az inverz keresleti függvény ezek alapján $D^{-1}(n) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, ahol $n \leq N_{max}$.

3.1. Tőkekövetelmény korlát bevezetése

Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, F eloszlásfüggvénnyel. Ekkor tudunk definiálni egy VaR_β kockázati mértéket, ami a következőképp néz ki:

$$VaR_\beta(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > \beta\}$$

Az i. biztosító teljesíti a tőkekövetelmény korlát feltételét, ha C nagyságú tőke és P_i áron történő értékesítésből legalább 99.5% eséllyel lefedi a kárkifizetéseket:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n_i(P_i)} K\xi_j > C + n_i(P_i)P_i \right) \leq 0.005 \qquad (1)$$

ahol $n_i(P_i)$ jelenti az i. biztosító szerződéseinek számát P_i ár mellett, és ξ_j pedig független Bernoulli(q) valószínűségi változók. Ha $n_i(P_i)$ elég nagy, akkor a $\sum_{j=1}^{n_i(P_i)} K\xi_j$ kifejezés közelíthető normális eloszlással, aminek a várható értéke $n_i(P_i)qK$ és szórásnégyezete $n_i(P_i)q(1-q)K^2$. Az (1) képletből ki tudjuk fejezni a minimális C tőkeszükségletet (MCR, *Minimum Capital*

Requirement):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n_i(P_i)} K\xi_j - nqK}{\sqrt{n_i(P_i)q(1-q)}K} < \frac{C_{\min} + n_i(P_i)P_i - n_i(P_i)qK}{\sqrt{n_i(P_i)q(1-q)}K}\right) = 0.995 \\
\Longrightarrow \quad &\frac{C_{\min} + n_i(P_i)P_i - n_i(P_i)qK}{\sqrt{n_i(P_i)q(1-q)}K} = \phi^{-1}(0.995) = \phi \qquad (2) \\
\Longrightarrow \quad &C_{\min} = \phi\sqrt{n_i(P_i)q(1-q)}K + n_i(P_i)(qK - P_i) \\
&\quad \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{MCR}(n_i(P_i), P_i)
\end{aligned}$$

ahol $\phi(x)$ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye, és $\phi^{-1}(0.995) = \phi$.

Megjegyzés. Kétszer annyi szerződés értékesítéséhez kevesebb, mint kétszer annyi C tőkére van szükség. Általánosan, $(1 + a)n$ szerződés értékesítéséhez kevesebb, mint $(1+a)\,\mathrm{MCR}(n, P_i)$ minimális tőke szükséges, tehát a minimális tőkekövetelmény csökkenő mérethozadékú n-ben. (Ami ellenőrizhető azzal is, hogy a kifejezés n szerinti második deriváltja negatív az $n > 0$ tartományon, tehát ezen a részen konkáv az $\mathrm{MCR}(n, P_i)$).

A tőketartásnak van költsége, mert a bizosító nem kapja meg a tőke utáni rC kamatot. Ezt fix költségként fogjuk felfogni, hiszen a biztosító akkor is szembesül ezzel, ha nem értékesít egy szerződést sem (tőke nélkül a biztosító nem léphetne be a biztosítási piacra sem). Ha a biztosító megsérti a minimális tőkeszükségletet, akkor egy A nagyságú büntesést kap, ami olyan nagy, hogy inkább a biztosító nem lép a piacra. Mivel az i. biztosítónál lévő ügyfelek száma a modell alapján függ a többi biztosító áraitól, ezért az $n_i(P_i)$ jelölés helyett az $n_i(P_i, P_{-i})$ jelölést fogjuk innentől használni. Tehát az i. biztosító π_i várható profitja a (P_i, P_{-i}) árak és n szerződés mellett

$$\pi_i((P_i, P_{-i}), n) = \begin{cases} n(P_i - qK) - rC, & \mathrm{MCR}(n, P_i) \leq C \\ n(P_i - qK) - rC - A, & \mathrm{MCR}(n, P_i) > C \end{cases}$$

Itt is meg lehet jegyezni, hogy kétszer annyi szerződés esetén a várható profit több, mint kétszeresére változik. A várható profit egy része a technikai eredményből származik, ami a várható profit kamatveszteség és az esetleges büntetés nélküli része, $\mathrm{TR}_i = n_i(P_i, P_{-i})(P_i - qK)$. Az (2) egyenletet adott C és $n = n_i(P_i, P_{-i})$ mellett P-re rendezve megkapjuk a minimális ár követelményt (MPR, *Minimum Premium Requirement*):

$$
\begin{aligned}
&\frac{C + nP_{min} - nqK}{\sqrt{nq(1-q)}K} = \phi \\
\Longrightarrow\quad & C = \phi\sqrt{nq(1-q)}K + n(qK - P_{min}) \\
\Longrightarrow\quad & P_{min} = qK - \frac{C - \phi\sqrt{nq(1-q)}K}{n} \\
&\qquad = qK - \frac{C}{n} + \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{MPR}(n, C)
\end{aligned}
$$

Az $\mathrm{MPR}(n, C)$ első tagja interpretálható nettó díjként. Második tagja n-ben növekszik, minél több szerződést értékesít az adott biztosító, annál kisebb tőke jut egy szerződésre, kockázatosabb lesz a működés. A harmadik tag csökkenő n-ben, nagyobb n esetén az összes portfólióra vonatkozó szórás csökken, ezért alacsonyabb ár is megengedhető. Az is látható, hogy az $\mathrm{MPR}(n, C)$ függvény $n \to \infty$ esetén qK-hoz tart. Előfordulhat, hogy a fenti képlet a minimális árra magasabb értéket ad, mint K (a normálissal való közelítés miatt). Ez értelmes paraméterek mellett nem fordulhat elő:

$$
\begin{gathered}
qK - \frac{C}{n} + \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{\sqrt{n}} > K \\
n(q-1) + \phi\sqrt{nq(1-q)} - C > 0,
\end{gathered}
$$

ami nem teljesül elég nagy n esetén.

Maximalizáljuk a $\mathrm{MPR}(n, C)$ kifejezést n-ben, amiből megkapjuk adott tőkeszint melletti minimális árak maximumát. Ez fontos lesz majd az egyensúlyok vizsgálatánál.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathrm{MPR}(n, C)}{\partial n} &= \frac{C}{n^2} - \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{2n^{3/2}} = 0 \\
\Longrightarrow\quad n^* &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{4C^2}{\phi^2 q(1-q)K^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(Ellenőrizhető, hogy a második derivált ezen a helyen negatív. A 3.6. Függelékben megtalálható.) A kapott eredményt behelyettesítve

$$
\begin{aligned}
P^* &= qK - \frac{C}{\frac{4C^2}{\phi^2 q(1-q)K^2}} + \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{\sqrt{\frac{4C^2}{\phi^2 q(1-q)K^2}}} \\
&= qK - \frac{\phi^2 q(1-q)K^2}{4C} + \frac{\phi^2 q(1-q)K^2}{2C} \\
&= qK + \frac{\phi^2 q(1-q)K^2}{4C}.
\end{aligned}
$$

3.1. Állítás. *([4] 8. oldal.) Adott C tőkeszint mellett ha $n_1 < n_2$, akkor a várható profit növekszik az* MPR *függvény mentén, azaz*

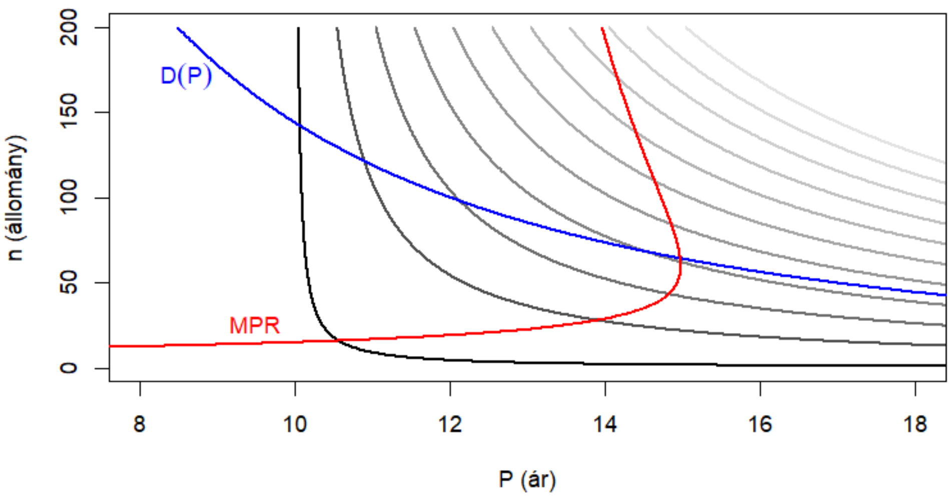
$$\pi_i(\mathrm{MPR}(n_1, C), n_1) < \pi_i(\mathrm{MPR}(n_2, C), n_2)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\pi_i(\mathrm{MPR}(n, C), n) &= n(\mathrm{MPR}(n, C) - qK) - rC \\
&= n\big(qK - \frac{C}{n} + \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{\sqrt{n}} - qK\big) - rC \\
&= -(1 + r)C + \phi\sqrt{nq(1-q)}K.
\end{aligned}$$

A kapott kifejezés n növekvő függvénye, ezért beláttuk az állítást. □

Az 5. ábrán lehet látni az izoprofit görbéket, az inverz keresleti függvényt (kék), és az MPR görbét (piros). Egy $\overline{u}$ szinthez tartozó izoprofit görbét azon (n, p) szerződés szám és ár párosok alkotják, amikhez tartozó várható profit $\overline{u}$. Minél halványabb a görbe, annál nagyobb szinthez tartozik az adott izoprofit görbe. A piros görbétől balra lévő terület azokat pontokat tartalmazza, amiknél a biztosító megsértené a minimális tőkekorlátot, így a biztosítók csak a piros görbéről és attól jobbra tudnak választani pontot büntetés nélkül.



5. ábra. Keresleti függvény, MPR görbe, izoprofit görbék (saját szerkesztés [4] alapján).
$(C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.03,\ \alpha = 120)$.

3.2. Állítás. *([4] 10. oldal.) Rögzített C tőke mellett az inverz keresleti függvénynek és az* MPR *görbének a metszéspontja a $(0, \infty)$ internallumban létezik és egyértelmű az*

$$n = \frac{\left(-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC} \right)^2}{4q^2K^2}$$

helyen, és az ehhez tartozó P_U ár az MPR *alapján pedig*

$$P_U = \frac{2\alpha qK}{-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC}}.$$

Bizonyítás. Keressük az alábbi egyenlet megoldását (baloldal az inverz keresleti függvény, jobboldal pedig az MPR görbe):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{n}} &= qK - \frac{C}{n} + \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{\sqrt{n}} \\ \Longrightarrow\ 0 &= qKn - C + \phi\sqrt{nq(1-q)}K - \alpha\sqrt{n} \\ \Longrightarrow\ 0 &= (\sqrt{n})^2 qK + \sqrt{n}\big(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha\big) - C \end{aligned}$$

Ez $\sqrt{n}$-ben egy másodfokú egyenlet. Ezt megoldva a két gyökre adódik, hogy

$$(\sqrt{n})_{1,2} = \frac{-\big(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha\big) \pm \sqrt{\big(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha\big)^2 + 4qKC}}{2qK}.$$

Mivel $4qKC > 0$, ezért csak $(\sqrt{n})_1$ jöhet szóba (mivel a másik gyök negatív), ezért megkaptuk az állítás első részét. A megfelelő gyök négyzetét behelyettesítve (mondjuk az inverz keresleti függvénybe) kapjuk, hogy

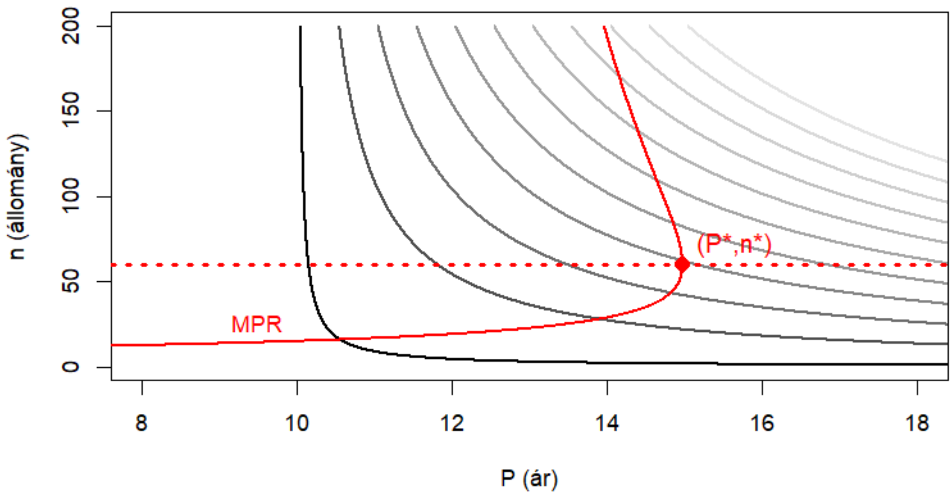
$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\frac{-\left(\phi\sqrt{q(1-q)}K-\alpha\right)+\sqrt{\left(\phi\sqrt{q(1-q)}K-\alpha\right)^2+4qKC}}{2qK}} \\ &= \frac{2\alpha qK}{-\big(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha\big) + \sqrt{\big(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha\big)^2 + 4qKC}} \end{aligned}$$

□

Megjegyzés. P_U az a legkisebb ár, ami mellett a biztosító a tőkekövetelmény megsértése nélkül ki tudja szolgálni egyedül az egész piacot. A qK (nettó díj) ár alatt nem éri meg a biztosítót működtetni.

3.2. Az egyensúlyok alakulása

A tőkekorlát nélküli modellben Bertrand oligopol piac esetén minden biztosító a qK nettó díjon értékesít, technikai eredmény nulla. Egy biztosító addig hajlandó szerződést értékesíteni, amíg a TR_i technikai eredménye nemnegatív, azaz $n_i(P_i, P_{-i})(P_i - qK) \geq 0$. A következőkben bevezetjük az MPR görbe növekvő és csökkenő részét.



6. ábra. MPR görbe növekvő és csökkenő része (saját szerkesztés [4] alapján).
$(C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.03)$.

A pirossal kijelölt (P^*, n^*) pont az a (3) alapján számolt pont. A szaggatott vonal alatti részt az MPR görbe növekvő részénék, a szaggatott vonal feletti részt pedig az MPR görbe csökkenő részének nevezzük. Az inverz keresleti görbe és az MPR görbe metszéspontja az MPR görbe növekvő részén van (a (3) egyenlet és a 3.2 állítás alapján), ha

$$\frac{4C^2}{\phi^2 q(1-q)K^2} > \frac{\left(-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC} \right)^2}{4q^2K^2}$$

amit átrendezve adódik, hogy

$$1 > \frac{\phi^2(1-q)\left(-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC} \right)^2}{16C^2 q}.$$

Először ezt az esetet vizsgáljuk az egyensúlyoknál.

3.3. Egyensúlyok az MPR görbe növekvő részén

Az MPR görbe és az inverz keresleti függvény metszéspontjának első koordinátája (3.2 állítás alapján) legyen P_U. A keresleti függvény I-ed része (mivel I biztosító van) $D_I(P) = \frac{D(P)}{I} = \frac{\alpha^2}{IP^2}$, és az inverze $D_I^{-1}(n) = \frac{\alpha}{\sqrt{In}}$. Ez ugyanolyan alakú inverz keresleti függvény mint amivel eddig dolgoztunk, $\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}$ szereposztással. Legyen P_L az MPR és $D_I^{-1}(n)$ metszéspontja. Ekkor az előzőek alapján

$$P_L = \frac{2\frac{\alpha}{\sqrt{I}}qK}{-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \frac{\alpha}{\sqrt{I}}) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \frac{\alpha}{\sqrt{I}})^2 + 4qKC}}.$$

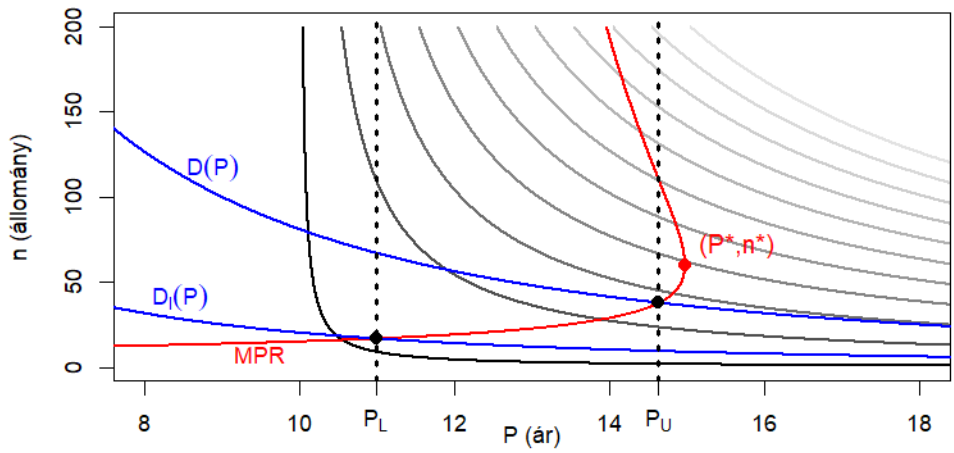
3.3. Állítás. *([4] 12. oldal.) Ha $P_U > qK$, akkor a $[\max(qK, P_L), P_U]$ intervallum minden pontja szimmetrikus Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Az MPR görbe növekvő részénél vagyunk, ezért $P_U > P_L$. Tegyük fel, hogy minden vállalat ugyanazt a $P_E \in [\max(qK, P_L), P_U]$ árat választja. Tekintsük az i. biztosítót és legyen $P \in (\max(qK, P_L), P_U)$. $P < P_E$ árra nem éri meg neki áttérni, mert ekkor nem teljesül a tőkekövetelmény feltétel, egy A nagyságú büntetést kap, amiről feltettük, hogy olyan nagy, hogy kedvezőbb neki inkább egy szerződést sem értékesíteni. $P > P_E$ árnál pedig egy szerződése sem lesz, a technikai eredménye nulla lesz. Ha $P_E = P_U$, akkor csökkenteni semelyik biztosítónak nem éri meg az árat, mert megint tőkekövetelmény sértés lenne, növeléssel pedig nulla lenne a technikai eredmény. $P_E = \max(qK, PL)$ árról csökkenteni megint nem érdemes, hiszen a technikai eredmény negatív lenne ($P < qK$) vagy megsértenénk a tőkekövetelményt ($P < P_L < P_U$). Növelni sem érdemes, hiszen ekkor a technikai eredmény nulla. □

Megjegyzés. P_U árnál nagyobb ár sem lehet egyensúlyi, hiszen az egyik biztosító infinitezimális egységgel történő árcsökkentése során a tőkekövetelmény megsértése nélkül (mivel még mindig P_U felett maradt az ár) az egész piacot ki tudná szolgálni nagyobb várható profitért.

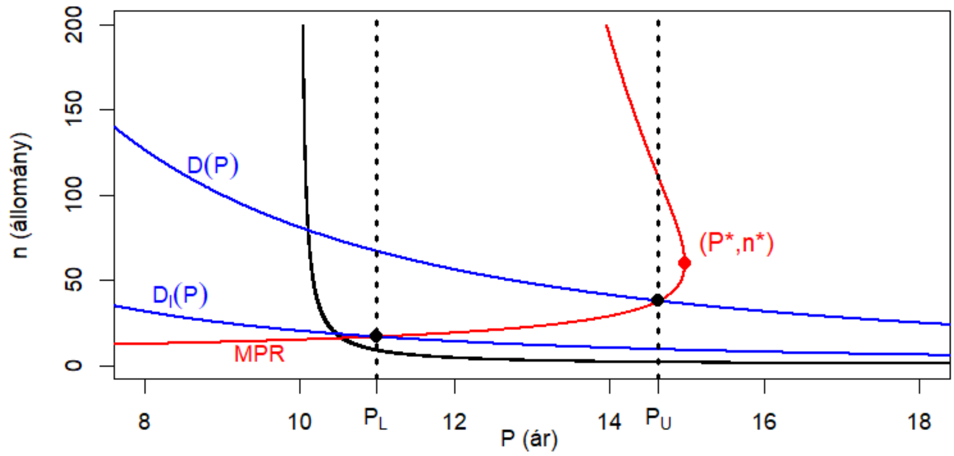
Minden lehetséges érték a P_L és P_U értékek között következő ábrán (7. ábra) egyensúlyi ár (mivel most $P_L > qK$), ekkor minden biztosító $D_I(P)$ keresleti görbéje a két függőleges szaggatott vonal között helyezkedik el. Minden biztosító a piac I-ed részét szolgálja ki a tőkefeltétel megsértése nélkül (és ebben az esetben a technikai eredmény is pozitív).

Az I paraméter növekedésével (azaz a piacon lévő biztosítók számának növekedésével) P_U nem változik, P_L pedig tart a 0-hoz, azaz egy idő után $\max(qK, P_U) = qK$.



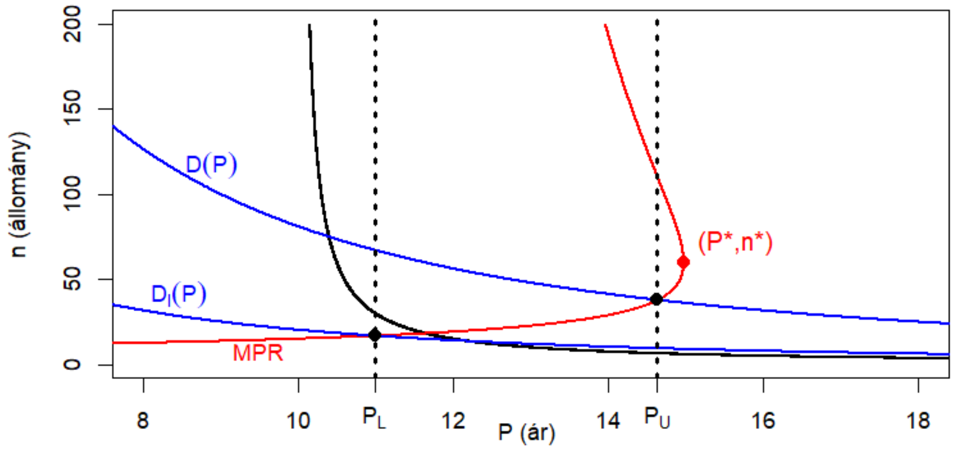
7. ábra. Az egyesnúlyi árak az MPR görbe növekvő részén (saját szerkesztés [4] alapján). ($C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.03,\ \alpha = 90,\ qK = 10$).

Láttuk, hogy minden egyensúlyi árnál a technikai eredmény nemnegatív, de a biztosítót a várható profitja is érdekli, ami ettől függetlenül lehet negatív is, ha a levonandó rC (a tőketartás költége) elég nagy. Most vizsgáljuk meg, mi történik a biztosító várható profitjával. A nulla várható profithoz tartozó hasznossági szint az eddigi ábrákon a teljesen fekete izprofit görbe volt (pl. 6. és 7. ábrán). Célszerű innentől csak ezt az izoprofit görbét tekinteni (pl. 8. ábrán az izoprofit görbék közül csak ez van kirajzolva).

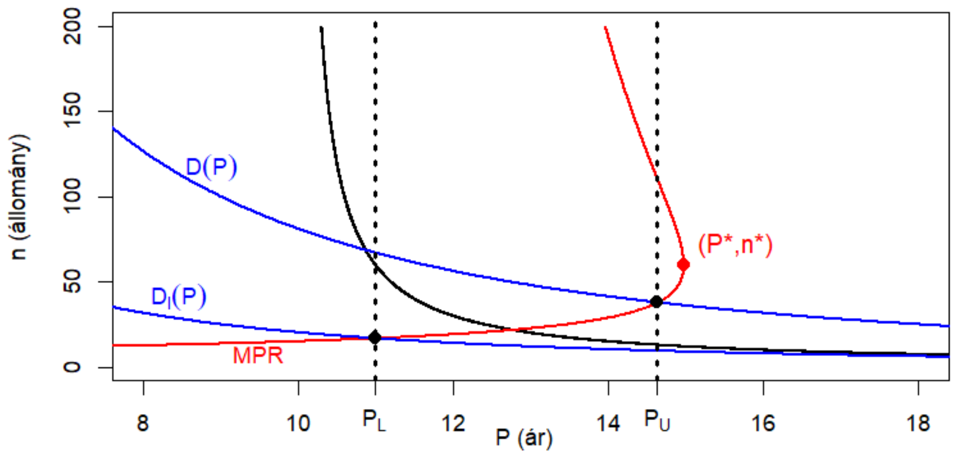


8. ábra. Nullához tartozó izoprofit görbe (saját szerkesztés [4] alapján). ($C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.03,\ \alpha = 90,\ qK = 10$).

Látható, hogy a $[P_L, P_U]$ invervallumon a $D_I(P)$ görbe a nullához tartozó izoprofit görbe felett van végig, tehát az egyensúlyi árak várható profitja pozitív lesz. De elképzelhető olyan is, hogy csak egy része van felette (9. ábra), vagy teljesen a nullához tartozó izoprofit görbe alatt van (10. ábra).



9. ábra. Saját szerkesztés [4] alapján.
$(C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.10,\ \alpha = 90,\ qK = 10)$.



10. ábra. Saját szerkesztés [4] alapján.
$(C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.20,\ \alpha = 90,\ qK = 10)$.

3.4. Állítás. *([4] 15. oldal.) Rögzített össztőke mellett (minden biztosítónak $\frac{C}{I}$ tőkéje van) a biztosítók I számának növekedésével P_L és P_U értéke is növekszik.*

Bizonyítás. $C' = \frac{C}{I}$ szereposztással alkalmazzuk a 3.2 állítást. Ekkor

$$P_U(I) = \frac{2\alpha qK}{-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qK\frac{C}{I}}},$$

ami I-ben növekvő függvény. A 3.3 fejezet elején elmondottak alapján pedig

$$P_L(I) = \frac{2\frac{\alpha}{\sqrt{I}}qK}{-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \frac{\alpha}{\sqrt{I}}) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \frac{\alpha}{\sqrt{I}})^2 + 4qK\frac{C}{I}}}.$$

Erről kell belátunk, hogy növekszik I-ben. Bővítsünk $\sqrt{I}$-vel:

$$\frac{2\alpha qK}{-(\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC}}.$$

A számláló nem függ I-től, csak a nevező. A nevezőt $f(I)$-nek elnevezve, deriváljuk I szerint.

$$f'(I) = \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{2\sqrt{I}}\left(\frac{\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha}{\sqrt{(\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC}} - 1\right),$$

ami negatív, hiszen

$$\frac{\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha}{\sqrt{(\sqrt{I}\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC}} < 1.$$

Mivel a nevező csökken I-ben, ezért $P_L(I)$ növekszik I-ben.

$\square$

Megjegyzés. Az előző állítás azt mondja ki, hogy minél több biztosító van a piacon rögzített össztőke mellett, annál magasabbak az egyensúlyi árak, ami eléggé szokatlan a közgazdaságtani modellekben. Ekkor felmerül az a kérdés, hogy az ügyfelek szempontjából egy monopol piac jobb lenne, mint egy oligopol piac? Monopol piac esetén $P_L = P_U = P$, és mivel nincs a piacon verseny, ezért P_1-nél is tud magasabb árat szabni. Legyen P_M a legnagyobb technikai eredményt elérő ár. Ezt ki is tudjuk számolni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\mathrm{TR}_i}{\partial P} = \frac{\partial\, n_i(P_i, P_{-i})(P - qK)}{\partial P} &= \alpha^2\left(\frac{P-qK}{P^2}\right)' \\ = \alpha^2\left(\frac{P^2 - (P-qK)2P}{P^4}\right) &= \alpha^2\left(\frac{-P+2qK}{P^3}\right)\end{aligned}$$

Mivel $P > 0$, ezért a derivált akkor 0, ha $P_M = 2qK$. A P_M ár nem lehetséges, ha $P_M < P$, ezért monopol piac esetén a $\max(P_M, P)$ ár fog kialakulni. Következményként kapjuk, hogy oligopol piac esetén ha $P < P_L$ és $P_M < P_L$, akkor monopol piacon alacsonyabb ár alakul ki.

3.5. Állítás. *([4] 15. oldal.) A biztosítók I számának növekedésével P_L értéke csökken és P_U értéke változatlan marad.*

Bizonyítás. Az előző állítás bizonyításához hasonlóan fogunk eljárni, de most nem $\frac{C}{I}$ tőkéje van egy biztosítónak, hanem C. P_U értéke nem függ I-től:

$$P_U = \frac{2\alpha qK}{-(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha) + \sqrt{(\phi\sqrt{q(1-q)}K - \alpha)^2 + 4qKC}},$$

tehát P_U nem változik. $D_I(P)$ görbe viszont az I növelésével csökken minden pontjában csökken (kivéve persze $P = 0$, de ez nekünk nem számít), tehát (mivel most az MPR görbe növekvő részénél vagyunk) balrább fogja metszeni az MPR görbét, ezzel alacsonyabb lesz P_L értéke. □

3.4. Egyensúlyok az MPR görbe csökkenő részén

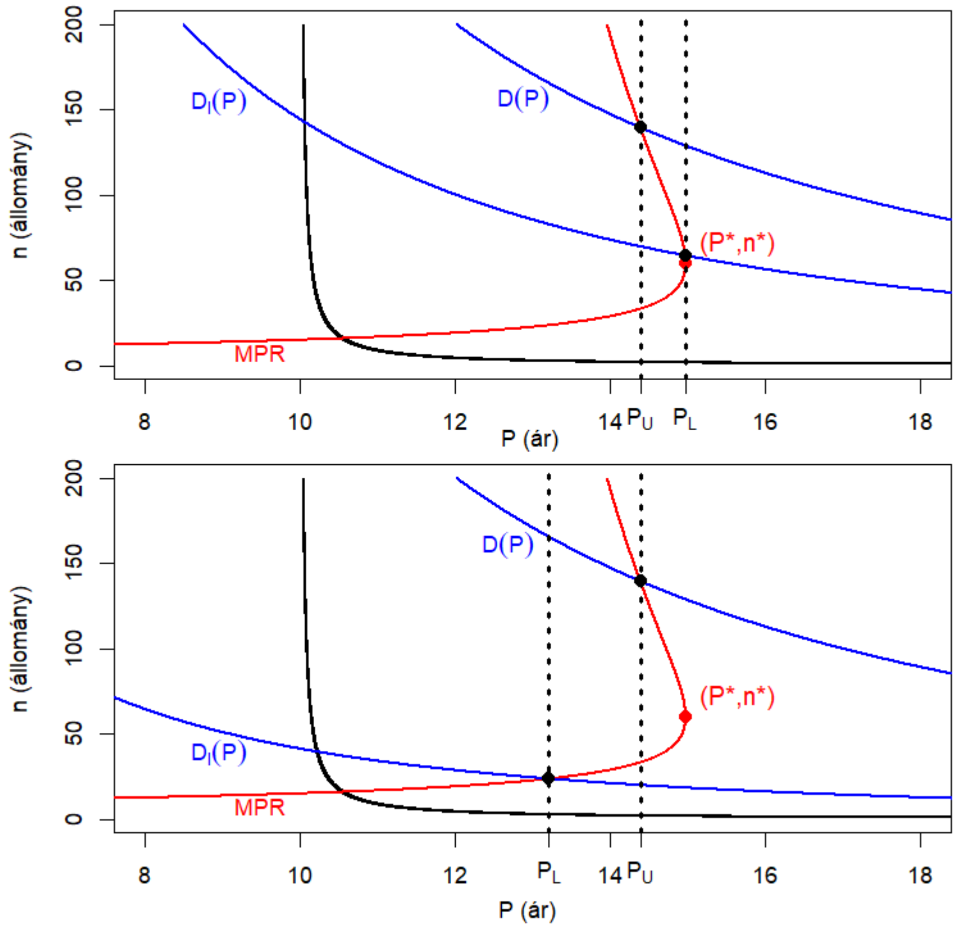
Eddig az MPR görbe növekvő részén lévő egyensúlyokat néztük. Most nézzük meg azt az esetet, amikor a csökkenő részén vannak a metszéspontok, és elemezzük az ezekhez tartozó egyensúlyi árakat.

Attól még, hogy a $D(P)$ keresleti függvény és a MPR görbe a csökkenő részen metszik egymást, attól még előfordulhat az az eset, hogy a $D_I(P)$ és az MPR metszéspontja a növekvő részen helyezkedik el. Sőt, az I növekedésével pedig biztosan el tudjuk érni, hogy a növekvő részen legyen a $D_I(P)$ és MPR metszéspontja (hiszen a 3.3 állítás feletti sorban, a P_L definíciójában ha I-vel tartunk a végtelenhez, akkor P_L tart nullához). Azaz megfelelően nagy I esetén már $P_L < P_U$ teljesül (ahogy a 11. ábrán látható), és a 3.3 állításhoz hasonlóan megint kontinuum sok Nash-egyensúly van.

3.6. Állítás. *([4] 17. oldal.) Legyen adott egy oligopol piac I biztosítóval. A piacon teljesüljön, hogy $P_L > P_U$, ha $P_M \leq P_U$. Ekkor csak egy fajta Nash-egyensúly létezik: egy tetszőleges biztosító a P_U díjat választja, a többiek pedig egy magasabbat választanak.*

Bizonyítás. Az I biztosító által választott díjak legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_I$. Ezek közül a minimum legyen P_{min}. Kettő esetet nézünk meg.
1) $P_{min} > P_U$ esetkor ha bármelyik biztosító kicsit kisebbet választ, mint P_{min}, akkor az egész piac az övé büntetés nélkül, és jobban jár.
2) $P_{min} = P_U$ teljesül, és több mint egy biztosító ezt az árat választja. Ekkor nekik ez nem éri meg, hiszen nem teljesítik a tőkekövetelmény feltételét (mert most a csökkenő résznél vannak a metszéspontok), ezért büntetést kapnak.

Ha csak egy biztosító választja a P_U díjat és $P_M \leq P_U$, akkor ez Nash-egyensúly. Ha viszont a $P_M > P_U$ teljesülne, akkor kicsit megnövelve a díjat több profithoz jutna a minimumot választó biztosító. □

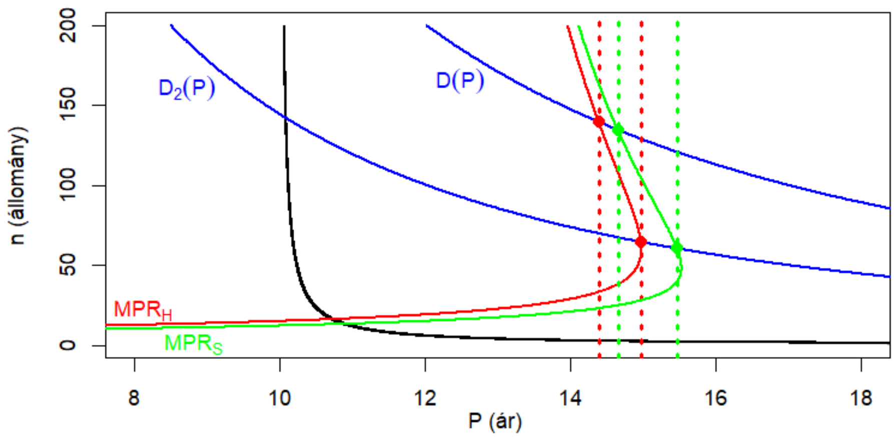


11. ábra. Saját szerkesztés [4] alapján.
$C = 300,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.03,\ \alpha = 170,\ qK = 10,\ I_1 = 2,\ I_2 = 7$).

3.5. Asszimetrikus tőke

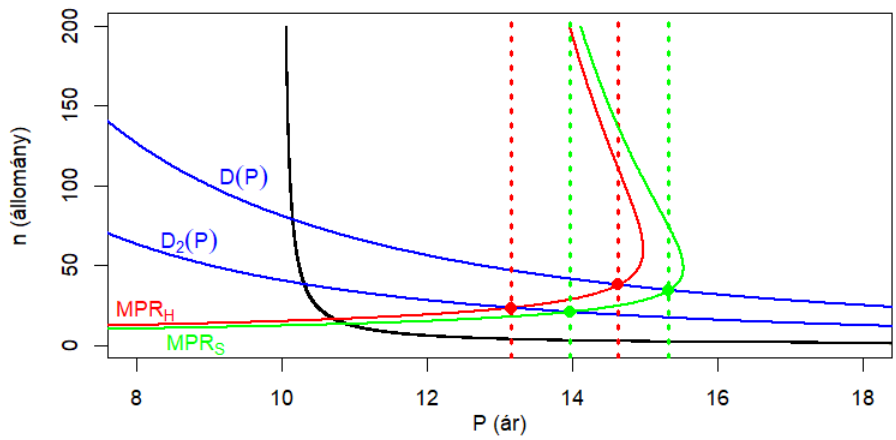
Eddig azokat az eseteket néztük, amikor mindegyik biztosítónak ugyanakkora (C, illetve $\frac{C}{I}$) tőkéje volt. Ezt a feltételt most elengedjük, és megnézzük mi történik akkor, amikor különböző (C_S és C_H) tőkével rendelkeznek. Csak kettő biztosító esetére ($I = 2$) nézzük meg, mivel már arra is eléggé sok eset előfordulhat. Általában kettő esetet különböztetünk meg.

1) A keresleti függvény és az MPR görbék (mivel most C_S-re és C_H-ra kapunk egyet) a csökkenő részen metszik egymást úgy, hogy ${}_SP_U < {}_SP_L$ és ${}_HP_U < {}_HP_L$ (12. ábra). (Ahol ${}_SP_L$ jelenti a $D_2(P)$ és MPR_S metszéspontját, ${}_SP_U$ pedig a $D(P)$ és MPR_S metszéspontja.)



12. ábra. Keresleti függény és az MPR görbe csökkenő részén történő metszése (saját szerkesztés [4] alapján).

2) A keresleti függvény és az MPR görbék a növekvő részen metszik egymást (13. ábra) és feltesszük, hogy ekkor $qK < {}_HP_L$ (amiből következik, hogy $qK < {}_SP_L$ is teljesül).



13. ábra. Saját szerkesztés [4] alapján. ($C_H = 300,\ C_S = 270,\ K = 100,\ q = 0.1,\ r = 0.04,\ \alpha = 90,\ qK = 10,\ I = 2$).

Tekintsük az 1) esetet. Ezt három részre lehet bontani aszerint, hogy a monopolista P_M díj hogyan viszonyul ${}_HP_U$ díjhoz.

$$1a)\ P_M < {}_HP_U$$
$$1b)\ {}_HP_U \leq P_M \leq {}_SP_U$$
$$1c)\ {}_SP_U < P_M$$

3.7. Állítás. *([4] 20. oldal.) Az* 1*a*) *esetben csak egyféle Nash-egyensúly létezik, amikor a nagyobbik tőkéjű biztosító* ${}_HP_U$ *díjat szab meg, a kisebbik tőkéjű biztosító pedig ennél nagyobb díjat választ.*

Bizonyítás. A nagyobbik tőkéjű biztosító díja legyen ${}_HP_U$, a kisebbiké pedig ennél nagyobb. A nagyobb tőkéjű biztosító nem csökkenti a díját, hiszen ekkor büntetést kell fizetnie, hiszen nem teljesíti a tőkekövetelmény feltételét. Növelni sem szeretné, mert ekkor a P_M értéktől még messzebb lenne, ami kevesebb profitot jelentene neki. A kisebb tőkéjű biztosító nem választja a ${}_HP_U$ díjat, mert neki ennél az árnál megosztott piac esetén (azaz a $D_2(P)$ görbét nézzük) megint büntetést kellene fizetnie. Hasonlóan jár, ha ${}_HP_U$ díjnál kevesebbet akarna választani. Ezzel beláttuk, hogy az ilyen alakú választások tényleg Nash-egyensúlyok.

Most tegyük fel, hogy van egy Nash-egyensúlyunk, amit úgy kaptunk, hogy a nagyobbik tőkéjű biztosító egy ${}_HP_U$ díjtól nagyobbat választott. Ha a kisebbik tőkéjű biztosító ${}_HP_U$ díjnál nagyobbat választ, akkor a nagyobbik tőkéjűnek megéri éppen ez alá rakni a díját. Ha a kisebbik tőkéjű legfeljebb ${}_HP_U$ díjat választ, akkor büntetést kap, azaz ez nem lehet Nash-egyensúly. □

3.8. Állítás. *([4] 21. oldal.) Az* 1*b*) *esetben létezik Nash-egyensúly, amit úgy kapunk, hogy a nagyobbik tőkéjű biztosító* P_M *díjat szab meg, a kisebbik tőkéjű biztosító pedig ennél nagyobb díjat választ. Ez egyértelmű abban az értelemben, hogy nem létezik olyan Nash-egyensúly, amiben a nagyobbik tőkéjű biztosító nem* P_M *díjat választ.*

Bizonyítás. Tekintsük az állításban lévő választást. A nagyobbik biztosító nem akar ettől eltérni, hiszen ez biztosítja neki a legnagyobb profitot. A kisebb biztosító nem akar P_M vagy kisebb díjat szabni, hiszen ekkor büntetést kellene fizetnie, tehát ez tényleg Nash-egyensúly.

Másrészt tegyük fel, hogy van egy Nash-egyensúlyunk, ahol a nagyobbik tőkéjű biztosító nem P_M díjat szabott meg. A kisebbik biztosító nem szabhat P_M vagy kisebb díjat, hiszen A nagyságú büntetést kap, szükségképp nagyobbat választ csak. Ekkor a nagyobbiknak megéri ez a díj alá rakni kicsivel az övét. □

3.9. Állítás. *([4] 22. oldal.) Az* 1c) *esetben nem létezik Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy választás, ami Nash-egyensúly. Ha a nagyobbik biztosító ${}_SP_U$-nál nagyobb díjat választ, akkor a kisebbik biztosító éppen alá választja a díját. Ha ${}_SP_U$ vagy kisebb díjat választja a nagyobbik biztosító, akkor a kisebbik biztosító nem választjatja a díját ugyanakkorának, vagy kevesebbnek, mert büntetést fizetne, ezért szükségképpen magasabb díjat szab meg. De ekkor a nagyobbik biztosítónak megéri emelni a díján éppen addig, amíg még éppen nem éri el P_M szintjét. □

Most tekintsük a 2) esetet. Ezt is további három részre szedjük szét.

2a) ${}_HP_U < {}_SP_L$ és $P_M < {}_SP_L$
2b) ${}_HP_U < {}_SP_L$ és ${}_SP_L \leq P_M$
2c) ${}_SP_L \leq {}_HP_U$

3.10. Állítás. *([4] 22. oldal.) Az* 2a) *esetben létezik Nash-egyensúly olyan választással, hogy a nagyobb tőkéjű biztosító* $\max({}_HP_U, P_M)$ *díjat választja, a kisebb tőkéjű biztosító pedig ennél bármilyen nagyobb díjat választ.*

Bizonyítás. Tekintsük az állításban lévő választásokat. A nagyobbik biztosító nem szeretne ettől eltérni, hiszen vagy büntetést kapna, vagy P_M értékétől messzebb menne, ami neki kevesebb profitot jelentene. A kisebbik biztosító pedig szintén nem akar eltérni a választásától, hiszen $\max({}_HP_U, P_M) < {}_SP_L$ feltétel miatt a legfeljebb $\max({}_HP_U, P_M)$ díjat büntetés nélkül nem választhatja. □

3.11. Állítás. *([4] 22. oldal.) Az* 2b) *esetben nem létezik Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. A nagyobbik biztosító nem választhat ${}_SP_U$ feletti díjat, hiszen ekkor a kisebbik biztosítónak megéri alá rakni egy kicsivel a díját. Ha ${}_SP_U$ díjat választ, akkor a kisebbik nem választhat kisebbet büntetés nélkül, tehát csak ${}_SP_U$ választhatna, de ekkor a nagyobbiknak megéri kicsivel csökkenteni a díjat (hiszen megkapja az egész piacot, és még mindig ${}_HP_U < {}_SP_L$). Ha pedig ${}_SP_U$ díj alatt választ, akkor a kisebbik biztosító büntetés nélküli díj választása után vagy kicsivel csökkenti a díját, vagy növeli, attól függően, hogy a kezdeti díja nagyobb-e, mint ${}_SP_L$, vagy nem. □

3.12. Állítás. *([4] 23. oldal.) Az 2c) esetben az $[{}_SP_L, {}_HP_U]$ invervallum minden pontja szimmetrikus Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Tekintsük az $[{}_SP_L, {}_HP_U]$ intervallum egy elemét. Ha a nagyobbik biztosító kicsit csökkenti a díját, akkor megkapja az egész piacot, de büntetést kap. Ha a kisebbik biztosító csökkenti az árát, akkor szintén büntetésben részesül. Ha növelik az árukat, akkor nem kapnak ügyfeleket, azaz ez rosszabb lesz nekik megint. ${}_SP_L$ díj alatti választás nem lehet szimmetrikus Nash-egyenúly a büntetés miatt. ${}_HP_U$ díj feletti választás sem lehet Nash-egyensúly, mert ekkor megéri a nagyobbik biztosítónak kicsivel kisebb díjat mondani. $\square$

Megjegyzés. Diszkrét díjak (azaz a biztosítók csak $P_1 < \cdots < P_k$ díjak közül választhatnak) esetében a 3.9 állítás úgy szólna, hogy létezik Nash-egyensúly, feltéve, hogy P_j díjon az egész piac birtoklása jobb, mint a fél piac birtoklása P_{j+1} díjon.

3.6. Függelék

$$\frac{\partial \operatorname{MPR}(n,C)}{\partial n} = \frac{C}{n^2} - \frac{\phi\sqrt{q(1-q)}K}{2n^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{MPR}(n,C)}{\partial^2 n} = -\frac{2C}{n^3} + \frac{3\phi\sqrt{q(1-q)}K}{4n^{5/2}}$$

$$-\frac{2C}{(n^*)^3} + \frac{3\phi\sqrt{q(1-q)}K}{4(n^*)^{5/2}} < 0 \quad \text{kell belátni.}$$

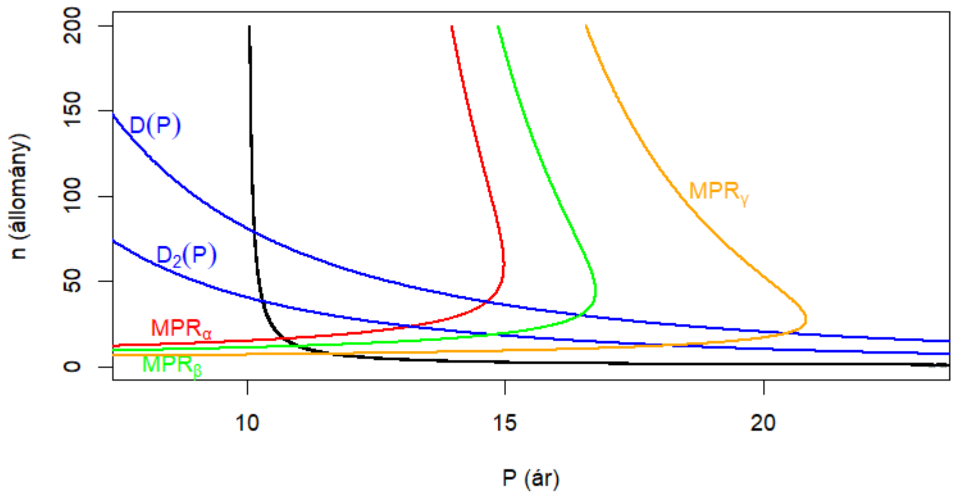
$$-\frac{2C}{(n^*)^{1/2}} + \frac{3\phi\sqrt{q(1-q)}K}{4} < 0$$

$$-\frac{2C}{\frac{2C}{\phi\sqrt{q(1-q)}K}} + \frac{3\phi\sqrt{q(1-q)}K}{4} < 0$$

$$-\phi\sqrt{q(1-q)}K + \frac{3\phi\sqrt{q(1-q)}K}{4} < 0 \qquad \square$$

4. Kockáztatott érték paraméterének változtatása

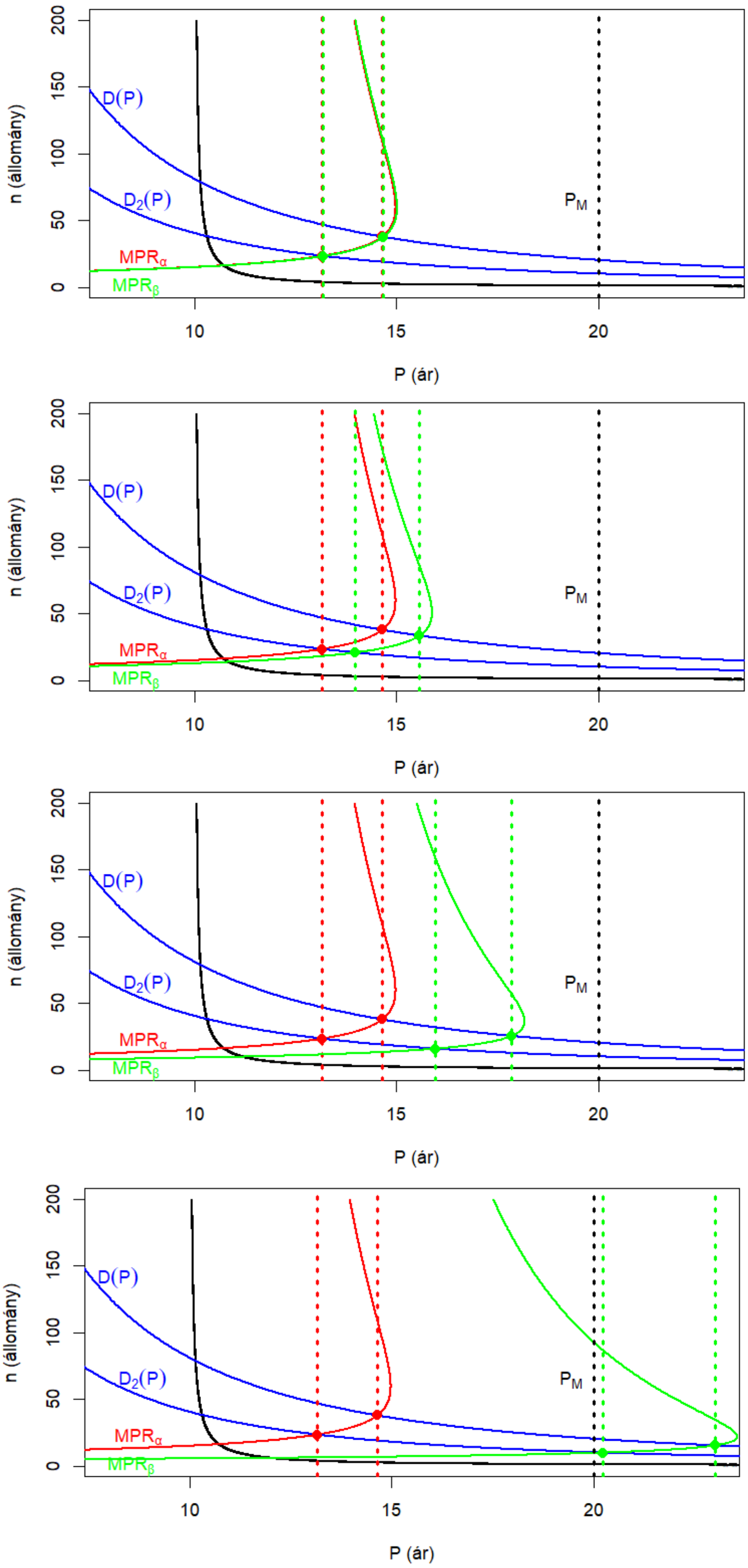
Eddig 99.5%-os kockáztatott értékkel dolgoztunk (tehát $\alpha = 0.005$ a VaR paramétere), ami a Szolvencia II direktívához tartozó paraméter volt. Ebben a fejezetben megnézzük, hogy kettő biztosító esetében hogyan változnak a lehetséges egyensúlyok a biztosító megbízhatóságának növelésével (azaz α csökkentésével). A megértést segíti, hogy megnézzük hogyan változik MPR görbe a VaR paraméterének csökkentésével.



14. ábra. VaR paraméterének csökkentése ($\alpha > \beta > \gamma$) (saját szerkesztés).

Azt olvassuk le a 14. ábráról amit gondolnánk: jobbra tolódik, tehát a megbízhatóbb működés érdekében növelni kell a biztosítónak a díját (hiszen a metszéspontok is jobbra tolódtak). Legyen kettő biztosító akiknek ugyanaz a VaR paraméterük ($\alpha = \beta$) majd az egyik elkezdi az övét csökkenteni (akinek a paramétere a β). Ezt a folyamatot a következő oldalon lévő ábrák mutatják meg (15. ábra).

Az első kettő kép a 15. ábrán éppen a $2c$) eset az előző fejezetből. A harmadik kép a $2b$), negyedik kép pedig a $2a$) esetnek felel meg. Tehát a Nash-egyensúlyok először szimmetrikusan, az $[{}_\beta P_L, {}_\alpha P_U]$ intervallumban helyezkednek el, ahol ${}_\beta P_L$ a β paraméterű MPR görbe és $D_2(P)$ metszéspontja, ${}_\alpha P_U$ pedig az α paraméterű MPR görbe és $D(P)$ metszéspontja. β csökkentésével egy pontra, a ${}_\beta P_L = {}_\alpha P_U$ szimmetrikus választásra szűkülnek le. Ezek után nem fog létezni Nash-egyensúly (15. ábrán a 3. kép), és P_M elhagyásával megint lesz kontinuum sok Nash-egyensúly (de ezek már nem szimmetrikusak).



15. ábra. VaR paraméterének csökkentésének folyamatábrája (saját szerkesztés).

Jelölje TR_α az α VaR paraméterű biztosító technikai eredményét. Ekkor ha $\alpha > \beta$, akkor

$$
\begin{aligned}
&2a)\text{ esetben } \mathrm{TR}_\alpha > \mathrm{TR}_\beta = 0\\
&2b)\text{ esetben nem létezik Nash-egyensúly}\\
&2c)\text{ esetben } \mathrm{TR}_\alpha = \mathrm{TR}_\beta
\end{aligned}
$$

A technikai eredményt minden esetben ki szeretnénk számolni, ezért a $2b$) esetet diszkrét megközelítésben nézzük $P_1 < \cdots < P_k$ lehetséges díjakkal. Legyen P_l olyan díj, hogy kisebbik VaR paraméterű biztosítóhoz tartozó P_L értékénél kisebb, de nincs nála nagyobb P_j ár, ami szintén P_L-nél kisebb. Ekkor meggondolható, hogy ha a nagyobbik VaR paraméterű biztosító P_l díj és a másik biztosító P_{l+j} díj választása ($j = 1, \ldots, k-l$) Nash-egyensúly lesz, és több nincs is. A P_l értékét tetszőlegesen közel tudjuk rakni a kisebbik VaR paraméterű biztosító P_L értékéhez. Ezért $2b$) esetben is a technikai profitot úgy fogjuk venni, hogy $\mathrm{TR}_\alpha > \mathrm{TR}_\beta = 0$. Az alábbiak lesznek a technikai eredmények ezzel a változtatással:

$$
\begin{aligned}
&2a)\text{ esetben } \mathrm{TR}_{\alpha,a} > \mathrm{TR}_{\beta,a} = 0\\
&2b)\text{ esetben } \mathrm{TR}_{\alpha,b} > \mathrm{TR}_{\beta,b} = 0\\
&2c)\text{ esetben } \mathrm{TR}_{\alpha,c} = \mathrm{TR}_{\beta,c}
\end{aligned}
$$

Tehát a kisebbik paraméterű biztosítónak nem éri meg „sokkal” kisebb paramétert mondani, hiszen ekkor a technikai profitja nulla lesz. Ez akkor történik meg, ha ${}_\alpha P_U < {}_\beta P_L$. Számoljuk ki a technikai eredményeket.

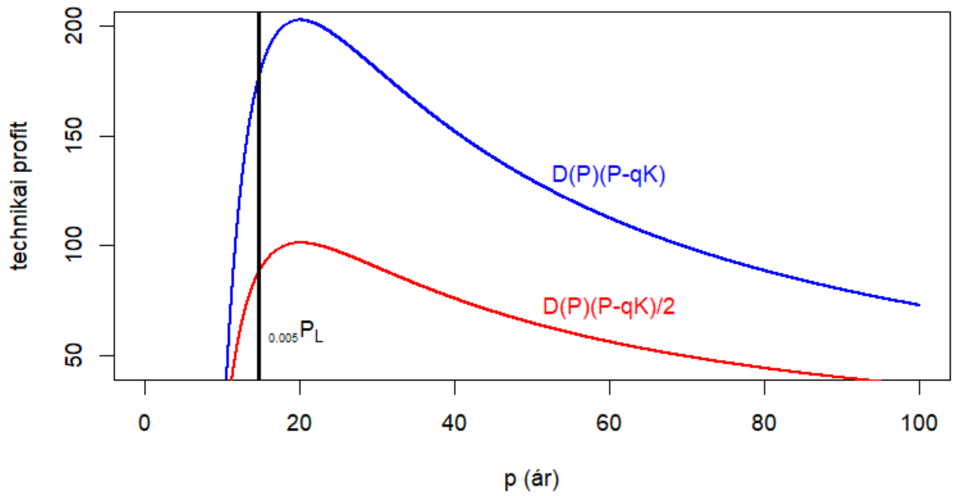
$2a$) esetben $\mathrm{TR}_{\alpha,a} = \frac{\alpha^2(P_M - qK)}{P_M^2} = \frac{\alpha^2(2qK - qK)}{4q^2K^2} = \frac{\alpha^2}{4qK}$ és $\mathrm{TR}_{\beta,a} = 0$.

$2b$) esetben $\mathrm{TR}_{\alpha,b} = \frac{\alpha^2({}_\beta P_L - qK)}{{}_\beta P_L{}^2}$ és $\mathrm{TR}_{\beta,b} = 0$.

$2c$) esetben $\mathrm{TR}_{\alpha,c} = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2({}_\alpha P_U - qK)}{{}_\alpha P_U{}^2} = \mathrm{TR}_{\beta,c}$

Megfigyelhető, hogy $\mathrm{TR}_{\alpha,a} > \mathrm{TR}_{\alpha,b} > \mathrm{TR}_{\alpha,c}$ és $\mathrm{TR}_{\beta,a} = \mathrm{TR}_{\beta,b} < \mathrm{TR}_{\beta,c}$.

Képzeljük el a következő játékot: a két biztosító a játék elején kiválasztja a VaR paraméterét, a díjakat pedig az ezekhez a paraméterekhez tartozó árverseny határozza meg (a kiválasztott VaR paraméterek köztudottak lesznek mindkét biztosító számára). Ezen két periódusú játék részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyait keressük meg. Mivel elég sok eset elképzelhető, ezért nézzük meg arra az esetre, amit a 15. ábra reprezentál, azaz $q = 0.1$, $r = 0.04$, $K = 100$, $\alpha = 90$ (és $I = 2$). A technikai profit függvény tehát $\frac{90^2(P-10)}{P^2}P = \frac{90^2(P-10)}{P}$. Tudjuk, hogy ${}_{0.005}P_L$ alatti díjat nem szabhatnak a biztosítók semmilyen esetben (hiszen ekkor még megosztott piac esetén is büntetésben részesülnek). Ezért a paraméterezés miatt nem lehet olyan eset, hogy megosztott piac esetén több a technikai profit, mint kisebb díjon az egész piac birtoklása (16. ábra).



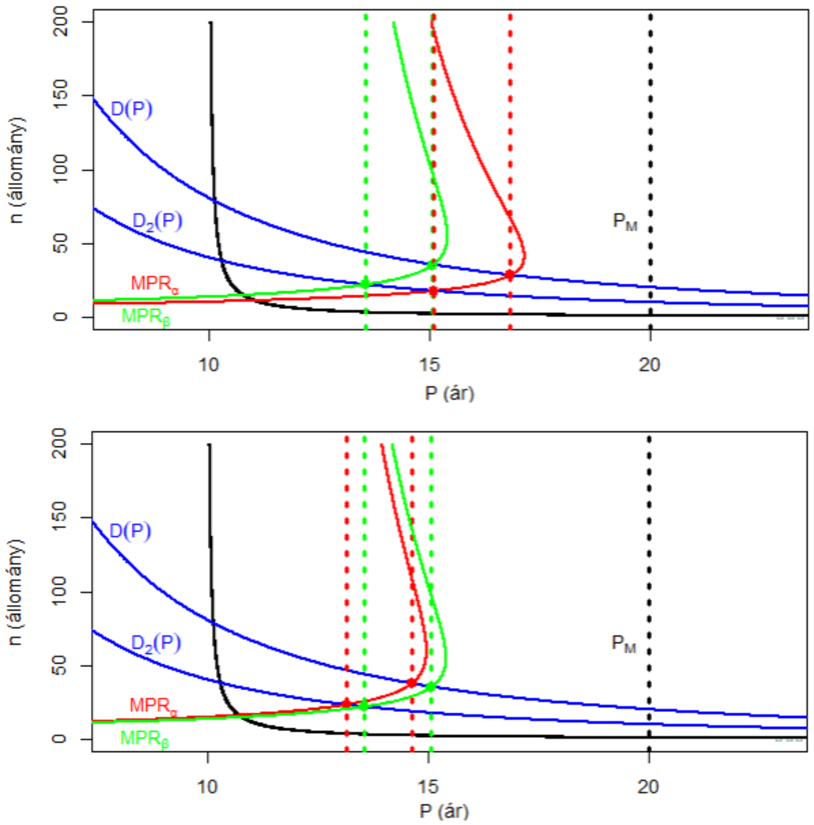
16. ábra. Technikai profitok (saját szerkesztés).

Mivel a 16. ábrán lévő piros görbe minden pontjának értéke a megengedett tartományon (${}_{0.005}P_L$ értékétől jobbra) kisebb, mint a kék görbe korábbi pontjainak értéke, ezért az egész piac birtoklása mindig jobb alacsonyabb áron, mint megosztani a piacot nagyobb árért cserébe.

Legyen az egyik biztosító választása α. Ha az ehhez tartozó MPR görbének ${}_{\alpha}P_L$ értéke nagyobb, mint P_M, akkor a másik biztosító legjobb válasza az a β, amire teljesül, hogy ${}_{\beta}P_U = P_M$ (hiszen ez maximalizálja a technikai profitot). Ha viszont az MPR görbének ${}_{\alpha}P_L$ értéke legfeljebb akkora mint P_M, akkor a másik biztosító legjobb válasza az a legkisebb γ, amire ${}_{\gamma}P_U < {}_{\alpha}P_L$ és $\gamma \leq 0.005$ teljesül, tehát az α paraméterű biztosítót éppen kiszorította a piacról. Ha viszont nem létezik az előbbi γ (ami csak úgy lehet, hogy $\gamma > 0.005$ lenne), akkor a(z) (egyik) legjobb válasz $\gamma = \alpha$, hiszen ekkor már benne vagyunk a $[\partial_{0.005}, 0.005]$ intervallumban, ahol ∂_α az a VaR paraméter, amire ${}_{\alpha}P_U = {}_{\partial_\alpha}P_L$ teljesül ($\gamma \in [\partial_{0.005}, \alpha]$ választások ugyanolyan technikai profitot adnak).

Tehát az utolsó lépés mindig úgy végződik, hogy a $[\partial_{0.005}, 0.005]$ intervallum egy elemét választja az egyik biztosító. A másik biztosító már nem tud olyan megengedett paramétert választani, amivel a másikat ki tudja szorítani a piacról, ezért azt már csak megosztani tudják. Emiatt a másik biztosító a $[\partial_\gamma, \gamma]$ bármelyik elemét tudja választani, mert ugyanaz a technikai profitja az összes elemnek. A fentinek miatt a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyokat a $\{(\gamma, \delta) : \gamma \in [\partial_{0.005}, 0.005]$ és $\delta \in [\partial_{0.005}, \gamma]\}$ párosok alkotják.

Megjegyzés. Látszik, hogy a Szolvencia II által meghatározott 99.5%-os kockáztatott érték fontos szerepet játszik a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyok alakulásában. Előfordulhatna olyan paraméterezés, hogy az árverseny által a biztosítók ennél az értéknél is lejebb mennének. Az is megfigyelhető, hogy olyan választások is lehetnek, ahol a biztosítók szigorúbb feltételeket is teljesítenek ($\{(\gamma, \delta) : \gamma \in [\partial_{0.005}, 0.005)$ és $\delta \in [\partial_{0.005}, \gamma]\}$). Számoljunk ki egy lehetséges kimenetelt a 27. oldal lap alján lévő paraméterekkel. Az első biztosító választása legyen az $\alpha = 0.001$. Ekkor a másik biztosító legjobb válasza a $\beta = 0.0036$ paraméter, hiszen ekkor lesz ${}_\beta P_U \approx {}_\alpha P_L$ (17. ábra első kép). Az első biztosító már nem tudja kiszorítani a piacról a másikat, mert a maximális $\alpha = 0.005$ választással sem tudja elérni, hogy ${}_\alpha P_U < {}_\beta P_L$ teljesüljön (17. ábra második kép). Emiatt az első biztosító (egyik) legjobb válasza az $\alpha = 0.0036$, tehát mindketten az előírt 99.5%-os értéknél szigorúbbat, 99.64%-ot teljesítenek. (A technikai profitjuk pedig a 27. oldalon lévő 2c) képlet alapján pedig pozitív lesz, hiszen ${}_\alpha P_U \approx 15.085$ és $qK = 10$.)



17. ábra. Példa (saját szerkesztés).

(Megfelelő paraméterezéssel és kezdő kockázatott érték választással elérhető az is, hogy a biztosítók éppen a 99.5%-os kockáztatott értéket érjék el pozitív technikai kamat mellett. Ilyen paraméterezést nehezebb találni. Úgy kellene a paraméterezést alakítani, hogy a másik biztosító kiszorítása utáni paraméterválasztás éppen $\alpha = 0.005$ legyen.)

Összefoglalás

A szakdolgozat során megnéztük a biztosítók állománypreferenciájának tulajdonságait a hasznosságfüggvények segítségével. Definiáltuk az állománysemleges, az állománykerülő, illetve az állománykedvelő biztosító fogalmát. Az állománykerülő és állománysemleges biztosító esetére mutattunk lehetséges hasznosságfüggvényekre példát.

Nem-kooperatív oligopol piacként modelleztük (Bertrand modellel) a biztosítási szektort a tőkekövetelmény korlát feltétel mellett, amit a Szolvencia II direktíva egyik eleme. Definiáltuk az MPR görbe növekvő és csökkenő részét, majd megnéztük az ezekhez tartozó Nash-egyensúlyokat különböző feltételek mellett (folytonos díjak mellett, de kitekéntésként a megfelelő állítást kimondtuk diszkrét díjak esetében is). A lehetséges eseteket pedig az MPR görbe metszéspontjai és a P_M optimális díj alapján bontottuk szét.

Az utolsó fejezetben pedig egy kétperiódusú játékot néztünk meg: az első körben a két biztosító VaR paramétert választ, majd utána az árakkal versenyeznek (a [9] tanulmányban is hasonlót olvashatuk, de ott az első periódusban mennyiségekről döntenek a vállalatok). Az eredmények és a modell ebben a fejezetben saját hozzájárulások. A kétperiódusú játéknak is megnéztük a részjáték-tökéletes Nash-egyensúlyait, és észrevettük, hogy előfordulhat az, hogy a 99.5 százalékos kockáztatott érték feltételnél is szigorúbb feltételt fognak teljesíteni.

Megjegyzés. A 2. fejezetben némi pontatlanság figyelhető meg. A 4, illetve 5. oldalon lévő hasznosságfüggvények átalakításában pár egyenlőségjel akkor igaz, ha az n egész szám. Ha n az nem egész szám, akkor az $\binom{n}{k}$ kifejezés nem értelmes, de ki lehet terjeszteni a Γ függvény által. Általánosítási lehetőség lehet a 4. fejezetben, hogy a kiválasztott VaR paraméterek nem lesznek publikusak a többi biztosító számára. Az első periódusban a VaR paraméter választás helyett lehetne tőke mennyiség választása is, de az utóbbira természetes felső korlát nem lenne (míg a VaR paraméterre a 0 és az 0.005 a korlátok).

Hivatkozások

[1] Claire Mouminoux, Christophe Dutang, Stéphane Loisel és Hansjoerg Albrecher. On a Markovian game model for competitive insurance pricing. Methodology and Computing in Applied Probability, 2021, ff10.1007/s11009-021-09906-1ff. ffhal-03448339f.

[2] Christophe Dutang, Hansjoerg Albrecher és Stéphane Loisel. Competition among non-life insurers under solvency constraints: A game-theoretic approach 16 December 2013.

[3] Ágoston Kolos Csaba és Varga Veronika (2020) Bertrand-árverseny állomány-preferenciák mellett a biztosítási piacokon. SZIGMA, 51 (2). pp. 149-167. ISSN 0039-8128.

[4] Kolos Csaba Ágoston és Veronika Varga (2024) Bertrand oligopoly in insurance markets with Value at Risk Constraints. arXiv 2404.17915.

[5] Zubor Zoltán (Magyar Nemzeti Bank, vezető aktuárius) 2016. szeptember, BIZTOSÍTÁS ÉS KOCKÁZAT, III. évfolyam 3. szám.

[6] Mondal, W. I. (2013). The Health Insurance Exchange: An Oligopolistic Market In Need Of Reform. Journal of Business Economics Research, 11(12), 569-576.

[7] Magnus Lindmark, Lars-Fredrik Andersson és Mike Adams (2006). The Evolution and Development of the Swedish Insurance Market. Accounting, Business Financial History, 16(3), 341-370.

[8] Michael Sonnenholzner és Achim Wambach (2004). Oligopoly in Insurance Markets. In: Teugels, J. és Sundt, B. (eds). Encyclopedia of Actuarial Science. Wiley, Chichester, UK (2004).

[9] David M. Kreps és Jose A. Scheinkman The Bell Journal of Economics, Vol. 14, No. 2 (Autumn, 1983), pp. 326-337.