

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Gálffy Veronika

STABILITÁS ÉS BIFURKÁCIÓK

**JÁRVÁNYTERJEDÉST MODELLEZŐ REAKCIÓ-
DIFFÚZIÓ-DIFFERENCIÁLEGYENLETBEN**

MSc diplomamunka

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

György Szilvia

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2024.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Kovács Sándornak, hogy a mesterképzés eleje óta szakértelmével támogatott, megismertette és megszerettette velem a reakció-diffúzió-differenciálegyenletek témáját, és mindig segített, ha bármilyen kérdésem volt, legyen az matematika, vagy akár más. Köszönettel tartozom továbbá György Szilviának, másik témavezetőmnek, a tőle kapott támogatásért és kedvességért, alaposága és segítőkészsége nagyban hozzájárult a diplomamunkám elkészüléséhez.

Köszönöm a családomnak, hogy az egyetemi tanulmányaim alatt végig támogattak és bíztattak, így a tanulásra tudtam fókuszálni. Köszönöm Marcinak, hogy meghallgatta a matekos kiselőadásaimat, és mindig tárt karokkal és finom étellel várt. Végül köszönöm a szaktársaimnak, hogy volt kivel megosztanom az összes aggodalmamat és örömeimet a szakdolgozatírás alatt.

Budapest, 2024. tavasz

Gálffy Veronika

Tartalomjegyzék

1. Közönséges differenciálegyenletek	4
1.1. Stabilitási fogalmak	4
1.2. Stabilitásvizsgálat	6
1.2.1. Lineáris közönséges differenciálegyenletek	6
1.2.2. Linearizálás	7
1.2.3. Ljapunov-függvény	7
2. Reakció-diffúzió-differenciálegyenletek	10
2.1. A diffúzió modellezése	10
2.2. Lotka-Volterra-modell	12
2.3. Veszétség terjedését modellező rendszer	13
2.4. Összehasonlítási tételek	14
2.4.1. Skaláris reakció-diffúzió-differenciálegyenletek	14
2.4.2. Többváltozós reakció-diffúzió-differenciálegyenletrendszerek	17
2.5. Stabilitásvizsgálat	18
2.5.1. Linearizálás	18
2.5.2. Lyapunov-függvény	21
3. Egy járványterjedést modellező reakció-diffúzió- differenciálegyenletrendszer	25
3.1. A rendszer ismertetése	25
3.2. Pozitivitás és korlátosság	27
3.3. Stabilitásvizsgálat linearizálással	32
3.4. Stabilitás öndiffúzióval, kereszt-diffúzió nélkül	33
3.5. Stabilitás ön-és kereszt-diffúzióval	37

Bevezetés

Diffúzióknak nevezzük azt a jelenséget, melynek során valami (legtöbbször molekulák) a nagyobb koncentrációjú helyről a kisebb koncentrációjú felé áramlik. Ez történik például, amikor elkeverünk egy kanál szörpöt egy pohár vízben. A diffúzió folyamatát matematikailag (többek között) parciális differenciálegyenletekkel modellezhetjük, melyek fizikai törvényekből (tömegmegmaradás, Fick-törvény) vezethetők le. Azonban az így kapott modellel nem csak kémiai reakciókat modellezhetünk, hanem sok minden mást is: populációdinamikát, járványterjedést, ingerületvezetést stb.

A dolgozat első fejezetében összefoglaljuk a közönséges differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatához szükséges fogalmakat, majd a második fejezetben bemutatjuk, hogyan motiválható pontosan a diffúziós modell, illetve összefoglaljuk a stabilitásvizsgálathoz szükséges ismereteket parciális differenciálegyenletekre is, erősen támaszkodva az [1] és [9] irodalmakra.

A harmadik fejezetben egy a [10] tanulmányban publikált járványterjedés modellezésére alkalmazott közönséges differenciálegyenletrendszer módosítunk úgy, hogy figyelembe vesszük a térbeli kiterjedést is, tehát hozzáadunk a rendszerhez egy diffúziós tagot. Megmutatjuk, hogy a rendszer bizonyos feltételek esetén biológiailag jólformált, majd megvizsgáljuk, hogy hogyan változik az egyensúlyi helyzetek stabilitása öndiffúzió illetve kereszt-diffúzió hozzáadása esetén.

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

A dolgozatban egy már publikált közönséges differenciálegyenlet-rendszert alakítunk át, diffúziós tagot hozzáadva a rendszerhez, hogy a térbeli kiterjedést is figyelembe vehessük. Ehhez azonban szükség lesz közönséges differenciálegyenletek vizsgálatára is, hiszen az a rendszer alapja, illetve a reakció-diffúzió-rendszer tértől független megoldásai is egy közönséges autonóm differenciálegyenletrendszert elégítenek ki. Ezért először összefoglaljuk a stabilitásvizsgálathoz szükséges definíciókat, tételeket. Ez a fejezet felépítésében Britton [1] második fejezetét követi, definíciók és jelölések a [8], [9] irodalmakból is előfordulnak.

1.1. Stabilitási fogalmak

Az alábbiakban az

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{u}, \text{id}) \tag{1.1.1}$$

rendszer megoldásainak kvalitatív tulajdonságaival foglalkozunk, ahol $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ egyszeresen összefüggő tartomány, $d \in \{2; 3\}$), vö. [8]).

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az (1.1.2) rendszer valamely $\psi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ megoldása *stabilis*, ha

(i) van olyan $\sigma > 0$, hogy minden $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}$ fázistérbeli elem esetén, ha

$$\|\mathbf{u}_0 - \psi(t_0)\| < \sigma$$

teljesül, akkor az (1.1.1) rendszer $\phi(\cdot; \mathbf{u}_0)$ megoldása értelmezve van a $[t_0, +\infty)$ intervallumon, és

(ii) minden $\epsilon > 0$ -hoz létezik $\delta \in (0, \sigma)$, hogy ha $\|\mathbf{u}_0 - \psi(t_0)\| < \delta$, akkor

$$\|\phi(t; \mathbf{u}_0) - \psi(t_0)\| < \epsilon \quad (t > t_0).$$

Egy szigorúbb tulajdonság az úgynevezett aszimptotikus stabilitás:

Definíció.

Az (1.1.1) rendszer valamely $\psi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ megoldását *aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis, továbbá alkalmas $\eta \in (0, \sigma)$, illetve tetszőleges, az $\|\mathbf{u}_0 - \psi(t_0)\| < \eta$ feltételnek eleget tévő $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}$ fázistérbeli elem esetén

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t; \mathbf{u}_0) - \psi(t)\| = 0.$$

A megoldás *globálisan aszimptotikusan stabilis*, ha η -t tetszőlegesen nagyra választhatjuk.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az (1.1.1) rendszer valamely ψ megoldása *labilis (instabil)*, ha nem stabilis.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az (1.1.1) rendszer *autonóm*, ha \mathbf{f} csak az \mathbf{u} -tól függ, azaz $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{u})$.

Az

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \circ \mathbf{u} \quad (1.1.2)$$

autonóm rendszer *egyensúlyi pontjának* vagy *egyensúlyi helyzetének* nevezzük az $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ fázistérbeli pontot, ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$. Azt mondjuk, hogy \mathbf{u}^* *egyensúlyi helyzet* (aszimptotikusan) *stabilis*, ha a

$$\psi(t) := \mathbf{u}^* \quad (t \in [t_0, +\infty))$$

megoldás (aszimptotikusan) *stabilis*.

1.2. Stabilitásvizsgálat

1.2.1. Lineáris közönséges differenciálegyenletek

Lineáris közönséges differenciálegyenletekben a stabilitást el tudjuk dönteni a rendszer Jacobi mátrixa sajátértékeinek vizsgálatával. Összefoglaljuk a lehetséges eseteket [1] alapján. Tekintsük a

$$\dot{u} = au$$

alakú lineáris differenciálegyenletet, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor az egyensúlyi helyzet az $u^* = 0$ pont, és a stabilitása kétféle lehet:

- ha $a > 0$: az $u^* = 0$ megoldás instabil;
- ha $a < 0$: az $u^* = 0$ megoldás aszimptotikusan stabilis.

Ha a rendszer két- vagy többváltozós, akkor a következő alakban írhatjuk fel:

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u},$$

ahol A egy $(d \times d)$ méretű mátrix. Ebben az esetben a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzet stabilitását az A mátrix sajátértékei döntenek el, pontosabban azok valós részének előjele. A következő esetek fordulhatnak elő:

- minden sajátérték valós része negatív: a $\mathbf{0}$ aszimptotikusan stabilis;
- az egyik sajátérték a $\mathbf{0}$, és a többi sajátérték valós része negatív: a $\mathbf{0}$ stabilis;
- ha létezik pozitív valós részű sajátérték: a $\mathbf{0}$ instabil.

1.2.2. Linearizálás

Az alábbiakban az (1.1.2) autonóm rendszer \mathbf{u}^* egyensúlyi helyzetének stabilitását vizsgáljuk a linearizálás módszerével.

Tétel.

Az (1.1.2) rendszer \mathbf{u}^* -ra vonatkozó első variációs rendszerének nevezzük az

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathfrak{A}\mathbf{S}$$

lineáris rendszert, ahol $\mathfrak{A} := \mathbf{f}'(\mathbf{u}^*)$. Ha az (1.2.2) rendszer karakterisztikus polinomja stabilis, azaz az \mathfrak{A} mátrix minden sajátértékének valós része kisebb, mint nulla, akkor az \mathbf{u}^* egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis. Ha a sajátértékek között van olyan, aminek a valós része pozitív, akkor az \mathbf{u}^* egyensúlyi helyzet instabil.

Tehát a stabilitás eldöntéséhez mátrixok spektrális tulajdonságait kell majd vizsgálnunk. Egy szükséges és elégséges feltételt ad a Routh-Hurwitz-kritérium valamely mátrix karakterisztikus polinomjának stabilitására.

Tétel (Routh-Hurwitz kritérium).

Legyen $d \in \mathbb{N}$, $0 < a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, továbbá

$$p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (z \in \mathbb{C}).$$

A p polinom stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$H_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (a_k = 0, \text{ ha } k > n)$$

Hurwitz-mátrix főminorjai pozitívak legyenek.

1.2.3. Ljapunov-függvény

Ha a linearizálás nem működik (túl bonyolultak a sajátértékek, vagy valamelyik sajátérték nulla), másféle eszközökkel is vizsgálhatjuk a stabilitást, például Ljapunov-függvény keresésével. Ennek a módszernek a segítségével a lokális stabilitáson túl globális stabilitást is beláthatunk. A következő definíciókra lesz szükségünk ([9] alapján):

Definíció (Lie-derivált).

A $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ függvény (1.1.2) rendszer szerinti deriváltjának, vagy f vektormező szerinti deriváltjának nevezzük a

$$V'_f = \nabla V \cdot \mathbf{f} = \sum_{k=1}^d \partial_k V \cdot f_k : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt.

Definíció (Ljapunov-függvény).

Az (1.1.2) autonóm rendszer *Ljapunov-függvényének* nevezzük a $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ függvényt, ha

$$V'_f(x) \leq 0 \quad (x \in \mathcal{M}).$$

A következő tételek segítségével következtethetünk egyensúlyi helyzetek stabilitására, ha találunk a rendszerhez egy Ljapunov-függvényt:

Tétel (Ljapunov).

Tegyük fel, hogy a $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ függvény az (1.1.2) rendszer egy Ljapunov-függvénye.

Ekkor az

$$N_c^+ := \{x \in \mathcal{M} \mid V(x) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

halmaz az (1.1.2) rendszer egy pozitívan invariáns halmaza.

Tétel (Ljapunov).

Tegyük fel, hogy a $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ függvény egy Ljapunov függvénye az (1.1.2) autonóm rendszernek. Legyen \bar{x} a rendszer egy egyensúlyi helyzete, azaz $\mathbf{f}(\bar{x}) = 0$. Ekkor

- ha

$$V(\bar{x}) = 0, \quad \text{és} \quad V(x) > 0 \quad (x \neq \bar{x}, x \in \mathcal{M}),$$

akkor az \bar{x} egyensúlyi helyzet stabilis.

- ha

$$V(\bar{x}) = 0, \quad \text{és} \quad V(x) > 0 \quad (x \neq \bar{x}, x \in \mathcal{M}),$$

és emellett

$$V_f'(\bar{x}) = 0 \quad \text{és} \quad V_f' < 0 \quad (x \neq \bar{x}, x \in \mathcal{M}),$$

akkor az \bar{x} egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis, és ha N_c^+ kompakt, akkor N_c^+ benne van az \bar{x} vonzási tartományában.

Példa.

Tekintsük az alábbi [1]-ben publikált rendszert:

$$\dot{u} = v + uh(u,v), \quad \dot{v} = -u + vh(u,v),$$

ahol h folytonos az origó egy környezetében, és $h(0,0) = 0$. A linearizált rendszer egy centrum az origó körül. Tekintsük a

$$V(u,v) := u^2 + v^2 \quad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

Ljapunov-függvényt. Ez pozitív definit függvény, és

$$\dot{V} = 2u(v + uh(u,v)) + 2v(-u + vh(u,v)) = 2(u^2 + v^2)h(u,v) \quad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

Tehát ha h negatív definit, akkor az origó aszimptotikusan stabilis, és ha pozitív definit, akkor az origó instabil. Így egy globális képet kaptunk a fázisportréről a Ljapunov-függvény felhasználásával.

2. fejezet

Reakció-diffúzió-differenciálegyenletek

2.1. A diffúzió modellezése

Reakció-diffúzió rendszerek gyakran parabolikus parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel modellezhetőek. Nem csupán kémiai reakciók írhatók le ilyen módon, hanem például az ingerületvezetés, ragadozó-zsákmány rendszerek populációjának alakulása, vagy járványok terjedése. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy hogyan motiválható a diffúzióknak ez a fajta modellezése, majd mutatunk két példát diffúzióval kiegészített autonóm rendszerre. Ezután a diffúziós rendszer kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatához szükséges tételeket foglaljuk össze. Ez a fejezet Britton [1] 4., 5. (definíciók, tételek) illetve 3. (példák) fejezete alapján készült. Tegyük fel, hogy a kémiai reakció modellezéséhez nem csak az anyagból jelen lévő mennyiséget, hanem az anyagok térbeli kiterjedését is figyelembe kell vennünk: a kémiai reakció például egy szakaszonszént sima peremmel rendelkező, Ω tartományon belül játszódik le, ami lehet például egy kémcső, amelynek határán keresztül nincsen migráció. Ekkor a rendszert az alábbi reakció-diffúzió-differenciálegyenlet írja le:

$$\partial_t \mathbf{u} = D \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u} + \mathbf{f} \circ \mathbf{u} \quad (2.1.1)$$

homogén Neumann-peremfeltétellel (a tartomány határán át nincs migráció):

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+), \quad (2.1.2)$$

és nem-negatív (nem azonosan zérus) kezdeti feltétellel:

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = \mathbf{u}_0(\cdot) \quad ((\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}), \quad (2.1.3)$$

ahol D pozitív definit diffúziós mátrix, továbbá \mathbf{u} a változók vektora. Az \mathbf{u} vektor lehet például egy kémiai reakcióban részt vevő anyagok koncentrációjának vektora.

Az alábbiakban megmutatjuk, miként motiválható ez a modell. Ha \mathbf{j} jelöli a populációban az egyedek térbeli áramlási sebességét, akkor Fick első törvénye szerint

$$\mathbf{j} = -D\nabla\mathbf{u}. \quad (2.1.4)$$

A negatív előjel – azaz hogy az egyedek áramlása sűrűséggradiensükkel ellentétes irányú – arra utal, hogy a diffúzió a sűrűség kiegyenlítésére irányul. A sűrűség definíciója szerint a tetszőlegesen rögzített Ω térrészben a populáció szereplőinek mennyisége

$$\int_{\Omega} u_k(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{r}$$

A tömegmegmaradás törvénye következtében a populáció k -adik szereplője Ω -beli mennyiségének időbeli változására a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_k(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{r} = \int_{\Omega} (f_k \circ u_k)(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{r} - \int_{\partial\Omega} j_k(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F} \quad (2.1.5)$$

összefüggés teljesül, ahol az f_i sima függvény jelöli a populáció szereplőinek forrassűrűségét, azaz az anyag keletkezésének ütemét: ha az Ω térrészen belül a populáció k indexű szereplőjének lélekszáma növekedik, akkor pozitív előjelű (forrás), ha fogy, akkor negatív előjelű (nyelő). (2.1.4)-et (2.1.5)-be helyettesítve, valamint alkalmazva a Gauß-Osztrogradszkij-tételt (2.1.5) az

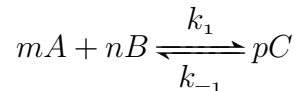
$$\int_{\Omega} (\partial_t u_k - f_k \circ u_k - \nabla \cdot D_k \nabla u_k) = 0$$

alakba írható. Tekintve, hogy Ω tetszőlegesen rögzített, az integrandus folytonossága alapján:

$$\partial_t u_k - f_k \circ u_k - \nabla \cdot D_k \nabla u_k = 0.$$

Feltételezve, hogy a D diffúziós mátrix nem függ az anyagok koncentrációjától (\mathbf{u} -tól), kapjuk a reakció-diffúzió differenciálegyenletek (2.1.1) alakját.

Az \mathbf{f} függvényt különféle jelenségek modellezésekor különbözőképpen kaphatjuk meg, egy kémiai reakció esetében például vegyük a lent látható reakciót:



ahol A, B, C a reagensek, k_1, k_{-1} konstansok, m, n, p pedig azt jelöli, hogy a reakcióban hány molekula vesz részt a megfelelő reagensből. Jelölje a reagensek koncentrációját $[A], [B], [C]$. A tömeghatás törvénye alapján

$$m \frac{d[A]}{dt} = -k_1 [A]^m [B]^n + k_{-1} [C]^p = n \frac{d[B]}{dt} = -p \frac{d[C]}{dt}.$$

Tehát például kémiai reakciók esetén, a reakció pontos ismeretében a tömeghatás törvényének segítségével megkaphatjuk az adott reagens forrassűrűségét.

A következőkben két példát mutatunk reakció-diffúzió-differenciálegyenletre.

2.2. Lotka-Volterra-modell

Lotka 1920-ban felvetett egy kémiai reakciót modellező rendszert, melyben oszcilláló megoldások jelentek meg. 1926-ban Volterra ugyanerre a rendszerre jutott, amivel egy olyan ragadozó-zsákmány-rendszert modellezett, mely oszcillációt mutatott.

A Volterra által tanulmányozott populáció fitoplanktonokból, mint ragadozó, illetve evezőlábú rákokból, mint zsákmány állt. A ragadozó mennyisége P , a zsákmányé H . A modell ezeknek a planktonoknak a számában mutatkozó oszcillációt modellezi, melyet az Adriai-tenger populációjában figyeltek meg. A Lotka-Volterra-modell a következőképp írható le:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha_1 P - \beta_1 P - \gamma PH, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= e\gamma PH + \alpha_2 H - \beta_2 H.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Tehát feltesszük, hogy a születési és halálzási ráták arányosak a jelenlévő plankton mennyiségével. Itt $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ a születési ráták, $\gamma > 0$ a ragadozás mértéke, $\beta_1, \beta_2 > 0$ pedig a természetes halálzási rátája. Feltesszük, hogy $\alpha_1 > \beta_1 > 0$, és $\alpha_2 < \beta_2$.

A rendszernek két egyensúlyi helyzete van:

$$P = H = 0,$$

illetve

$$P = P_S := \frac{(\beta_2 - \alpha_2)}{e\gamma}, \quad H = H_S := \frac{(\alpha_1 - \beta_1)}{\gamma}.$$

Az $u := P/P_S$, $v := H/H_S$, $\tau := (\alpha_1 - \beta_1)/t$ jelölések bevezetésével az (2.2.1) rendszer így módosul:

$$\dot{u} = u(1 - v), \quad \dot{v} = av(u - 1),\tag{2.2.2}$$

ahol $a := (\beta_2 - \alpha_2)/(\alpha_1 - \beta_1)$. Ehhez a rendszerhez hozzáadva a diffúziós tagot, egyenlő diffúziós együtthatókkal, kapjuk a következő reakció-diffúzió-rendszert:

$$\dot{u} = u(1 - v) + D\nabla^2 u, \quad \dot{v} = av(u - 1) + D\nabla^2 v.\tag{2.2.3}$$

Murray a következő tételt bizonyította be a (2.2.3) rendszerről:

Tétel (Murray [13]).

A (2.2.3) diffúziós Lotka-Volterra rendszer egyenlő diffúziós együtthatókkal és feltéve, hogy a tartomány határán keresztül nincs migráció, egy térben egyenlően eloszlott állapothoz tart, ahogy $t \rightarrow \infty$.

Tehát emiatt a diffúzióval kiegészített rendszer nem alkalmas olyan jelenségek modellezésére, ahol jellemzően a fajok különböző foltokban vannak jelen.

2.3. Veszetség terjedését modellező rendszer

Egy másik példaként tekintsük Kermack és McKendrick (1927) vírusterjedést modellező rendszerét. Tekintsünk egy N egyedből álló populációt, ahol S a betegségre fogékonyak száma, I a fertőzöttek, R pedig azok, akik el lettek távolítva a közösségből valamilyen módon, izoláció vagy halál által. A rendszer a következőképp néz ki:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta IS, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \beta IS - \gamma I, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I. \quad (2.3.1)$$

Mivel ebben a rendszerben az R független az első két rendszertől, ezért S és I ismeretében integrálással megkaphatjuk R -et is, tehát egyszerűbben:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta IS, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \beta IS - \gamma I \quad (2.3.2)$$

Källén és társszerzői kiegészítették a fenti rendszert egy diffúziós taggal a veszetség terjedésének modellezésére. A veszetség hordozói főleg rókák, akik ha egészségesek, többnyire a saját területükön maradnak, azonban ha veszettek, nagy távolságokat tesznek meg és megtámadnak más rókákat. Ezért ebben a modellben csak a fertőzöttek esetében vesszük számításba a diffúzió hatását, a fogékonyaknál nem. Tehát a diffúzióval kiegészített rendszer ([11]):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta IS, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \beta IS - \gamma I + D\nabla^2 I \quad (2.3.3)$$

alakú, ahol I és S a fertőzöttek és a fogékonyak sűrűsége. Járványnak nevezzük azt, amikor a fertőzöttek egy csoportja bekerül a fogékonyak közé. A járvány előtt és után a fertőzöttek sűrűségét 0-nak feltételezzük. Legyen a fogékonyak sűrűsége a járvány előtt S_0 . Az előző példához hasonlóan átírva a változókat: $u := S/S_0, I = I/S_0$, az alábbi rendszert kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -uv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = uv - rv + \nabla^2 v, \quad (2.3.4)$$

ahol $r = \gamma/\beta S_0$.

Haladó hullám típusú megoldást keresünk $u \equiv u(x + ct), v \equiv v(x + ct)$ formában, valamely konstans c hullám sebességgel. Ezt (2.3.4)-be beírva kapjuk:

$$cu' = -uv, \quad cv' = uv - rv + v'', \quad (2.3.5)$$

ahol a vessző differenciálást jelent $\xi = x + ct$ szerint. További számolással megkapható, hogy a fenti formában keresett hullám nem létezhet, ha $r \geq 1$, és ha $r < 1$, akkor bármely $c \geq 2\sqrt{1-r}$ -re létezik egy járványhullám. A járvány kialakulása tehát megakadályozható, ha r -et 1 felé tudjuk növelni, amit S_0 azaz a fogékonyak csökkentésével érhetünk el, például kerítés, vagy valamilyen akadály megépítésével.

2.4. Összehasonlítási tételek

A reakció-diffúzió-rendszerek kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatához összehasonlítási tételeket is fogunk használni, ugyanis ezek segítségével egy adott rendszer megoldásaira tudunk alsó vagy felső korlátot mondani. Először összefoglaljuk az összehasonlítási tétel kimondásához szükséges definíciókat, tételeket a *skaláris*, azaz egyváltozós esetben, majd a többváltozós esetben is.

2.4.1. Skaláris reakció-diffúzió-differenciálegyenletek

Ha az \mathbf{u} vektornak csak egy komponense van, a (2.1.1) - (2.1.3) reakció-diffúzió-differenciálegyenlet-rendszer egyetlen egyenletre redukálódik, $D > 0$ diffúziós együtthatóval. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ugyanúgy egyszeresen összefüggő, szakaszonként sima peremmel rendelkező tartomány, $D \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1$. Ekkor az egyenlet

$$\partial_t u = D \Delta_{\mathbf{x}} u + f \circ u \quad (2.4.1)$$

alakú. A homogén Neumann-peremfeltételek (a tartomány határán át nincs migráció)

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad ((\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+), \quad (2.4.2)$$

alakúak, és a rendszerhez nem-negatív (nem azonosan zérus)

$$u(\cdot, t) = u_0(\cdot) \quad ((\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}) \quad (2.4.3)$$

kezdeti feltételt írunk elő. A (2.4.1) egyenletet az

$$Nu = \partial_t u - D \Delta_{\mathbf{x}} u - f \circ u = 0, \quad (2.4.4)$$

alakba írhatjuk, ahol N nem feltétlenül lineáris operátor.

A következő tételeket és definíciókat ([1]) szintén fel fogjuk használni reakció-diffúzió-differenciálegyenletek elemzéséhez. Néhány jelölés: Legyen Ω adott térbeli tartomány. Ekkor

$$\begin{aligned} Q_T &:= \Omega \times (0, T), \\ S_0 &:= \Omega \times \{0\}, \\ S_T &:= \Omega \times \{T\}, \\ \Gamma &:= \partial\Omega \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Definíció.

A (2.4.1)-(2.4.3) vegyes feladat egy *általános szubmegoldása* egy u függvény, mely $\overline{Q_T}$ -n folytonos, illetve a megfelelő deriváltjai is folytonosak $Q_T \cup S_T$ -n, ezen kívül

- $Nu \leq 0$, és
- $u(\mathbf{x}, 0) \leq u_0(\mathbf{x})$, illetve
- $(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})u(\mathbf{x}, t) \leq 0$.

Azt mondjuk, hogy v egy *szubmegoldás*, ha

$$v(\mathbf{x}, t) = \max_{1 \leq i \leq p} u_i(\mathbf{x}, t),$$

általános szubmegoldások valamely u_i , $i = 1, \dots, p$ halmazára. A *szupermegoldások* hasonló módon vannak definiálva, fordított irányú egyenlőtlenségekkel.

Definíció.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ teljesíti a *belső-gömbtulajdonságot*, ha létezik megfelelő $\mathbf{p} \in \Omega$ és $r > 0$, úgy, hogy

$$B(\mathbf{p}, r) \subset \Omega, \quad \mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{p}, r),$$

ahol $B(\mathbf{p}, r)$ a \mathbf{p} középpontú, r sugarú gömb.

Tétel (Maximum-elv a Neumann-peremfeltétel esetén; Nirenberg [14]).

Legyen u egy $\overline{Q_T}$ -n folytonos függvény, mely megfelelő deriváltjai szintén folytonosak $Q_T \cup S_T$ -n. Tegyük fel, hogy u -ra teljesül

$$\partial_t - D\Delta_{\mathbf{x}}u - h(\mathbf{x},t)u \leq 0 \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T \cup S_T,$$

és $u \leq 0$ az S_0 -n, ahol h tetszőleges felülről korlátos függvény.

Ha emellett

$$Bu \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

és Q_T teljesíti a belső-gömb-tulajdonságot a Γ minden pontjában, akkor

$$u \leq 0, \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T.$$

Ez a tétel gyenge változata. Az erős maximum-elv azt is kimondja, hogy vagy

- $u < 0$ a $Q_T \cup S_T$ -n, vagy pedig
- $u \equiv 0$ a $Q_{t^*} \cup S_{t^*}$ -n, valamely $t^* \leq T$ -re.

A maximum-elvnek egy fontos következménye az alább látható Összehasonlítási tétel, melyet fel fogunk használni később a dolgozatban:

Tétel (Összehasonlítási tétel).

Legyenek u, \tilde{u} általános szub-és szupermegoldásai a megfelelő vegyes feladatnak. Tegyük fel, hogy f egyenletesen Lipschitz-folytonos, és Q_T teljesíti a belső-gömb-tulajdonságot. Ekkor

$$u \leq \tilde{u} \quad \text{a } \overline{Q_T} \text{ halmazon.}$$

Ez a tétel gyenge változata. Az erős összehasonlítási tétel emellett azt is kimondja, hogy vagy

- $u < \tilde{u}$ a $Q_T \cup S_T$ -n, vagy
- $u \equiv \tilde{u}$ a $Q_{t^*} \cup S_{t^*}$ -n, valamely $t^* \leq T$ -re.

Példa.

Az összehasonlítási tétel egy alkalmazásához tekintsük a Fisher-egyenlet [7] dimenziómentes alakját:

$$\partial_t u = u(1 - u) + \partial_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T \cup S_T,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in S_0, \quad 0 \leq u_0(x) \leq 1,$$

$$Bu(x, t) = b(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma, \quad 0 \leq b(x, t) \leq c(x, t),$$

ahol u_0 és b folytonos függvények. Legyen $u(x, t)$ egy megoldása ennek a feladatnak. Ekkor ha alkalmazzuk az összehasonlítási tételt az $u = 0$ és $\tilde{u} = u$ függvényekre, kapjuk, hogy $u(x, t) \geq 0$. Ha mégegyszer alkalmazzuk a tételt, ebben az esetben $u = u$, $\tilde{u} = 1$ -re, kapjuk, hogy $u(x, t) \leq 1$, tehát $0 \leq u(x, t) \leq 1$.

2.4.2. Többváltozós reakció-diffúzió-differenciálegyenletrendszerek

Korábban láttuk a maximumelvet és összehasonlítási tételt, egy egyenletből álló nemlineáris differenciálegyenletekre. Ezek az eredmények kiterjeszthetők rendszerekre is, azonban néhány szigorításra szükség van, és kicsivel gyengébb eredményt kapunk.

Definíció.

Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Ekkor $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$, ha bármely $i = 1, 2, \dots, m$ indexre $u_i \geq v_i$. Más relációk és operátorok ugyanígy, koordinátánként vannak definiálva, pl. max, min, inf, sup.

Definíció.

Az $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ függvény *kvázi monoton nem csökkenő*, ha minden $f_i(\mathbf{u})$ komponens nem csökkenő minden u_j -ben, ahol $j \neq i$.

Most már kimondhatjuk az összehasonlítási tétel rendszerekről szóló változatát:

Tétel (Összehasonlítási tétel rendszerekre).

Legyenek u, \tilde{u} általános szub- és szupermegoldásai a kezdetiérték-peremfeltétel feladatnak. Emellett tegyük fel, hogy f egyenletesen Lipschitz-folytonos és kvázi monoton nem csökkenő, illetve Q_T teljesíti a belső-gömb-tulajdonságot. Ekkor

$$\mathbf{u} \leq \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{a } \overline{Q_T} \text{ halmazon.}$$

Ez a tétel gyenge változata. Az erős összehasonlítási tétel emellett azt is kimondja, hogy vagy

- $\mathbf{u} < \tilde{\mathbf{u}}$ a $Q_T \cup S_T$ -n, vagy
- $\mathbf{u} \equiv \tilde{\mathbf{u}}$ a $Q_{t^*} \cup S_{t^*}$ -n, valamely $t^* \leq T$ -re.

2.5. Stabilitásvizsgálat

2.5.1. Linearizálás

Ebben a fejezetben tértől független állandómegoldások stabilitását fogjuk vizsgálni linearizálással. Először definiáljuk a stabilitását egy tértől független megoldásnak ([8] alapján):

Definíció.

Azt mondjuk, hogy a (2.1.1)-(2.1.3) vegyes feladat egy $\psi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ megoldása

- *stabilis*, ha

- (i) van olyan $\sigma > 0$, hogy a (2.1.1)-(2.1.3) minden olyan Φ megoldása, melyre teljesül, hogy

$$\|\Psi_0(\cdot) - \Phi_0(\cdot)\| < \sigma,$$

értelmezve van az $\Omega \times (0, \infty)$ tartományon, és

- (ii) minden $\epsilon > 0$ -hoz létezik $\delta \in (0, \sigma)$, úgy, hogy ha

$$\|\Psi_0(\cdot) - \Phi_0(\cdot)\| < \delta,$$

akkor

$$\|\Psi_0(\cdot, t) - \Phi_0(\cdot, t)\| < \epsilon \quad (t > 0).$$

- *aszimptotikusan stabilis*, ha stabilis, és létezik olyan $\eta \in (0, \sigma)$, hogy a (2.1.1)-(2.1.3) vegyes feladat minden Φ megoldására, melyre $\|\Psi_0(\cdot) - \Phi_0(\cdot)\| < \sigma$, az is teljesül, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|\Psi_0(\cdot, t) - \Phi_0(\cdot, t)\|) = 0.$$

Feltesszük, hogy $\mathbf{u} = 0$ egy egyensúlyi helyzete a rendszernek (ha nem, akkor eltoljuk), és az origó körül linearizálunk. A kezdeti feltételek és a peremfeltételek ugyanazok. Ekkor a linearizált rendszer az alábbi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{v} = D \cdot \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{v} + \mathfrak{A} \mathbf{v} & (\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} & (\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) & (\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (2.5.1)$$

ahol \mathfrak{A} az \mathbf{f} függvény Jacobi-mátrixa az egyensúlyi helyzetben, ebben az esetben az origóban.

A Fourier-módszert használva kereshetjük az (2.5.1) rendszer megoldásait az alábbi alakban:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \cdot \varphi(t) \quad (\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+,$$

ahol

$$\psi(\mathbf{r}) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ill.} \quad \varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

teljesíti, hogy

$$\dot{\varphi} = (\mathfrak{A} - \lambda D)\varphi \quad (2.5.2)$$

és

$$\Delta\psi = -\lambda\psi, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.5.3)$$

Ez alapján az Ω tartományon a (2.5.1) feladat megoldásai a következőképp néznek ki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\mathbf{r}) \exp(\mathfrak{A}_n t) \Psi_{0n} \quad ((\mathbf{r}, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$$

(v.ö. [6]), ahol minden $n \in \mathbb{N}_0$ -ra

$$\mathfrak{A}_n := \mathfrak{A} - \lambda_n D, \quad \mathbf{A}_{0n} := \int_{\Omega} \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

és λ_n az n -edik sajátértéke a mínusz Laplace operátornak, az Ω tartományon, homogén Neumann-peremfeltétellel, ezenkívül az (2.5.3) egyenlet megoldása, ψ_n a hozzá tartozó sajátfüggvény. Tudjuk (cf. [5]), hogy

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \longrightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.5.4)$$

és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények egymásra merőlegesek.

Tétel (Casten és Holland [3]).

- A (2.5.1) linearizált rendszer nullamegoldása homogén Neumann-peremfeltétellel globálisan aszimptotikusan stabilis, ha minden $n \in \mathbb{N}_0$ -ra az \mathfrak{A}_n mátrix minden sajátértékének valós része negatív. Ezen kívül létezik K, ω pozitív konstans, úgy, hogy minden $t > 0$ -ra

$$\|\mathbf{x}(\cdot, t)\| \leq K e^{-\omega t} |\mathbf{u}_0(\cdot)|.$$

- A (2.5.1) linearizált rendszer nullamegoldása stabil, ha minden $n \in \mathbb{N}_0$ -ra az \mathfrak{A}_n mátrix minden sajátértékének valós része nem-pozitív, és nincsen többszörös sajátérték.
- A (2.5.1) linearizált rendszer nullamegoldása instabil, ha az \mathfrak{A}_n mátrixnak létezik pozitív sajátértéke, vagy a nulla kétszeres sajátérték.

Ha a D mátrix skalármátrix, azaz $D = dI$, akkor látható, hogy a diffúzió nem destabilizálhatja a nullamegoldást. A következő tétel mondja ki, hogy hogyan függ össze a linearizált és a nemlineáris rendszer stabilitása:

Tétel (Casten és Holland [3]).

Az (2.1.1) rendszer nullamegoldása aszimptotikusan stabilis, ha a (2.5.1) linearizált rendszer nullamegoldása aszimptotikusan stabilis.

Tehát [1], [3] alapján az \bar{u} egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis, ha minden $n \in \mathbb{N}_0$ -re az \mathfrak{A}_n mátrix Hurwitz-stabilis, illetve \bar{u} instabil, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre \mathfrak{A}_n egy sajátértékének valós része pozitív.

2.5.2. Lyapunov-függvény

Egy másik módja a stabilitás eldöntésének Lyapunov-függvény keresése. Ha találunk a rendszerhez megfelelő függvényt, beláthatjuk akár a globális aszimptotikus stabilitását az egyensúlyi helyzetnek.

Példa.

De Mottoni és Rothe a következő ragadozó-zsákmány típusú rendszert tekintették [12]:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= h(u)(f(u) - a(v)) + D_1 \nabla^2 u, \\ \partial_t v &= k(v)(-g(v) + b(u)) + D_2 \nabla^2 v,\end{aligned}$$

homogén Neumann-peremfeltétellel, ahol $h, k > 0$ a $(0, \infty)$ -en, f szigorúan monoton csökkenő, a, b, g pedig szigorúan monoton növekedő. Feltették, hogy létezik egy Σ invariáns halmaz a pozitív kvadránsban, és hogy létezik Σ belsejében egy (u_s, v_s) egyensúlyi helyzet, és hogy $(a(v) - a(v_s))/k(v)$ illetve $(b(u) - b(u_s))/h(u)$ monoton növekvő Σ -n belül.

Ekkor

$$\tilde{V}(u, v) = \int \frac{b(u) - b(u_s)}{h(u)} du + \int \frac{a(v) - a(v_s)}{k(v)} dv$$

egy Lyapunov függvény a tértől független rendszerre, és

$$V(u, v) = \int_{\Omega} \tilde{V}(u, v) d\mathbf{x}$$

pedig egy Lyapunov-funkcionál, melyre dV/dt negatív definit a diffúziós rendszer esetén.

Korábban, a közönséges esetben láttunk példát kvadratikus Lyapunov-függvényre. Egy másik nagyon jellegzetes Lyapunov-függvényre példa a következő:

Példa.

A [15] tanulmányban Xie az alábbi három egyenletből álló reakció-diffúzió-rendszert tanulmányozta:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \Delta_{\mathbf{x}}[(k_{11} + k_{12}u_2)u_1] + u_1(d_1 - b_{11}u_1 - b_{12}u_2), \\ \partial_t u_2 = \Delta_{\mathbf{x}}[(k_{21}u_1 + k_{22} + k_{23}u_3)u_2] + u_2(d_2 + b_{21}u_1 - b_{22}u_2 - b_{23}u_3), \\ \partial_t u_3 = \Delta_{\mathbf{x}}[(k_{32}u_2 + k_{33})u_3] + u_3(d_3 + b_{32}u_2 - b_{33}u_3), \end{cases} \quad (2.5.5)$$

ahol $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+$, homogén Neumann-peremfeltétellel és nemnegatív kezdeti értékekkel:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) u_i(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad i = 1, 2, 3, (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ u_i(x, 0) &= u_{i0}(x) \quad i = 1, 2, 3, x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Tekintsük először csak a (2.5.5)-beli kinetikus rendszert:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(d_1 - b_{11}u_1 - b_{12}u_2) & := u_1 \cdot g_1(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 = u_2(d_2 + b_{21}u_1 - b_{22}u_2 - b_{23}u_3) & := u_2 \cdot g_2(u_1, u_2, u_3), \\ \dot{u}_3 = u_3(d_3 + b_{32}u_2 - b_{33}u_3) & := u_3 \cdot g_3(u_2, u_3). \end{cases} \quad (2.5.7)$$

A fenti rendszernek akkor van pozitív egyensúlyi helyzete, ha

$$\begin{cases} b_{32}d_1b_{23} + d_1b_{22}b_{33} + b_{12}d_3b_{23} > b_{12}b_{33}d_2, \\ b_{33}b_{11}d_2 + b_{33}b_{21}d_1 > d_3b_{11}b_{23}. \end{cases}$$

Legyen $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$. Ekkor

$$\bar{u}_1 = \frac{m_1}{M}, \quad \bar{u}_2 = \frac{m_2}{M}, \quad \bar{u}_3 = \frac{m_3}{M}, \quad (2.5.8)$$

ahol

$$\begin{aligned} m_1 &= b_{32}d_1b_{23} + d_1b_{22}b_{33} + b_{12}d_3b_{23} - b_{12}b_{33}d_2, \\ m_2 &= b_{33}b_{11}d_2 + b_{33}b_{21}d_1 - d_3b_{11}b_{23}, \\ m_3 &= b_{11}b_{32}d_2 + b_{21}b_{12}d_3 + b_{11}b_{22}d_3 + b_{21}b_{32}d_1, \\ M &= b_{11}b_{32}b_{23} + b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{12}b_{33}. \end{aligned}$$

Xie bebizonyította a következőt:

Tétel (Xie [15])

Az (2.5.7) rendszer (2.5.8)-ban definiált $\bar{\mathbf{u}}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis.

Biz. A rendszerhez Lyapunov függvény a következő:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}) &= \left(u_1 - \bar{u}_1 - \bar{u}_1 \ln \frac{u_1}{\bar{u}_1} \right) + \\ &+ p \left(u_2 - \bar{u}_2 - \bar{u}_2 \ln \frac{u_2}{\bar{u}_2} \right) + q \left(u_3 - \bar{u}_3 - \bar{u}_3 \ln \frac{u_3}{\bar{u}_3} \right), \end{aligned}$$

ahol

$$p = \frac{b_{12}}{b_{21}}, \quad q = \frac{b_{12}b_{23}}{b_{21}b_{32}}.$$

Ekkor $V(\bar{\mathbf{u}}) = 0, V(\mathbf{u}) > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{u}}$. Kiszámítva V idő szerinti deriváltját, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{u_1}\right) u_1' + p \left(1 - \frac{\bar{u}_2}{u_2}\right) u_2' + q \left(1 - \frac{\bar{u}_3}{u_3}\right) u_3' = \\ &= (u_1 - \bar{u}_1)g_1(u_1, u_2) + p(u_2 - \bar{u}_2)g_2(u_1, u_2, u_3) + q(u_3 - \bar{u}_3)g_3(u_2, u_3). \end{aligned}$$

Mivel $g_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$, és hasonlóan g_2, g_3 -ra, ezért

$$\begin{aligned} \partial_t V &= (u_1 - \bar{u}_1)(-b_{11}(u_1 - \bar{u}_1) - b_{12}(u_2 - \bar{u}_2)) + \\ &+ p(u_2 - \bar{u}_2)(b_{21}(u_1 - \bar{u}_1) - b_{22}(u_2 - \bar{u}_2) - b_{23}(u_3 - \bar{u}_3)) + \\ &+ q(u_3 - \bar{u}_3)(b_{32}(u_2 - \bar{u}_2) - b_{33}(u_3 - \bar{u}_3)) = \\ &= -(b_{11}(u_1 - \bar{u}_1)^2 + (b_{12} - pb_{21})(u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) + pb_{22}(u_2 - \bar{u}_2)^2) - \\ &- ((pb_{23} - qb_{32})(u_2 - \bar{u}_2)(u_3 - \bar{u}_3) + qb_{33}(u_3 - \bar{u}_3)^2) \\ &= -\left(b_{11}(u_1 - \bar{u}_1)^2 + \frac{b_{12}b_{22}}{b_{21}}(u_2 - \bar{u}_2)^2 + \frac{b_{12}b_{23}b_{33}}{b_{21}b_{32}}(u_3 - \bar{u}_3)^2\right) \leq \\ &\leq -\sigma((u_1 - \bar{u}_1)^2 + (u_2 - \bar{u}_2)^2 + (u_3 - \bar{u}_3)^2), \end{aligned}$$

ahol

$$\sigma := \min\left\{b_{11}, \frac{b_{12}b_{22}}{b_{21}}, \frac{b_{12}b_{23}b_{33}}{b_{21}b_{32}}\right\} > 0.$$

Tehát $\partial_t V < 0$, $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{u}}$. A Lyapunov-LaSalle invariancia tétel ([9]) alapján $\bar{\mathbf{u}}$ aszimptotikusan stabilis. ■

A kinetikus rendszerre vonatkozó Lyapunov függvény a diffúziós rendszerhez is hasznos:

Tétel (Xie [15])

Ha $k_{ij} = 0$, $i \neq j$, azaz ha csak öndiffúzió van jelen, akkor a (2.5.5) reakció-diffúzió rendszer (2.5.8)-ban definiált $\bar{\mathbf{u}}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis.

Biz.

Legyen a W függvény a következő:

$$W(t) := \int_{\Omega} V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x},$$

ahol $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ az (2.5.2) alapján definiált. Kiszámolva W idő szerinti deriváltját, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_t W &= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \partial_t \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{u_1}, p \left(1 - \frac{\bar{u}_2}{u_2} \right), q \left(1 - \frac{\bar{u}_3}{u_3} \right) \right) \cdot \\ &\quad \cdot (k_{11} \Delta_{\mathbf{x}} u_1 + u_1 g_1, k_{22} \Delta_{\mathbf{x}} u_2 + u_2 g_2, k_{33} \Delta_{\mathbf{x}} u_3 + u_3 g_3) \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left(k_{11} \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{u_1} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_1 \right) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \left(k_{22} \left(1 - \frac{\bar{u}_2}{u_2} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_2 \right) \, d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_{\Omega} q \left(k_{33} \left(1 - \frac{\bar{u}_3}{u_3} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_3 \right) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_t V \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

A Green-tételből következik, hogy

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(k_{ii} \left(1 - \frac{\bar{u}_i}{u_i} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_i \right) \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\partial\Omega} k_i \left(1 - \frac{\bar{u}_i}{u_i} \right) (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) u_i \, dS - \int_{\Omega} k_{ii} \nabla_{\mathbf{x}} \left(1 - \frac{\bar{u}_i}{u_i} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_i \, d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\Omega} k_{11} \bar{u}_i u_i^{-2} |\nabla_{\mathbf{x}} u_i|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Mivel $\partial_t V < 0$, ezért $\int_{\Omega} \partial_t V < 0$. Tehát, $\partial_t W < 0$, így a Lyapunov-LaSalle kritérium ([9]) alapján a (2.5.5) rendszer $\bar{\mathbf{u}}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis. ■

3. fejezet

Egy járványterjedést modellező reakció-diffúzió- differenciálegyenletrendszer

3.1. A rendszer ismertetése

A [10] tanulmányban a szerzők a következő járványterjedés modellezésére alkalmas SIS autonóm differenciálegyenletrendszert tekintették:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \lambda - \frac{aSI}{S+I} + \beta I - \psi S - \delta_S S =: f_1(S, E, I), \\ \dot{E} &= \psi S + \kappa I - \delta_E E =: f_2(S, E, I), \\ \dot{I} &= \frac{aSI}{S+I} - \kappa I - \beta I - \delta_I I =: f_3(S, E, I). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Itt a pont a t idő szerinti deriválást jelöli; $S(t) \geq 0$ és $I(t) \geq 0$ jelöli a betegségre fogékonyak és a fertőzöttek számát a t időpillanatban. Az ezektől független $E \geq 0$ változó reprezentálja az oktatottak vagy a betegség ellen beoltottak számát. A szerzők feltették, hogy $\kappa \leq a$. A pozitív paraméterek jelentése az (3.1.1) rendszerben az alább látható:

Paraméter	Jelentés
λ	a fogékonyak születési rátája ,
δ_k	a k faj halálozási rátája,
a	a transzmissziós együttható a fogékonyakból a fertőzöttekbe
β	a gyógyulási ráta
ψ	a fogékonyak oktatási rátája
κ	a fertőzöttek oktatási rátája

A [10] tanulmányban a szerzők többek között belátták, hogy a (3.1.1) rendszer biológiailag jólformált, azaz minden olyan megoldás, mely \mathbb{R}_+^3 -ből indul, pozitív marad minden $t \geq 0$ -ra, illetve korlátosak, tehát az alábbi halmaz invariáns:

$$\Omega := \{(S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 : S + E + I + \varepsilon, \text{ bármely } \varepsilon > 0\}. \quad (3.1.2)$$

Ezen kívül azt is belátták, hogy a (3.1.1) rendszernek kettő egyensúlyi helyzete lehet, az egyik a pozitívan invariáns halmaz határán: (betegségmentes egyensúlyi helyzet)

$$\mathfrak{E}_b := (S_b, E_b, I_b) := \left(\frac{\lambda}{\delta_S + \psi}, \frac{\lambda\psi}{\delta_E(\delta_S + \psi)}, 0 \right)$$

minden lehetséges paraméterre, illetve egy endemikus egyensúlyi helyzet $\mathfrak{E}_e = (S_e, E_e, I_e)$ az alábbi koordinátákkal:

$$S_e = \frac{\lambda(\beta + \delta_I + \kappa)}{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\psi + \delta_S - \delta_I - \kappa)},$$

és

$$I_e = \frac{\lambda(a - \beta - \delta_I - \kappa)}{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\delta_S - \delta_I - \kappa + \psi)},$$

illetve

$$E_e = \frac{1}{\delta_E} \cdot (\psi S_e + \kappa I_e) = \frac{a\kappa\lambda + \lambda(\beta + \delta_I + \kappa)(\psi - \kappa)}{\delta_E \{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\delta_S - \delta_I - \kappa + \psi)\}},$$

ahol

$$\kappa < a - \beta - \delta_I \quad (3.1.3)$$

teljesül, ezen kívül \mathfrak{E}_b globálisan aszimptotikusan stabilis, illetve instabil, ha (3.1.3) nem teljesül, illetve teljesül. Ha \mathfrak{E}_e létezik, akkor globálisan aszimptotikusan stabilis.

Ha figyelembe vesszük, hogy a populáció tagjai véletlenszerűen mozoghatnak egy kétdimenziós síkon, akkor a járvány terjedését egy reakció-diffúzió-differenciálegyenletrendszerrel jellemezhetjük, a (3.1.1) rendszerhez egy diffúziós tag hozzáadásával:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t S &= d_{SS}\Delta_{\mathbf{r}}S + d_{SE}\Delta_{\mathbf{r}}E + f_1(S, E, I), \\ \partial_t E &= d_{ES}\Delta_{\mathbf{r}}S + d_{EE}\Delta_{\mathbf{r}}E + f_2(S, E, I), \\ \partial_t I &= d_{IS}\Delta_{\mathbf{r}}S + d_{IE}\Delta_{\mathbf{r}}E + d_{II}\Delta_{\mathbf{r}}I + f_3(S, E, I) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

az $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$ tartományon, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos térbeli tartomány darabonként sima $\partial\Omega$ peremmel. A $d_{ii} > 0$ paraméterek jelentik az egyedek diffúzióját az i osztályon belül, $d_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$) pedig a kereszt-diffúziós ráta, azaz hogy az i faj mennyire diffundál a j faj nyomására ($i, j \in \{S, E, I\}$).

A $S(\mathbf{r},t)$, $E(\mathbf{r},t)$ és $I(\mathbf{r},t)$ változók az egyedek száma minden $t \in [0, +\infty)$ pillanatban a $\mathbf{r} \in \overline{\Omega}$ helyen. Itt d_{SI} és d_{EI} hiányoznak a (3.1.4) modellből, mivel azt tesszük fel, hogy a fogékonyak és az oktatók csak elhanyagolható mértékben közelednek egymáshoz, hiszen szeretnék elkerülni a betegséget, ezért ezeket az együtthatókat 0-nak vehetjük.

A (3.1.4) rendszer $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ megoldásai kielégítik a Neumann-peremfeltételeket:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0} \quad ((\mathbf{r},t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+), \quad (3.1.5)$$

nemnegatív kezdeti feltételekkel:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) (\neq) \geq \mathbf{0} \quad ((\mathbf{r},t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}), \quad (3.1.6)$$

ahol $\mathbf{u} := (S,E,I)$, és \mathbf{n} a $\partial\Omega$ kifelé mutató normálvektora.

A fejezet célja, hogy megmutassuk, hogy

- pozitív kezdeti feltételek esetén a diffúziós rendszer megoldásai pozitívak maradnak, illetve hogy a rendszer korlátos,
- mely paraméterek mellett marad a (3.1.4) rendszer betegségmentes illetve endemikus egyensúlyi helyzete stabil, öndiffúzióval, keresztidiffúzió nélkül,
- megfelelő keresztidiffúziós paraméterek választásával az egyensúlyi helyzet elveszítheti stabilitását, Turing-Hopf bifurkáció jön létre: egy eredetileg stabil egyensúlyi helyzet elveszíti a stabilitását a keresztidiffúzió hozzáadása miatt, és egy térbeli mintázat alakul ki.

A fejezet felépítése a következő: Miután megvizsgáltuk a (3.1.4) rendszert biológiai jólformáltságát, linearizálunk az egyensúlyi pontok körül, és megvizsgáljuk a stabilitásukat a Fourier-módszer segítségével. Az ezután következő szekciók a diffúzió által kialakuló Turing-bifurkáció előfordulásának lehetőségét vizsgálják, csak öndiffúzió illetve keresztidiffúzió esetében.

3.2. Pozitivitás és korlátosság

Legyen a D diffúziós mátrix a következő:

$$D := \begin{bmatrix} d_{SS} & d_{SE} & 0 \\ d_{ES} & d_{EE} & 0 \\ d_{IS} & d_{IE} & d_{II} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

és

$$\mathbf{f} := (f_1, f_2, f_2).$$

A (3.1.4) reakció-diffúzió rendszert átírhatjuk a következő rövidebb alakba, ahol $\mathbf{u} := (S, E, I)$:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= D \cdot \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) && \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} && (\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) && (\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

Hogy megmutassuk, hogy a (3.2.2) rendszer biológiailag jólformált, be kell látnunk, hogy

- a (3.2.2) rendszer egy

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

megoldása

$$\mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3) \quad \text{ahol} \quad u_0^i \neq 0 \quad (i \in \{1, 2, 3\})$$

nemnegatív kezdeti értékekkel nemnegatív marad minden $t \geq 0$ -ra, ahol létezik.

- a (3.2.2) rendszer összes megoldása korlátos, ezáltal létezik minden $t \geq 0$ -re.

Csak abban az esetben fogjuk belátni, amikor a D mátrix diagonális (csak öndiffúzió van jelen).

Az első tulajdonság a következőképp is megfogalmazható: a fázistér

$$\Sigma := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_k \geq 0 \ (k \in \{1, 2, 3\})\} \quad (3.2.3)$$

pozitív kvadránsa pozitívan invariáns. Ez motiválja az alábbi definíciót:

Definíció

Egy zárt $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz pozitívan invariáns halmaz a (3.2.2) rendszer egy megoldására vonatkozóan, ha megfelelő $T > 0$ -ra bármely Φ megoldás, melynek a kezdeti értékei és peremfeltételei is Σ -n belüliek, teljesíti, hogy

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \in \Sigma \quad ((\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]).$$

Látható, hogy a (3.2.3)-ban definiált Σ halmaz egy zárt részhalmaz.

A [4] tanulmányban található az alábbi eredmény a pozitívan invariáns halmazokról, melyet felhasználunk:

Tétel (Chueh; Conley; Smoller [4]).

Legyen $d, m \in \mathbb{N}$, ill.

$$\Sigma := \bigcap_{k=1}^m \{\mathbf{r} \in U : G_k(\mathbf{r}) \leq 0\},$$

ahol $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz és $G_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan \mathcal{C}^1 függvények, amelyek ∇G_i gradiense sehol sem tűnik el ($k \in \{1, \dots, m\}$). Ha tetszőleges $\mathbf{r} \in \partial\Sigma$ pontban minden $k \in \{1, \dots, m\}$ indexre

(i) $\nabla G_i(\mathbf{r})$ a D diffúziómátrix bal oldali sajátvektora;

(ii) a G_i függvény kvázi-konvex, azaz bármely $\mathbf{r} \in U$, ill $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ esetén a $\langle \nabla G_i(\mathbf{r}), \mathbf{s} \rangle = 0$ egyenlőség következménye: $\langle \mathbf{s}, \nabla^2 G_i(\mathbf{r}) \mathbf{s} \rangle \geq 0$;

(iii) $\langle \nabla G_i(\mathbf{r}), \mathbf{f}(\mathbf{r}) \rangle < 0$,

akkor Σ a (2.1.1) típusú rendszert illetően pozitívan invariáns halmaz.

Látható, hogy

- mivel $\Phi_3 \equiv 0$ egy megoldása a (3.2.2) rendszer harmadik egyenletének, az egyértelműség miatt semelyik más $\Phi_3(\cdot, t) > 0$ megoldás sem lehet egy $t \geq 0$ sem 0 véges időn belül,
- a

$$G_1(S, E, I) := -S, \quad \text{ill.} \quad G_2(S, E, I) := -E$$

függvények teljesítik a fenti lemma feltételeit.

Így bebizonyítottuk a következő állítást:

Tétel

Ha D pozitív diagonális mátrix, akkor minden $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ megoldása a (2.1.1) rendszernek pozitív kezdeti értékekkel pozitív marad minden $t \geq 0$ -ra ahol létezik.

A következőkben a (3.2.2) rendszert vizsgáljuk, megszorítva a $(\mathbb{R}_0^+)^3$ tartományra, és megmutatjuk, hogy ha a D mátrix egy skalármátrix, akkor minden megoldás korlátos marad $0 \leq t \in \mathbb{R}$ -ra, amiből következik a megoldások létezése minden $t > 0$ -ra.

Tétel

Ha D pozitív skalármátrix, akkor a (2.1.1) rendszer korlátos.

Biz. Legyen

$$\sigma(\mathbf{r},t) := \sigma(S,E,I) = S(\mathbf{r},t) + E(\mathbf{r},t) + I(\mathbf{r},t),$$

akkor felhasználva, hogy $d_S = d_E = d_I = d$, és összeadva az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$\dot{\sigma}(\mathbf{r},t) - d \Delta \sigma(\mathbf{r},t) \equiv \lambda - \delta_S S - \delta_E E - \delta_I I \leq \lambda - \xi \sigma(\mathbf{r},t), \quad (3.2.4)$$

ahol $\xi = \min\{d_S, d_E, d_I\}$. Tehát $\sigma(\mathbf{r},t)$ -ra igaz, hogy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}(\mathbf{r},t) - d \Delta \sigma(\mathbf{r},t) &\leq \lambda - \xi \sigma(\mathbf{r},t), \\ \sigma(\mathbf{r},0) &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Legyen ϕ egy megoldása az alábbi rendszernek:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\equiv \lambda - \xi \phi(t) \\ \phi(0) &= \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} \sigma(\mathbf{r},0) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

Ekkor ϕ korlátos:

$$\phi(t) \leq \max \left\{ \lambda/\xi, \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} \sigma(\mathbf{r},0) \right\},$$

és az Összehasonlítási tétel miatt ([1]), $\sigma(\mathbf{r},t) \leq \phi(t)$, így

$$\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \ni (\mathbf{r},t) \mapsto S(\mathbf{r},t), E(\mathbf{r},t), I(\mathbf{r},t)$$

szintén korlátos. Megjegyezzük, hogy (3.2.6)-ból következik, hogy $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \lambda/\xi$, azaz $\sigma(\mathbf{r}, \cdot)$ ($\mathbf{r} \in \bar{\Omega}$) definiálva van az egész pozitív félegyenesen, és

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} \sigma(\mathbf{r},t) \leq \lambda/\xi. \quad \blacksquare$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor D nem skaláris mátrix, azaz a diffúziós együtthatók nem egyenlőek, de keresztidiffúzió nincs jelen, és

$$\psi + \delta_S = \kappa + \delta_I =: \mu \quad (3.2.7)$$

teljesül.

Tétel

Ha (3.2.7) teljesül, akkor a (3.1.4) rendszer korlátos.

Biz.

1. lépés Definiáljuk a populáció összlétszámát a t időpillanatban:

$$N(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (S(\mathbf{r},t) + I(\mathbf{r},t)) \, \mathbf{dr} \quad (t \in [0, +\infty))$$

ahol $|\Omega|$ jelöli az Ω Lebesgue-mértékét. Tehát

$$N_0 := N(0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (S(\mathbf{r},0) + I(\mathbf{r},0)) \, \mathbf{dr}.$$

Összeadva a (3.1.4) rendszer első és harmadik egyenletét, és Ω -n integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (S(\mathbf{r},t) + I(\mathbf{r},t)) \, \mathbf{dr} = \lambda |\Omega| - \mu \int_{\Omega} (S + I) + d_{SS} \int_{\Omega} \Delta S + d_{II} \int_{\Omega} \Delta I.$$

A divergenciatételt használva $\phi \in \{S, I\}$ -re kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} \Delta \phi = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \phi) = \int_{\partial \Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0,$$

mert a homogén Neumann peremfeltételek azt jelentik (3.1.5)-ra nézve, hogy

$$\nabla_{\mathbf{r}} S = 0, \quad \nabla_{\mathbf{r}} E = 0, \quad \nabla_{\mathbf{r}} I = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega \times \mathbb{R}_0^+.$$

tehát

$$\partial_t N(t) + \mu N(t) = \lambda \quad (t \in [0, +\infty)).$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$N(t) = \left(N_0 - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu} \quad (t \in [0, +\infty)).$$

Ez azt jelenti, hogy $\phi \in \{S, I\}$ -re igaz, hogy

$$\int_{\Omega} \phi \leq \frac{\lambda}{\mu}.$$

Tehát ϕ felülről korlátozva van $\frac{\lambda}{\mu}$ által Ω -n, vagyis

$$\|\phi\|_{\infty} \leq \frac{\lambda}{\mu} \quad (\phi \in \{S, I\}).$$

2. lépés Használva a [2]-beli módszert, látható, hogy (3.2.7)-ből következik, hogy a (3.1.4) rendszerbeli második változó is korlátos:

$$E \leq \max \left\{ \frac{\mu N_0}{\delta_E}, \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}} E(\mathbf{r}, 0), \frac{a\kappa\lambda + \lambda(\beta + \delta_I + \kappa)(\psi - \kappa)}{\delta_E \{a(\delta_I + \kappa) + (\beta + \delta_I + \kappa)(\delta_S - \delta_I - \kappa + \psi)\}} \right\}. \quad \blacksquare$$

3.3. Stabilitásvizsgálat linearizálással

A (3.1.4) rendszer egy térben állandó $\Phi(\cdot) = (\Phi_1(\cdot), \Phi_2(\cdot))$ megoldása teljesíti a (3.1.5) peremfeltételeket és az (3.1.1) kinetikus rendszert. A (3.1.1) rendszer \mathfrak{E}_b és \mathfrak{E}_e egyensúlyi helyzetei szintén megoldásai (3.1.4)-nak és (3.1.5)-nek. Hogy megvizsgáljuk ezen egyensúlyi helyzetek lokális stabilitását, linearizáljuk az (3.1.4) rendszert az egyensúlyi helyzetek körül. A linearizált rendszer a kezdeti-és peremfeltételekkel így néz ki:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= D \cdot \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{v} + \mathfrak{A} \mathbf{v} && \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} && (\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) && (\mathbf{r}, t) \in \bar{\Omega} \times \{0\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

ahol

$$\mathfrak{A} := J_{(f_1, f_2, f_3)}(\bar{\mathbf{u}}) =: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad / \bar{\mathbf{u}} \in \{\mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_e\} / .$$

A második fejezetben ismertetett Fourier-módszert használva az \mathfrak{A}_n mátrixok spektrális tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak: [1], [3] alapján az $\bar{\mathbf{u}}$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis, ha minden $n \in \mathbb{N}_0$ -re a \mathfrak{A}_n mátrix Hurwitz-stabilis, illetve $\bar{\mathbf{u}}$ instabil, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre \mathfrak{A}_n egy sajátértékének valós része pozitív. A \mathfrak{A}_n mátrix karakterisztikus polinomja a következő alakú:

$$\Delta_{\mathfrak{A}_n}(z) := z^3 - \mathfrak{T}_n z^2 + \tilde{\mathfrak{A}}_n z - \mathfrak{D}_n \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.3.2)$$

ahol

$$\mathfrak{D}_n := \det(\mathfrak{A}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - d_{SS} & a_{12} - d_{SE} & a_{13} \\ a_{21} - d_{ES} & a_{22} - d_{EE} & a_{23} \\ a_{31} - d_{IS} & a_{32} - d_{IE} & a_{33} - d_{II} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathfrak{T}_n := \text{Tr}(\mathfrak{A}_n) = \text{Tr}(\mathfrak{A}) - \lambda_n \text{Tr}(D) = a_{11} + a_{22} + a_{33} - \lambda_n (d_{SS} + d_{EE} + d_{II}),$$

ill.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{A}}_n &= \det \begin{bmatrix} a_{11} - d_{SS} & a_{12} - d_{SE} \\ a_{21} - d_{ES} & a_{22} - d_{EE} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} - d_{SS} & a_{13} \\ a_{31} - d_{IE} & a_{II} - d_{II} \end{bmatrix} + \\ &+ \det \begin{bmatrix} a_{22} - d_{EE} & a_{23} \\ a_{32} - d_{IE} & a_{33} - d_{II} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

azaz $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ az összege az összes 2×2 -es főminornak. A Routh-Hurwitz kritérium alapján \mathfrak{A}_n mátrix Hurwitz-stabilis akkor és csak akkor, ha

$$\mathfrak{T}_n < 0, \quad \mathfrak{D}_n < 0, \quad \mathfrak{T}_n \cdot \tilde{\mathfrak{A}}_n < \mathfrak{D}_n. \quad (3.3.3)$$

Hogy megmutassuk a diffúziós instabilitás vagy Turing-instabilitás létrejöttét, szükséges, hogy az adott equilibrium a (3.1.1) kinetikus rendszerben (lokálisan) aszimptotikusan stabilis, a (3.2.2) rendszerben viszont már instabil, azaz a (3.3.3) feltételek valamelyike sérül. A kinetikus rendszerbeli stabilitás biztosítja, hogy $\text{Tr}(\mathfrak{A}) < 0$ teljesül, azaz $\mathfrak{T}_n < 0$, és így (3.3.3) feltétel egyszerűsödik:

$$\mathfrak{T}_n \cdot \tilde{\mathfrak{A}}_n < \mathfrak{D}_n < 0. \quad (3.3.4)$$

Tehát akkor van diffúziós instabilitás, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\mathfrak{D}_n > 0 \quad \text{vagy} \quad \mathfrak{T}_n \cdot \tilde{\mathfrak{A}}_n > \mathfrak{D}_n$$

teljesül. A következő szekciók számolásaihoz (tehát a stabilitásvizsgálathoz szükséges számolásokhoz) a Wolfram MATHEMATICA szoftvert is felhasználtuk.

3.4. Stabilitás öndiffúzióval, keresztdiffúzió nélkül

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy az (3.1.4)-rendszerben csak öndiffúzió van jelen, azaz

$$d_{SE} = d_{ES} = d_{IE} = 0$$

teljesül. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{A}}_n = & \det \begin{bmatrix} a_{11} - d_{SS} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_{EE} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} - d_{SS} & a_{13} \\ a_{31} & a_{II} - d_{II} \end{bmatrix} + \\ & + \det \begin{bmatrix} a_{22} - d_{EE} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - d_{II} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

vagyis, ha

- $\bar{\mathbf{u}} = \mathfrak{E}_b$, akkor a (3.3.2) karakterisztikus polinom az alábbi alakú:

$$\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_b}(z) := z^3 + A^{\mathfrak{E}_b} z^2 + B^{\mathfrak{E}_b} z + C^{\mathfrak{E}_b} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.4.1)$$

ahol

$$A^{\mathfrak{E}^b} := -a + \beta + \delta_E + \delta_I + \delta_S + \kappa + (d_{SS} + d_{EE} + d_{II}) \cdot \lambda_n + \psi,$$

$$B^{\mathfrak{E}^b} := (d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi) \cdot (a - \beta - d_{EE}\lambda_n - d_{II}\lambda_n - \delta_E - \delta_I - \kappa) \\ - (d_{EE}\lambda_n + \delta_E) \cdot (-a + \beta + d_{II}\lambda_n + \delta_I + \kappa),$$

$$C^{\mathfrak{E}^b} := (d_{EE}\lambda_n + \delta_E) \cdot (d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi) \cdot (-a + \beta + d_{II}\lambda_n + \delta_I + \kappa).$$

További számolással belátható, hogy

$$\Delta_{\lambda_n}^{\mathfrak{E}^b}(z) = (z + d_{EE}\lambda_n + \delta_E) \cdot (z + d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi) \cdot (z - a + \beta + d_{II}\lambda_n + \delta_I + \kappa) \quad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül. Tehát $\Delta_{\lambda_n}^{\mathfrak{E}^b}$ stabilis, ha

$$-a + \beta + d_{II}\lambda_n + \delta_I + \kappa = -(a - \beta - \delta_I) + d_{II}\lambda_n + \kappa > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.4.2)$$

teljesül. Összefoglalva ez azt jelenti, hogy

1. ha (3.1.3) sérül, pontosabban $\kappa > a - \beta - \delta_I$, akkor a kinetikus rendszer határon lévő egyensúlyi helyzete stabilis marad a reakció-diffúzió rendszerre nézve is, azaz nem jelenik meg diffúzió általi stabilitásvesztés.
2. ha (3.1.3) teljesül, akkor az eredetileg instabil egyensúlyi helyzet stabilizálódhat, de instabil is maradhat. Pontosán akkor stabilizálódik, ha

$$d_{II} > \frac{a - (\beta + \delta_I + \kappa)}{\lambda_1} \quad (3.4.3)$$

teljesül, azaz ha a fertőzöttek diffúziós együtthatója elég nagy, más szóval a fertőzöttek eléggé közelednek egymáshoz. Ez egy példa arra a jelenségre, hogy a diffúzió sokszor stabilizálja az instabil egyensúlyi helyzeteket.

- $\bar{\mathbf{u}} = \mathfrak{E}_e$, akkor a (3.3.2) karakterisztikus polinom a következőképp néz ki:

$$\Delta_{\lambda_n}^{\mathfrak{E}_e}(z) := z^3 + A^{\mathfrak{E}_e} z^2 + B^{\mathfrak{E}_e} z + C^{\mathfrak{E}_e} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.4.4)$$

ahol

$$A^{\mathfrak{E}_e} := a - \beta - \delta_I + \delta_S - \kappa + (d_{SS} + d_{EE} + d_{II})\lambda_n + \psi,$$

$$B^{\mathfrak{E}_e} := -\frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2)}{a^2}$$

$$-(-\delta_E - d_{EE}\lambda_n)(a - \beta - \delta_I + \delta_S - \kappa + d_{SS}\lambda_n + d_{II}\lambda_n + \psi)$$

$$-\left(d_{SS}\lambda_n + \frac{a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a}\right)$$

$$\cdot \left(-\frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a}\right),$$

$$C^{\mathfrak{E}_e} := (d_{EE}\lambda_n + \delta_E)$$

$$\cdot \left\{ \left(d_{II}\lambda_n - \frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a} \right) \right.$$

$$\cdot \left(d_{SS}\lambda_n + \frac{a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} \right)$$

$$\left. - \frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2)}{a^2} \right\}.$$

Számolással megmutatható, hogy

$$\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_e}(z) = (z + d_{EE}\lambda_n + \delta_E)$$

$$\cdot \left\{ \left(z + d_{II}\lambda_n - \frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a} \right) \right.$$

$$\cdot \left(z + d_{SS}\lambda_n + \frac{a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} \right)$$

$$\left. - \frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2)}{a^2} \right\} =: (z + d_{EE}\lambda_n + \delta_E) \cdot P(z)$$

ami nyilvánvalóan stabilis, mert a $\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_e}$ első tagja stabilis, tehát a stabilitás egyedül a $\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_e}$ -nek a P tagján múlik. A második tag egy másodfokú polinom. Mivel másodfokú polinom esetében a stabilitás ekvivalens azzal, hogy az együtthatók előjele ugyanaz, egyedül ezeket

az előjeleket kell megvizsgálnunk. Hozzuk standard alakra a polinomot:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \left(z + d_{II}\lambda_n - \frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a} \right) \\
&\quad \cdot \left(z + d_{SS}\lambda_n + \frac{a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} \right) \\
&\quad - \frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2)}{a^2} \\
&= z^2 + z(a - \beta - \delta_I - \kappa + \delta_S + d_{II}\lambda_n + d_{SS}\lambda_n + \psi) \\
&\quad + \frac{1}{a^2} (((-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2) \\
&\quad + (-(\beta + \delta_I + \kappa)^2 + a(\beta + \delta_I + \kappa + d_{II}\lambda_n)) \\
&\quad \cdot (a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi + d_{SS}\lambda_n) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2)).
\end{aligned}$$

Mivel (3.1.3) teljesül, a lineáris tag együtthatója biztosan pozitív:

$$a - \beta - \delta_I - \kappa + \delta_S + d_{II}\lambda_n + \psi > 0,$$

így már csak azt kell megmutatnunk, hogy a **konstans tag**

$$\begin{aligned}
C &:= \frac{1}{a^2} (((-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 (a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2) \\
&\quad + (-(\beta + \delta_I + \kappa)^2 + a(\beta + \delta_I + \kappa + d_{II}\lambda_n)) \\
&\quad \cdot (a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi + d_{SS}\lambda_n) + (\beta + \delta_I + \kappa)^2)).
\end{aligned}$$

is pozitív. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A := -a + \beta + \delta_I + \kappa < 0, \quad \text{and} \quad B := \beta + \delta_I + \kappa > 0$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{a^2} (-A^2(a\beta - B^2) + (-B^2 + a(d_{II}\lambda_n + B)) \cdot (A^2 + a\delta_S + ad_{II}\lambda_n + a\psi)) \\
&= \frac{1}{a^2} (-A^2(a\beta - B^2) + A^2(a(d_{II}\lambda_n + B) - B^2) \\
&\quad + (-B^2 + a(d_{II}\lambda_n + B)) \cdot (a\delta_S + ad_{II}\lambda_n + a\psi)) \geq 0
\end{aligned}$$

Mivel

$$a\delta_S + ad_{II}\lambda_n + a\psi \geq 0 \quad \text{és} \quad -B^2 + a(d_{II}\lambda_n + B) \geq 0 \quad \text{és} \quad a\beta - B^2 \leq a(d_{II}\lambda_n + B) - B^2,$$

bebizonyítottuk a következőt:

Tétel

Ha az \mathfrak{E}_e endemikus equilibrium létezik, azaz (3.1.3) teljesül, akkor a (3.1.4) reakció-diffúzió-rendszer \mathfrak{E}_e egyensúlyi helyzete stabilis marad.

Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben – csak öndiffúzió jelenlétekor – a diffúzió nem okozhat instabilitást.

3.5. Stabilitás ön-és keresztdiffúzióval

Ebben a fejezetben tovább vizsgáljuk a (3.1.4) rendszert, most abban az esetben, amikor keresztdiffúzió is jelen van (3.2.1). Ebben az esetben is a karakterisztikus polinomokat kell vizsgálnunk.

Ha

- $\bar{\mathbf{u}} = \mathfrak{E}_b$, akkor a (3.3.2) karakterisztikus polinom alakja a következő:

$$\Delta_{\lambda_n}^{\mathfrak{E}_b}(z) := z^3 + A^{\mathfrak{E}_b}z^2 + B^{\mathfrak{E}_b}z + C^{\mathfrak{E}_b} \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (3.5.1)$$

ahol

$$A^{\mathfrak{E}_b} := -a + \beta + \delta_E + \delta_I + \delta_S + \kappa + d_{SS}\lambda_n + d_{EE}\lambda_n + d_{II}\lambda_n + \psi,$$

$$B^{\mathfrak{E}_b} := (\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi) + d_{ES}\lambda_n(-d_{SE}\lambda_n + \psi)$$

$$-(a - \beta - \delta_I - \kappa - d_{II}\lambda_n)(\delta_E + \delta_S + d_{SS}\lambda_n + d_{EE}\lambda_n + \psi),$$

$$C^{\mathfrak{E}_b} := -(a - \beta - \delta_I - \kappa - d_{II}\lambda_n)$$

$$\cdot ((\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi) + d_{ES}\lambda_n(-d_{SE}\lambda_n + \psi)).$$

Számolással megmutatható, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_b}(z) &= (d_{ES}\lambda_n(-d_{SE}\lambda_n + \psi) + (\delta_E \cdot d_{EE}\lambda_n + z) \\ &\quad \cdot (\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi + z)) \cdot (-a + \beta + \delta_I + \kappa + d_{II}\lambda_n + z) \\ &=: Q(z) \cdot P(z) \quad (z \in \mathbb{C}),\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}Q(z) &:\equiv (d_{ES}\lambda_n(-d_{SE}\lambda_n + \psi) + (\delta_E d_{EE}\lambda_n + z) \cdot (\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi + z)) \\ &= z^2 + z(\delta_E + \delta_S + d_{SS}\lambda_n + d_{EE}\lambda_n + \psi) + C,\end{aligned}$$

és

$$P(z) :\equiv z - a + \beta + \delta_I + \kappa + d_{II}\lambda_n = z - (a - \beta - \delta_I - \kappa) + d_{II}\lambda_n,$$

ahol

$$C := (\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi) + d_{ES}\lambda_n(-d_{SE}\lambda_n + \psi).$$

Tehát $\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_b}$ pontosan akkor stabilis, ha Q és P is stabilis. Két eset lehetséges:

1. ha a (3.1.3) feltétel sérül, azaz csak a határmenti egyensúlyi pont létezik, pontosabban $\kappa > a - \beta - \delta_I$ teljesül, akkor P láthatóan stabilis, és $\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_b}$ stabilitása csak a Q stabilitásán múlik. Mivel (3.1.3)-bol következik a \mathfrak{E}_b aszimptotikus stabilitása a kinetikus rendszerben, ezért a reakció-diffúzió-rendszerben akkor és csak akkor instabil, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre $C \leq 0$, azaz:

$$d_{ES}\lambda_n(d_{SE}\lambda_n - \psi) \geq (\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(\delta_S + d_{SS}\lambda_n + \psi)$$

teljesül. Ez az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$(d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS})\lambda_n^2 - (d_{ES}\psi - d_{EE}\delta_S - d_{EE}\psi - \delta_E d_{SS})\lambda_n - \delta_E\delta_S - d_E\psi \geq 0.$$

Tehát, ha

$$d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS} > 0 \quad \iff \quad d_{ES}d_{SE} > d_{EE}d_{SS}$$

akkor a λ_n parabola konvex, vagyis valamely $n \in \mathbb{N}$ -re biztosan pozitív lesz. Ez azt jelenti, hogy stabilitásvesztés történik, ha

$$d_{ES}d_{SE} > d_{EE}d_{SS}$$

teljesül.

2. ha (3.1.3) teljesül, akkor \mathfrak{E}_b instabil a kinetikus rendszerre nézve, és pontosan akkor válhat stabilissá a diffúzió által, ha P stabilis, és $C > 0$, azaz (v.ö. (2.5.4))

$$0 < a - \beta - \delta_I - \kappa < d_{II}\lambda_1$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$(d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS})\lambda_n^2 - (d_{ES}\psi - d_{EE}\delta_S - d_{EE}\psi - \delta_E d_{SS})\lambda_n - \delta_E\delta_S - \delta_E\psi < 0$$

teljesül. A második feltétel teljesül, ha

$$d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS} = 0 \quad \text{and} \quad d_{ES}\psi - d_{EE}\delta_S - d_{EE}\psi - \delta_E d_{SS} > 0$$

vagy a λ_n parabola konkáv, vagyis

$$d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS} < 0 \quad \iff \quad d_{ES}d_{SE} < d_{EE}d_{SS}$$

és vagy nincsenek valós gyökei, vagy mindkét gyök negatív. Bevezetve az alábbi jelöléseket

$$w := d_{ES}d_{SE} - d_{EE}d_{SS},$$

ill.

$$\xi := d_{ES}\psi - d_{EE}\delta_S - d_{EE}\psi - \delta_E d_{SS} \quad \text{és} \quad \eta := -\delta_E\delta_S - \delta_E\psi$$

az utolsó feltétel azt jelenti, hogy

$$\xi^2 - 4w\eta < 0$$

vagy

$$\xi^2 - 4w\eta > 0 \quad \text{és} \quad \xi > 0 \quad \text{és} \quad \eta < 0$$

feltételek közül valamelyiknek teljesülnie kell.

- ha $\bar{\mathbf{u}} = \mathfrak{E}_e$, akkor a (3.3.2) karakterisztikus polinom a következő alakba írható:

$$\Delta_{\mathfrak{A}_n}^{\mathfrak{E}_e}(z) := z^3 + A^{\mathfrak{E}_e}z^2 + B^{\mathfrak{E}_e}z + C^{\mathfrak{E}_e} \quad (z \in \mathbb{C}), \quad (3.5.2)$$

ahol

$$A^{\mathfrak{e}_e} := a - \beta - \delta_I + \delta_S - \kappa + d_{SS}\lambda_n + d_{EE}\lambda_n + d_{II}\lambda_n + \psi,$$

$$B^{\mathfrak{e}_e} := \left(-\frac{(a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2) \left(\frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} - d_{IS}\lambda_n \right)}{a} + d_{SE}\lambda_n(\psi - d_{ES}\lambda_n) \right. \\ \left. + d_{IE}\kappa\lambda_n - \left(\frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a} - d_{II}\lambda_n \right) \right. \\ \cdot \left(-\frac{-a^2 - a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) - (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} \right. \\ \left. + d_{SS}\lambda_n + d_{EE}\lambda_n + \delta_E \right) + (-d_{EE}\lambda_n - \delta_E) \\ \cdot \left(\frac{-a^2 - a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) - (\beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} - d_{SS}\lambda_n \right) \Bigg),$$

$$C^{\mathfrak{e}_e} := \frac{1}{a^2} \left(-\left((-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2 - ad_{IS}\lambda_n \right) \right. \\ \cdot \left(ad_{SE}\kappa\lambda_n - (d_{EE}\lambda_n + \delta_E)(a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2) \right) \\ \left. + ad_{IE}\lambda_n \left((d_{ES}\lambda_n - \psi)(a\beta - (\beta + \delta_I + \kappa)^2) \right) \right. \\ \left. - \kappa \left(a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + ad_{SS}\lambda_n + (\beta + \delta_I + \kappa)^2 \right) \right. \\ \left. + a(\beta + d_{II}\lambda_n + \delta_I + \kappa) - (\beta + \delta_I + \kappa)^2 (ad_{SE}\lambda_n(d_{ES}\lambda_n - \psi)) \right. \\ \left. - (d_{EE}\lambda_n + \delta_E) \left(a^2 + a(-2(\beta + \delta_I + \kappa) + \delta_S + \psi) + ad_{SS}\lambda_n + (\beta + \delta_I + \kappa)^2 \right) \right).$$

Ahhoz, hogy Hopf-bifurkáció fellépését igazoljuk, olyan

$$\mu(h) \pm \nu(h)$$

komplex sajátérték párt meglétét kell igazolnunk, mely a kritikus paraméterértéknél átlépi a komplex tengelyt nemnulla sebességgel, azaz megfelelő $h_* > 0$ -ra:

$$\mu(h_*) = 0, \quad \nu(h_*) \neq 0 \quad \text{és} \quad \mu'(h_*) \neq 0.$$

Ez teljesül, ha (v.ö. [10]) létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és $h_* > 0$, úgy, hogy

$$\mathfrak{T}_n(h^*) \neq 0, \quad \tilde{\mathfrak{Q}}_n(h^*) < 0, \quad \mathfrak{D}_n(h^*) = \mathfrak{T}_n(h^*) \cdot \tilde{\mathfrak{Q}}_n(h^*) \quad (3.5.3)$$

és

$$\frac{d}{dh} \left\{ -\mathfrak{T}_n(h) \cdot \tilde{\mathfrak{Q}}_n(h) - \mathfrak{D}_n(h) \right\} \Big|_{h=h^*} \neq 0. \quad (3.5.4)$$

Bifurkációs paraméterként $h := d_{SE}$ -t választottuk. A

$$A := -a + \beta + \delta_I + \kappa < 0, \quad \text{és} \quad B := \beta + \delta_I + \kappa > 0$$

$$K = (a - \beta + \delta_E - \delta_I + \delta_S - \kappa + (d_{SS} + d_{EE} + d_{II})\lambda + \psi) > 0$$

jelöléseket használva, és megoldva a (3.5.3)-beli harmadik egyenletet d_{SE} -ra, kapjuk, hogy

$$d_{SE}^* = \frac{Z}{W},$$

ahol

$$Z := (a\beta - B^2)(\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(-A^2 - ad_{IS}\lambda_n)$$

$$+ a^2 d_{IE} \kappa \lambda_n \cdot K$$

$$- (a\beta - B^2)(-A^2 - ad_{IS}\lambda_n) \cdot K$$

$$- (\delta_E + d_{EE}\lambda_n)(-B^2 + a(B + d_{II}\lambda_n)(A^2 + a(d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi)))$$

$$+ a(\delta_E + d_{EE}\lambda_n) \cdot K(A^2 + a(d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi))$$

$$+ (-B^2 + a(B + d_{II}\lambda_n)) \cdot K \cdot (A^2 + a(d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi))$$

$$+ ad_{IE}\lambda_n ((a\beta - B^2)(d_{ES}\lambda_n - \psi) - \kappa(A^2 + a(d_{SS}\lambda_n + \delta_S + \psi)))$$

$$W := a^2 \lambda_n \left(\kappa \left(\frac{(-a + \beta + \delta_I + \kappa)^2}{a} - d_{IS}\lambda_n \right) \right.$$

$$\left. + (\psi - d_{ES}\lambda_n) \left(\frac{(\beta + \delta_I + \kappa)(-a + \beta + \delta_I + \kappa)}{a} - d_{II}\lambda_n \right) + (-\psi + d_{ES}\lambda_n) \cdot K. \right)$$

Látható, hogy $\mathfrak{T}_n(d_{SE}^*) \neq 0$. Megvizsgálva W, Z -t, kapjuk, hogy ahhoz, hogy d_{SE}^* pozitív legyen, a következő feltételek elégségesek:

$$W \geq 0, \quad (3.5.5)$$

$$a\beta - B^2, \quad (3.5.6)$$

$$ad_{IE}\lambda_n\kappa < a(\delta_E + d_{EE}\lambda_n) \cdot K, \quad (3.5.7)$$

$$d_{ES}\lambda_n - \psi < 0. \quad (3.5.8)$$

Ha d_{SE}^* pozitív, akkor B^{e_e} pozitivitása garantált, ha ezek mellett

$$\frac{BA}{a} - d_{II}\lambda_n < 0, \quad (3.5.9)$$

$$\frac{A^2}{a} - d_{IS}\lambda_n > 0 \quad (3.5.10)$$

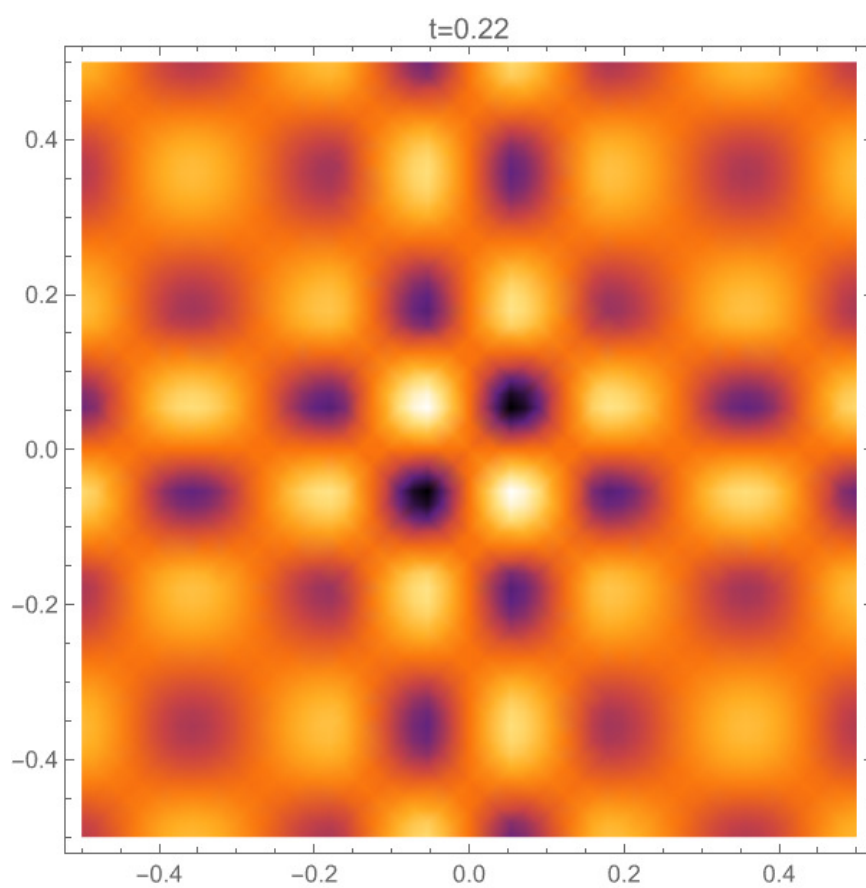
is teljesül. Végül, a deriváltak is el kell tűnnie:

$$\frac{A^2}{a} - d_{IS}\lambda_n \neq \left(\frac{BA}{a} - d_{II} \right) (-d_{ES}\lambda_n + \psi) + (d_{ES}\lambda_n - \psi) \cdot K. \quad (3.5.11)$$

Ha a (3.5.5) - (3.5.11) feltételek teljesülnek, akkor a transzverzálítási feltételek is, tehát Turing-Hopf bifurkáció lép fel, ahogy a d_{SE} paraméter átlépi a d_{SE}^* kritikus értéket. Egy példa olyan paraméter-konfigurációra, mely teljesíti a (3.5.5) - (3.5.11) feltételeket:

$$a := 3, \quad \beta := 1, \quad \delta_I := \frac{1}{2}, \quad \delta_E := \frac{1}{4}, \quad \delta_S := \frac{1}{64}, \quad \kappa := 1, \quad \psi := \frac{1}{8},$$

$$d_{SS} := \frac{1}{64}, \quad d_{EE} := \frac{1}{32}, \quad d_{II} := 1, \quad d_{ES} := \frac{1}{64}, \quad d_{IE} := \frac{1}{4}, \quad d_{IS} := \frac{1}{8192}.$$



3.5.1. ábra. A (3.1.4) rendszer egy megoldása, amikor (3.5.5) - (3.5.11) teljesül. Az ábrán a fogékonyak sűrűsége látható.

Összefoglalás

A dolgozatban tömören összefoglaltuk a stabilitásvizsgálathoz és Hopf-bifurkáció kereséséhez szükséges ismereteket a differenciálegyenletekről:

- stabilitás fogalma;
- stabilitásvizsgálat linearizálással;
- stabilitásvizsgálat Lyapunov-függvénnyel;
- összehasonlítási tételek.

Ezután egy publikált járványterjedés modellezésére alkalmas rendszert módosítottunk, a térbeli kiterjedést is figyelembe véve. Beláttuk, hogy

- a módosított reakció-diffúzió-differenciálegyenletrendszer pozitív kezdeti feltételek esetén pozitív marad, illetve hogy a diffúziós mátrixra vonatkozó bizonyos feltételek mellett a diffúziós rendszer korlátos. Ilyen szempontból tehát a modell biológiailag jól formált.
- csak öndiffúzió hozzáadása esetén a határmenti egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil marad, ha a kinetikus rendszerben stabilis volt. Ha instabil volt, akkor megfelelő feltételek mellett stabilizálódhat.
- csak öndiffúzió hozzáadása esetén az endemikus egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis marad, ha létezik.
- ön- és kereszt-diffúzió hozzáadása esetén a határmenti egyensúlyi helyzet bizonyos feltételek mellett elveszíti a stabilitását.
- ön- és kereszt-diffúzió hozzáadása esetén az endemikus egyensúlyi helyzet bizonyos feltételek mellett elveszíti a stabilitását, és Turing-Hopf bifurkáció lép fel.

Példát adtunk olyan paraméterkonstellációra, mely teljesíti a Turing-Hopf bifurkáció feltételeit.

Irodalomjegyzék

- [1] N. BRITTON, *Reaction-diffusion equations and their applications to biology.*, Elsevier Academic Press Inc, USA United States, 1986.
- [2] F. CAPONE, *On the dynamics of predator-prey models with the beddington-de angelis functional response, under robin boundary conditions.*, *Ricerche mat.* 57, (2008), pp. 137 – 157.
- [3] R. G. CASTEN AND C. J. HOLLAND, *Stability properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33 (1977), pp. 353–364.
- [4] K. N. CHUEH, C. C. CONLEY, AND J. A. SMOLLER, *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, *Indiana University Mathematics Journal*, 26 (1977), pp. 373–392.
- [5] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19., American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [6] M. FARKAS, *Dynamical models in biology*, Academic Press, Inc, San Diego, CA, 2001.
- [7] R. A. FISHER, *The wave of advance of advantageous genes*, *Annals of Eugenics*, 7 (1937), pp. 355–369.
- [8] S. KOVÁCS, *Bifurkációk reakció-diffúzió-rendszerekben és populációdinamikai alkalmazások*, Természettudományi Kar, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 2006.
- [9] ———, *Differenciálegyenletek és bifurkációk I.*, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet Differenciálegyenletek Tanszék, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest, 2020.
- [10] S. KOVÁCS, S. GYÖRGY, AND N. GYÚRÓ, *Dynamics of an SIS Epidemic Model with No Vertical Transmission*, Springer Nature Switzerland, Cham, 2023, pp. 1–15.

- [11] A. KÄLLÉN, P. ARCURI, AND J. MURRAY, *A simple model for the spatial spread and control of rabies*, Journal of Theoretical Biology, 116 (1985), pp. 377–393.
- [12] P. D. MOTTONI AND F. ROTHE., *Convergence to homogeneous equilibrium state for generalized volterra-lotka systems with diffusion.*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 37 (1979), pp. 648–663.
- [13] J. MURRAY, *Non-existence of wave solutions for the class of reaction-diffusion equations given by the volterra interacting-population equations with diffusion*, Journal of Theoretical Biology, 52 (1975), pp. 459–469.
- [14] L. NIRENBERG, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Communications on pure and applied mathematics, 6 (1953), pp. 167–177.
- [15] Z. XIE, *Cross-diffusion induced turing instability for a three species food chain model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 388 (2012), pp. 539–547.

Gálffy Veronika,
alkalmazott matematika mesterszakos egyetemi hallgató
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
galfyvero@gmail.com