Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Kereskedési stratégiák nagy piacokon

Témavezető:
dr. Rásonyi Miklós
egyetemi docens

Szerző:
Hoffmann Balázs
Matematikus MSc

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet témavezetőmnek, Rásonyi Miklós Tanár Úrnak, akinek kimagasló szakmai tudása és a témakörben való jártassága nagyban hozzájárult a szakdolgozatom megírásához. Számos tanácsa, segítőkészsége nélkül nem sikerült volna ilyen eredményt elérnem.

Továbbá szeretném kifejezni hálámat az egész családomnak, akik tanulmányaim során mindenben támogattak.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A materiális javakkal való kereskedés szinte egyidős az emberiséggel. A kezdeti cserekereskedelem gyors fejlődésének következtében már a 13. századi velencei bankárok is állampapírokkal kereskedtek, majd 1531-ben megnyílt az első tőzsde Antwerpenben. A következő lépés a részvények fogalmának bevezetése volt, amely 1611-ben meg is valósult a Kelet-Indiai Társaság által. Ekkor árazással, kockázatelemzéssel még nem foglalkoztak, a pénzügyi matematika csak a kamatszámításra szorítkozott.

Az általános, máig használt közgazdasági elvek a 20. század első felétől jelentek meg: 1930-ban Irving Fisher már hasznossági függvényről és az ezt maximalizáló optimális stratégiáról értekezett. A pénzügyi matematika, és ezen dolgozat szempontjából is jelentős eredmény született 1976-ban, amikor Stephen Alan Ross bevezette az „Arbitrage Pricing Model”-t (röviden APM), másnéven az „Arbitrage Pricing Theory”-t (röviden APT) [1], [2]. Ezen pénzügyi piacmodell már tartalmazta a modern pénzügyi matematika alapelveit. A modellben egy adott eszköz hozama a következő alakot ölti:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1} f_1 + \ldots + \beta_{n1} f_n + \varepsilon_i,$$

ahol α_i az i-edik eszköz kozckázatmentes hozama (azaz minden piaci hatás nélküli hozama), a β_{ij} az i-edik eszköz j-edik tényezőre való érzékenysége, az f_j a j-edik tényező piac általi váratlan változása, valamint ε_i az i-edik eszköz specifikus kockázata. Egy adott befektetés várható kifizetése tehát függ a vállalt kockázattól és számos egyéb piaci tényezőtől, és értelemszerűen nagyobb kockázatvállalás mellett nagyobb a lehetséges nyereség is.

Napjainkban e tőzsdei kereskedés szuperszámítógépekkel, nanoszekundumok alatt zajlik, ugyanakkor a felmerülő problémák hasonlók a hőskorban megjelentekhez. Hogyan lehet hasznot maximalizálni, illetve létezhet-e egyáltalán a hasznot maximalizáló optimális stratégia? Lehet-e korlátos kockázatvállalással potenciálisan korlátlan nyereségre szert tenni?

Jelen szakdolgozatban az APT modellben és annak általánosításában fogjuk vizsgálni a fent említett kérdéseket. Az eredeti APT modell „kis" piacot feltételez, ahol véges sok termékkel kereskedhetünk, azonban ezen eredményeket jelen dolgozatban nem ismertetjük. A valóságban annyira sok értékpapírral kereskednek, hogy kiemelt jelentőséget kapnak a végtelen sok termékes, „nagy" pénzügyi piacok. A fenti kérdésekre elsősorban ezeken a piacokon, azaz diszkrét időben és végtelen sok termék mellett keresünk válaszokat.

A 2. fejezetben megismerkedünk a témakörhöz kapcsolódó jelentősebb definíciókkal a [3], [4], [5] és [6] cikkeket követve. Ezután a 3. fejezetben Rásonyi Miklós és Laurance Carassus [4] eredménye alapján matematikailag precízen bemutatjuk a nagy piaci modellt, valamint a haszonmaximalizálás matematikai koncepcióját nagy piacokon. Adott feltételek mellett meghatározzuk az aszimptotikus arbitrázs hiányát biztosító feltételeket, továbbá bebizonyítjuk az optimális kereskedési stratégia létezését.

A pénzügyi piacokon és így a matematikai modellekben is komoly problémát okoz az arbitrázs jelenléte. A 4. fejezetben [3] alapján az arbitrázs hiányára és a kockázatmentes mérték létezésére adunk feltételeket, valamint vizsgáljuk a két fogalom kapcsolatát. Az 5. fejezetben továbbra is kockázatmentes mértékekkel foglalkozunk, [7] eredményeit ismertetve. Ezt követően a 6. és 7. fejezetekben visszatérünk a haszonmaximalizáláshoz, és a [8], [9] cikkek alapján újabb feltételek mellett bizonyítjuk az eddigiektől eltérő módszerekkel az optimális stratégia létezését, illetve bizonyos ekvivalenciák fennállását.

A valóságban gyakran találkozhatunk arbitrázzsal rendelkező nagy piacokkal, amelyeken szintén kiemelt jelentőségű probléma a haszonmaximalizálás. Mivel nem tudjuk feltenni az arbitrázs hiányát, így az első fejezetek során használt matematikai eszközök jelentős része ebben a modellben nem áll rendelkezésünkre. A 8. fejezetben saját eredményként ismertetünk egy, a kérdést bizonyos feltételek mellett megválaszoló tételt.

A dolgozat során ismertnek tételezzük fel a matematikai statisztika és valószínűségszámítás alapvető definícióit, tételeit, illetve a funkcionálanalízis és a mértékelmélet néhány ismert eredményére [10] is támaszkodunk.

2. fejezet

Definíciók

Az alábbiakban a témakör további precíz tárgyalásához szükséges jelentősebb definíciókat ismertetjük. Amennyiben a későbbiek során egy-egy tételhez szükségünk lesz további definíciókra, azokat az adott tételek kimondása előtt rögzítjük.

1. Definíció. Termékhozam.
Először is definiáljuk véletlen változók sorozatát: $R_0 := r$, $R_i := \mu_i + \hat{\beta}_i \delta_i$, ha $1 \leq i \leq m$ és $R_i := \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j \delta_j \hat{\beta}_i \varepsilon_i$, ha $i > m$. R_i az i-edik termék hozama. A kockázatmentes hozamot az r konstans jelöli, δ_j és ε_i négyzetesen integrálható valószínűségi változók, $E\delta_j = 0$, $E\delta_j^2 = 1$, ha $1 \leq i \leq m$ és $E\varepsilon_j = 0$, $E\varepsilon_j^2 = 1$, ha $i > m$, valamit $i \neq j$ esetén $E\varepsilon_i \epsilon_j = 0$.

Tehát a μ_i konstans egyenlő ER_i-vel, β_i^j és $\hat{\beta}_i$ valósak, továbbá feltesszük, hogy $\hat{\beta}_i \neq 0$.

Azt a piacmodellt, amely csak $R_0, ..., R_k$-t tartalmazza, k-adik piaci szegmensnek nevezzük.

2. Definíció. Portfólió.
A ϕ_k portfólió a k-adik piaci szegmensben valós számok egy tetszőleges sorozata ϕ_k^i, $0 \leq i \leq k$, amelyre $\sum_{i=0}^{k} \phi_k^i = 0$ teljesül. Stratégiának nevezünk egy portfóliósorozatot.

3. Definíció. Portfólió hozama.
Az k-adik portfólió hozama:

$$V(\phi_k) = \sum_{i=0}^{k} \phi_k^i R_i.$$

4. Definíció. Arbitrázs.

A piacon van arbitrázs, ha a k-adik piaci szegmensben létezik portfóliók ϕ_k sorozata, melyre $k \to \infty$ esetén

$$EV(\phi_k) \to \infty, \quad Var(V(\phi_k)) \to 0.$$

Ha nincs ilyen sorozat, akkor a piacon nincs arbitrázs (AAA).

5. Definíció. Ekvivalens martingálmérték.

$Q \sim P$ ekvivalens kockázatmentes mérték, vagy ekvivalens martingálmérték a teljes piacon, ha minden $i \geq 1$-re

$$E^Q R_i = r.$$

Ha létezik ilyen Q mérték, akkor azt mondjuk, hogy **EMM** teljesül, ha Q-ra $\frac{dQ}{dP} \in L^2$, akkor **EMM2** teljesül.

Ha emellett minden $P' \sim P$-re létezik $Q \sim P$, hogy $\frac{dQ}{dP'} \in L^\infty$ akkor létezik erős értelemben vett ekvivalens martingálmérték, azaz **EMMSS** teljesül.

Jelölje az x-ből induló ϕ stratégiát követő kereskedés értékét az 1 időpillanatban $V^{x,\phi} = x + \langle\, \phi,\, \epsilon - b \rangle$.

6. Definíció. Haszonfüggvény.

$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv szigorúan növekvő differenciálható függvény, és valamely $x_0 \in \mathbb{R}$-re

$$U(x_0) = 0, \quad U'(x_0) = 1.$$

Legyen $G \in L^0$ valószínűségi változó, amely egy értékpapír kifizetését jelöli T időpontban $x \in \mathbb{R}$. Ekkor definiálhatjuk a következő halmazt:

$$A(U, G, x) := \{\phi \in l_2, EU^-(V^{x,\phi} - G) < +\infty\}.$$

Ekkor definiálhatjuk a várható hasznát egy G értékpapírnak T időpontban, $x \in \mathbb{R}$ alaptőkéből indulva:

$$u(G, x) = sup_{\phi \in A(U,G,x)} EU(V^{x,\phi} - G).$$

7. Definíció. Megengedhető stratégia.

A ϕ stratégia megengedhető, ha $V(\phi) \geq -1$. A megengedhető stratégiák halmazát jelölje $\mathcal{A}$.

8. Definíció. NUPBR.

Azt mondjuk, hogy az (NUPBR) teljesül, ha $\{V(\phi), \phi \in A\}$ korlátos valószínűségben, azaz

$$sup_{\phi \in A} P(V(\phi) > n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

9. Definíció. Stacionárius piac.

A k-adik piaci szegmensben az i-edik értékpapír értéke legyen

$$S_k^i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Egy piacot stacionáriusnak nevezünk, amennyiben

$$S_{k+1}^i = S_k^i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Jelölje F azon valószínűségi változók halmazát, melyeknek értéke

$$\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

10. Definíció. NAFL.

Egy piacon (NAFL) teljesül, ha nem létezik stratégiáknak olyan $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozata, amire $V^{\phi_k} \to V$ valószínűségben, amint $k \to \infty$, $V \in F \setminus \{0\}$.

3. fejezet

Haszonmaximalizálás nagy piacokon

Ebben a fejezetben bemutatjuk a nagy piaci modellt, valamint bizonyos feltételek próbáljuk megragadni a haszonmaximalizálás lehetőségeit. Ezt természetesen optimális kereskedési stratégia létezésének bizonyításával fogjuk elérni. A nagy piacok abban különböznek a kis piacoktól, hogy akár végtelen sok termék is lehet, így végtelen sok opció van minden kereskedési döntésnél, azonban amint látni fogjuk, matematikai szempontból hasonló koncepciókkal találkozunk mindkét esetben.

Nagy piaci modell

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt, és azon egy kétlépcsős arbitrázs árazási modellt (APM). Tetszőleges $i \geq 1$-re, legyen az i-edik befektetés haszna

$$R_0 := r \quad R_i := \mu_i + \overline{\beta}_i \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$R_i := \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j \varepsilon_j + \overline{\beta}_i \varepsilon_i, \quad i > m,$$

ahol az ε_i-k valószínűségi változók és $r, \mu_i, \beta_i^j, \overline{\beta}_i$ konstansok. Tegyük fel, hogy $\overline{\beta}_i \neq 0$, $i \geq 1$. Így legyenek

$$b_i := \frac{-\mu_i}{\overline{\beta}_i}, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$b_i := \frac{-\mu_i}{\overline{\beta}_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_j \overline{\beta}_j^i}{\overline{\beta}_j \overline{\beta}_i}, \quad i > m$$

Ezekkel a jelölésekkel az átparaméterezett modell:

$$R_i = \overline{\beta}_i(\varepsilon_i - b_i), \qquad 1 \le i \le m;$$
$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji}(\varepsilon_j - b_j) + \overline{\beta}_i(\varepsilon_i - b_i), \qquad i > m,$$

ahol az $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$-k valószínűségi változók, és $(\overline{\beta}_i)_{i\geq 1}, (b_i)_{i\geq 1}, (\beta_i^j)_{i>m, 1\leq j\leq m}$ konstansok.

A fejezet két fő tétele előtt néhány feltételre és lemmára lesz szükségünk.

Feltétel 3.1. Az $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ változók négyzetesen integrálhatók, egymástól függetlenek, tovább teljesülnek a következők:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1, \quad i \geq 1.$$

Tekintsük az

$$\ell^2 := \left\{ (h_i)_{i\geq 1}, h_i \in \mathbb{R}, i \geq 1, \sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 < \infty \right\}$$

Hilbert teret a $\|h\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2}$ normával. Ebben a térben fogunk vizsgálni potenciálisan végtelen sok terméket használó stratégiákat.

Tekintsük az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{E}|X|^2 < \infty\}$ teret, amely szintén egy Hilbert tér az $\|X\|_{L^2} := \sqrt{\mathbb{E}(|X|^2)}$ normával. A következőkben ezt röviden $L^2(\mathbb{P})$-vel fogjuk jelölni.

Egy adott $h \in \ell^2$-re legyen $\Phi(h) := \sum_{i=1}^{\infty} h_i\varepsilon_i$, ahol a $\Phi(h)$-beli végtelen összegre tekinthetünk úgy, mint a $(\sum_{i=1}^{n} h_i\varepsilon_i)_{n\geq 1}$ véges sorozatok $L^2(\mathbb{P})$-beli limesze. Ekkor Φ egy izometria ℓ^2 és $L^2(\mathbb{P})$ között.

Most térjünk rá a haszonmaximalizálás matematikai modelljére.

A haszonmaximalizálás matematikai modellje

Általános gyakorlat, hogy a gazdasági szereplők preferenciáit konkáv, növekvő hasznossági függvényekkel, U-val modellezzük. Tegyük fel tehát, hogy $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy konkáv, szigorúan növekvő, differenciálható függvény, és létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$U(x_0) = 0 \quad \text{és} \quad U'(x_0) = 1. \tag{3.1}$$

Egy $G \in L^0$ követelésre, és $x \in \mathbb{R}$ esetén, definiáljuk a következő halmazt:

$$A(U,G,x) := \left\{h \in \ell^2, \mathbb{E}U\left(-(V^{x,h} - G)\right) < +\infty\right\}.$$

A várható haszon szuprémuma a kifizetés pillanatában G függő követelés esetén $x \in \mathbb{R}$ kezdőtőkéből kiindulva:

$$u(G,x) := \sup_{h \in A(U,G,x)} \mathbb{E}U(V^{x,h} - G). \tag{3.2}$$

Feltétel 3.2.

$$\|b\|_{\ell^2} < \infty.$$

A 3.2 feltétel teljesülése mellett később belátjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} h_i(\varepsilon_i - b_i)\right)^2\right) \leq (1 + \|b\|_{\ell^2}^2)\|h\|_{\ell^2}^2 < \infty.$$

A következőkben használni fogjuk a $\langle h, \varepsilon - b\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\varepsilon_i - b_i)$ jelölést. Vegyük észre, hogy

$$\mathbb{E}(|\langle h, \varepsilon - b\rangle|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\langle h, \varepsilon - b\rangle^2)} \leq \sqrt{1 + \|b\|_{\ell^2}^2}\|h\|_{\ell^2}.$$

Az első időpillanatban a $h \in \ell^2$ végtelen sok terméket használó x-ből induló stratégia értékét a

$$V_{x,h} := x + \langle h, \varepsilon - b\rangle$$

képlet adja meg.

Feltétel 3.3. Minden $i \geq 1$ esetén,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i > b_i) > 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(\varepsilon_i < b_i) > 0.$$

Feltétel 3.4.

$$\sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|\varepsilon_i^3|] < \infty.$$

Feltétel 3.5. Léteznek olyan $C_1 \in (0, \infty)$, $C_2 \in \mathbb{R}^+$ és $\beta > 1$ konstansok, melyekre minden $x \leq x_0$ esetén

$$|U(x)| \geq C_1|x|^\beta - C_2.$$

Feltétel 3.6. Léteznek olyan $C_3 \in (0,\infty)$, $C_4 \in \mathbb{R}^+$ és $\gamma \geq \max(\beta, 2)$ konstansok, melyekre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$U^-(x) \leq C_3|x|^\gamma + C_4$$

továbbá

$$\sup_{i\geq 1} \mathbb{E}[|\epsilon_i|^\gamma] < \infty.$$

Feltétel 3.7. $G \geq 0$ m. b. és teljesül rá, hogy $|\mathbb{E}(U(x-G))| < +\infty$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Lemma 3.1. Tegyük fel a 3.2. feltétel teljesülését, és hogy $G \geq 0$ majdnem biztosan. Ekkor minden $y \in \mathbb{R}$ és $h \in \ell_2$ esetén,

$$U^+(y + \langle h, \varepsilon - b\rangle - G) \leq |x_0| + |y + \langle h, \varepsilon - b\rangle|.$$

Lemma 3.2. Tegyük fel a 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, és 3.7 feltételek teljesülését. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik olyan $M_{x,G} > 0$ konstans, amelyre ha $h \in \ell_2$ és

$$\|h\|_{\ell_2} > M_{x,G},$$

teljesülnek, akkor a 0 stratégia jobban teljesít, mint h, azaz

$$EU(x - G) > EU(x + hh, \varepsilon - b_i - G).$$

Az előkészületek után kimondjuk és bizonyítjuk a fejezet legerősebb eredményét.

1. Tétel. *Tegyük fel a 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, és 3.7. feltételek teljesülését. Legyen továbbra is $x \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik $h^* \in A(U,G,x)$, amelyre*

$$u(G,x) = EU(V^{x,h^*} - G).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $h_n \in A(U,G,x)$ olyan sorozat, amelyre

$$EU(V^{x,h_n} - G) \uparrow u(G,x), \quad n \to \infty.$$

Ha $\|h_n\|_{\ell_2} > M_{x,G},$, akkor Lemma 3.2 alapján, helyettesíthetjük a h_n stratégiát a 0 stratégiával, és így is maximalizáló sorozatot kapunk. Tehát feltehetjük, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|_{\ell_2} \leq M_{x,G} < \infty$. Mivel az ℓ_2 tér rendelkezik a Banach-Saks tulajdonsággal, így létezik olyan $(n_k)_{k\geq 1}$ részsorozat és olyan $h^* \in \ell_2$, amelyre $\tilde{h_n} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n h_{n_k}$

esetén,

$$\|\tilde{h_n} - h^*\|_{\ell_2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\|\tilde{h_n} - h^*, \varepsilon - b_i\|_{\ell_2}^2 \leq \tilde{h_n} - h^*\|_{\ell_2}^2 (1 + \|b\|_{\ell_2}^2) \to 0,$$

amint $n \to \infty$. Tehát, $\langle \tilde{h_n} - h^*, \varepsilon - b_i \rangle \to 0$, $n \to \infty$ valószínűségben. Ekkor az U folytonossága miatt $U(V^{x,\tilde{h_n}} - G) \to U(V^{x,h^*} - G)$ valószínűségben is teljesül. Azt szeretnénk belátni, hogy az $U^+(V^{x,\tilde{h_n}} - G), n \in \mathbb{N}$ család egyenletesen integrálható. Valóban Lemma 3.1 miatt

$$U^+(V^{x,\tilde{h_n}} - G) \leq |x_0| + |V^{x,\tilde{h_n}}|.$$

Mivel $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\tilde{h_n}\|_{\ell_2} \leq M_{x,G} < \infty$, így a 3.4 feltétel miatt, $\{U^+(V^{x,\tilde{h_n}} - G), h_n \in \ell_2, \|\tilde{h_n}\|_{\ell_2} \leq M_{x,G}\}$ egyenletesen integrálható. A Fatou lemmát alkalmazva $-U^-$-ra kapjuk, hogy

$$E[-U^-(V_{x,h^*} - G)] \geq \limsup_{n \to \infty} E[-U^-(V^{x,\tilde{h_n}} - G)],$$

és az egyenletesen integrálhatóság miatt

$$\lim_{n \to \infty} E[U^+(V^{x,\tilde{h_n}} - G)] = E[U^+(V^{x,h^*} - G)].$$

Ekkor kihasználva az U függvény konkávságát,

$$EU(V_{x,h^*} - G) \geq \limsup_{n \to \infty} EU(V^{x,\tilde{h_n}} - G) \geq \lim_{n \to \infty} EU(V^{x,h_n} - G) = u(G, x).$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy $h^* \in A(U, G, x)$. A 3.6 feltétel és Lemma 2.8-ból következik, hogy

$$EU^-(V^{x,\tilde{h_n}} - G) \leq C_3 E|V^{x,\tilde{h_n}} - G|^\gamma + C_4 \leq C_3 \left(2^{\gamma-1}(|x|^\gamma + E|\langle \tilde{h_n}, \varepsilon - b \rangle|^\gamma)\right) + C_4 =: K.$$

Ekkor alkalmazva a Fatou lemmát U^--ra kapjuk, hogy

$$E[U^-(V^{x,h^*} - G)] \leq \liminf_{n \to \infty} E[U^-(V^{x,\tilde{h_n}} - G)] \leq K.$$

□

Most tekintsük a hasonló problémát egy n méretű kis piac esetében az $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ változókkal. Legyen most

$$\mathcal{A}_n(U,G,x) := \left\{h \in \ell_2, h_i = 0, \forall i \geq n+1, EU^-(V^{x,h} - G) < +\infty\right\}.$$

Ekkor $\mathcal{A}_n(U,G,x) \subset \mathcal{A}_{n+1}(U,G,x) \subset \cdots \subset \mathcal{A}(U,G,x)$. Továbbá $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u_n(G,x) := \sup_{h\in\mathcal{A}_n(U,G,x)} EU(V^{x,h} - G). \tag{3.2}$$

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az optimalizálási problémák a kis piacokon összhangban vannak a nagy piacon jelentkezőkkel.

2. Tétel. *Tegyük fel a 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, és 3.7. feltételek teljesülését. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, $u_n(G,x) \uparrow u(G,x), n \to \infty$.*

Legyen h_n^* optimális megoldása (3.2)-nek. Ekkor létezik olyan $(n_k)_{k\geq1}$ részsorozat és $\hat{h} \in \ell_2$, optimális megoldása (3.1)-nek, melyekre $\hat{h}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_{n_k}^*$, valamint

$$\|\hat{h}_n - \hat{h}\|_{\ell_2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás. A $u_n(G,x), n \in \mathbb{N}$ sorozat triviálisan nem csökkenő és felülről korlátos a $u(G,x)$ sorozat által. Legyen $\tilde{h}_n := (h_0, \ldots, \tilde{h}_n, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}$, ahol $\tilde{h}$ az előző tételben megadott optimum. Ekkor mivel $\hat{h} \in \ell_2$, így

$$E\langle h_n - \tilde{h}, \varepsilon - b\rangle^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ekkor $\langle \hat{h}_n, \varepsilon - b\rangle \to \langle \hat{h}, \varepsilon - b\rangle, n \to \infty$ valószínűségben is teljesülnek.. Alkalmazva a Fatou lemmát U^+-ra kapjuk, hogy

$$EU^+(V^{x,\hat{h}_n} - G) \leq \liminf_{n\to\infty} EU^+(V^{x,\hat{h}_n} - G).$$

Ezután megmutatjuk, hogy az $U^-(V^{x,\hat{h}_n} - G), n \in \mathbb{N}$ egyenletesen integrálható. Ez következik a 3.6. feltételből, hiszen

$$U^-(V^{x,\hat{h}_n} - G) \leq C_3|V^{x,\hat{h}_n} - G|^\gamma + C_4 \leq C_3\left(2^{\gamma-1}(|x|^\gamma + |\langle\hat{h}_n, \varepsilon - b\rangle|^\gamma)\right) + C_4.$$

Mivel $\hat{h}$ optimális megoldás, így $\|\hat{h}_n\|_{\ell_2} \leq \|\tilde{h}\|_{\ell_2} \leq M_{x,G}$. Továbbá $U^-(V^{x,\hat{h}_n} - G), n \in \mathbb{N}$ egyenletesen integrálható.

A fentiekből az is következik, hogy

$$EU^-(V^{x,\hat{h}_n} - G) \leq K$$

és $\hat{h}_n \in \mathcal{A}_n(G, U, x)$. Az egyenletesen integrálhatóság következményeként teljesül, hogy

$$EU^-(V^{x,\hat{h}_n} - G) = \lim_{n\to\infty} EU^-(V^{x,\hat{h}_n} - G).$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$u(G,x) = EU(V^{x,\hat{h}} - G) \leq \liminf_{n\to\infty} EU(V^{x,\hat{h}_n} - G) \leq \lim_{n\to\infty} u_n(G,x) \leq u(G,x).$$

Legyen $h_n^* \in \mathcal{A}_n(U, G, x)$ optimális megoldása (3.2)-nek. A 3.2. lemmát használva kapjuk, hogy $\|h_n^*\|_{\ell_2} \leq M_{x,G}$. Az előző tételhez hasonlóan Banach-Saks tulajdonság miatt, létezik olyan $(n_k)_{k\geq 1}$ részsorozat, amelyre $\hat{h}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n h_{n_k}^*$ esetén valamely $\hat{h} \in \ell$-re,

$$\|\hat{h}_n - \hat{h}\|_{\ell_2} \to 0, \quad n \to \infty$$

teljesül. Innen a tétel bizonyítása megegyezik a fenti 1. Tétel bizonyításával, tehát $\hat{h}$ valóban optimális megoldása (3.2)-nek.

□

4. fejezet

A kockázatmentes mértékek és az arbitrázs hiánya az APT-ben

Az alábbiakban a kockázatmentes mérték létezésére és az aszimptotikus arbitrázs hiányára vonatkozó tételeket, feltételeket ismertetünk. Az átláthatóság kedvéért ebben a fejezetben kicsit módosított jelölésekkel definiáljuk a nagy piaci modellt, jobban elkülönítve az $1 \leq i \leq m$ és az $i > m$ eseteket.

$$d_i := -\frac{\mu_i - r}{\hat{\beta}_i}, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$b_i := -\frac{\mu_i - r}{\hat{\beta}_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{(\mu_i - r)\beta_i^j}{\hat{\beta}_j \hat{\beta}_i}, \quad i > m.$$

Ezekkel a jelölésekkel a termékhozamok:

$$R_i = r + \hat{\beta}_i(\delta_i - d_i), \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$R_i = r + \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j(\delta_j - d_j) + \hat{\beta}_i(\varepsilon_i - b_i), \quad i > m;$$

3. Tétel. *Az aszimptotikus arbitrázs hiányából következik hogy,*

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty.$$

Emellett, ha a δ_i-k korrelálatlanok egymással és az ε_i-kel, akkor a fenti állításból következik (AAA).

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy (AAA) akkor és csak akkor teljesül, ha létezik a portfóliók ϕ_k sorozata a k-adik piaci szegmensben, amelyre

$$\frac{\mathbb{E}[V(\phi_k)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(V(\phi_k))}} \to \infty, \quad \text{amint } k \to \infty. \tag{4.1}$$

Tegyük fel, hogy (4.1) teljesül. Ekkor válasszunk legyen

$$\overline{\phi}_{i,k} := \frac{\phi_{i,k}}{\sqrt{\mathbb{E}[V(\phi_k)]^4 \,\mathrm{Var}(V(\phi_k))}}, \quad 0 \le i \le k, \tag{4.2}$$

amiből kapjuk, hogy $\mathbb{E}V(\overline{\phi}_k) \to \infty$, $\mathrm{Var}(V(\overline{\phi}_k)) \to 0$, $k \to \infty$.

Most tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty \tag{4.3}$$

teljesül, valamint a δ_i-kre teljesülnek az ortogonalitási feltételek. Ekkor egy tetszőleges ϕ_k, $k > m$ portfólióra $R_0, \ldots, R_k$ termékekkel a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből és (4.2)-ből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{EV(\phi_k)}{\mathrm{Var}(V(\phi_k))} \right| = \left| \frac{\sum_{j=1}^m b_j(\phi_k^j \bar{\beta}_j + \sum_{i=m+1}^l \phi_k^i \beta_i^j) + \sum_{i=m+1}^l \phi_k^i \bar{\beta}_i b_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (\phi_k^j \bar{\beta}_j + \sum_{i=m+1}^l \phi_k^i \beta_i^j)^2 + \sum_{i=m+1}^l (\phi_k^i \bar{\beta}_i)^2}} \right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^\infty b_i^2} < \infty$$

Azaz nincs aszimptotikus arbitrázs (AAA).

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy (AAA) teljesül. Rögzítsünk egy nemnulla $a \in \ell_2$ elemet, ahol ℓ_2 a valós a_i, $i \ge m+1$ sorozatok $\|a\|_2 := \sqrt{h(a)}$ normával ellátott Hilbert tere, melyre teljesül, hogy

$$h(a) := \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Tekintsük a portfóliók egy $\phi_{ik} = \phi_{ik}(a)$ sorozatát ($0 \le i \le k$, $k > m$):

$$\phi_{il} := -\,\mathrm{sgn}(a_i b_i) a_i \overline{\beta}_i, \quad m < i \le l,$$

$$\phi_{il} := -\sum_{j=m+1}^{l} \phi_{jl} \beta_{ij} \overline{\beta}_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Ebből rögtön következik, hogy

$$\sqrt{\mathrm{Var}(V(\phi_k))} = \sqrt{\sum_{i=m+1}^{k} a_i^2} \to \|a\|_2 < \infty, \quad k \to \infty,$$

valamint

$$\sup_{k>m} |\mathbb{E}V(\phi_k)| = \sup_{k>m} \sum_{i=m+1}^{k} |a_i b_i| < \infty. \quad (4.4)$$

Mivel ellenkező esetben létezne egy ϕ_{kl} részsorozat, amelyre $\mathbb{E}V(\phi_{kl})$ monoton növekvő, és $\mathbb{E}V(\phi_{kl}) \to \infty$, $l \to \infty$.

Definiáljunk egy sorozatot, amely a $\overline{\phi}_k^i = \phi_{kl}^i$ értéket veszi fel $k_l \leq k < k_{l+1}$ és $0 \leq i \leq k_l$ esetén, valamint a $\overline{\phi}_i^l = 0$ értéket $k_l < i \leq k$ esetén. Az így definiált portfóliósorozat eleget tesz (4.1)-nek, így megad aszimptotikus arbitrázst.

Tekintsük a $v(k) \in \ell^2$ elemet, melyre:

$$v_i(k) = \begin{cases} b_i, & m+1 \leq i \leq k; \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

A funkcionálanalízis ismert eredménye, hogy az ℓ^2 tér definiálható önmaga duális terével. Ekkor mivel minden $a \in \ell^2$-re teljesül (4.4), így a folytonoslineáris függvényekből álló $v(k)$ sorozat pontonként korlátos ℓ^2-ben. Ekkor a Banach–Steinhaus tétel alapján a normája is korlátos, ami éppen megegyezik a (4.3) állítással. □

Megjegyzés Ha az ε_i függetlenek és a δ_i, $i \leq m$ függetlenek az ε_i-ktől, akkor elegendő megadni egy olyan Q'' mértéket, amelyre

$$E^{Q''}\varepsilon_i = b_i, \quad i > N \geq m+1,$$

ahol N tetszőlegesen nagy lehet. Legyen $Q' \sim P$ a következő ekvivalens martingálmérték: $E^{Q'}R_i = 0$, $0 \leq 1 \leq m$, és

$$P(\varepsilon_i > b_i) > 0, \quad P(\varepsilon_i > b_i) < 0, \quad i > m.$$

Ekkor az N-edik piaci szegmensben legyen.

$$\frac{dQ}{dP} := E\left(\frac{dQ'}{dP}\middle|\sigma(\delta_i,\ i \leq m,\ \varepsilon_i,\ m < i \leq N)\right) E\left(\frac{dQ''}{dP}\middle|\sigma(\varepsilon_i,\ i > N)\right).$$

A következőkben bemutatunk a tételhez szorosan kapcsolódó lemmákat. Ezeknek bizonyítását most nem tárgyaljuk részletesen.

Lemma 4.1

Ha az ε_i-k $(i > m)$ családja egymástól és a δ_i-ktől $(i \leq m)$ független, valamint sem alulról, sem felülről nem korlátos, akkor létezik ekvivalens kockázatmentes mérték minden valós b_i sorozat esetén.

Lemma 4.2

Tegyük fel, hogy létezik olyan $M > 0$ konstans, amelyre

$$|\varepsilon_i| \leq M, \quad i > m.$$

Ekkor ha létezik ekvivalens martingálmérték (EMM), akkor

$$b_i \to 0, \quad i \to \infty. \tag{4.5}$$

Lemma 4.3

Ha **EMM2** teljesül, akkor

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty. \tag{4.1}$$

Lemma 4.4 Léteznek olyan ε_i, δ_i, d_i, és b_i-k, amelyek kielégítik (4.3)-at úgy, hogy ezekkel a paraméterekkel **EMM2** nem teljesül az APT-ben, ugyanakkor minden $k \geq m$-re létezik olyan $Q_k \sim P$, amelyre

$$\mathbb{E}^{Q_k} R_i = r, \quad i \leq k. \tag{4.6}$$

4. Tétel. *Legyen az ε_i-k $(i > m)$ családja egymástól és a δ_i-ktől $(i \leq m)$ független, valamint tegyük fel, hogy (4.6) teljesül. Továbbá követeljük meg az ε_i-kre a következő összefüggés fennállását:*

$$\sup_{i>m} \mathbb{E}|\varepsilon_i|^3 < \infty. \tag{4.7}$$

Ekkor a

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty.$$

*állításból következik **EMM2**.*

Végül kimondjuk a fejezet legerősebb állítását, amely összekapcsolja az ekvivalens martingálmérték létezését az aszimptotikus arbitrázs hiányával.

Következmény

Tegyük fel, hogy a δ_i-k egymással korrelálatlanok. Továbbá tegyük fel, hogy a ε_i-k családja független és a δ_i-ktől, $1 \leq i \leq m$ is függetlenek. Ha a (4.7) egyenlet teljesül, akkor

$$AAA \Longleftrightarrow \sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty \Longleftrightarrow EMM2.$$

5. fejezet

Ekvivalens martingálmérték stacionárius piacokon

Ebben a fejezetben az (NAFL) és az erős értelemben vett martingálmérték kapcsolatát fogjuk vizsgálni stacionárius piacok esetén.

5. Tétel. *Stacionárius piacon az (NAFL) ekvivalens az (EMMSS)-el.*

A bizonyításhoz definiáljuk az (NAFL) feltétel absztrakt verzióját. Rögzítsük az Ω, F, P valószínűségi mezőt. Legyen $K \subset L^0$ egy konvex kúp.

11. Definíció. A K kúp rendelkezik a (P) tulajdonsággal, ha nem létezik olyan $\{h_n\} \subseteq K$ sorozat, amelyre $h_n \to h$ valószínűségben, miközben $h \in F \setminus \{0\}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel az (NAFL) teljesülését. Feltehetjük, hogy $P = P'$, mivel az (NAFL) nem érzékeny az ekvivalens mértékcserére. A $C := \{V^{\phi_k} : \phi_k \text{ portfólió a k-adik piaci szegmensben}, k \in \mathbb{N}\}$ kúp kielégíti a (P) feltételt, így a fenti lemma miatt $\overline{C} - L^0_+$ zárt, továbbá $\overline{C} \cap L^0_+ = \{0\}$.

Tekintsük a $\tilde{P} \sim P$, $\frac{dP}{d\tilde{P}} \in L^\infty$ mértéket, amely integrálja C minden elemét. Alkalmazva a fenti tételt $L_1(\tilde{P})$-ben a

$$D := (\overline{C} - L_0^+) \cap L_1(\tilde{P}),$$

konvex zárt kúpra kapunk egy $p \in L^\infty$ elemet. Ez meghatároz egy $Q \sim \tilde{P}$ mértéket:

$$\frac{dQ}{d\tilde{P}} := \frac{p}{E(p)}.$$

Mivel $E_Q[\pm(S_k(1) - S_k(0))] \leq 0, k \in \mathbb{N}$, így

$$E_Q[S_k(1) - S_k(0)] = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Tehát, Q martingálmérték.

A másik irányhoz tekintsük a d_n sorozatot: $d_n \xrightarrow{n\to\infty} d$, $d_n \in C$, $n \in \mathbb{N}$, amely ellent mond az (NAFL)-nek. Feltehető, hogy a konvergencia majdnem mindenütt teljesül. Legyen $P' \sim P$ mérték, mely integrálja $\{\wedge_{n\in\mathbb{N}} d_n > -\infty\}$-t. A Q martingálmértéket választva P'-nek, ahol $\frac{dQ}{dP'} \in L^\infty$, kapjuk, hogy

$$E_Q[d_n] = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Erre a Fatou lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$E_Q[d] \leq 0,$$

amely ellent mond az eredeti $d \in F \setminus \{0\}$ állításnak. □

12. Definíció. Az (NA) feltétel teljesül, ha egy tetszőleges ϕ portfólióra

$$V^\phi \geq 0 \;\text{ m.b} \Longleftarrow V^\phi = 0 \;\text{ m.b.}$$

Megjegyzés. A fenti tétel megfelelője létezik az (NAFL) helyett az (NA) feltételt használva. Megmutatható, hogy (NA) szükséges és elégséges feltétele az ekvivalens martingálmérték létezésének [11].

Ekvivalens martingálmértékek a stabil változós APM-ben

A fejezet másik fontos tétele előtt definiáljuk az m-tényezős APM piaci modellt.

13. Definíció. Minden $k \geq m$ esetén az m-tényezős APM k-adik szegmensében legyenek:

$$S_k^0(0) = S_k^0(1) \equiv 1,$$

$$S_k^i(1) = S_k^i(0)(1 + \mu_k^i + \bar{\kappa}_k^i \varepsilon_k^i), \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$S_k^i(1) = S_k^i(0)\left(1 + \mu_k^i + \sum_{j=1}^{m} \kappa_k^i(j)\varepsilon_k^j + \bar{\kappa}_k^i \varepsilon_k^i\right), \quad m < i \leq k.$$

A korábban definiált modellhez hasonlóan μ_k^i valós számok, amelyek a várható kifizetést jelölik, az $\varepsilon_k^1, \ldots, \varepsilon_k^m$ valószínűségi változók pedig az első m eszköz változását határozzák meg. Ugyanúgy feltesszük az ε_i-k függetlenségét, viszont a négyzetes

integrálhatóságot nem. A jelentősebb változás a $\kappa_k^i(j)$-k megjelenése, amelyek a k-adik szegmensben az i-edik eszköz és a j-edik tényező korrelációját hivatottak jelölni. Ezekről feltesszük, hogy $\bar{\kappa}_k^i \neq 0, k \geq m, i \leq k$.
A korábbi piacmodellhez hasonlóan itt is hasznos átparaméterezéshez folyamodnunk:

$$S_k^0(0) = S_k^0(1) \equiv 1,$$
$$S_k^i(1) = S_k^i(0)(1 + \bar{\kappa}_k^i(\varepsilon_k^i - b_k^i)), \quad 1 \leq i \leq m,$$
$$S_k^i(1) = S_k^i(0)\left(1 + \sum_{j=1}^{m} \kappa_k^i(j)(\varepsilon_k^j - b_k^j) + \bar{\kappa}_k^i(\varepsilon_k^i - b_k^i)\right), \quad m < i \leq k,$$

ahol

$$b_k^i = -\frac{\mu_k^i}{\bar{\kappa}_k^i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad b_k^i = -\frac{\mu_k^i}{\bar{\kappa}_k^i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_k^j \kappa_k^i(j)}{\bar{\kappa}_k^j \bar{\kappa}_k^i}, \quad m < i \leq k.$$

Ezután már kimondhatjuk fejezet második nagy tételét.

6. Tétel. *Ha $\alpha > 1$, akkor az (NAFL)-ből következik, hogy*

$$\sup_{k \geq m} \sum_{j=1}^{k} |b_{jk}|^{\alpha'} < \infty. \tag{5.1}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\sup_{k \geq m, j \leq k} |b_{jk}| < \infty. \tag{5.2}$$

Ha a modell stacionárius és a m-edik piaci szegmensben teljesül az (NA) feltétel, akkor ha $\alpha > 1$:

$$(EMMSS) \Leftrightarrow (NAFL) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^{\alpha'} < \infty,$$

és ha $\alpha = 1$:

$$(EMMSS) \Leftrightarrow (NAFL) \Leftrightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} |b_i| < \infty.$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz egy segédlemmára. Ennek []-ben megtalálható bizonyítását most nem részletezzük.

Lemma 5.1 Legyen X_n, $n \in \mathbb{N}$ azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. Továbbá legyen az X_n-ek eloszlása folytonos és a tartója $\mathbb{R}$. Válasszunk egy pozitív számokból álló σ_n, és egy valós számokból álló μ_n sorozatot. Ha teljesül, hogy

$$\frac{\mu_n}{\sigma_n} \to \infty, \quad \mu_n \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{5.3}$$

akkor $\sigma_n X_n + \mu_n \to \infty$ valószínűségben. Továbbá, ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right| < \infty, \tag{5.4}$$

akkor létezik olyan $\beta > 0$ konstans, amelyre a megfelelő részsorozat mentén a $P(\sigma_n X_n + \mu_n \leq -1) \geq \beta$ vagy $\sigma_n X_n + \mu_n \to 0$ állítások egyike majdnem biztosan teljesül.

Most már elkezdhetjük a tétel bizonyítását.

Bizonyítás. Az (EMMSS) $\Leftrightarrow$ (NAFL) éppen az előző tétel, amelyet bizonyítottunk, így csak a többi állítást kell belátnunk.

Jelölje ℓ^α, azon $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok Banach-terét, amelyekre teljesül, hogy

$$\|l\|_\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} |l_n|^\alpha < \infty.$$

Rögzítsünk egy $0 \neq l \in \ell^\alpha$ elemet, és minden $k > m$-re definiáljuk a k-adik piaci szegmensben levő ϕ_k stratégiát a következőképpen:

$$\phi_k^i := \frac{\operatorname{sgn}(l_i b_k^i) l_i}{\kappa_k^i}, \quad m < i \leq k;$$

$$\phi_k^i := \frac{\operatorname{sgn}(l_i b_k^i) l_i - \sum_{j=m+1}^{k} \phi_k^j \kappa_k^j(i)}{\kappa_k^i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a V^{ϕ^k} változó α-stabil, továbbá vegyük észre, hogy

$$\sigma(V^{\phi^k}) \to \|l\|_\alpha \neq 0. \tag{5.5}$$

Mivel feltettük az (NAFL) teljesülését, így a fenti állítás alapján fennáll, hogy

$$\sup_{k>m} |\mu(V^{\phi^k})| = \sup_{k>m} \sum_{i=1}^{k} |l_i b_k^i| < \infty. \tag{5.6}$$

Most tekintsük azon $v_k = v_k^i,\ k > m$ sorozatokat, melyek a

$$v_k^i = b_k^i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad v_k^i = 0, \quad i > k$$

egyenletek által meghatározott elemei az ℓ^α tér duálisának, $\ell^{\alpha'}$-nek.

Az (5.5) szerint a folytonos, lineáris függvények v_k sorozata pontonként korlátos az ℓ^α téren. Így, a Banach-Steinhaus tétel alapján a normája is korlátos, ami éppen az egyik bizonyítandó (5.1) állítás.

Az $\alpha = 1$ esetben az $\ell^{\alpha'}$ megfelel a szuprémum normával ellátott korlátos sorozatok ℓ^∞ terének, ami éppen az (5.2) állítást eredményezi.

Térjünk át a stacionárius esetre. Tegyük fel, hogy létezik portfóliók $\phi_k, k > m$ sorozata, amelyre

$$V^{\phi^k} \to V \in F \setminus \{0\}. \tag{5.7}$$

Bontsuk két diszjunkt részre V^{ϕ^k}-t a következő módon:

$$V^{\phi^k} = V_1^k + V_2^k := \sum_{i=1}^{m} \left(\phi_i + \sum_{j=m+1}^{k} \phi_j \kappa_j(i) \right) \varepsilon_i + \sum_{i=m+1}^{k} \phi_i \kappa_i \varepsilon_i.$$

Alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget, $\alpha > 1$ esetén kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\mu(V_2^k)}{\sigma(V_2^k)} \right| = \frac{\left| -\sum_{i=1}^{m} (\phi_i + \sum_{j=m+1}^{k} \phi_j \kappa_j(i)) b_i - \sum_{i=m+1}^{k} \phi_i \kappa_i b_i \right|}{\alpha' \sum_{i=1}^{m} \phi_i + \sum_{j=m+1}^{k} \phi_j \kappa_j(i))^\alpha + \sum_{i=m+1}^{k} \phi_i \kappa_i^\alpha},$$

valamint az $\alpha = 1$ esetben azt, hogy

$$\leq \alpha' \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |b_i|^{\alpha'}} \leq \|b\|_{\alpha'}.$$

$$\left| \frac{\mu(V_2^k)}{\sigma(V_2^k)} \right| \leq \|b\|_\infty,$$

A fenti lemma alapján

$$\forall k \; P(V_2^k \leq -1) \geq \beta > 0, \tag{5.8}$$

teljesül valamely β-ra, vagy $V_2^k \to 0$ teljesül majdnem biztosan. Az utóbbi esetben a folytatás triviális, így elegendő az első esetet belátnunk. Tegyük fel (5.8) teljesülését és vizsgáljuk meg V_1^k viselkedését.

Ekkor két aleset lehetséges.

1. aleset: Ha létezik olyan $\theta > 0$, amelyre

$$\forall k \; P(V_1^k \leq -\theta) \geq \theta,$$

teljesül, akkor a függetlenség miatt

$$P(\{V_1^k \leq -\theta, V_2^k \leq -1\}) \geq \theta\beta > 0,$$

fennáll minden k esetén, ami ellent mond (5.7)-nek.

2. aleset: Ha nincs ilyen θ.

Ekkor a részsorozat negatív része, amit az egyszerűség kedvéért szintén k-val jelölünk, majdnem biztosan 0-hoz tart:

$$(V_1^k)^- \to 0.$$

Ekkor kihasználva az (NA) feltételt kapjuk, hogy V_1^k 0-hoz konvergál, így (5.8) ellent mond (5.7)-nek. Ezzel a tétel minden állítását beláttuk.

□

6. fejezet

A várható haszon maximalizálása az APM-ben

Lemma 6.1 Legyen $Q \in M$ és $dQ/dP \in L^2$, továbbá tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$. Ekkor minden $\phi \in A$-ra

$$E_Q V(\phi) = 0.$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\varepsilon_i - b_i)$ konvergens $L^1(Q)$-ban.

Tetszőleges n, m esetén a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$E_Q|\sum_{i=n}^{m} \phi_i(\varepsilon_i - b_i)| \leq \sqrt{E(dQ/dP)^2} \sqrt{E(\sum_{i=n}^{m} \phi_i(\varepsilon_i - b_i))^2},$$

Továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\varepsilon_i - b_i)$ konvergens L^2-ben, így $L^1(Q)$-ban is. $\square$

Feltétel 6.1

Létezik olyan $G > 0$, hogy minden $x \geq G$ esetén teljesülnek az

$$\inf_{i \geq 1} P(\varepsilon_i > x) > 0 \quad \text{és} \quad \inf_{i \geq 1} P(\varepsilon_i < -x) > 0$$

feltételek. Továbbá

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} E[\varepsilon_i^2 1_{|\varepsilon_i| \geq N}] \to 0, \quad N \to \infty.$$

7. Tétel. *Tekintsük a következő állításokat.*

1. *NAFL*
2. *Minden $P \sim P'$-re létezik $Q \in M$, amire $dQ/dP' \in L^\infty$.*
3. *Létezik $Q \in M$, amire $dP/dQ \in L^2$.*

4.

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty.$$

5. Nincs aszimptotikus arbitrázs.

Ekkor 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Leftrightarrow$ 5. *fennállnak, valamint a fenti feltétel mellett ekvivalensek.*

Bizonyítás. A 1. és 2. pont ekvivalenciája következik a [12] cikk első tételéből. 4 $\Leftrightarrow$ 5. és 3. $\Rightarrow$ 4. az előző fejezetben szereplő 3. tétel és a 4.3. lemma következményei, továbbá 2. $\Rightarrow$ 3. nyilvánvaló. Így elegendő a bizonyításhoz a 4. $\Rightarrow$ 1. állítást belátni.

Legyen $\phi(n) \in \varepsilon$, hogy egy tetszőleges $X \in [0; \infty]$ valószínűségi változóra

$$V(\phi(n)) \to X$$

majdnem biztosan. Továbbá válasszunk egy k_n korlátot úgy, hogy minden $l \geq k_n$ esetén $\phi_l(n) = 0$.

Ekkor két esetet különböztethetünk meg, ha $\sup_n ||\phi(n)||_{l_2} = \infty$ és ha $\sup_n ||\phi(n)||_{l_2} < \infty$. Először az előbbi esettel foglalkozunk.

Kivonva egy megfelelő részsorozatot, feltehetjük, hogy $||\phi(n)||_{l_2} \to \infty$, amint $n \to \infty$.

A bizonyítás érdekében definiáljunk minden n-re és i-re az eredeti $\phi_i(n)$-ek egy normált változatát:

$$\tilde{\phi}_i(n) := \frac{\phi_i(n)}{||\phi(n)||_{l_2}}.$$

Természetesen fennáll, hogy $\tilde{\phi}_i(n) \in \varepsilon$, továbbá teljesül, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} V(\tilde{\phi}(n)) = \liminf_{n\to\infty} \frac{V(\phi(n))}{||\phi(n)||_{l_2}} \geq 0 \text{ m. b.}$$

Legyen $M := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}$. Mivel $||\tilde{\phi}(n)||_{l_2} = 1$, így minden n-re

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(n) b_i| \leq M.$$

Így egy választott részsorozat mentén

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(n) b_i \to d, \text{ amint } n \to \infty,$$

ahol $d \in \mathbb{R}$. Ezután a bizonyítás két alesetre bomlik.

Az első aleset az, ha: $\chi_n := \max\{|\tilde{\phi}_i(n)|, i = 1, \ldots, k_n\} \to 0, n \to \infty$. Ekkor rögzítsünk egy $\eta, \delta > 0$-t. Az 6.1 feltétel miatt, teljesül egy $N = N(\delta)$-ra, hogy $E[\varepsilon_i^2 \cdot 1\{|\varepsilon_i| \geq N\}] < \delta$ minden $i \geq 1$ esetén. Válasszuk n-t elegendően nagynak, hogy $\eta/\chi_n \geq N$ teljesüljön. Ekkor fennáll, hogy $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\phi}_i(n) \cdot \varepsilon_i) = 1$, valamint

$$\sum_{i=1}^{k_n} E[\tilde{\phi}_i^2(n)\varepsilon_i^2 1_{\{|\tilde{\phi}_i(n)\varepsilon_i| \geq \eta\}}] \leq \sum_{i=1}^{k_n} E[\tilde{\phi}_i^2(n)\varepsilon_i^2 1_{\{\chi_n|\varepsilon_i| \geq \eta\}}] \leq \delta \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\phi}_i^2(n) = \delta.$$

Mivel a fenti állítás teljesül tetszőleges η, δ esetén, így a Lindeberg-feltétel fennáll a $V(\tilde{\phi}(n)), n \geq 1$ összegekre, így a centrális határeloszlás-tételt alkalmazhatjuk. Ebből adódik, hogy $\mathrm{Law}(V(\tilde{\phi}(n))) \to \mathbb{N}(-d, 1)$ gyengén, amint $n \to \infty$.

Ekkor észrevehetjük, hogy tetszőleges $f > 0$-re, $\mathbb{P}(V(\tilde{\phi}(n)) < 0) \to f$ ellent mond a

$$\liminf_{n\to\infty} V(\tilde{\phi}(n)) = \liminf_{n\to\infty} \frac{V(\phi(n))}{||\phi(n)||_{l_2}} \geq 0 \text{ m. b.}$$

állításnak, így az első aleset nem fordulhat elő.

A második aleset akkor teljesül, hy létezik olyan $c > 0$ és $1 \leq l(n) \leq k_n$, amire $|\tilde{\phi}_{l(n)}(n)| \geq c$, minden n esetén. Legyen $J_i := \epsilon_i - b_i$. Ekkor a Markov-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \neq l(n)} \tilde{\phi}_i(n) \cdot J_i > N\right) \leq \frac{\sum_{i\neq l(n)} \tilde{\phi}_i(n)^n \cdot (1 + b_i^2)}{N^2} \leq \frac{1 + \sup_{i\geq 1} b_i^2}{N^2} \to 0, \quad (6.1)$$

amint $N \to \infty$ egyenletesen.

Tehát egy elegendően nagy $N \geq 0$ mellett $P(\sum_{i\neq l}(n)\tilde{\phi}_i(n)J_i \leq N) \geq 1/2$ teljesül minden n-re. Azonban az 6.1 feltétel miatt létezik egy $q > 0$, amire

$$P(J_l(n) < -(N + M + 1)/c) \geq q, \quad P(J_l(n) > (N + M + 1)/c) \geq q$$

teljesülnek minden n-re, mivel $b_i, i \geq 1$ egy korlátos sorozat. Tehát a $\varepsilon_l(n)$-ek $\varepsilon_i, i \neq l$-től való függetlensége miatt

$$P(V(\tilde{\phi}(n)) \leq -1) \geq P\Big(\tilde{\phi}_l(n)J_l(n) \leq -N - M - 1, \ \ \textstyle\sum_{i\neq l} \tilde{\phi}_i(n)J_i \leq N \Big) \geq q/2.$$

Ez újabb ellentmondást eredményez, így a második aleset sem fordulhat elő. Ezzel az első eset bizonyítását befejeztük.

A második eset: $\sup_n \|\varphi(n)\|_{\ell^2} < \infty$. Létetik ℓ^2-ben egy gyengén konvergens részsorozat, és ℓ^2-ben alkalmazva a Banach-Saks tételt, megadhatjuk a $\phi(n)$-ek egy konvex kombinációját (jelöljük ezt továbbra is $\phi(n)$-el), amelyre

$$\|\phi(n) - \phi^*\|_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(n) - \phi_i^*)^2 \to 0, n \to \infty$$

teljesül valamely $\phi^* \in A = \ell^2$ esetén. Ekkor $\varepsilon_i, i \geq 1$-k L^2-beli ortonormáltságának következményeként kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(V(\phi(n)) - V(\phi^*))^2 \to 0, n \to \infty.$$

Mivel L^2-beli konvergenciából következik a valószínűségbeli konvergencia, így $V(\phi^*) = X$. Ha $\phi_i^* = 0$ teljesülne minden i-re, akkor $X = 0$ és készen vagyunk. Ellenkező esetben létezik olyan $l \geq 1$, amelyre $\phi_l^* > 0$ (a $\phi_l^* < 0$ eset hasonlóan látható be). A következőkben belátjuk, hogy ez nem teljesülhet.

Valóban

$$P\left(\textstyle\sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i > N \right) \leq \sum_{i \neq l} (\phi_i^*)^2 [1 + b_i^2] \frac{1}{N^2} < \frac{1}{2}$$

minden n-re elegendően nagy N esetén. Ekkor a függetlenség és az 6.1 feltétel miatt

$$P(V(\phi^*) \leq -1) \geq P\left(\phi_l^* J_l \leq -N - 1, \ \textstyle\sum_{i \neq l} \phi_i^*(n) J_i \leq N \right) > 0,$$

ami ellentmond $V(\phi^*) = X \geq 0$-nek. Ezzel a tételt beláttuk.

□

Lemma 6.2

Amennyiben az U haszonfüggvény nem konstans, akkor léteznek $c, C > 0$ konstansok, amelyekre minden $x \geq 0$ esetén $u(x) \leq -c|x| + C$ teljesül.

Proof. Mivel $U(-\infty) = -\infty$, így létezik $x^* \leq 0$, amelyre $U(x)$, $x \leq x^* + 1$ szigorúan növekvő függvény, valamint $U(x^*) < 0$. Jelölje $d^* := U'(x^{*-}) > 0$-vel a függvény baloldali deriváltját. Ekkor

$$U(x) \leq U(x^*) + (x - x^*) d^*, \quad x \leq x^*.$$

Továbbá $x^* \leq x \leq 0$ esetén

$$U(x) \leq |U(0)| \leq -d^*|x| + d^*|x^*| + |U(0)|.$$

A $c := d^*$ és $C := d^*|x^*| + |U(0)|$ választásokkal kapjuk az állítást.

Az alábbiakban kimondunk és bebizonyítunk egy tételt, amely bár első olvasásra hasonló feltételek mellett hasonló eredményt ad az 1.tételhez, azonban itt nem tesszük fel az U monotonitását, valamint a bizonyítási eljárás is jelentősen különbözik.

8. Tétel. *Tegyük fel az 6.1 feltétel teljesülését. Továbbá legyenek olyanok a b_i-k, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$.*

Legyen $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ felülről korlátos függvény. Ekkor létezik $\phi^* \in A$, amire

$$EU(V(\phi^*)) = \sup_{\phi \in A} EU(V(\phi)).$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az U függvény felülről való korlátossága miatt, $EU(V(\phi))$ értelmes minden $\phi \in \mathcal{A}$ esetén.

Legyen $\phi(n)$ olyan sorozat, amelyre $\sup_{\phi \in \mathcal{A}} EU(V(\phi)) = \lim_{n\to\infty} Eu(V(\phi(n)))$. Ekkor mivel U felülről korlátos, így $\sup_n EU^-(V(\phi(n))) < \infty$. Konstans U esetén a bizonyítás triviális. Ha U nem konstans, akkor $\sup_n EV^-(\phi(n)) < \infty$ teljesül a fenti lemma miatt. A 3.tétel következtében létezik $Q \in \mathcal{M}$, amelyre $dQ/dP \in L^\infty$. Ekkor alkalmazva a 6.1 lemmát kapjuk, hogy $E_Q V(\phi(n)) = 0$ minden n esetén. Tehát, $\sup_n E_{Q|V(\phi(n))|} < \infty$.

Az $L^1(Q)$ térben alkalmazva a Komlós-tételt, kapjuk, hogy a $V(\phi(n))$-k valamely konvex kombinációja majdnem biztosan konvergál egy X valószínűségi változóhoz. Mivel K_1 konvex és zárt, így létezik $\phi^* \in \mathcal{A}$, amelyre $X = V(\phi^*)$. Kihasználva, hogy az U függvény konkáv és alkalmazva a Fatou lemmát, kapjuk, hogy $EU(V(\phi^*)) \geq \lim_{n\to\infty} EU(V(\phi(n)))$, azaz ϕ^*-re teljesül az állítás. □

Megjegyzés.

Ha U nem monoton, az állítás akkor is teljesül.

Következmény.

Tegyük fel az 6.1 feltétel teljesülését. Továbbá legyenek olyanok a b_i-k, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$, valamint azt, hogy $EU(V(\phi))$ véges minden $\phi \in A$-ra. Legyen U

szigorúan növekvő, folytonosan differenciálható függvény, ahol U'. Ha a fenti tétel állítása teljesül, akkor létezik $Q \in \mathcal{M}$, amire

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{U'\left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^*(\varepsilon_i - b_i)\right)}{E\left[U'\left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^*(\varepsilon_i - b_i)\right)\right]}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $l \in \mathbb{N}$-t és legyen ϕ^* egy optimális stratégia (ahogyan a fenti tételben). Tekintsük ekkor a $g(x) := E\left[u\left(xR_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right)\right], x \in \mathbb{R}$ függvényt. A g függvény az $x = \phi_l^*$ helyen veszi fel a maximumát. A Lagrange-féle középértéktétel alapján, minden $\phi \in \mathbb{R}$ és $h \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{h}\left[u\left((\phi + h)J_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right) - u\left(\phi J_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right)\right] = u'\left(\xi(h)J_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right) J_l$$

teljesül egy ϕ és $\phi + h$ közé eső $\xi(h)$ változóra. Tekintsük $h \to 0$ határátmenetet. Mivel u' korlátos, így a Lebesgue-tétel következtében $g'(\phi)$ létezik és megegyezik az

$$E\left[U'\left(\phi J_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right) J_l\right]$$

értékkel. Ebből következik, hogy

$$0 = g'(\phi_l^*) = E\left[U'\left(\phi_l^* J_l + \sum_{i \neq l} \phi_i^* J_i\right) J_l\right].$$

A fenti bizonyítás teljesül minden l esetén, így Q-ra valóban a igaz az állítás.

□

7. fejezet

Optimális kereskedési stratégia az APT-ben

Az alábbiakban kimondjuk és bebizonyítjuk jelen dolgozat egyik legerősebb tételét, amely megmutatja az optimális kereskedési stratégia létezését az APT pénzügyi modellben.

Feltevések

Ebben a fejezetben végig élünk a következő feltevésekkel.

1. feltevés

Az ε_i-k négyzetesen integrálható függelten valószínűségi változók, amelyekre teljesülnek a következők:

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad E(\varepsilon_i^2) = 1, \quad i \geq 1.$$

2. feltevés

Legyen $b \in \ell^2$.

Használjuk az eredményt, miszerint $h \in \ell^2$ esetén

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{m} h_i(\epsilon_i - b_i) - \sum_{i=1}^{n} h_i(\epsilon_i - b_i)\right)^2\right) = \sum_{i=n+1}^{m} h_i^2 + \sum_{i=n+1}^{m} h_i^2 b_i^2. \tag{7.1}$$

Ezt alkalmazva $(P_{i=1}^{n} h_i(\varepsilon_i - b_i))_{n\geq 1}$ egy Cauchy sorozat $L^2(P)$-ben, és a

$$V^{x,h} := x + \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\varepsilon_i - b_i)$$

kéőletben szereplő végtelen összegre tekinthetünk úgy, mint véges összegek $L^2(P)$-beli határértéke. Továbbá vegyük észre, hogy

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} h_i(\varepsilon_i - b_i)\right)^2\right) = \|h\|_{\ell^2}^2 + \|hb\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + \|b\|_{\ell^2}^2)\|h\|_{\ell^2}^2 < \infty. \quad (7.2)$$

A következőkben használni fogjuk a

$$\langle h, \epsilon - b\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\epsilon_i - b_i)$$

jelölést.

3. feltevés

Minden $i \geq 1$ esetén $P(\varepsilon_i > b_i) > 0$ és $P(\varepsilon_i < b_i) > 0$ egyszerre teljesülnek.

4. feltevés

Az ε_i-kre teljesül, hogy

$$\sup_{i\geq 1} E[|\varepsilon_i^3|] < \infty.$$

A bizonyítások során használni fogjuk az alábbi két segédlemmát, melyeknek bizonyítását most nem részletezzük.

Lemma 7.1 Az 1., 2., 3., 4. feltételek teljesülése mellett válasszunk $y \geq 0$-t és $h \in \ell^2$-t úgy, hogy $y^+\langle h, \varepsilon - b\rangle \geq 0$ teljesüljön. Ekkor létezik $\hat{\alpha}$, amelyre

$$\|h\|_{\ell^2} \leq \frac{y}{\hat{\alpha}}.$$

Lemma 7.2 Tételezzük fel az 1., 2., 3., 4. feltételek teljesülését.

Ekkor $\pi(G) > -\infty$ és létezik $h \in \ell^2$, hogy $\pi(G)+\langle h, \varepsilon - b_i\rangle \geq G$ teljesül majdnem biztosan.

9. Tétel. *Feltesszük, hogy az 1., 2., 3., 4. feltételek teljesülnek. Tegyük fel, hogy $G \geq 0$ majdnem biztosan, és $U(x_0) = 0$, $U'(x_0) = 1$, valamely $x_0 \geq 0$-re. Ekkor $A(G, x) = A(U, G, x)$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel U egy növekvő konkáv függvény, amely differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$-re, továbbá $U(x_0) = 0$ és $U'(x_0) = 1$. Ekkor

$$U(x) \leq U(\max(x_0, x)) \leq U(x_0) + \max(x - x_0, 0)U'(x_0) \leq \max(x - x_0, 0) \leq |x - x_0| \leq |x|,$$

mivel $x_0 \geq 0$. Tehát, ha $x < \pi(G)$, akkor $A(G, x) = \emptyset$ és $A(G, x) = A(U, G, x) = \emptyset$.

Így legyen $x \geq \pi(G)$. Ekkor a Lemma 7.2 miatt $A(G, x) \neq \emptyset$. Legyen $h \in A(G, x)$. Ekkor

$$V_{x,h} \geq G \geq 0 \text{ majdnem biztosan, } \quad \text{és} \quad h \in A(0, x).$$

A fentiekből kapjuk, hogy

$$U^+(x + \langle h, \varepsilon - b\rangle - G) \leq U^+(x + \langle h, \varepsilon - b_i\rangle) \leq$$

$$\mathrm{U}^+(x + \langle h, \varepsilon - b_i\rangle)1_{\{x+\langle h,4n-b_i\rangle \geq x_0\}} + U^+(x_0)1_{\{x+\langle h,\varepsilon-b_i\rangle < x_0\}} =$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{x} + \langle h, \varepsilon - b_i\rangle)1_{\{x+\langle h,\varepsilon-b_i\rangle \geq x_0\}} \leq x + \langle h, \varepsilon - b\rangle,$$

mivel $h \in A(0, x)$. Tehát teljesül, hogy

$$E\langle h, \varepsilon - b_i\rangle^2 \leq \|h\|^2_{\ell_2}(1 + \|b\|^2_{\ell_2}).$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből és a 7.1 lemmából pedig

$$EU + (x + \langle h, \varepsilon - b_i\rangle - G) \leq x + \sqrt{E(\langle h, \varepsilon - b_i\rangle^2)} \leq$$

$$\leq x + \|h\|_{\ell_2}\sqrt{1 + \|b\|^2_{\ell_2}} \leq x + \frac{x}{\hat{\alpha}}\sqrt{1 + \|b\|^2_{\ell_2}} < +\infty.$$

□

10. Tétel. *Tételezzük fel, hogy az 1., 2., 3., 4. feltételek teljesülnek. Legyen $G \geq 0$, valamint $x \in [\pi(G), \infty)$. Ekkor létezik $h^* \in A(U, G, x)$, amire*

$$u(G, x) = \mathbb{E}U(V^{x,h^*} - G).$$

Bizonyítás. Amennyiben U konstans, akkor az állítás triviális. Különben létezik $x_0 > 0$, amelyre $U'(x_0) > 0$ teljesül. Ekkor helyettesítsük be U helyére a

$$\frac{U}{U'(x_0)} - \frac{U(x_0)}{U'(x_0)},$$

kifejezést. Feltehetjük, hogy $U(x_0) = 0$ és $U'(x_0) = 1$. Legyen ekkor $x \geq \pi(G)$, továbbá (ahogy az előző lemmában) legyen $\{h_n\} \in A(G,x) = A(U,G,x)$ egy olyan sorozat, amelyre

$$\mathbb{E}U(V^{x,h_n} - G) \uparrow u(G,x), \quad n \to \infty$$

teljesül. A Lemma 7.1 alapján,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|_{\ell^2} \leq \frac{x}{\hat{\alpha}} < \infty.$$

Mivel ℓ^2 rendelkezik a Banach-Saks tulajdonsággal, így létezik egy olyan $(n_k)_{k\geq 1}$ részsorozat, valamint $h^* \in \ell^2$, amire $\tilde{h}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_{n_k}$ esetén fennáll, hogy

$$\|\tilde{h}_n - h^*\|_{\ell^2} \to 0, \quad n \to \infty$$

valamely $h^* \in \ell^2$-re. Vegyük észre, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{h}_n\|_{\ell^2} \leq \frac{x}{\hat{\alpha}} < \infty$. Kihasználva az 2. feltételben-ban szereplő egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\tilde{h}_n - h^*, \varepsilon - b_i)^2 \leq \|\tilde{h}_n - h^*\|_{\ell^2}^2 (1 + \|b\|_{\ell^2}^2) \to 0,$$

amint $n \to \infty$. Továbbá, $(\tilde{h}_n - h^*, \epsilon - b_i) \to 0, \quad n \to \infty$ valószínűségben. Az U jobbról való folytonosságát a $[0,\infty)$ intervallumon kihasználva kapjuk, hogy $U(V^{x,\tilde{h}_n} - G) \to U(V^{x,h^*} - G)$ valószínűségben. Ekkor tehát az $U^+(V_{x,\tilde{h}_n} - G)$, $n \in \mathbb{N}$ család egyenletesen integrálható, mivel

$$U^+(V^{x,\tilde{h}_n} - G) \leq x + \langle \tilde{h}_n, \epsilon - b_i \rangle.$$

Így a 4. feltétel alapján $\{U^+(V^{x,\tilde{h}_n} - G), h_n \in \ell^2, \|h_n\|_{\ell^2} \leq \frac{x}{\hat{\alpha}}\}$ egyenletesen integrálható, így

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[U^+(V^{x,\tilde{h}_n} - G)\right] = \mathbb{E}\left[U^+(V^{x,h^*} - G)\right].$$

Használjuk a Fatou-lemmát $-U^-$-ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left[-U^-(V^{x,h^*} - G)\right] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[-U^-(V^{x,h_n} - G)\right].$$

Mivel U konkáv függvény, így

$$U(V^{x,h_n} - G) = U\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(V^{x,h_k} - G)\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U(V^{x,h_k} - G),$$

amiből
$$\mathbb{E}U(V^{x,h^*} - G) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}U(V^{x,h_n} - G) \geq u(G,x).$$

Mivel az előző tétel alapján $h^* \in A(G,x) = A(U,G,x)$, így az állítást beláttuk.

$\square$

8. fejezet

Optimális stratégia arbitrázzsal rendelkező piacokon

Felmerül a kérdés, hogy ha nem tesszük fel az aszimptotikus arbitrázs hiányát, akkor igazak maradnak-e az eddig taglalt tételek. Az alábbi fejezetben saját eredményként igazoljuk bizonyos feltételek mellet az optimális stratégia létezését arbitrázzsal rendelkező piacokon. Az (AAA) feltétel elhagyásával nem használhatjuk az ekvivalens martingálmérték létezésére épülő módszereket, így más eszközökhöz kell folyamodnunk.

Feltétel 8.1

Rögzítsünk egy $N \in \mathbb{R}$ konstanst, és tegyük fel, hogy minden i-re $\varepsilon_i \in [-N, N]$, továbbá a megszokott módon $E\varepsilon_i = 0$ és $E\varepsilon_i^2 = 1$.

Jelölje F_i az ε_i eloszlásfüggvényét. Ekkor vezessük be

$$\underline{S_i} := \inf\{t : F_i(t) > 0\}; \qquad \overline{S_i} := \sup\{t : F_i(t) = 1\}$$

jelöléseket, valamint legyen

$$d_i = \min\{b_i - \underline{S_i}, \overline{S_i} - b_i\}.$$

Feltétel 8.2 A fent bevezetett jelölésekkel legyen

$$\inf_i d_i > 0.$$

14. Definíció. Megengedhető stratégiák

Azon kereskedési stratégiákat, melyekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(\varepsilon_i - b_i) \geq -1,$$

nevezzük megengedhető kerekedési stratégiáknak. Jelöljük a megengedhető stratégiákat $\overline{\phi}_i$-vel.

11. Tétel. *Tételezzük fel a 8.1. és 8.2. feltételek teljesülését.*

Ekkor létezik $\overline{\phi} = (\overline{\phi}_1, ..., \overline{\phi}_n)$ optimális megengedhető stratégia, melyet ezentúl $\overline{\phi}^*$-al jelölünk.

Bizonyítás. Kihasználva, hogy $\inf_i\{d_i\} > 0$, így a korábban tárgyaltak alapján létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden i esetén $P(\varepsilon_i - b_i < -\delta) > 0$, valamint $P(\varepsilon_i - b_i > \delta) > 0$ egyaránt teljesülnek. Ekkor természetesen $P(\overline{\phi}_i(\varepsilon_i - b_i) < -\delta\overline{\phi}_i) > 0$ is fennáll.

A $\overline{\phi}_i$-k függetlensége miatt

$$P(\overline{\phi}_1(\varepsilon_1 - b_1) < -\delta|\overline{\phi}_1|, ..., \overline{\phi}_n(\varepsilon_n - b_n) < -\delta|\overline{\phi}_n|) > 0.$$

Ekkor 2 esetet különböztethetünk meg (a $\overline{\phi}_i = 0$-kat nem kell számításba vennünk, hiszen azok nem változtatnak az optimális stratégián).

Ha $\overline{\phi}_i > 0$. Ekkor

$$P(\phi_i(\varepsilon_i - b_i) < -\delta|\phi_i|) = P(\phi_i(\varepsilon_i - b_i) < -\delta\overline{\phi}_i) =$$
$$= P(\varepsilon_i - b_i < -\delta) > 0.$$

Ha $\overline{\phi} < 0$. Ekkor hasonlóan

$$P(\overline{\phi}_i(\varepsilon_i - b_i) < -\delta|\overline{\phi}_i|) = P(\overline{\phi}_i(\varepsilon_i - b_i) < \delta\overline{\phi}_i) =$$
$$P(\varepsilon_i - b_i > \delta) > 0.$$

Tehát minden i-re $P(\overline{\phi}_i(\varepsilon_i - b_i) < -\delta|\overline{\phi}_i|) > 0$.

Ezután a függetlenséget újfent kihasználva kapjuk, hogy

$$P(\overline{\phi}_1(\varepsilon_1 - b_1)| + ... + \overline{\phi}_n(\varepsilon_n - b_n) < -\delta(|\overline{\phi}_1| + ... + |\overline{\phi}_n|)) > 0.$$

Ekkor mivel a $\overline{\phi}_i$-k megengedhetők, így

$$-\delta(|\overline{\phi}_1| + ... + |\overline{\phi}_n|) \geq -1.$$

Ebből $(-\delta)$-val leosztva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{\phi}_i| \leq 1,$$

azaz a $\overline{\phi}_i$-k korlátosak ℓ_1-ben

A $\overline{\phi}_i$-k megengedhetősége és ℓ_1-beli korlátossága miatt

$$\sup_t ||\overline{\phi}_i(n)||_{\ell_1} < \infty.$$

Ekkor az is teljesük, hogy

$$\sup ||\overline{\phi}(n)||_{\ell_2} < \infty.$$

Tehát,

$$||\overline{\phi}_n - \overline{\phi}^*||_{\ell_2} \to 0, \quad \text{amint} \quad n \to \infty.$$

Mivel a $\overline{\phi}_n$ konvex és korlátos, így a Weierstrass-tétel szerint felveszi a maximumát, azaz valóban létezik $\overline{\phi}^*$ optimális megengedhető stratégia.

$\square$

Ezzel tehát beláttuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése mellett, arbitrázzsal rendelkező piacokon is tudunk optimalizálni.

Irodalomjegyzék

[1] Stephen A Ross. „Arbitrage, Risk Return in Finance ed. I”. *Friend and J. Bicksler, Cambridge, Mass.: Ballinger* (1976).

[2] Stephen A Ross. „The arbitrage theory of capital asset pricing”. *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I.* World Scientific, 2013, 11–30. old.

[3] Miklós Rásonyi. „Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures”. *Decisions in Economics and Finance* 27 (2004), 109–123. old.

[4] Laurence Carassus és Miklós Rasonyi. „From small markets to big markets”. *arXiv preprint arXiv:1907.05593* (2019).

[5] Yuri M Kabanov és Dmitry O Kramkov. „Asymptotic arbitrage in large financial markets”. *Finance and Stochastics* 2 (1998), 143–172. old.

[6] Miklós Rásonyi. „On optimal strategies for utility maximizers in the arbitrage pricing model”. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 19.07 (2016), 1650047. old.

[7] Miklós Rásonyi. „Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time”. *Mathematical Methods of Operations Research* 58 (2003), 401–415. old.

[8] Miklós Rásonyi. „Maximizing expected utility in the arbitrage pricing model”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 454.1 (2017), 127–143. old.

[9] Laurence Carassus és Miklós Rásonyi. „Risk-neutral pricing for arbitrage pricing theory”. *Journal of Optimization Theory and Applications* 186.1 (2020), 248–263. old.

[10] Walter Schachermayer. „A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time”. *Insurance: Mathematics and Economics* 11.4 (1992), 249–257. old.

[11] Robert C Dalang, Andrew Morton és Walter Willinger. „Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models”. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 29.2 (1990), 185–201. old.

[12] Miklós Rásonyi és Lukasz Stettner. „On utility maximization in discrete-time financial market models”. (2005).