Betekintés a Borel-kombinatorikába

Szakdolgozat

Készítette:

Szepessy Luca

Matematikus MSc

Témavezető:

Vidnyánszky Zoltán

ELTE Matematikai Intézet,
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2024

Nagyon hálás vagyok a témavezetőmnek, Vidnyánszky Zoltánnak azért a rengeteg segítségért és türelemért, amivel a szakdolgozatom elkészüléséhez hozzájárult. A legapróbb részletekig mindenre odafigyelt, és odaadóan segített mind szakmai, mind technikai kérdésekben. Sokat jelentett, hogy mindemellett emberileg is szeretettel támogatott.

Köszönöm továbbá a barátaimnak, hogy mindig készségesen segítettek, ha elakadtam; valamint a kollégáimnak és a családomnak, hogy lehetővé tették az utolsó héten, hogy csak ezen szakdolgozattal foglalkozhassak.

Tartalomjegyzék

1. Alapvető definíciók és összefüggések **5**

1.1. Kromatikus számok 5

1.2. Kromatikus számok tulajdonságai 7

1.3. Teljes párosítás 9

1.4. Schreier-gráfok 10

1.5. A $\mathbb{G}_0$ gráf 12

1.6. A Luzin-Novikov tétel 16

1.7. A Luzin-Novikov tétel következményei 20

1.8. Ekvivalenciarelációk 23

1.9. Ramsey-típusú tételek a Borel-kombinatorikában 26

2. Egy érdekes Borel-gráf **28**

2.1. A gráf 28

2.2. G' Borel-kromatikus száma több mint 3 29

2.3. A bizonyítás kiterjesztése G-re 31

2.4. G mérhető kromatikus száma legfeljebb 3 34

3. 1, 2, 3, ∞ **40**

3.1. Függvények által generált gráfok 40

3.2. Egy függvény 42

3.3. Több függvény 43

3.4. Kommutáló függvények 45

Bevezető

A Borel-kombinatorika egy viszonylag fiatal területe a matematikának, mely mértékelméleti és leíró halmazelméletbeli fogalmakat egyaránt használ, miközben kombinatorikai struktúrákkal foglalkozik. Létrejöttét elsősorban a paradoxikus átdarabolások motiválták. Közismert példa ilyenre a Banach-Tarski paradoxon [1], miszerint $\mathbb{R}^3$-ben egy tömör gömböt ”fel lehet vágni” véges sok darabra úgy, hogy a darabok megfelelő átmozgatása után két, az eredetivel megegyező méretű tömör gömbünk legyen.

A bizonyítás egy fontos eleme, hogy a kiválasztási axióma segítségével ki tudunk választani egy kontinuum sok csúccsal rendelkező gráf minden összefüggőségi komponenséből pontosan egy csúcsot, és ezen csúcsok halmazt alkotnak. Na de milyen halmazt? Minden bizonnyal nem mérhetőt például, hiszen az átdarabolás paradoxikus mivolta éppen abban áll, hogy az átdarabolás során megváltozott az elemek össztérfogata. Ha megköveteljük, hogy az átdaraboláshoz készített véges sok rész mérhető vagy Borel legyen, a paradoxon megszűnik. Érdekes, hogy Baire-mérhető darabokkal viszont megvalósítható a művelet [7].

Egy másik ismert átdarabolási probléma a Tarski-féle körnégyszögesítés: vajon át lehet darabolni egy kört egy vele azonos területű négyzetté? Itt mérték-szempontból nem látszik semmiféle ellentmondás, viszont mégis nehéz elképzelni, hogy az átdarabolás bármilyen módon lehetséges, hiszen csak véges sok részre ”vághatjuk” a kört. Laczkovich Miklós 1990-ben bebizonyította, hogy az átdarabolás lehetséges [15]. A bizonyítás egyik alapgondolata volt, hogy egy megfelelő gráfban egy teljes párosítást kell találni.

Majdnem 30 évvel később Łukasz Grabowski, Máthé András és Oleg Pikhurko bebizonyították [11], hogy az átdarabolás mérhető részekkel is megvalósítható. Ezzel nagyjából egyszerre pedig Andrew Marks és Spencer Unger a gráfelméletből ismert folyamok használatával azt, hogy Borel-részekkel is megvalósítható az átdarabolás [18].

Mindezek motiválják, hogy a Borel-kombinatorika úgy foglalkozik (alapvetően) végtelen alaptereken mint csúcshalmazon definiált gráfokkal, hogy közben megköveteli, hogy minden halmaz és függvény, amit a gráffal kapcsolatban vizsgálunk, valamilyen értelemben szép legyen: mérhető, Baire-mérhető vagy Borel. Ezzel igyekszik elkerülni a kiválasztási axiómából következő paradoxikus jelenségeket. Speciálisan, ha a gráf csúcshalmaza az X Borel-tér, akkor a $G \subseteq X^2$ élhalmazától mindig azt követeljük meg, hogy Borel legyen – az ilyen gráfokat Borel-gráfoknak nevezzük.

A Borel-kombinatorika alapkérdései közé tartozik, hogy a klasszikus gráfelmélet összefüggései vajon igazak maradnak-e ebben a kontextusban. Például, vajon Borel-gráfokra is igaz, hogy ha a gráf körmentes, akkor két színnel színezhető? Ha a gráfban a maximális fokszám $\Delta < \infty$, akkor $\leq \Delta + 1$ színnel jólszínezhető a gráf? Természetesen a színezést megadó függvény nem lehet akármilyen: a Borel-kombinatorikában minket az a három eset érdekel, amikor a függvény mérhető, Baire-mérhető vagy Borel.

Jelen munkám 1. fejezete ilyen alapkérdésekkel foglalkozik. Bemutatom a legfontosabb tételeket és definíciókat, melyek nélkülözhetetlenek a Borel-kombinatorikával való foglalkozáshoz, és ezek vizsgálata során néhány igen szép példával is találkozhatunk. Mivel a további fejezetek színezési kérdésekről szólnak, így itt is ezen lesz a hangsúly. Fontos megjegyezni azonban, hogy a Borel-kombinatorika korántsem csak a jelen fejezetben beharangozott témakörök vizsgálatára szorítkozik.

További érdekesség, hogy a számítástudományhoz kötődő lokális algoritmusok is a Borel-kombinatorika látókörébe kerültek: Borel-színezés keresése néha véges gráfelméleti algoritmus keresésére vezetett vissza. Bernshteyn például egy összefüggést bizonyított egy Borel-megoldás létezése és véges gráfokon egy lokális algoritmus létezése között [2]. A lokális algoritmusok és a Borel-kombinatorika további kapcsolatáról a [3] és [8] cikkekben lehet olvasni.

A 2. fejezetben végig egyetlen gráfot fogunk színezés szempontjából alaposan megvizsgálni. Ennek célja nem csupán a Borel-gráfok kromatikus számainak furcsaságára való rácsodálkozás, hanem egyben példa egy érdekes módszer igen szép alkalmazására. Marks módszere a leíró halmazelméletből ismert végtelen játékokat használja.

A 3. fejezetben egy speciális gráfcsaláddal foglalkozunk: olyan Borel-gráfokkal, melyek csúcshalmaza az X sztenderd Borel tér, az éleit pedig véges sok $F_i : X \to X$ Borel-függvény határozza meg. Nevezetesen, $x \to y$ pontosan akkor él, ha valamely i-re $F_i(x) = y$. Amint azt a fejezet címe is sugallja, az ilyen gráfok kromatikus számairól matematikus szem számára igen szép állításokat tehetünk.

1. Alapvető definíciók és összefüggések

Ez a fejezet nagyrészt a témavezetőm, Vidnyánszky Zoltán *Mérhető kombinatorika* c. kurzusán készített jegyzeteim alapján készült. A kurzus anyagának idevonatkozó része a [14] cikken és [12] könyvön alapszik.

1.1. Kromatikus számok

1.1. Definíció (Borel-tér)**.** *Egy $(X, \mathscr{B}(X))$ párt, ahol $\mathscr{B}(X)$ az X részhalmazainak egy családja, Borel-térnek nevezünk, ha X-en megadható olyan lengyel topológia, melynek Borel-σ-algebrája éppen $\mathscr{B}(X)$.*

A továbbiakban, ha nem mondunk mást, X mindig egy Borel-tér lesz. A sztenderd Borel tér annyiban különbözik a Borel-tértől, hogy az X alaphalmaz nem lehet megszámlálható. Ismert ([10], 1.3.8), hogy a nem megszámlálható lengyel terek mind Borel-izomorfak egymással. Mivel $\mathbb{R}$ is ilyen, így a nem megszámlálható lengyel tereken lineáris Borel-rendezés is van.

1.2. Definíció (Borel-rendezés)**.** *X Borel-tér, $<$ egy (parciális) rendezés X-en. Ez Borel (parciális) rendezés, ha $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1 < x_2$ módon definiált $R \subseteq X^2$ halmaz Borel.*

Többször lesz szükségünk olyan kétváltozós Borel-leképezésre, mely egy Borel-tér x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ pontpárjaira megmondja, melyik a kisebb egy ilyen (teljes) rendezés szerint. Egy ilyen leképezés azért lesz Borel, mert egy $B \subseteq X$ Borel-halmaz őősképe a $(B \times X) \cap R$ Borel-halmaz.

1.3. Definíció (Borel-gráf)**.** *Legyen X Borel-tér. $G \subseteq X \times X$ Borel-halmazt irányított Borel-gráfnak nevezzük, ha $\forall x \in X$-re $(x,x) \notin G$. Ha $(x,y) \in G$, akkor az élre $x \to y$ irányítással gondolunk.*
Ha emellett $\forall x, y \in X$-re ha $(x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$ teljesül, akkor G-t (irányítatlan) Borel-gráfnak nevezzük. Az X alaphalmazt a gráf csúcshalmazának, a G halmazt pedig az élhalmazának nevezzük.

Tehát, ha csak annyit mondunk, hogy Borel-gráf, azalatt automatikusan az irányítatlan esetet értjük. Világos, hogy ha egy irányított Borel-gráf éleit irányítatlanra cseréljük, a kapott gráf Borel-gráf lesz, hiszen ha $G \subseteq X^2$ Borel, akkor $G \cup \{(y,x) : (x,y) \in G\}$ is az.

A G gráf csúcshalmazát $V(G)$-vel jelöljük. Ha azt mondjuk, hogy G gráf X-en, akkor a csúcshalmazt X-nek neveztük el. Mivel egy gráf élhalmazára tekinthetünk a csúcsokon értelmezett kétváltozós relációként, így $(x,y) \in G$ jelölés helyett az xGy jelölést is használjuk.

1.4. Definíció (E_G)**.** *A G gráf csúcsain az "azonos összefüggőségi komponensben lenni" reláció egy ekvivalenciareláció, melyet E_G-vel jelölünk. Azaz x,y csúcsokra xE_Gy pontosan akkor, ha létezik x-et és y-t összekötő út G-ben.*

Az alábbiakban gráfelméleti fogalmakat definiálunk mértékelméletből és leíró halmazelméletből ismert szempontok szerint, Borel-gráfokra.

1.5. Definíció (Jólszínezés)**.** *G Borel-gráf X-en. A $c : X \to Y$ leképezés a gráf jólszínezése, ha $(x_1,x_2) \in G$ esetén $c(x_1) \neq c(x_2)$.*

Azaz színezés szempontjából mindegy, hogy a gráf irányított vagy irányítatlan.

1.6. Definíció (Független halmaz)**.** *G Borel-gráf X-en. $Y \subseteq X$ független halmaz, ha $x,y \in Y$ esetén $(x,y) \notin G$.*

Egy jólszínezés színosztályai független halmazt alkotnak.

A klasszikus gráfelméletből ismert kromatikus számot háromféleképpen általánosítjuk, három különböző tulajdonság szerint. Mindhárom tulajdonság olyan, mellyel a valamilyen szempont szerint szép, jól kezelhető halmazokat jellemezzük.

1.7. Definíció (Borel-színezés)**.** *A G Borel-gráf $c : X \to Y$ jólszínezése Borel-színezés, ha Y is Borel-tér, és c Borel-mérhető függvény.*

Ha Y megszámlálható, és a diszkrét topológiát vesszük rajta, akkor ez éppen azt jelenti, hogy minden színosztály Borel, azaz $\forall y \in Y$-ra $c^{-1}(y) \subseteq X$ Borel. A továbbiakban megszámlálható tereken mindig a diszkrét topológiát vesszük.

1.8. Definíció (Borel-kromatikus szám)**.** *A G Borel-gráf Borel-kromatikus száma az a legkisebb α számosság, melyre létezik G-nek $c : X \to Y$ Borel-színezése, ahol $|Y| = \alpha$. Jele: $\chi_B(G)$*

1.9. Megjegyzés. Emlékeztetőül, egy X lengyel tér $A \subseteq X$ részhalmaza Baire-mérhető, ha valamely nyílt halmazzal vett szimmetrikus differenciája első kategóriájú.

1.10. Definíció (Baire-mérhető kromatikus szám)**.** *G Borel gráf az X* ***lengyel*** *téren. A G Baire-mérhető kromatikus száma az a legkisebb α számosság, melyre létezik G-nek $c : X \to Y$ Baire-mérhető színezése, ahol $|Y| = \alpha$. Jele: $\chi_{BM}(G)$*

1.11. Definíció (Mérhető kromatikus szám)**.** *(X,μ) mértéktér, G Borel-gráf X-en. A G gráf μ-mérhető kromatikus száma az a legkisebb α számosság, melyre létezik G-nek $c : X \to Y$ μ-mérhető színezése, ahol $|Y| = \alpha$. Jele: $\chi_\mu(G)$*

1.2. Kromatikus számok tulajdonságai

1.12. Állítás. *Minden G Borel-gráfra és μ Borel-mértékre X lengyel téren $\chi_B(G) \geq \chi_{BM}(G)$ és $\chi_B(G) \geq \chi_\mu(G)$.*

Bizonyítás. Minden mérhető és Baire-mérhető halmaz Borel.

1.13. Definíció (Lokálisan véges / megszámlálható gráf)**.** *A G gráf lokálisan véges / megszámlálható, ha minden csúcs fokszáma véges / megszámlálható.*

A következő példában alaposabban megvizsgálunk egy Borel-gráfot, amely mutatja, hogy a kombinatorikában alapvető tények nem feltétlenül vihetők át Borel-gráfokra.

1.14. Definíció. *Az $X = [0,1)$ lengyel téren valamely $\alpha \in \mathbb{R}$* ***irracionális*** *számra jelölje $T_\alpha : X \to X$ a következő leképezést: $T_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$. Jelölje G_α azt a gráfot X-en, melyben*
(x,y) él $\Leftrightarrow x = T_\alpha(y)$ vagy $y = T_\alpha(x)$.

Ekkor G_α valójában a T_α és a $T_{-\alpha}$ függvénygrafikonok uniója. Könnyen látható, hogy mivel α irracionális, G_α egy 2-reguláris, aciklikus gráf.

Bár kombinatorikus szemmel adandó elvárás lenne, hogy egy körmentes gráf kromatikus száma 2 legyen, azonban G_α mutatja, hogy a Borelség van annyira erős elvárás, hogy Borel-kromatikus számra ez ne legyen igaz.

1.15. Állítás. $\chi_B(G_\alpha) = 3$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\chi_B(G) > 2$. Indirekt tegyük fel, hogy G_α-t két színnel (piros, kék) jólszíneztük Borel módon. Feltehető, hogy a piros színosztály nem nullmértékű. A Lebesgue-féle sűrűségi tétel szerint létezik a piros színosztálynak sűrűségi pontja, így olyan I intervallum is $[0,1)$-ben, melynek $> 2/3$-ad része piros. Belátjuk, hogy $T_\alpha^{2n}(x)$ sűrű $[0,1)$-ben.

1.16. Lemma. $\{T_\alpha^{2n}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ *sűrű* $[0,1)$*-ben.*

Bizonyítás. Legyen $E = \{T_\alpha^{2n}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ az x pont pályája. Világos, hogy ez T_α-invariáns, azaz $T_\alpha(E) = E$, így $U := [0,1) \setminus E$ is. Ha E nem sűrű, akkor U-ban létezik leghosszabb, nem elfajuló J intervallum. J-ről megállapíthatjuk, hogy $J \cap T_\alpha^{2n}(J) = \emptyset$, mivel T_α-nak nincs periodikus pontja, így $J = T_\alpha^{2n}(J)$ nem lehetséges, ha pedig csak részben lógna egymásba J és $T_\alpha^{2n}(J)$, akkor nem J lenne a leghosszabb intervallum U-ban. Mivel J hossza nem nulla, ezért $T_\alpha^{2n}(J)$-k egyforma, pozitív Lebesgue-mértékű, diszjunkt intervallumok egy véges mértékű intervallumon, ami ellentmondás. Így E sűrű $[0,1)$-ben. □

Emiatt létezik I-nek páratlanadik elforgatottja, melyre $\lambda(T_\alpha^{2n+1}(I) \cap I) > 2/3$. Mivel $T_\alpha^{2n+1}(I)$ $> 2/3$-ad része kék, így a metszetükre egyszerre kell teljesülnie, hogy több mint fele piros, és hogy több mint fele kék. Ez ellentmondás, azaz $\chi_B(G_\alpha) > 2$.

1.17. Állítás. $\chi_B(G_\alpha) \leq 3$.

Bizonyítás. Most pedig kiszínezzük G_α-t 3 színnel. Legyen I egy $|\alpha|$-nál rövidebb nemüres intervallum $[0,1)$-ben. Ekkor I elemei függetlenek – színezzük őket pirosra. Minden $x \in [0,1) \setminus I$ elemre jelölje $n(x)$ azt a legkisebb n pozitív egész számot, melyre $T_\alpha^{(n)}(x) \in I$. $x \in [0,1) \setminus I$ csúcs színe legyen kék, ha $n(x)$ páros, és zöld, ha páratlan. Az így keletkezett kék és zöld színosztály is független, hiszen szomszédos, nem I-beli csúcsok $n(x)$-értéke 1-gyel tér el egymástól. A kék és a zöld színosztály is Borel, hiszen $p(x) := n(x) \mod 2$ függvény Borel. □

Tehát $\chi_B(G_\alpha)$ pontosan 3. □

1.18. Megjegyzés. Valójában azt is beláttuk, hogy $\chi_B(G_\alpha) = \chi_\lambda(G_\alpha) = 3$.

A későbbiekben olyan Borel-gráfra is látunk majd példát, mely körmentes, és a Borel-kromatikus száma nem megszámlálható.

1.3. Teljes párosítás

Ahogyan a klasszikus kombinatorikában, úgy itt is definiálhatjuk a párosítások, és a teljes párosítás fogalmát. Mivel a definíciók analóg módon keletkeztek, így csak a számunkra szükségeset mondjuk ki precízen.

1.19. Definíció (Borel teljes párosítás)**.** *G Borel-gráf X lengyel téren. $M \subseteq G$ Borel teljes párosítás, ha M irányítatlan Borel-gráf, és M-ben minden csúcsra pontosan egy él illeszkedik, azaz $\forall x \in X$-re $|M_x| = 1$.*

Véges gráfok esetén ismert tény, hogy 2-reguláris páros gráfokban van teljes párosítás. Ez a Hall-tétel speciális esete. Bár G_α is körmentes és 2-reguláris, Borel-kontextusban mégsem lesz benne teljes párosítás.

1.20. Állítás. *G_α-ban nincs Borel teljes párosítás.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van: $M \subseteq X \times X$. Belátjuk ennek segítségével, hogy G_α 2-színezhető Borel-módon, ami ellentmondás. Vegyünk G_α-n az élek azon irányítását, mely $y = T_\alpha(x)$ esetén x-ből y-ba mutat. Így a gráfunk diszjunkt, irányított utakból áll. $M' \subseteq M$ legyen az így keletkezett (x,y) irányított párosításélek halmaza. Vegyük az M'-beli irányított párosításélek kiinduló csúcsait: $M_1 := \{x : (x, T_\alpha(x)) \in M'\}$. Ez Borel. M_1 pontjait színezzük kékre, $M_2 := X \setminus M_1$ halmazt pedig pirosra. Ez egy Borel 2-színezése X-nek, ami ellentmondás. □

Valójában ugyanezen érvelés azt is mutatja, hogy mérhető teljes párosítás sincs. Tehát a Hall-tétel mérhető és Borel-kontextusban nem működik. Érdekes viszont, hogy mind Baire-kategória, mind mérhetőség szempontjából vizsgálva a párosításokat, van valamilyen analógja a Hall-tételnek [13]. Utóbbi a Lyons-Nazarov tétel, mely nem ad mérhető teljes párosítást a teljes alaptéren, viszont ad a mérték szerint majdnem minden csúcsot fedő Borel-párosítást.

1.21. Definíció. *Legyen $G \subseteq X^2$ lokálisan megszámlálható Borel gráf az X sztenderd Borel téren, μ pedig egy valószínűségi mérték X-en. A G gráfot μ-mértéktartónak nevezzük, ha bárhogyan is állítjuk elő $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$ Borel-involúciók grafikonjainak uniójaként, minden T_n-re teljesül, hogy μ-mértéktartó.*

Később látni fogjuk, hogy egy ilyen gráf mindig előállítható Borel-grafikonok uniójaként.

1.22. Definíció. *Legyen μ valószínűségi mérték X-en, $G \subseteq X^2$ lokálisan megszámlálható Borel-gráf. G szigorúan bővülő, ha $\exists c > 1$, hogy $\forall A \subseteq X$ független Borel-halmazra $\mu(N(A)) \geq c \cdot \mu(A)$, ahol $N(A)$ az A-beli csúcsokkal szomszédos csúcsok halmazát jelöli.*

1.23. Tétel (Lyons-Nazarov [16])**.** *Legyen $G \subseteq X^2$ lokálisan megszámlálható, páros, μ-mértéktartó és szigorúan bővülő Borel-gráf. Ekkor X egy teljes mértékű részén van Borel teljes párosítás.*

1.4. Schreier-gráfok

A Borel-gráfok egy speciális típusát alkotják azok a gráfok, melyeknek csúcshalmaza egy lengyel tér, az éleket pedig egy megszámlálható csoport Borel-hatása határozza meg.

1.24. Definíció (Borel-hatás)**.** *Legyen Γ megszámlálható csoport a diszkrét topológiával, X pedig Borel-tér. A $H : \Gamma \times X \to X$ csoporthatás Borel-hatás, ha H Borel.*

1.25. Definíció (Schreier-gráf)**.** *$S \subseteq \Gamma$ a Γ csoport egy generátorrendszere. A $H : \Gamma \times X \to X$ Borel-hatás Schreier-gráfja (vagy hatásgráfja) az a G_H gráf, melynek csúcshalmaza X, az élei pedig pontosan azok az (x,y), $x \neq y$ párok, melyekre $\exists s \in S:\ H(s,x) = y$ vagy $H(s,y) = x$.*

A hatást gyakran jelöljük H helyett $\cdot$ jellel. Ilyenkor $H(s,x)$ helyett $s \cdot x$-et írunk.

1.26. Definíció (Cayley-gráf)**.** *A Γ megszámlálható csoport Cayley gráfja Γ-n az a Schreier-gráf valamely $S \subseteq \Gamma$ generátorrendszerre nézve, melyet a balról szorzás mint Borel-hatás határoz meg.*

1.27. Megjegyzés. A G_α gráf is Schreier-gráf, ugyanis a $\mathbb{Z}$ csoportnak Borel-hatása a $[0,1)$-en $H(n,x) = x + n \cdot \alpha \mod 1$.

1.28. Megjegyzés. Minden Schreier-gráf egy lokálisan megszámlálható Borel-gráf.

1.29. Megjegyzés. Egy G Schreier-gráfhoz tartozó E_G ekvivalenciareláció éppen a hatás orbit-ekvivalenciarelációja.

1.30. Definíció (Bal shift)**.** *Legyen* Γ *megszámlálható csoport, X lengyel tér. A bal shift a következő* $\Gamma \curvearrowright X^\Gamma$ *hatás:* $(\gamma \cdot \underline{x})(\delta) := \underline{x} \cdot (\gamma^{-1} \cdot \delta)$*. Azaz a hatás a* $(\gamma, \underline{x})$ *párhoz, ahol* $\underline{x} : \Gamma \to X$ *leképezés, az* $\underline{y}(\delta) := \underline{x}(\gamma^{-1} \cdot \delta)$ *leképezést rendeli.*

A Schreier-gráf összefüggőségi komponensei nem feltétlenül izomorfak a generáló csoport Cayley-gráfjával. Vegyük például a $\mathbb{Z} \curvearrowright 2^{\mathbb{Z}}$ bal-shift hatást. A $\mathbb{Z}$ Cayley-gráfja $S = \{-1, 1\}$ generátorrendszerrel egy mindkét irányba végtelen út. A Schreier-gráf csúcsai mindkét irányba végtelen $0-1$ sorozatok. Ha egy sorozat nem periodikus, akkor az összefüggőségi komponense izomorf a Cayley-gráffal. Ha viszont periodikus, akkor az összefüggőségi komponens véges, és legalább három csúcs esetén kör: például a ...001001... komponense egy C_3. Tehát ilyen csúcsokon a hatás nem szabad. Ez motiválja a következő definíciót.

1.31. Definíció (Hatás szabad része)**.** *A* $\Gamma \curvearrowright X$ *hatás szabad része*
SZAB($\Gamma \curvearrowright X$*)* $= \{x : \forall \gamma \in \Gamma (\gamma \cdot x = x \to \gamma = 1)\}$

A hatás szabad részén már igaz, hogy a Schreier-gráf összefüggőségi komponensei izomorfak a generáló csoport Cayley-gráfjával.

Azzal, ha a Schreier-gráfunkat megszorítjuk a hatás szabad részére, néha nem vesztünk sokat. Erre példa a következő.

1.32. Definíció. *Legyen* $\{0;1\}$ *téren* ν *a következő valószínűségi mérték:* $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \frac{1}{2}$*. A* $\{0;1\}^\Gamma$ *szorzattéren, ahol* Γ *megszámlálható, legyen* $\mu = \prod_{\gamma \in \Gamma} \nu_\gamma$ *a szorzatmérték. Ezt érmefeldobás-mértéknek is nevezik.*

1.33. Állítás. Γ *megszámlálhatóan végtelen csoport, ami hat* $\{0;1\}^\Gamma$*-n a bal shifttel. Ekkor SZAB(*$\Gamma \curvearrowright \{0;1\}^\Gamma$*) reziduális és 1-mértékű a* μ *érmefeldobás-mérték szerint.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg, hogy az $X = \{0, 1\}^\Gamma$ tér mely elemei nincsenek benne a szabad részben. Ezek azok, amiket nem csak az egységelem visz önmagába, azaz $\exists \gamma \in \Gamma$, ami $\neq 1$, és $\forall \delta_i \in \Gamma$-ra $\gamma \cdot \delta_i$ és δ_i helyen, sőt, $\forall n$-re $\gamma^n \cdot \delta_i$ helyen is azonos koordináta (0 vagy 1) van. Nevezzük ezeket X periodikus elemeinek.
A nem periodikus elemek halmaza reziduális. Ehhez elég belátni, hogy $\forall \gamma \in \Gamma$-ra a γ szerint periodikus elemek halmaza sehol sem sűrű: itt használjuk ki, hogy Γ megszámlálható. Legyen

ehhez U egy tetszőleges bázisnyílt X-ben, azaz olyan elemek halmaza, amik megadott véges sok koordinátában rögzítettek, a többiben bármit felvehetnek. Ekkor létezik olyan $\delta \in \Gamma$ nem rögzített koordináta, melyre $\gamma \cdot \delta$ sem rögzített. Vegyük azt a $V \subset U$ bázisnyíltat, amit úgy kapunk, hogy az U-ban rögzített koordináták mellett még δ és $\gamma \cdot \delta$ koordinátákat is rögzítjük, egymással ellentétesre. Ekkor V-ben biztos nincsenek γ szerint periodikus elemek, ezzel a sehol sem sűrűséget, ezáltal a szabad rész reziduálisságát beláttuk.

Az 1-mértékűséghez elég belátni, hogy a periodikus elemek halmaza nullmértékű, amihez elég a megszámlálhatóság miatt, hogy a γ szerint periodikus elemek nullmértékűek tetszőleges $\gamma \in \Gamma$-ra. Egy ilyen halmaz mértékére gondolhatunk úgy, hogy ha ”sorsolunk” egy elemet az alaptérből úgy, hogy minden koordinátát egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választunk, akkor mekkora valószínűséggel kapunk a halmazunkból elemet. Ha γ végtelen rendű, akkor ez világos: amint megvan, hogy az egységelemhez 0 vagy 1 tartozik, onnantól az összes γ-hatványhoz tartozó koordináta már csak ugyanolyan lehet, tehát odaérve felezi az addigi valószínűséget. Ha γ véges rendű, akkor pedig létezik végtelen sok $\delta_1, \delta_2, \ldots$ koordináta, melyekre $\gamma \cdot \delta_1, \gamma \cdot \delta_2, \ldots$ mind különböznek δ_i-ktől, így δ_i és $\gamma \cdot \delta_i$ közül amelyikhez később érünk a ”sorsolásban”, ott feleződik az addigi valószínűség. $\square$

1.5. A $\mathbb{G}_0$ gráf

Az alábbi példában a $2^{\mathbb{N}}$ téren szeretnénk definiálni egy olyan gráfot, melynek nem véges, sőt, nem is megszámlálható a Borel-kromatikus száma.

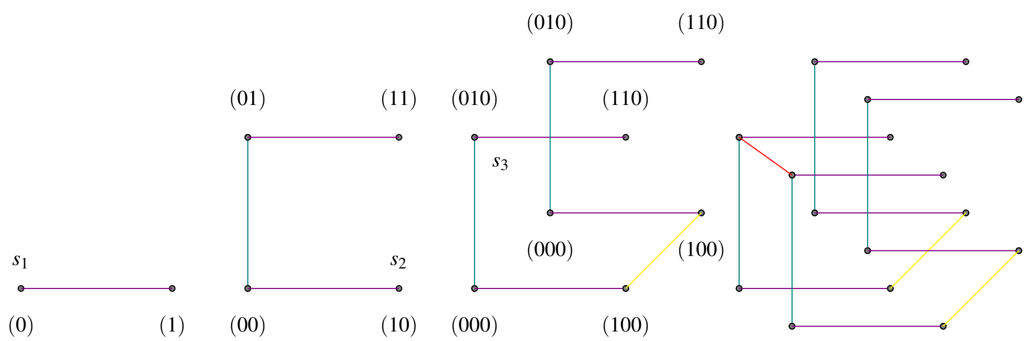
A ˆ jel a konkatenáció, azaz ”egymás után írás” műveletét jelöli.

1.34. Definíció ($\mathbb{G}_0$, [14])**.** *Minden $n \in \mathbb{N}$-re fixáljunk egy $s_n \in 2^n$ elemet, úgy, hogy bármely $t \in 2^{<\mathbb{N}}$ vektorra $\exists n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $s_n = t\hat{\ }v$ valamely $v \in 2^{<\mathbb{N}}$-re. Az $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz tartozó $\mathbb{G}_0$ gráf csúcshalmaza $2^{\mathbb{N}}$, és (x,y) pontosan akkor él, ha $x = s_n\hat{\ }(i)\hat{\ }r$ és $y = s_n\hat{\ }(1-i)\hat{\ }r$ valamely $n \in \mathbb{N}$, $i \in 2$, $r \in 2^{\mathbb{N}}$-re.*

Ugyan $\mathbb{G}_0$ definíciója függ az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat megválasztásától, a számunkra releváns tulajdonságok szempontjából bármely, a fenti tulajdonságokkal megválasztott $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ugyanolyan gráfot ad meg. Így – kicsit pontatlanul – $\mathbb{G}_0$ gráfként hivatkozunk majd mindegyikre.

Bár a definíció kicsit átláthatatlannak tűnhet, az alábbi konstrukción keresztül megérthetjük, hogyan érdemes gondolni erre a gráfra.

Legyen G_0 egy egy csúcsból álló gráf, üres címkével. Legyen G_1 egy 0 és egy 1 címkével rendelkező csúcs összekötve egy éllel. G_2 legyen az a gráf, melyhez G_1 két példányát egymás mellé rakjuk: az egyik a 00 és 10 csúcs a köztük futó éllel, a másik 01 és 11 a köztük futó éllel. Tehát a csúcsok címkéinek második koordinátája jelöli, hogy ő hanyadik másolata G_1-nek. Az egymásnak megfelelő két csúcspár közül kiválasztjuk az egyiket, és összekötjük őket: például az ábrán 00-t 10-val.



1. ábra. $\mathbb{G}_0$ konstrukciója

A G_3 gráfot a G_2 két példányában egy tetszőleges, egymásnak megfelelő csúcspár összekötésével kapjuk, és így tovább. A kapott gráfsorozatból készítünk egy **G** gráfot, melynek csúcshalmaza $2^{\mathbb{N}}$. Így minden csúcs egy 0-1 sorozat, amire gondolhatunk úgy is, mint egy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_n \in V(G_n)$ csúcssorozat. Él pedig azon $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csúcsok közt fusson, melyekhez $\exists N : \forall n \geq N$-re $(u_n, v_n) \in G_n$. Ily módon a kapott gráf akár egy végtelen út is lehet, de mi egy nagy Borel-kromatikus számmal rendelkező gráfot szeretnénk. Így ügyesen kell megválasztani, hogy G_{n+1} készítésekor a G_n mely csúcsának két példányát kötjük össze. Jelölje a választott csúcs címkéjét s_n. Figyeljük meg, hogy ha az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot olyan feltételek mellett választjuk meg, ahogy azt a $\mathbb{G}_0$ definíciójában tettük, akkor az ily módon definiált **G** gráf éppen a $\mathbb{G}_0$ lesz.

Ezt a konstrukciót általánosítja az inverzlimesz fogalma.

1.35. Definíció (Inverzlimesz)**.** *Legyen* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *véges gráfok egy sorozata,* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pedig* φ_n :

$V(G_{n+1}) \to V(G_n)$ függvények egy sorozata. A (G_n, φ_n) sorozat inverzlimesze egy gráf az

$$\{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} V(G_n) : \forall n\ \varphi_n(x(n+1)) = x(n)\}$$

téren. (x,y) él $\Leftrightarrow \exists n : \forall m \geq n$-re $(x(m), y(m)) \in G_m$.

A $\mathbb{G}_0$ gráf alaposabb megértéséhez ismerjük meg a következő, a $2^{\mathbb{N}}$ téren viszonylag természetes ekvivalenciarelációt.

1.36. Definíció ($\mathbb{E}_0$)**.** *$x\mathbb{E}_0 y \Leftrightarrow \exists N : \forall k \geq N$-re $x(k) = y(k)$, azaz x és y pontosan akkor állnak relációban egymással, ha csak véges sok koordinátájukban térnek el egymástól.*

1.37. Állítás. *$E_{\mathbb{G}_0} = \mathbb{E}_0$ az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat választásától függetlenül.*

Bizonyítás. Az $xE_{\mathbb{G}_0}y \Rightarrow x\mathbb{E}_0 y$ irány nyilvánvaló: ha x és y közt vezet egy k darab élből álló út a $\mathbb{G}_0$ gráfban, akkor legfeljebb k darab koordinátájukban térnek el egymástól.
A másik irány $x\mathbb{E}_0 y \Rightarrow xE_{\mathbb{G}_0}y$. Ezt indukcióval fogjuk igazolni: x-ből (és hasonlóan y-ból is) vezet út $\mathbb{G}_0$-ban abba az $s_{n,x}$ csúcsba, melyet úgy kapunk, hogy az x első n koordinátáját s_n-re cseréljük. $n = 0$-ra ez nyilvánvaló. Ha n-ig igaz, akkor $(n+1)$-re is: x-ből eljutunk $s_{n,x}$-be, onnan az $(n+1)$-edik koordinátát $s_{n+1}(n+1)$-re állítjuk, majd indukcióval az első n koordinátát $s'_n = (s_{n+1})|_n$ jegyeire cseréljük.

1.38. Állítás. *$\mathbb{G}_0$ aciklikus.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van benne kör. A kör csúcsai egy komponensben vannak, így csak véges sok koordinátájukban térnek el egymástól: legyen a legnagyobb ilyen az n-edik. Mivel két szomszédos csúcs csak egyetlen koordinátában különbözhet, minden élre ráírhatjuk, hányadik koordinátát változtatja. Minden szám páros sok élen fordul elő, így speciálisan n legalább két élre van ráírva. Azonban minden csúcs az $(n+1)$-edik koordinátájától kezdve megegyezik, így legalább három olyan csúcs van a körben, ami $s_{n-1}\hat{}(i)\hat{}r$ alakú valamely $i \in 2$-re és fix $r \in 2^{\mathbb{N}}$-re. Tehát a körben legalább egy csúcs többször szerepel, ami ellentmondás. $\square$

1.39. Megfigyelés. A $\mathbb{G}_0$ aciklikussága az inverzlimeszes konstrukciójából is könnyen látható: mivel minden G_n körmentes, így az inverzlimeszük is.

A $\mathbb{G}_0$ körmentessége rossz hírnek tűnhet, ha végesnél nagyobb kromatikus számmal rendelkező gráfot szeretnénk készíteni. Az alábbi állítás ennek fényében megnyugtató, és még érdekesebbé teszi a körmentesség tényét.

1.40. Állítás. $\chi_B(\mathbb{G}_0) > \aleph_0$

Bizonyítás. Valójában ennél erősebbet látunk be: $\chi_{BM}(\mathbb{G}_0) > \aleph_0$. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathbb{G}_0$-t ki tudtuk színezni megszámlálhatóan sok színnel. Belátjuk, hogy ha $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{G}_0$-független, Baire-mérhető halmaz, akkor első kategóriájú. Ez ellentmondásra vezet, mert eszerint a megszámlálható sok színosztály uniója is első kategóriájú lenne.
Indirekt tegyük fel, hogy az A független halmaz második kategóriájú. $t \in 2^{<\mathbb{N}}$-re jelölje N_t azt a bázisnyíltat, mely elemeinek az első $|t|$ koordinátája t-nek van rögzítve. Mivel A Baire-mérhető, létezik N_t bázisnyílt, melyre $N_t \setminus A$ már első kategóriájú. Mivel t-hez $\exists s_n$, melynek t prefixe, így $N_{s_n} \setminus A$ is első kategóriájú. Jelölje $\varphi_k : N_{s_n} \to N_{s_n}$ azt a homeomorfizmust, mely a k-adik koordinátát ellentétesre változtatja. Mivel $A \cap N_{s_n}$ második kategóriájú, így φ_{n+1} nem képezheti őt az $N_{s_n} \setminus A$ első kategóriájú halmazba, így $\varphi_{n+1}(A \cap N_{s_n}) \cap A \neq \emptyset$. Ez pedig azt jelenti, hogy A nem független halmaz, ami ellentmondás. $\square$

1.41. Tétel (Miller [19])**.** $\chi_\lambda(\mathbb{G}_0) = 3$.

Tehát a $\mathbb{G}_0$ gráf olyan Borel-gráf, mely aciklikus, ám a Borel-kromatikus száma a várt 2-vel szemben még csak nem is megszámlálható. Emellett a mérhető kromatikus száma se nem 2, se nem óriási, hanem 3. Összességében a $\mathbb{G}_0$ egy ékes példája annak, hogy a Borel-kombinatorika tartogat gyönyörű kiszámíthatatlanságokat a klasszikus kombinatorikához képest, és a különböző kromatikus számok definiálásának is megvan a létjogosultsága.

További fontos és szép tétel vele kapcsolatban az alábbi.

1.42. Definíció. *Legyenek X,Y sztenderd Borel-terek, $G \subseteq X^2$, $H \subseteq Y^2$ Borel-gráfok. Ekkor $G \leq_B H$, ha létezik Borel $f : X \to Y$ leképezés, melyre $(x,y) \in G \Rightarrow (f(x), f(y)) \in H$ teljesül.*

1.43. Tétel ($\mathbb{G}_0$-dichotómia [14])**.** *Legyen X lengyel tér, $G \subseteq X^2$ Borel-gráf. Ekkor az alábbiakból pontosan egy teljesül:* *1.)* $\chi_B(G) \leq \aleph_0$ *2.)* $\mathbb{G}_0 \leq_B G$

1.6. A Luzin-Novikov tétel

Ahogy G_α gráf éleit fel tudtuk írni két függvénygrafikon uniójaként, úgy $\mathbb{G}_0$ élhalmaza is felírható megszámlálhatóan végtelen grafikon uniójaként: $\mathbb{G}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{graph}(\varphi_n)$. Ez nyilvánvalóan nem igaz minden Borel-gráfra, gondoljunk csak egy teljes gráfra $2^{\mathbb{N}}$-en.

Az alábbi tétel elégséges feltételt ad arra, mikor írható fel egy Borel-gráf megszámlálhatóan sok függvénygrafikon uniójaként. A tétel alapvető fontosságú a Borel-kombinatorikában, emellett jól használható annak belátására, hogy egy halmaz Borel.

1.44. Tétel (Luzin-Novikov)**.** *Legyen X,Y lengyel tér, $G \subseteq X\times Y$ Borel-halmaz, és $\forall x\in X$-re $|G_x| \leq \aleph_0$ teljesüljön, ahol G_x a G x-szekcióját jelöli. Ekkor $\exists f_n : A_n \to Y$ parciális Borel-függvények sorozata $\forall n\in\mathbb{N}$-re, ahol $\forall A_n\subseteq X$, és $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} graph(f_n)$.*

Borel-gráfokra nézve a feltétel azt mondja ki, hogy a gráf legyen lokálisan megszámlálható. A tétel Kechris: Descriptive Set Theory c. könyvéből [12] ismert bizonyítása analitikus halmazokat használ. Forte Shinko adott egy olyan bizonyítást [22], mely ennél elemibb, az alábbiakban ezt mutatom be. A bizonyításhoz a tétel egy másik alakját fogjuk használni.

1.45. Tétel (Luzin-Novikov, 2. alak)**.** *Legyen $f: X\to Y$ folytonos leképezés, X, Y lengyel terek. Ekkor az alábbiak közül pontosan az egyik teljesül:*

1) *X-nek létezik megszámlálható $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Borel-fedése úgy, hogy $\forall n$-re $f|_{B_n}$ injektív.*

2) *Valamely $y\in Y$ elemre $f^{-1}(y)$ tartalmaz Cantor-halmazt.*

1.46. Megjegyzés. A tétel 2. alakjából következik az első.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2. alakot $p: G\to X$ vetítésre. Ez egy folytonos leképezés két lengyel tér közt, mivel G is Borel: tetszőleges B Borel-halmazhoz megadható olyan (finomabb) lengyel topológia az alaptéren, amivel ő lengyel, és a Borel-halmazok családja a finomítás során nem változik. (Ez a [12] könyvben a 13.1 tétel.) Ha 2) teljesülne, akkor valamely $x\in X$-re G_x tartalmazna Cantor-halmazt, így nem lenne megszámlálható. Tehát $G\subseteq X\times Y$ lengyel térnek létezik $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Borel-fedése úgy, hogy $\forall n$-re $p|_{B_n}$ injektív. Az injektivitás itt éppen azt jelenti, hogy

$\forall x \in X$-hez legfeljebb egy G-beli elem tartozik, azaz $(p|_{B_n})^{-1}$ egy $f_n : p(B_n) \to Y$, $p(B_n) \subseteq X$ Borel-leképezés grafikonja ([12] 14.12). $\square$

Bizonyítás (Forte Shinko). Vegyük azon $A \subseteq X$ Borel-részhalmazait X-nek, melyekre $f|_A$ injektív, és legyen az általuk generált σ-algebra $\mathscr{I}$. Jelölje $\mathbb{M}$ az összes olyan család osztályát, melyek mindegyike véges sok diszjunkt, zárt X-részhalmazból áll. Egy $\mathscr{F} \in \mathbb{M}$ családot nevezzünk *aprónak*, ha létezik $Y = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} B_F$ Borel-fedése Y-nak, hogy a család minden F tagjára

$$F \cap f^{-1}(B_F) \in \mathscr{I}.$$

Vegyük észre, hogy egy egyelemű $\{F\}$ család pontosan akkor apró, ha $F \in \mathscr{I}$.

Tegyük fel, hogy $1)$ nem teljesül. Ebből következik, hogy az $\{X\}$ egyelemű család nem apró. A terv, hogy ebből a családból kiindulva rekurzívan készítünk újabb és újabb nem apró családokat. Az egyes családok tagjainak uniói Cantor-sémát fognak alkotni, azaz a metszetük egy Cantor halmaz lesz. Továbbá az egyes családok tagjainak uniójának képe mindig egyre kisebb átmérővel fog rendelkezni, így a kapott Cantor-halmaz valóban egy $y \in Y$ pont ősképe lesz. A terv végrehajtásához szükségünk van néhány lemmára. Vezessük be az $(A)^2 := \{(x,x') \in A^2 : x \neq x'\}$ jelölést tetszőleges A halmazra. A $\sqcup$ jel a diszjunkt unió jele.

1.47. Lemma. *Legyen $\mathscr{F} \sqcup \{U\} \in \mathbb{M}$ valamely $U \subseteq X$ halmazra, és tegyük fel, hogy $(U)^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \times W_n$, ahol a V_n, W_n halmazokra teljesül, hogy $\mathscr{F} \sqcup \{V_n, W_n\}$ apró $\forall n$-re. Ekkor $\mathscr{F} \sqcup \{U\}$ is apró.*

Bizonyítás. Az $\mathscr{F} \sqcup \{V_n; W_n\}$ család apróságát tanúsítsa $(B_F)_{F \in \mathscr{F}} \cup \{B_{v_n}; B_{W_n}\}$ fedés minden n-re. Feltehető ugyanis, hogy minden n esetén $F \in \mathscr{F}$-hez ugyanaz a B_F tartozik, mivel ha nem így lenne, B_F^n-eket helyettesíthetnénk az uniójukkal: $B_F := \bigcup_n B_F^n$. Feltehető továbbá a halmazok diszjunktizálásával, hogy minden fedés egy partíciója is egyben Y-nak. Legyen $B_U = Y \setminus \bigsqcup_{F \in \mathscr{F}} B_F$. Vegyük észre, hogy $\forall n$-re $B_U = B_{V_n} \sqcup B_{W_n}$. Megmutatjuk, hogy a B_F-ekkel együtt ez tanúsítja $\mathscr{F} \cup \{U\}$ család apróságát.

Azt kell belátnunk, hogy $U \cap f^{-1}(B_U) \in \mathscr{I}$, amihez elég belátni, hogy

$$L := U \cap f^{-1}(B_U) \setminus \left(\bigcup_n (V_n \cap f^{-1}(B_{V_n})) \sqcup (W_n \cap f^{-1}(B_{W_n})) \right)$$

halmazon f injektív. Ez azért van így, mert $\mathscr{I}$ egy σ-algebra. Legyen tehát $x_V, x_W \in U \cap f^{-1}(B_U)$ két különböző elem. Szeretnénk belátni, hogy ha $x_V, x_W \in L$, akkor $f(x_V) \neq f(x_W)$. Mivel $(x_V, x_W) \in (U)^2$, így $\exists n$, amire $x_V \in V_n$, $x_W \in W_n$. Tegyük fel, hogy $f(x_V) = f(x_W)$. Mivel x_V és x_W választása szerint $f(x_V) = f(x_W) \in B_U$, így $f(x_V) \in B_{V_n}$, vagy $f(x_W) \in B_{W_n}$. Tehát $x_V \in V_n \cap f^{-1}(B_{V_n})$, vagy $x_W \in W_n \cap f^{-1}(B_{W_n})$. Így $x_V \notin L$ vagy $x_W \notin L$, és ezt szerettük volna. $\square$

1.48. Lemma. *Legyen $\mathscr{F} \in \mathbb{M}$, és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az Y egy Borel-fedése úgy, hogy $(F \cap f^{-1}(A_n))_{F\in\mathscr{F}}$ család apró. Ekkor $\mathscr{F}$ apró.*

Bizonyítás. Fix $n \in \mathbb{N}$-re tanúsítsa $(F \cap f^{-1}(A_n))_{F\in\mathscr{F}}$ család apróságát az Y tér $(B^n_F)_{F\in\mathscr{F}}$ fedése. Legyen $B_F = \bigcup_n (A_n \cap B^n_F)$ minden $F \in \mathscr{F}$-re. Az így kapott $(B_F)_{F\in\mathscr{F}}$ fedés tanúsítja, hogy $\mathscr{F}$ család apró. $\square$

1.49. Megfigyelés. Adott $\varepsilon > 0$, X lengyel tér, és egy $D \subseteq X$ zárt halmaz. Ekkor $(U)^2$ felírható $(U)^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \times W_n$ alakban, ahol V_n, W_n zárt halmazok $\forall n$-re, melyek átmérője $\leq \varepsilon$.

1.50. Megfigyelés. Adott $\varepsilon > 0$ mellett Y lengyel tér felírható $\leq \varepsilon$ átmérőjű zárt halmazok megszámlálható uniójaként.

Az $\{X\}$ családból kiindulva rekurzívan fogjuk elkészíteni $(F_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ nemüres zárt halmazokat; az n-edik lépésben azokat, melyekre $|s| = n$. Szeretnénk, ha erre a családra a következők teljesülnének:

I. Ha $s \succ t$, akkor $F_s \subseteq F_t$.
II. Ha s és t közül egyik sem kezdőszelete a másiknak, akkor F_s és F_t diszjunktak.
III. Minden (nemüres) $s \in 2^{<\mathbb{N}}$-re $diam(F_s) \leq 2^{-|s|}$.
IV. Minden $n > 0$-ra $diam(f(\bigcup_{|s|=n} F_s)) \leq \frac{1}{n}$.

Az első három tulajdonság elképzeléséhez érdemes a triadikus Cantor-halmazra gondolni. A fent említettek mellett szeretnénk megkövetelni, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ számra $(F_s)_{|s|=n}$, azaz a rekurzió minden lépésében kapott család legyen apró.

Legyen $F_\emptyset = X$. Ez teljesíti I-IV.-et. Tegyük fel, hogy $(F_s)_{|s|=n}$ családot megkonstruáltuk. Első lépésként szeretnénk lecserélni az F_{0^n} halmazt két kisebb átmérőjűre: $G_{0^n\frown 0}$-ra és $G_{0^n\frown 1}$-re, melyek átmérője $\leq 2^{-(n+1)}$. Szeretnénk, hogy az így kapott család továbbra se legyen apró. Az 1.49 megfigyelést alkalmazzuk $U = F_{0^n}$ halmazra. A kapott V_i, W_i halmazokkal vizsgáljuk meg az első lemmát. Mivel az $\mathscr{F} \sqcup U = (F_s)_{|s|=n}$ család nem apró, így a lemma feltétele nem teljesülhet: kell hogy létezzen k, melyre F_{0^n}-t V_k-ra és W_k-ra cserélve továbbra sem apró a család. Legyen tehát $G_{0^n\frown 0} = V_k$, $G_{0^n\frown 1} = W_k$. Ezt a cserét hajtsuk végre még $2^{N+1}-1$-szer, így kapjuk $(G_s)_{|s|=n+1}$ családot. Ez az I-III. feltételeket már tudja. A 2. megjegyzést alkalmazva kapjuk $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ családot, mely az Y Borel-fedése $\leq \frac{1}{n}$ átmérőjű zárt halmazokkal. A 2. lemma szerint kell lennie egy i-nek, melyre $(F \cap f^{-1}(A_i))_{F\in\mathscr{F}}$ család nem apró, ahol $\mathscr{F} = (G_s)_{|s|=n+1}$. Legyen $F_s = G_s \cap f^{-1}(A_i)$ minden $s \in 2^{n+1}$-re, ezen család pedig már teljesíti I-IV.-et.

A rekurzióval kapott $(F_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ család mutatja, hogy a tétel 2) pontja teljesül. $C := \bigcap\limits_n \bigcup\limits_{|s|=n} F_s$ Cantor-halmaz, valamint

$$diam(f(C)) = diam(\bigcap_n (\bigcup_{|s|=n} F_s)) \leq \inf_n diam(f(\bigcup_{|s|=n} F_s)) = 0.$$

Ebből következően $f(C)$ egyetlen pontja az Y térnek.

□

1.51. Megjegyzés. Ha a tétel feltételei mellett $\forall y \in Y$-ra $|G^y| \leq \aleph_0$ is teljesül, akkor f_n-ek választhatók injektívnek.

Bizonyítás. Használjuk a tételt az f_n függvények grafikonjaira külön-külön, $Y \times X$ részeként tekintve rájuk.

1.7. A Luzin-Novikov tétel következményei

A Luzin-Novikov tétel egy fontos, gyakori alkalmazása, hogy ha olyan jellegű halmazt definiáunk egy Borel-gráf kapcsán, hogy $\forall v_1 \exists v_2$, ahol a v_1 csúcshoz a saját összefüggőségi komponenséből szeretnénk egy v_2 csúcsot választani, akkor ezt kicserélhetjük a következőre: $\forall v_1 \exists s \in \mathbb{N}^{<\infty}$, ahol s a v_1-ből v_2-be vezető utat írja le a Luzin-Novikov tétel által adott f_i függvények indexeivel. Így a kapott v_2 csúcsok halmaza Borel lesz.

1.52. Következmény. *Ha G lokálisan megszámlálható Borel-gráf X-en, és $A \subseteq X$ Borel, akkor $N_G(A) := \{y : \exists x \in A : xGy\}$ is Borel.*

Bizonyítás. G felírható f_n-ek uniójaként, $N_G(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(A)$.

1.53. Következmény. *Jelölje $d_G : X^2 \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a gráfmetrikát, ahol a különböző komponensben levő csúcsok távolságát végtelennek tekintjük. Ha G lokálisan megszámlálható Borel-gráf, akkor d_G Borel-függvény.*

Bizonyítás. $d_G^{-1}(0) = \{(x,x) : x \in X\}$ Borel. Ha $B_n := d_G^{-1}(n)$ Borel, akkor $B_{n+1} := d_G^{-1}(n+1)$ is: $B_{n+1} = (\{(N_G(x),y) : (x,y) \in B_n\} \cup \{(x,N_G(y)) : (x,y) \in B_n\}) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. Továbbá $d_G^{-1}(\infty)$ Borel, mert minden komponens Borel az előbbiek alapján.

1.54. Következmény. *Ha G lokálisan véges Borel-gráf az X Borel-téren, akkor $\chi_B(G) \leq \aleph_0$.*

Bizonyítás. Legyen $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ egy halmazsorozat, ami zárt a metszetre, komplementerre, és szeparálja a pontokat. Ilyen létezik, mert lengyel terekben a nyíltak, így a Borelek szeparálják a pontokat és megfelelnek a feltételeknek. Az $x \in X$ csúcs $c(x)$ színe legyen az a legkisebb i, melyre $x \in B_i$, de $N_G(x) \cap B_i = \emptyset$. Ekkor minden színosztály Borel, mert

$$c^{-1}(i) = B_i \setminus (N_G(B_i) \cup \bigcup_{n=1}^{i-1} c^{-1}(n)).$$

1.55. Következmény. *G Borel-gráf, G-ben minden csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van $\Rightarrow$*

$$\chi_B(G) \leq \Delta + 1.$$

Bizonyítás. Legyen $c: X \to \mathbb{N}$ a G egy Borel-színezése megszámlálható sok színnel. Ebből állítunk elő egy $c' : X \to \Delta + 1$ Borel-színezést. Jelölje B_i a c színezés szerint az i szín színosztályát. A c' színezést úgy fogjuk mohón előállítani, hogy sorban haladunk végig a B_i színosztályokon, és a csúcsokat kiszínezzük a lehető legkisebb olyan színnel, ami nem rontja el az eddigi színezést. Tegyük fel, hogy $\bigcup_{i \leq n} B_i$ halmazon már definiáltuk c' jólszínezést, és $x \in B_{n+1}$. $c'(x)$ legyen a legkisebb olyan szín, melyet $N_G(x)$ elemeiből még senki sem kapott. Vegyük észre, hogy $N_G(x) \cap B_{n+1} = \emptyset$, valamint $c'(x) \leq \Delta + 1$. Az így kapott c' színezés valóban egy jólszínezés $\Delta + 1$ színnel, és minden színosztály Borel, hiszen $c'^{-1}(i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus \bigcup_{j<i} c'^{-1}(j))$. □

Ismeretes, hogy Borel-halmaz folytonos képe nem feltétlenül Borel. A Luzin-Szuszlin tétel ([12] 15.1) kimondja, hogy viszont Borel-halmaz *injektív* képe Borel. A Luzin-Novikov és Luzin-Szuszlin tételek összerakása a következő.

1.56. Következmény. *Legyen X, Y két lengyel tér, $A \subseteq X$ Borel, $f : X \to Y$ folytonos leképezés. Ha $\forall x \in A$-ra $|f(x)| \leq \aleph_0$, akkor $f(A)$ Borel Y-ban.*

Bizonyítás. Az $|f(x)| \leq \aleph_0$ tényből következik, hogy a Luzin-Novikov tétel $Y \times X$ térre és $(graph(f|_A))^T$ halmazra alkalmazható, ahol egy $H \subseteq X \times Y$ halmaz transzponáltján a $H^T := \{(y,x) : (x,y) \in H\}$ halmazt értjük. Ez éppen azt jelenti, hogy maga $graph(f|_A)$ felírható megszámlálható sok injektív $f_i : B_i \to Y$, $B_i \subseteq A$ függvény grafikonjának uniójaként (f_i-k az inverzei a tétel által adott $Y \to X$ függvényeknek). Tehát $f(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(B_i)$ Borel. □

Az alábbi lemma szintén a kérdéskör alapvető összefüggései közé tartozik, és most már be tudjuk látni.

1.57. Lemma. *Ha G lokálisan véges Borel-gráf, akkor létezik $B \subseteq G$ maximális független halmaz, ami Borel.*

Bizonyítás. Fixáljunk egy $c : X \to \mathbb{N}$ megszámlálható Borel-színezést $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ színosztályokkal. Minden színosztály független, ezekből szeretnénk mohó módon egy maximális függetlent építeni. Legyen $C_0 = B_0$, valamint $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $C_{n+1} = (B_{n+1} \setminus N_G(C_n)) \cup C_n$. A $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ halmaz Borel, független, és tovább nem bővíthető, hiszen minden egyes elemet okkal dobtunk el, amikor a színosztályából szelektáltunk. □

A Luzin-Novikov tétel következménye a Borel-kombinatorika egy másik nagyon fontos tétele, a Feldman-Moore tétel is.

Láttuk korábban, hogy egy G Schreier-gráf összefüggőségi komponensei által meghatározott E_G ekvivalenciarelációja éppen a gráfot definiáló hatás orbit-ekvivalenciarelációja. Mivel a hatást egy megszámlálható csoport adja meg, így E_G minden osztálya megszámlálható.

1.58. Tétel (Feldman-Moore [9])**.** *Legyen X egy sztenderd Borel-tér Borel részhalmaza, E pedig egy megszámlálható osztályokból álló Borel-ekvivalenciareláció X-en. Ekkor E előáll egy megszámlálható Γ csoport Borel-hatásának orbit-ekvivalenciarelációjaként.*

Bizonyítás. Mivel a nem megszámlálható Borel-terek mind izomorfak egymással, feltehetjük, hogy $X = 2^{\mathbb{N}}$. A célunk, hogy E-t előállítsuk megszámlálható sok Borel-bijekció grafikonjának uniójaként, és az ezek által természetesen generált csoport lesz a Γ. A tétel feltétele szerint E-re alkalmazható a Luzin-Novikov tétel, így $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} graph(f_n)$. A grafikonokat diszjunktizáljuk:

$$H_n := graph(f_n) \setminus \bigcup_{k<n} graph(f_k).$$

Legyen $P_{nk} = H_n \cap H_k^T$. Vegyük észre, hogy P_{nk} Borel-halmazok páronként diszjunktak, és minden szekciójuk legfeljebb egyelemű, azaz injektív parciális függvények. Emellett $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} P_{nk} = E$, így a P_{nk} halmazok particionálják E-t. A célunk, hogy ezekből olyan parciális injekciókat készítsünk, amiknek diszjunkt az értelmezési tartománya és az értékkészlete, mivel ilyeneket uniózva a transzponáltjukkal, majd identikusan kiterjesztve bijekciókat kapunk. Jelölje R_s^i azon $(x,y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ pontok halmazát, melyeknek $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ kezdőszelete, és $k = |s|+1$-re $x(k) = i$, $y(k) = 1-i$. Ekkor a $P_{nk} \cap R_s^i$ alakú halmazok értelmezési tartománya és értékkészlete diszjunkt, parciális Borel-injekciók, megszámlálható sokan vannak, és particionálják E-t. Terjesszük ki őket identikusan $2^{\mathbb{N}}$-re, és legyen egy felsorolásuk $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Könnyen látható, hogy $\Gamma := \langle (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ csoport jó lesz. □

A tétel alábbi következménye hasznos lesz számunkra a 2. fejezetben.

1.59. Definíció. *$E \subseteq X^2$ ekvivalenciareláció. Egy $A \subseteq X$ halmazra legyen $[A]_E = \{x \in X : \exists a \in A : xEa\}$. Azaz $[A]_E$ jelöli az A-ba belelógó ekvivalenciaosztályok unióját. Ha $A = \{x\}$, gyakran az*

$[x]_E$ *jelölést alkalmazzuk.*

1.60. Definíció (Kvázi-invariáns mérték)**.** *Legyen X Borel-tér, μ mérték X-en, $E \subseteq X^2$ ekvivalenciareláció. μ kvázi-invariáns, ha $\forall B \subseteq X$ Borelre $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu([B]_E) = 0$.*

1.61. Következmény. *Legyen X egy sztenderd Borel-tér Borel részhalmaza, E egy megszámlálható osztályokból álló Borel ekvivalenciareláció X-en, μ pedig egy valószínűségi mérték X-en. Ekkor létezik olyan ν kvázi-invariáns valószínűségi mérték X-en, melyre nézve μ abszolút folytonos. és a ν-mérhető halmazok μ-mérhetők is.*

Bizonyítás. μ-ből készítünk egy ν kvázi-invariáns mértéket. E a Feldman-Moore tétel értelmében előáll egy megszámlálható Γ csoport Borel-hatásának orbit-ekvivalenciarelációjaként. Tetszőleges A μ-mérhető halmazra legyen

$$\nu(A) = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} \frac{1}{2^i} \cdot \mu(\gamma_i \cdot A)$$

Ez kvázi-invariáns, mert ha $\nu(A) = 0$, akkor $\forall i$-re $\mu(\gamma_i \cdot A) = 0$, amiből $\mu(\bigcup_i \gamma_i A) = \mu([A]_E) = 0$. Emellett $\mu \ll \nu$, mivel $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(1 \cdot A) = 0$. Ha egy A halmaz ν-mérhető, akkor definíció szerint $\gamma_i = 1$ miatt μ-mérhető is. $\square$

1.8. Ekvivalenciarelációk

A matematikában gyakran találkozunk azzal a jelenséggel, hogy az egymáshoz valamilyen szempont szerint hasonló objektumokat elkezdjük ”egyként” kezelni, ezáltal ekvivalenciaosztályokat alakítunk ki. Például az egymással izomorf csoportokat, egymással homeomorf topologikus tereket, egymástól nullmértékű halmazon eltérő Lebesgue-mérhető függvényeket nem szoktuk különbözőként kezelni, hanem rögtön a definiálás után belátjuk, hogy a csoportosítási szabályunk ekvivalenciareláció, azaz az elemeket páronként összehasonlító kétváltozós reláció reflexív, tranzitív és szimmetrikus.

A Borel-kombinatorikában alapvetően azok az ekvivalenciarelációk érdekelnek minket, ahol az alaptér Borel-tér, és az ekvivalenciaosztályok is Borelek: az ilyeneket Borel-ekvivalenciarelációnak nevezzük. Az alábbi rövidítést gyakran használjuk.

1.62. Definíció (MOBER)**.** *X Borel-tér. Az "E MOBER" rövidítés azt jelenti, hogy $E \subseteq X \times X$ Borel-ekvivalenciareláció minden osztálya megszámlálható sok elemből áll, azaz "megszámlálható osztályú Borel-ekvivalenciareláció".*

A MOBER rövidítés angol nyelvű, gyakran használt – bár félrevezető – megfelelője a CBER.

Különböző Borel-terek Borel-ekvivalenciarelációinak komplexitását hasonlítja össze a következő fogalom.

1.63. Definíció. *Legyenek X és Y Borel-terek, $E \subseteq X \times X$ és $F \subseteq Y \times Y$ Borel-ekvivalenciarelációk. E Borel-redukálható F-re, ha létezik olyan $\varphi : X \to Y$ Borel-leképezés, melyre $\forall x_1, x_2 \in X \; x_1 E x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) F \varphi(x_2)$ teljesül. Jele: $E \leq_B F$*

Ez azt jelenti, hogy E két különböző ekvivalenciaosztályának a képe nem lehet F-ben azonos osztály, így minden E-beli osztálynak van F-beli párja, de ez fordítva nem igaz, mert φ nem feltétlenül szürjektív. Tehát F legalább olyan komplex, mint E. $\leq_B$ egy parciális rendezés.

1.64. Definíció. *$=_X$ relációval azt az ekvivalenciarelációt jelöljük az X téren, ahol $x, y \in X$ elemek pontosan akkor ekvivalensek, ha $x = y$.*

1.65. Definíció (Sima ekvivalenciareláció)**.** *Egy $E \subseteq X^2$ ekvivalenciareláció sima, ha Borel-redukálható $=_{2^{\mathbb{N}}}$ relációra.*

Ha E MOBER, akkor a simaság más módon is karakterizálható.

1.66. Definíció ((Parciális) Borel-transzverzális)**.** *Olyan $B \subseteq X$ Borel-halmaz, mely minden ekvivalenciaosztályból (legfeljebb) egy elemet tartalmaz.*

1.67. Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek egy $E \subseteq X \times X$ MOBER-re.*

1.) E-nek van Borel transzverzálisa.
2.) $E \leq_B \; =_{2^{\mathbb{N}}}$
3.) X lefedhető megszámlálható sok Borel parciális E-transzverzálissal.

Az állítás bizonyítása könnyű.

Bizonyítás. Először lássuk be 3.) $\Rightarrow$ 1.)-et. Ha X lefedhető a B_1, B_2, $\dots$ parciális Borel-transzverzálisokkal, akkor ezekből könnyen gyárthatunk egy B Borel-transzverzálist. Fix C parciális Borel-transzverzálisra $[C]_E$ Borel az 1.56 következmény miatt, hiszen $[C]_E = \pi_2((C\times X)\cap E)$.

$A_1 := B_1$, $A_2 := A_1 \cup (B_2 \setminus [A_1]_E)$, $\dots$, $A_i := A_{i-1} \cup (B_i \setminus [A_{i-1}]_E)$. Minden A_i Borel (és parciális transzverzális is), így $B := \bigcup_i A_i$ is. B minden ekvivalenciaosztályba belelóg, de legfeljebb egyszer.

Az 1.) $\Rightarrow$ 2.) belátásához vegyük E Borel-transzverzálisát, B-t. Elég egy $\varphi : X \to B$ Borel-homomorfizmust adni, mivel B Borel-izomorf $2^{\mathbb{N}}$ valamely Borel-részhalmazával. Ha φ minden $x \in X$-hez hozzárendeli azt a B-beli elemet, aki $[x]_E \cap B$ egyetlen eleme, akkor ez nyilvánvalóan jó.

A 2.) $\Rightarrow$ 3.) irányhoz a Luzin-Novikov tételt fogjuk használni. 2.) miatt létezik egy $\varphi : X \to 2^{\mathbb{N}}$ Borel-redukció. Alkalmazzuk a Luzin-Novikov tételt a $2^{\mathbb{N}} \times X$ tér $gr(\varphi)$ Borel részhalmazára. Mivel E minden osztálya megszámlálható, így teljesül a tétel feltétele, és $gr(\varphi)$ felbomlik megszámlálható sok Borel grafikon uniójára. Ezek injektív grafikonok lesznek, hiszen φ egy függvény. Legyen B_i az i-edik grafikon vetülete X-re. Ez Borel, és minden ekvivalenciaosztályba legfeljebb egyszer metsz bele, hiszen egy $2^{\mathbb{N}} \to X$ injektív grafikon vetülete, ahol $2^{\mathbb{N}}$ pontjai ekvivalenciaosztályoknak felelnek meg. $\bigcup_i B_i$ fedi X-et, a konstrukció lényege szerint. □

1.68. Állítás. *Ha az E ekvivalenciareláció minden osztálya véges, akkor E sima.*

Bizonyítás. Tekintsünk E MOBER-re Borel-gráfként. Ez lokálisan véges, így megszámlálható sok színnel Borel-színezhető. A színosztályok parciális Borel-transzverzálisok. □

1.69. Definíció (Hipervégesség)**.** *Egy E MOBER hipervéges, ha előáll $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ alakban, ahol minden E_n véges osztályokból álló Borel-ekvivalenciareláció.*

Egy G Borel-gráfot hipervégesnek nevezünk, ha E_G hipervéges. A hipervégesség egy fontos alapfogalom a Borel-kombinatorikában, mely szoros kapcsolatban áll a csoportelmélethez kötődő amenábilitás fogalmával is. A hipervéges gráfok a legegyszerűbb szerkezetű példák, amik mutatják, hogy Borel-kontextusban máshogy működnek a gráfelméleti fogalmak [5].

Az eddigi állításainkból láthatjuk, hogy ha egy MOBER sima, akkor hipervéges: ezt 1.67 3.) része mutatja. Visszafele ez nem igaz, erre példa $\mathbb{E}_0$.

A következő tétel szerintem érdekes, bár a bizonyítása egy nem nehéz alkalmazása a kompaktsági tételnek [21].

1.70. Tétel. *G Borel-gráf, E_G sima $\Rightarrow \chi_B(G) = \chi(G)$*

Egy megszámlálható komponensekből álló Borel-gráf minden összefüggőségi komponense Borel, hiszen a komponens valamely x csúcsa segítségével mindegyik felírható $\left(\pi_2\left((\{x\} \times X) \cap (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} d^{-1}(n))\right)\right)^2$ alakban, ahol π_2 a második koordinátatengelyre való vetítést jelöli. Ez a tétel mutatja tehát, hogy színezés tekintetében a Borelség elvárását megszelídíti az a tény, ha az önmagukban Borel (és megszámlálható) komponensekből tudunk referenciapontot választani Borel-módon, egy Borel-transzverzális által. Így a fejezetben megismert példákban, ahol a klasszikus és a Borel-kromatikus szám nem egyezett meg – G_α és $\mathbb{G}_0$ gráfoknál –, valahogy ezen múlt a dolog. Ebből az is következik, hogy például nincs olyan Borel-részhalmaza $2^{\mathbb{N}}$-nek, mely az "azonosan végződő" 0-1 sorozatok minden ekvivalenciaosztályából pontosan egy elemet tartalmaz.

1.9. Ramsey-típusú tételek a Borel-kombinatorikában

A gráfelméletből ismert Ramsey-tétel arról szól, hogy bizonyos feltételek mellett bárhogyan is színezzük meg egy gráf éleit k színnel, lesz közte előírt méretű egyszínű klikk. Az alábbi tételek ennek az analógjai a teljes (hiper)gráfra $\mathbb{N}$-en, előírt végtelen méretű klikkel.

1.71. Definíció. *Jelölje $[A]^n$ az A n-elemű, $[A]^{\mathbb{N}}$ pedig a végtelen elemszámú részhalmazainak halmazát.*

Ha a $2^{\mathbb{N}}$ Cantor-halmazra úgy tekintünk, hogy a 0-1 sorozatok az $\mathbb{N}$ részhalmazainak karakterisztikus vektorai, akkor $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ és $[\mathbb{N}]^k$ is Borel részhalmaza, és ez megad rajtuk egy Borel-struktúrát.

1.72. Tétel (Ramsey)**.** *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, és $c : [\mathbb{N}]^n \to k$ tetszőleges színezés.*
Ekkor $\exists H \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$, amire $c|_{[H]^n}$ konstans.

Ez $n > 2$ esetén hipergráfot jelent. Az alábbi tételben, melyet a 3. fejezetben használni fogunk, a hiperélek mérete is végtelen.

1.73. Tétel (Galvin-Prikry). *Legyen $k \in \mathbb{N}$, és $c : [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \to k$ tetszőleges Borel-színezés. Ekkor $\exists H \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$, amire $c|_{[H]^{\mathbb{N}}}$ konstans.*

A tétel Ramsey-mérhetőség fogalmát használó bizonyítása elolvasható például az [4] szakdolgozatban. Kechris könyvének [12] 19.C fejezetében egy kicsit más, de lényegét tekintve hasonló, az Ellentuck-topológia fogalmát használó bizonyítás található.

2. Egy érdekes Borel-gráf

Ez a fejezet Marks [17] cikkében található 1.3 tétel bizonyításán, illetve a 2.4 alfejezet Conley, Marks és Tucker-Drob [6] cikkén alapul.

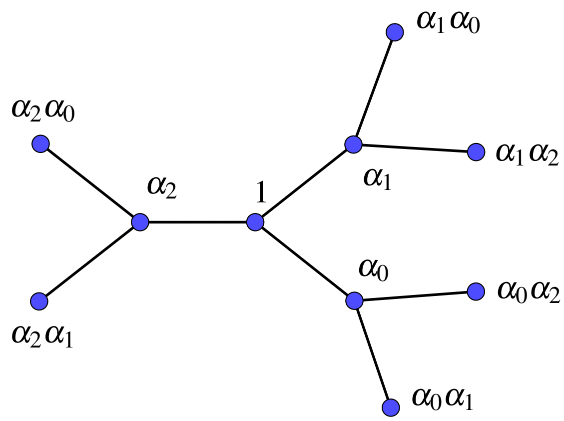
2.1. A gráf

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy az a gráfelméletből ismert tény, miszerint ha egy gráfban a maximális fokszám $\Delta < \infty$, akkor a gráf kromatikus száma $\leq \Delta + 1$, igaz Borel-kromatikus számra is. Láttuk azt is, hogy a mérhető és Baire-mérhető kromatikus szám mindig legfeljebb annyi, mint a Borel-kromatikus szám. Ebben a fejezetben egy olyan gráfot fogunk konstruálni, melynek a maximális fokszáma 3, és egy Borel-színezéshez valóban szükség is van 4 színre, ám a gráf mérhető kromatikus száma bármilyen valószínűségi mérték esetén legfeljebb 3. A konstrukció bizonyítása egy nagyon izgalmas módszert használ, ezért is szerettem volna megjelentetni ezt a munkámban: Marks módszere végtelen játékot és Martin tételét használja. Maga a módszer az itt bemutatottnál kicsit általánosabb, de ez az alapja.

2.1. Tétel. *Létezik olyan* 3*-reguláris, aciklikus* G *Borel-gráf, hogy tetszőleges* μ *valószínűségi mértékre* $3 = \chi_\mu(G) < \chi_B(G) = 4$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_0^2 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1 \rangle$ megszámlálható csoport. Legyen $\Gamma \curvearrowright 4^\Gamma$ a bal shift (1.30), ennek a Schreier-gráfja az $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ generátorrendszerre nézve pedig G'. G' élein a hatás megad egy természetes élszínezést is. Ha az x csúcsot az $\{\alpha_i : i \in I\}, I \subseteq 3$ generátorokkal való hatások azok, amik átviszik (külön-külön) y-ba, akkor (x, y) él színe legyen I halmaz. Jelölje ezt a színezést $h : G' \to \mathscr{P}(\{0; 1; 2\})$. A G' megszorítása a szabad részére legyen G. Ez lesz a keresett aciklikus, 3-reguláris gráf.

A 4^Γ térre úgy érdemes gondolni, hogy Γ Cayley-gráfjának minden csúcsára egy címkét ragasztunk a $4 = \{0; 1; 2; 3\}$ halmazból. G'-ben két csúcs, azaz címkézés szomszédos, ha a Cayley-gráf egy éle mentén ”egymásba tolhatók”.



2. ábra. Γ Cayley-gráfja

Először azt szeretnénk belátni, hogy $\chi_B(G) = 4$. Az 1.55 Következmény miatt nyilvánvaló, hogy 4 színnel biztosan ki tudjuk színezni G-t Borel módon, hiszen a maximális fokszáma 3. Szeretnénk belátni, hogy 3 szín nem elég. Ehhez megmutatjuk, hogy G'-n nem elég 3 szín; sőt, ha 3 színnel színezzük, mindig lesz egy (x,y) él, melynek mindkét végpontja azonos színű, emellett $c(x), c(y) \in h((x,y))$, ahol c az említett 3-színezés. Megmutatjuk továbbá, hogy a nem szabad rész kiszínezhető 3 színnel Borel-módon úgy, hogy bár a színezés nem feltétlen jólszínezés, de nincs benne (x,y) él, melyre $c(x) = c(y) \in h((x,y))$. Ebből következik, hogy a szabad rész nem 3-színezhető, hiszen a szabad és a nem szabad rész közt nem fut él. A szabad részre szorítkozás azért szükséges, mert G' még nem aciklikus. Emlékeztetünk, hogy a Schreier-gráf fogalmának definiálásakor a hurokéleket nem engedtük meg.

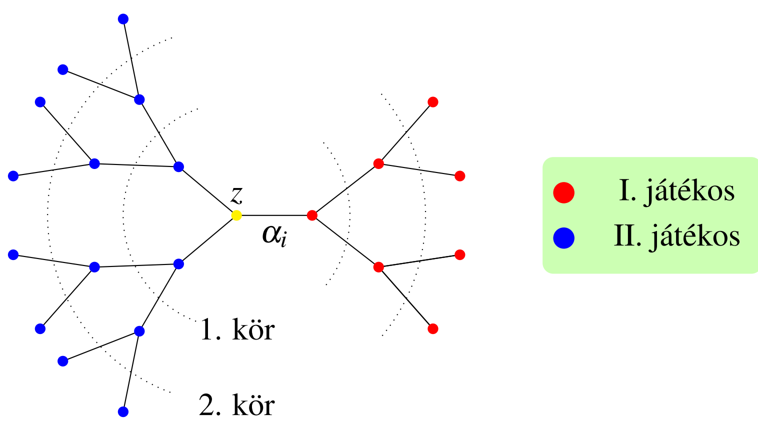
2.2. G' Borel-kromatikus száma több mint 3

2.2. Lemma. $\chi_B(G') > 3$. *Sőt, a G' bármely c Borel 3-színezése esetén létezik $(x_1,x_2) \in G'$ él, melyre $c(x_1) = c(x_2) \in h((x_1,x_2))$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy G' gráfot Borel módon 3-színeztük úgy, hogy nincs (x_1,x_2) él, melyre $c(x_1) = c(x_2) \in h((x_1,x_2))$ teljesül. Legyen ez a színezés $c : 4^\Gamma \to 3$. Definiáljunk egy játékcsaládot Γ Cayley-gráfján. Két játékos lesz, akik a gráf csúcsait címkézik 4 elemeivel. Az első játékos nyer, ha a kapott $x \in 4^\Gamma$ címkézésre $c(x) \neq i$ (azaz mondjuk nem piros). Belátjuk, hogy nem lehet nyerő stratégiája a játék minden paramétere esetén az első játékosnak, azaz a Martin-tétel ([12], 20.5 tétel) miatt van olyan, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája, ez azonban arra az ellentmondásra fog vezetni, hogy c mégsem volt jólszínezés.

2.3. Definíció ($G(z,i)$)**.** *Legyen $G(z,i)$ játék a következő. A két játékos egy $x : Cay(\Gamma) \to 4$ címkézést készít, melyre $x(1) = z$ rögzített, ahol 1 a Γ egységeleme, $z \in 4$. Az első körben az I. játékos választ egy $x(\alpha_i) \in 4$ értéket ($i \in 3$), ezután a II. játékos adja meg $\forall j \in 3 \setminus \{i\}$-re $x(\alpha_j) \in 4$ értékét. Azaz a játék első körében felcímkézték $Cay(\Gamma)$-ban az egységelemtől 1 távolságra levő három csúcsot. Az n-edik körben az egységelemtől pontosan n távolságra levő csúcsokat fogják felcímkézni: az I. játékos azokat, melyek redukált alakja α_i-vel kezdődik, majd ezután a II. játékos a többit. Az I. játékos nyer, ha a kapott $x \in 4^\Gamma$ címkézésre $c(x) \neq i$, és a II. nyer, ha $c(x) = i$.*

Mivel a c színezés Borel, így Martin tétele ([12] 20.5) alkalmazható a $G(z,i)$ játékra. Eszerint a játék determinált, azaz valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.



3. ábra. $G(z,i)$

2.4. Állítás. *Minden $z \in 4$-re létezik $i \in 3$, hogy $G(z,i)$ játékban a II. játékosnak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy valamely z esetén mindhárom i-re az I. játékosnak van nyerő stratégiája. Ekkor a $G(z,0)$ játék esetében az I. játékos el tudja érni, hogy a kapott színezés ne

0 színű legyen. A II. játékos azonban megteheti, hogy első játékosnak képzeli magát a $G(z,1)$, illetve $G(z,2)$ játékokban, és figyelmen kívül hagyva, hogy I. mit lépett, $j \in \{1,2\}$-re az I. játékos $G(z,j)$-beli nyerő stratégiája szerint címkéz a saját csúcsain. Ezzel bebiztosítja, hogy a kapott x címkézés ne 1 és ne 2 színű legyen. Ez ellentmondás, hiszen $c(x) \in 3$. $\square$

Az állítás bizonyítása $Cay(\Gamma)$ azon a tulajdonságán múlt, hogy az egységelemből bármelyik élen indulunk el, a gráf mindhárom irányban ”ugyanúgy néz ki”. A lemma végső ellentmondását $Cay(\Gamma)$ azon tulajdonsága fogja biztosítani, hogy bármelyik élére ”tükörszimmetrikus”.

Mivel mind a négy $z \in 4$-re létezik $i \in 3$, hogy $G(z,i)$ játékban a II. játékosnak van nyerő stratégiája, ezért van olyan i, amihez két ilyen z is tartozik, jelölje ezeket z_1 és z_2. Emiatt a $G(z_1,i)$ és $G(z_2,i)$ játékban is el tudja érni a II. játékos, hogy a kapott x_1 és x_2 címkézés i színű legyen. Szeretnénk belátni, hogy x_1 és x_2 választható olyannak, hogy G'-ben szomszédos csúcsok legyenek.

Feltehető, hogy $G(z_1,i)$ játék úgy kezdődött, hogy az I. játékos $x_1(\alpha_i) = z_2$ címkét választott, hiszen II. így is tud nyerni. Hasonlóan, $x_2(\alpha_i) = z_1$ is feltehető. Sőt, még az is feltehető, hogy $G(z_1,i)$ játékban az I. játékos azt képzelte, hogy minden csúcs balról meg van szorozva α_i-vel, azaz például α_i az egységelem, és ő a második játékos a $G(z_2,i)$ játékban, ahol az első játékos z_1 címkével kezdett. Mivel ez az egész fordítva is elmondható, ezért feltehetjük, hogy $G(z_1,i)$ játékban az I. játékos egy rögzített S_2 stratégia szerint címkézett, mely $G(z_2,i)$ játékban a második nyerő stratégiája, $G(z_2,i)$-ben pedig rögzített S_1 szerint, hasonlóan. Meggondolható, hogy így a kapott x_1 és x_2 címkézések G'-ben szomszédosak lesznek. Ez ellentmondás, mivel $c(x_1) = c(x_2)$. $\square$

2.3. A bizonyítás kiterjesztése G-re

Emlékeztetőül, a $G' \setminus G$ gráf a G' megszorítása a $\Gamma \curvearrowright 4^\Gamma$ hatás nem szabad részére. A gráf élein egy természetes élszínezés, hogy ha az x csúcsot az $\{\alpha_i : i \in I\}$ generátorokkal való hatások viszik át y-ba, akkor (x,y) él színe I. Ezt a színezést $h : G' \to \mathscr{P}(\{0;1;2\})$ jelölte.

2.5. Lemma. *A $G' \setminus G$ gráf csúcsainak létezik c Borel-színezése a $\{0;1;2\}$ színekkel úgy, hogy nincs (x,y) él, melyre $c(x) = c(y) \in h((x,y))$.*

A lemmában tehát c nem feltétlenül jólszínezés.

A nem szabad rész 4^Γ azon elemeiből áll, amik bizonyos értelemben ”túl szabályosak”, ”periodikusak”. Ilyen például $Cay(\Gamma)$ egy olyan címkézése, ahol egy tetszőlegesen választott, mindkét irányba végtelen utat felváltva 0-1-gyel címkézünk, minden más csúcsot pedig a 2-vel.

Bizonyítás. Most a nem szabad részt fogjuk tehát kiszínezni. Jelölje ennek csúcshalmazát F. Az F köreiből el fogunk készíteni egy $\mathscr{C}$ gráfot. $\mathscr{C}$ csúcsai legyenek az F körei, méghozzá a következőképpen: ha $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k = x_0$ F-beli csúcssorozat ilyen sorrendben kört alkot $G' \setminus G$-ben, akkor $(x_0, ...x_{k-1})$ kerüljön be $\mathscr{C}$ csúcshalmazába. Két ilyen csúcs közt vezessen él $\mathscr{C}$-ben, ha mint kör van közös csúcsuk. Így azonban még túlságosan nehezen kezelhető a kapott gráf, így kicsit óvatosabban kezdünk hozzá a felépítéséhez.

2.6. Állítás. *Legyen G egy lokálisan véges Borel-gráf X-en, $k \in \mathbb{N}$, $B \subseteq X^k$ pedig olyan Borel-halmaz X^k-ban, melynek minden eleme egy összefüggő, k-csúcsú részgráfnak felel meg G-ben. Ekkor létezik (diszjunktság szempontjából) tovább nem bővíthető $B' \subseteq B$ halmaz, aminek pontjai G-ben csúcsdiszjunkt részgráfoknak felelnek meg, és B' Borel.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{G}$ azt a gráfot $B \subseteq X^k$-n, ahol $v_1, v_2 \in B$ pontosan akkor szomszédosak, ha a nekik megfelelő X-beli csúcshalmazok nem diszjunktak. Ez egy Borel-gráf:

$$\mathscr{G} = \{(v_1, v_2) \in B^2 : v_1 = (x_1, \dots, x_k), v_2 = (y_1, \dots, y_k), \exists i, j : x_i = y_j \text{ és } \forall i \neq j\text{-re } x_i \neq x_j, y_i \neq y_j\}.$$

Ebben még minden G-beli, k-csúcsú összefüggő részgráf $k!$ darab csúcsnak felel meg, ám ezek klikket alkotnak, így legfeljebb egy kerülhet közülük egy maximális függetlenbe. Mivel G, így $\mathscr{G}$ lokálisan véges is, így az 1.57 lemma szerint létezik a keresett B'. □

Jelölje $G' \setminus G$ legrövidebb körének hosszát k_1. Jelölje $\mathscr{C}_{k_1}$ a $\mathscr{C}$ azon részgráfját, mely a $G' \setminus G$ k_1-hosszú köreinek megfelelő $\mathscr{C}$-beli csúcsokból áll.

2.7. Állítás. *$\mathscr{C}_{k_1}$ lokálisan véges.*

Bizonyítás. Mivel a $\mathscr{C}_{k_1}$ csúcsainak megfelelő F-beli körök mind k_1-hosszúak, így egy ilyen $C_x \subseteq F$ körbe belemetsző k_1-hosszú kör minden csúcsa legfeljebb k_1 távolságra lehet C_x valamely csúcsától. Emellett F minden csúcsának foka legfeljebb 3, így C_x $\mathscr{C}_{k_1}$-beli szomszédai az F egy véges részéből kerülnek ki. $\square$

2.8. Állítás. *$\mathscr{C}_{k_1}$ Borel X^{k_1}-ben.*

Bizonyítás.

$$\mathscr{C}_{k_1} = \{(x_1,...,x_{k_1}) \in F^{k_1} : \forall i \in \mathbb{Z}^+_{k_1} : (x_i, x_{i+1}) \in G' \setminus G\}$$

$\square$

Így $\mathscr{C}_{k_1}$ részgráfból a 2.6 állítás segítségével már ki tudtuk választani körök (mint csúcsokat tartalmazó vektorok) egy maximális független H_{k_1} részhalmazát úgy, hogy a $H_{k_1} \subseteq X^{k_1}$ Borel. Ebből készítsük el a keresett körök mint élhalmazok gráfját. Legyen

$$G_{k_1} = \{(x,y) \in F^2 : \exists v \in H_{k_1}, \exists i \in \mathbb{Z}^+_{k_1} : x = v(i), y = v(i+1) \text{ vagy } x = v(i+1), y = v(i)\}$$

Itt v koordinátáit a jelölés egyszerűségének kedvéért 0-tól számozzuk. Ez egy Borel-gráf F^2-n, mivel H_{k_1} Borel volt X^{k_1}-ben, és innen a Luzin-Novikov tétel használatával következik.

Cseréljük F-et $F \setminus \bigcup H_{k_1}$-re, és iteráljuk a fentieket: jelöljük a legrövidebb kör hosszát $k_2 > k_1$-gyel, készítsük el $\mathscr{C}$-t és $\mathscr{C}_{k_2}$-t, ebből G_{k_2}-t, stb.

Legyen $H = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^+} G_{k_i} \subseteq (G' \setminus G)$. Ez egy Borel-gráf, mely diszjunkt körökből áll, és nem vehető hozzá több $G' \setminus G$-beli kör, mely csúcsdiszjunkt H köreitől.

Most készítsünk H-ból egy olyan $\overrightarrow{H}$ irányított Borel-gráfot, ahol a körök "körbejárhatóan" vannak megirányítva. Ezt megtehetjük úgy, hogy definiáljuk visszamenőleg G_{k_i}-k mellett $\overrightarrow{G_{k_i}}$-ket is:

$$\overrightarrow{G_{k_i}} = \{(x,y) \in F^2 : \exists v \in H_{k_i}, \exists j \in \mathbb{Z}^+_{k_i} : x = v(j), y = v(j+1)\}$$

Ezek uniója jó $\overrightarrow{H}$.

Színezzünk ki először minden $\overrightarrow{H}$-beli kört a következőképpen. Egy ilyen kör minden v csúcsából pontosan egy irányított él indul ki, mely néhány $\alpha_i \in S$ generátorelemnek feleltethető meg a h élszínezés szerint. Legyen közülük a legkisebb indexű j, és színezzük v-t j színűre. A színezés közben tekintsünk $V(\overrightarrow{H})$ -ra F részhalmazaként. A körök színezése így jólszínezés, hiszen minden csúcsból pontosan egy olyan él indul ki, melyre $j \in I$.

Most szeretnénk a többi csúcsot is kiszínezni F-ben. Ehhez szeretnénk H körein egy rendezést definiálni. Mivel minden $\mathscr{C}_{k_i}$ Borel egy nem megszámlálható lengyel téren, így izomorf $2^{\mathbb{N}}$, azaz a triadikus Cantor-halmaz egy részhalmazával, vagyis létezik $l_i : V(\mathscr{C}_{k_i}) \to \mathbb{R}$ injektív, Borel hozzárendelés. Így $\mathscr{C}$ minden $v \in \mathscr{C}_{k_i}$ csúcsához hozzárendelhetünk egy párt: $(k_i, l_i(v))$. Legyen $V(\mathscr{C})$ R rendezése az ezen párok szerint vett lexikografikus rendezés. Ez Borel.

Ezután vegyük minden színtelen $u \in F$ csúcshoz a hozzá legközelebbi H-beli körök közül az R szerinti legkisebbet. Irányítsuk meg az u-ból a választott körbe vezető utat a kör felé, és színezzük a csúcsait az élek szerint, mint az előbb. A gráf szerkezete miatt a kapott út színezése kompatibilis a körök színezésével, és ez a színezés jóldefiniált. Emellett Borel is, mert az egészet ”Borel-módon” hoztuk létre, a Luzin-Novikov tétel többszöri alkalmazásával. Az egyetlen kérdés, hogy a körökön kívüli csúcsok egymással kompatibilis színeket kapnak-e így. Előfordulhat, hogy egy (x,y) élre x és y színe megegyezik, azonban ez a szín nem lehet eleme $h((x,y))$-nak. Legyen a kapott színezés c, ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy $\chi_B(G) > 3$, és hogy ebből következően $\chi_B(G) = 4$.

2.4. G mérhető kromatikus száma legfeljebb 3

2.9. Lemma ([6]). *Legyen μ egy tetszőleges valószínűségi mérték G csúcshalmazán. Ekkor $\chi_\mu(G) \leq 3$.*

2.10. Megfigyelés. Mivel G minden összefüggőségi komponense megszámlálható, az 1.61 következmény miatt feltehetjük, hogy μ kvázi-invariáns.

A lemma belátásához négy állításra és néhány elnevezésre lesz szükségünk.

2.11. Definíció (Egyvégű leképezés). *$f : X \to X$ leképezést egyvégűnek nevezzük, ha nem létezik $x_0, x_1, x_2, \dots$ ($\forall i, j$-re $x_i \neq x_j$) sorozat X-ben, melyre $f(x_{n+1}) = x_n$ teljesül minden n-re.*

2.12. Állítás. *Legyen G 3-reguláris, aciklikus Borel-gráf és $f : V(G) \to V(G)$ egy olyan egyvégű Borel-leképezés, melyre $graph(f) \subseteq G$. Ekkor $\chi_B(G) \leq 3$.*

Bizonyítás. Ha a G gráf éleire piros irányított élként rárajzoljuk f-et, azaz $f(x) = y$ esetén G x–y élére egy piros $x \to y$ nyilat rajzolunk, akkor a következőket állapíthatjuk meg.

- minden csúcsból indul pontosan 1 piros nyíl
- minden csúcsba (emiatt) legfeljebb két piros él fut be
- nincs végtelen ”hátráló” ág, azaz olyan végtelen út, ahol a piros nyilakon végig visszafele haladunk át

Tehát ha elindulunk a nyilak mentén az olyan csúcsokból, melyekbe nem fut be piros nyíl, és az innentől egyértelmű végtelen utakon haladunk tovább nyíl-irányban, akkor minden csúcsot elérünk valamelyik ilyen úttal.

Legyen minden olyan csúcs piros, amibe nem fut be piros nyíl. Kezdjünk el így egy piros-kék pepita színezést az utak mentén, amin akkor módosítunk, ha a következő színezendő csúcsba két út is befut. Ha mindkettő szerint piros vagy kék szín következne, akkor azt használjuk, és haladunk tovább. Ha nem, akkor is biztosan van még számára szabad szín, ezekből a piros>kék>sárga preferenciasorrendben választunk, majd folytatjuk a piros-kék pepita utunkat. Így biztosan egy jóldefiniált 3-jólszínezést kapunk. Szeretnénk belátni, hogy mindhárom színosztály Borel.

2.13. Megfigyelés. Bár f nem injektív, de minden pont ősképe legfeljebb kételemű, így az 1.56 következmény értelmében ha B Borel, akkor $f(B)$ is.

Mivel $P_1 = X \setminus f(X)$ az $X := V(G)$ jelöléssel élve, így ez Borel. Legyen $K_2 = f(P_1)$. A továbbiakban az n-edik lépésben, azaz n indexszel azon csúcsokat színezzük meg, akiktől a legtávolabbi P_1-beli elem $n-1$ távolságra van. P_n jelöli az ilyenek közül a pirosra színezetteket,

K_n a kékre, és S_n a sárgára színezetteket. Tegyük fel, hogy $i \leq (n-1)$ indexig minden P_i, K_i, S_i készen van, és Borel.

$$P_n := f(K_{n-1} \cup S_{n-1}) \setminus f(\bigcup_{i<n} P_i)$$

$$K_n := (f(P_{n-1}) \cup (f(S_{n-1}) \setminus P_n)) \setminus f(\bigcup_{i<n} K_i)$$

$$S_n := (f(K_{n-1}) \setminus P_n) \cup (f(P_{n-1}) \setminus K_n)$$

Meggondolható, hogy az így kapott színezés éppen azt adja, amit fent szavakkal leírtunk. □

A lemma bizonyításához tehát elegendő egy megfelelő egyvégű Borel-leképezést találnunk. A következő három állítás egy ilyet fog felépíteni. Így azonban Borel 3-színezést kapnánk, pedig tudjuk, hogy ilyen nem létezik! A trükk az, hogy egy 1-mértékű halmazon fogunk csak megadni egy Borel-színezést a lemmák segítségével, a maradék nullmértékű részt pedig nem Borel módon színezzük.

2.14. Állítás. *Legyen G lokálisan véges Borel-gráf, $B \subseteq V(G)$ Borel-halmaz olyan, ami G minden komponensébe belemetsz. Ekkor létezik egyvégű $f : V(G) \setminus B \to V(G)$ Borel-leképezés, amire $graph(f) \subseteq G$.*

Bizonyítás. Definiáljunk egy $C \subseteq V(G) \setminus B$ halmazt a következőképpen. $x \in C \Leftrightarrow x \notin B$ és $\exists x = x_0, x_1, \ldots$: $(x_i, x_{i+1}) \in G$ és $d(B, x_{i+1}) > d(B, x_i)$. Azaz C-be tesszük azon csúcsokat, melyek nincsenek B-ben, és van belőlük végtelen, B-től távolodó út. Ez a König-lemma és a Luzin-Novikov tétel miatt Borel: a König-lemma miatt elég azt felírni kvantorokkal, hogy $\forall k \in \mathbb{N}$-re létezik legalább k-hosszú megfelelő út, az utat magát pedig a Luzin-Novikov tétel által adott függvények k-hosszú indexsorozatával írhatjuk le. Emellett a d távolságfüggvény is a Luzin-Novikov tételből következően Borel. Adjuk meg most f-et $V(G) \setminus B$-n:

- ha $x \in C$, akkor $f(x) := x_1 \in C$, ahol x_1 a C definíciójában szereplő x_1
- ha $x \notin C$, akkor válasszunk egy $x \to B$ utat, és ennek az x után következő csúcsa legyen $f(x) \notin C$

Tehát az egyik esetben B-hez x-nél távolabbi, a másikban közelebbi csúcsot választottunk. Emellett f szerint lépegetve nem tudunk se kilépni C-ből, se kintről belépni. Így C-beli csúcsból f mentén visszafele lépegetve folyamatosan közeledünk B-hez, így nem kaphatunk végtelen "hátráló" ágat. Nem C-beli csúcsból viszont f mentén hátrafele lépve távolodunk B-től, és tudjuk, hogy ezen csúcsokból nem tudunk tetszőlegesen messzire jutni B-től, így f egy egyvégű leképezés. Emellett f Borel, mert C Borel, és C segítségével bármely $D \subseteq X$ Borelre $f^{-1}(D)$ pontjai megadhatók kvantorokkal Borel-módon definiálva, a Luzin-Novikov tétel használatával: az $x \in C$ esetben úgy, hogy olyan x_1 csúcsot keresünk x szomszédai közt, ami szintén bennevan C-ben. □

2.15. Állítás. *Legyen G Borel-gráf, A_0, A_1, ... pedig csökkenő Borel halmazsorozat, melyre $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$, és $\forall A_{i+1}$ belemetsz $G|_{A_i}$ minden összefüggőségi komponensébe. Ekkor létezik egyvégű $f : V(G) \to V(G)$ Borel-leképezés, amire $graph(f) \subseteq G$.*

Bizonyítás. Iteráljuk az előző állítást $B := A_{i+1} \subseteq A_i$ halmazokra, így $f_i : A_i \setminus A_{i+1} \to V(G)$ egyvégű Borel-leképezéseket kapunk. Legyen $f = \bigcup_i f_i$. Mivel az értelmezési tartományok diszjunktak voltak, így ez is egy egyvégű, jóldefiniált leképezés, és $graph(f) \subseteq G$. □

Tehát most már csak megfelelő A_0, A_1, ... halmazsorozatra van szükségünk. Mivel feltehető, hogy a mérték kvázi-invariáns, így elég olyan $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot találni, melyre $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ nullmértékű. Ez azért van, mert G azon komponensei, melyekbe A belemetsz, összességében nullmértékűek, így tetszőlegesen (újra)színezhetjük rajta a csúcsokat: mivel erdőről beszélünk, akár két színnel is. Ezen a ponton romlik viszont el az, hogy a 3-színezés Borel: így már tényleg csak μ-mérhető lesz.

2.16. Definíció (Bőséges gráf)**.** *A G gráf bőséges, ha minden csúcs foka legalább 2, és $\forall x \in V(G)$ csúcsra $G|_{V(G)\setminus x}$ minden összefüggőségi komponensében van legalább harmadfokú csúcs.*

2.17. Állítás. *Legyen G aciklikus, bőséges Borel-gráf, melyben minden csúcs foka legfeljebb 3, μ pedig egy valószínűségi mérték $V(G)$-n. Ekkor $\exists B \subseteq V(G)$ Borel-halmaz, melyre $\mu(B) \geq \frac{1}{22}$, $G|_{V(G)\setminus B}$ bőséges, és $V(G) \setminus B$ a G minden összefüggőségi komponensét metszi.*

Ezen állítás iterált alkalmazásával megkapjuk a szükséges $A_0, A_1, \ldots$ halmazokat. Legyen ugyanis $A_0 = V(G) \setminus B_0$, ahol B_0 az állítás által adott Borel-halmaz. Mivel $G|_{V(G)\setminus B_0}$-re is teljesül az állítás feltétele, így tudjuk ismét alkalmazni, így kapva $A_1 = A_0 \setminus B_1$-et, stb. Az iteráció során μ-t mindig újra kell skálázni, hogy valószínűségi mérték maradjon: például $\mu_0 := \mu$ után

$\mu_1 := \frac{\mu_0}{\mu_0(A_0)}$, és így tovább, $\mu_i := \frac{\mu_{i-1}}{\mu_{i-1}(A_{i-1})}$. Mivel minden iteráció során egy $\mu_i(B_i) \geq \frac{1}{22}$ mértékű halmazt hagyunk el, így $\bigcap\limits_i A_i$ nullmértékű lesz μ szerint. Továbbá az állítás alapján A_{i+1} az $G|_{A_i}$ minden összefüggőségi komponensét metszi $\forall i$-re, így a szükséges halmazsorozatot megkaptuk. Az állítást persze még be kell bizonyítanunk.

Bizonyítás (2.17 Állítás). Legyen $X = V(G)$, és $X' = \{x \in X : deg_G(x) = 3\}$. Legyen $\pi : X \to X'$ egy olyan Borel-leképezés, mely x csúcshoz a hozzá legközelebbi X'-beli csúcsok egyikét rendeli. Ilyen létezik, mert X-en van lineáris Borel-rendezés. Legyen X' Borel-téren a mérték $\mu'(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$. Definiáljunk X'-n egy H Borel-gráfot:

$$(x, y) \in H \Leftrightarrow x\text{-et } y\text{-nal G-ben összekötő út } \leq 2 \text{ darab } X'\text{-beli belső csúcsot tartalmaz}$$

Eszerint $\forall x \in X'$ csúcsra $deg_H(x) \leq 3 + 6 + 12 = 21$. Így H-nak van Borel 22-színezése, azaz létezik $B_0 \subseteq X'$ Borel, melyre $\mu'(B_0) \geq \frac{1}{22}$. Ebből a B_0-ból készítjük el B-t:

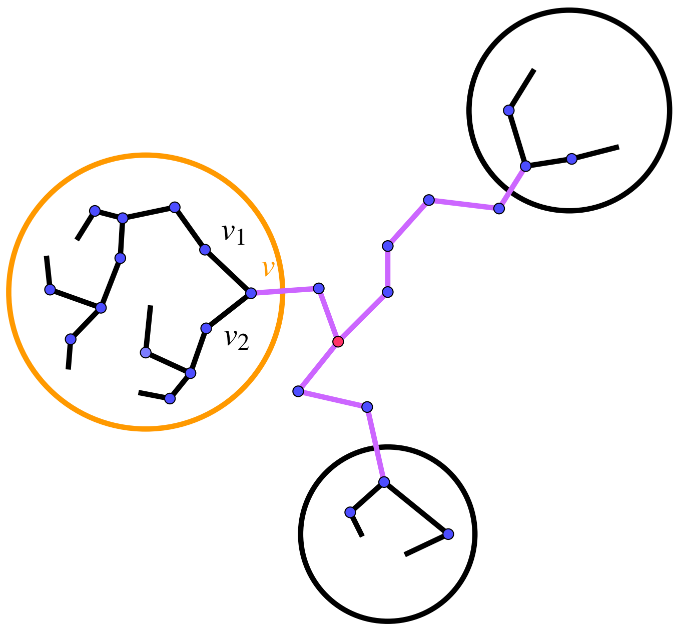
$$B := \{x : deg_G(x) = 2, \text{ és az } x\text{-ből } B_0\text{-ba vezet } X'\text{-t belsőleg nem érintő út}\}$$

Ekkor $\mu(B) \geq \mu'(B_0) \geq \frac{1}{22}$. Emellett $G|_{X \setminus B}$ bőséges: B_0 egy H-ban független halmaz, így csak egymástól "távoli" harmadfokú csúcsokat hagyhattunk el – akik közt van további legalább három harmadfokú. Emiatt X'-beli csúcsok fokszáma legfeljebb eggyel csökkenhetett, amikor B-t kitöröltük X-ből. Továbbá, ha egy másodfokú csúcsot elhagytunk, akkor az ő másodfokú szomszédait is, így X-beli másodfokú csúcs csak úgy maradhatott benne $X \setminus B$-ben, hogy eredetileg két, nem B_0-beli harmadfokú szomszédja volt. Mindezekből következik, hogy $G|_{X \setminus B}$ gráfban minden csúcs foka legalább 2.

Még be kell látni, hogy ha G bőséges volt, akkor $G|_{X \setminus B}$ is az, és hogy G egyetlen komponense sem tűnt el teljesen B törlésekor. Ha egy komponens teljesen eltűnt volna, akkor legfeljebb egy harmadfokú csúcs lehetett volna benne, ami ellentmond G bőségességének. Mivel G aciklikus, és minden pont foka legalább 2, így egy harmadfokú csúcsból bármilyen irányba indulva vagy találunk még egy harmadfokú csúcsot, vagy egy végtelen utat – ez utóbbit azonban a bőségesség kizárja. B törlésekor diszjunkt *amőbákat* töröltünk G-ből: harmadfokú csúcsokat és a róluk lelógó három véges utat. Egy ilyen amőba törlése három részre vág egy komponenst. Vizsgáljuk az amőba egyik szomszédjának, v-nek a komponensét, mely az amőba törlése után másodfokú csúccsá vált, lásd a 4. ábrát. v-ből elérhető két G-ben harmadfokú csúcs, v_1 és v_2. Az ezekből elérhető további harmadfokúak már válhattak másodfokúvá B törlésekor, de v_1 és v_2 nem. Ők biztosítják, hogy v komponense teljesíti a bőségesség kritériumait. □

Ezzel a tételünket, amiről az egész fejezet szólt, beláttuk. □

2.18. Megjegyzés. A Marks-módszer használatával teljes párosítások és élszínezések nem létezését is be lehet látni [17].



4. ábra. Amőba

3. 1, 2, 3, ∞

3.1. Függvények által generált gráfok

Az első fejezetben főként olyan Borel-gráfokkal foglalkoztunk, melyek $G \subseteq X^2$ élhalmaza előállt megszámlálható sok $X \to X$ Borel-függvény grafikonjának uniójaként. A Schreier-gráfok, G_α és $\mathbb{G}_0$ mind ilyenek. A Luzin-Novikov tétel is erre adott elégséges feltételt. Ebben a fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi az összefüggés a generáló függvények száma és a Borel-kromatikus szám között. Mivel a $\mathbb{G}_0$ gráf $\aleph_0$ darab függvénygrafikon uniója, és $\chi_B(\mathbb{G}_0) > \aleph_0$, így azokban az esetekben várunk felső korlátot a Borel-kromatikus számra, amikor a generáló függvények száma véges.

Ez a fejezet nagyrészt Konstantinos Palamourdas doktori disszertációja [20] alapján készült, hozzáolvasva a Palamourdas által is hivatkozott [14]-t.

Az állításokat nagyrészt sztenderd Borel-terekre mondjuk ki, mivel Palamourdas is így tesz, de ha az alaptér megszámlálható, az ebben a fejezetben mindig könnyen meggondolható speciális eset.

Továbbá ebben a fejezetben végig irányított Borel-gráfokkal foglalkozunk, ám ez csak olyan szempontból számít, hogy könnyebben tudjuk használni a bizonyításokban a gráf definíciójából adódó konkrét irányítást. Az állítások az irányítás megszüntetése esetén is igazak maradnának.

3.1. Definíció. *Legyen X sztenderd Borel tér, legyenek $F_1,\dots,F_n$ mind $X \to X$ Borel-függvények fixpontmentesek. Legyen $G_{F_1,\dots,F_n} = \bigcup_{i \le n} graph(F_i) \subseteq X^2$ az $F_1,\dots,F_n$ függvények által generált irányított Borel-gráf.*

A fixpontmentesség feltétele a hurokélek elkerülése érdekében szükséges. Ha a függvények nem fixpontmentesek, csupán az általuk generált gráfból utólag elhagyjuk a hurokéleket, a továbbiakban következő összefüggések ugyanúgy érvényben maradnak.

3.2. Állítás. *Minden $G_{F_1,\dots,F_n}$ gráfra $\chi_B(G_{F_1,\dots,F_n}) \le \aleph_0$.*

Az állítás bizonyítása nagyon hasonló az 1.54 következményhez.

Bizonyítás. X egy L lengyel tér Borel-részével izomorf. Vegyünk egy olyan topológiafinomítást L-en, mely szerint mindegyik F_i folytonos. Ugyanúgy, mint 1.54 következményben, vegyünk egy $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, mely zárt a metszetre, komplementerre, de a pontok szeparálása helyett azt várjuk el tőle, hogy a pontokat a zárt halmazoktól szeparálja. Ilyen létezik, mert a lengyel topológiák regulárisak is, így a Boreljei teljesítik a feltételeket. Innentől a bizonyítás ugyanaz: az $x \in X$ csúcs $c(x)$ színe legyen az a legkisebb i, melyre $x \in B_i$, de $N_G(x) \cap B_i = \emptyset$. Ilyen B_i amiatt létezik, mert $\forall x$-re $N_G(x)$ zárt az új topológia szerint: $N_G(x) = \bigcup_{i=1}^{n} (F_i(x) \cup F_i^{-1}(x))$. Ekkor minden színosztály Borel, mert

$$c^{-1}(i) = B_i \setminus (N_G(B_i) \cup \bigcup_{n=1}^{i-1} c^{-1}(n)).$$

□

3.3. Állítás. *Létezik olyan G_{F_1} gráf, melyre $\chi_B(G_{F_1}) = \aleph_0$.*

Bizonyítás. Vegyük az 1.71 definícióban megismert $[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ teret, és ezen a következő s leképezést: $x \in [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ esetén $s(x) := x \setminus \min(x)$. Ha $x \subseteq \mathbb{N}$-et azonosítjuk a monoton növő felsorolásával, akkor ez éppen az első elemének a kitörlését jelenti. Legyen G_s az s Borel-függvény grafikonja. A Galvin-Prikry tétel (1.73) segítségével megmutatható, hogy $\chi_B(G_s) = \aleph_0$. Indirekt tegyük fel, hogy G_s k-színezhető Borel módon. Ekkor $\exists H \subseteq \mathbb{N}$, $|H| = \aleph_0$, amin a színezés konstans, és ez ellentmondás. □

A véges gráfelméletben egy ismert, könnyű állítás, hogy ha egy irányított gráf minden csúcsának kifoka $\leq n$, akkor a gráf kromatikus száma $\leq 2n+1$.

3.4. Állítás. *Létezik olyan $G_{F_1,\ldots,F_n}$ gráf, melyre $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) \geq 2n+1$.*

Bizonyítás. Legyen $X = 2n+1$, és $F_i(x) = x + i \mod (2n+1)$. A $G_{F_1,\ldots,F_n}$ gráfban ekkor minden csúcs kifoka n, és könnyen látható, hogy a befoka is. Többszörös élek nincsenek. Így ez egy teljes, $(2n+1)$-csúcsú gráf, ennek kiszínezéséhez szükség van $(2n+1)$ színre. □

Mindezek alapján amiben reménykedhetünk, hogy $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) = 1, 2, \ldots, 2n+1$ vagy $\aleph_0$.

3.2. Egy függvény

Kezdjük a kérdéskör vizsgálatát az $n = 1$ esettel.

3.5. Tétel (Kechris-Solecki-Todorčević [14])**.** *Legyen X sztenderd Borel tér, $F : X \to X$ Borel-függvény. Ekkor $\chi_B(G_F) = 1, 2, 3$ vagy $\aleph_0$.*

Bizonyítás. Azt már megmutattuk, hogy $\chi_B(G_F) \leq \aleph_0$. Tegyük fel, hogy van egy $c : X \to k$ Borel-jólszínezésünk. Ebből fogunk csinálni egy 3-színezést, és ez elegendő a tétel belátásához. Jelölje $A_i = c^{-1}(i)$ a c színosztályait. Ezeket fogjuk B_i és C_i diszjunkt részekre felbontani, úgy, hogy $B := \bigcup_{i=0}^{k-1} B_i$ kettő, $C := \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i$ pedig egy színnel Borel-színezhető legyen.

- $B_0 := A_0, C_0 := \emptyset$
- $i > 0$ esetén $B_i := \{x \in A_i : F(x) \notin \bigcup_{j=0}^{i-1} B_j\}, C_i := A_i \setminus B_i$

Tehát a B_i halmazokat úgy gyártjuk le, hogy él csak kisebb indexű B_i-ből a nagyobb indexűbe mutathat, visszafele nem. Mivel A_i-k színosztályok voltak, így a B_i és C_i halmazok is függetlenek. Emiatt $B = \bigcup_{i=0}^{k-1} B_i$ halmazban minden irányított út legfeljebb k-csúcsú lehet. Ebből adódóan $\forall x \in B$ csúcsra $\exists n \leq k$, amire vagy $F^n(x) = F^{n+1}(x)$, vagy $F^n(x) \notin B$. Egy $x \in B$ csúcsra $e(x)$ legyen a legkisebb ilyen n. Ekkor $d(x) := e(x) \mod 2$ egy Borel 2-színezése B-nek.

A C_i halmazok mindig a ”maradékok” voltak, mégis, $C := \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i$ egy független halmaz lett. Ez azért van, mert egy x csúcs akkor kerülhetett C_i-be, ha $F(x) \in B$. Emiatt C-n belül nem futnak élek, így $x \in C$ esetén $d(x) := 2$ egy Borel 3-színezéssé terjeszti ki d-t.

□

A bizonyításból látszik, hogy ez a szép tétel azért igaz, mert egy nagyon erős tulajdonság, hogy G_F minden csúcsának a kifoka legfeljebb 1. A gráf véges sok színnel való színezhetősége teljesen megszelídítette a végtelen utakat is. Mindezek alapján jogosan várjuk, hogy $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n})$ is kicsi legyen, amennyiben a gráf véges sok színnel Borel-színezhető.

Ha megpróbáljuk ezt a módszert úgy általánosítani, hogy először az első függvény által meghatározott élek gráfját particionáljuk B-re és C-re, majd ezeket külön-külön a második függvény által meghatározott élek gráfján B_B, C_B és B_C, C_C részekre bontjuk, stb., akkor éppen a következőt kapjuk.

3.6. Következmény. *Legyen X sztenderd Borel tér, $F_1, \ldots, F_n : X \to X$ pedig Borel-függvények. Ekkor $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) = \aleph_0$ vagy $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) \leq 3^n$.*

Bizonyítás. Színezzük ki a csúcsokat 3 színnel mind az n grafikon által meghatározott élek gráfján, külön-külön. Így minden csúcshoz egy szín-n-est rendeltünk hozzá. Ilyenből 3^n-féle létezik, legyenek ezek a végső színezés színei. □

3.3. Több függvény

Az előző következmény értelmében minden n-re kaptunk egy véges, ám exponenciális felső korlátot. Ha okosabban általánosítjuk a 3.5 tétel bizonyítását, négyzetes felső korlátot is kaphatunk a Borel-kromatikus számra, ha az véges.

Az alábbi tétel lényegében Palamourdas ”The Least Avaible Subset” nevű lemmája, apróbb változtatásokkal.

3.7. Tétel. *Legyen X Borel-tér, $F_1, \ldots, F_n : X \to X$ pedig Borel-függvények. Tegyük fel, hogy $G_{F_1,\ldots,F_n}$ gráfra $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) < \aleph_0$. Ekkor $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) \leq 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2}$.*

Bizonyítás. A bizonyítást az $n = 2$ esetre mutatjuk meg, de ugyanígy működik $n > 2$ esetben is. $F_1 := F$, $F_2 := G$, legyen $c : X \to k$ egy Borel k-színezése $G_{F,G}$-nek, $A_0, \ldots, A_{k-1}$ színosztályokkal. Ezek segítségével most nem két, hanem három részre particionáljuk X-et: B_0, B_1 és B_2. Sorban haladunk a színosztályokon, és minden pontjukat berakjuk B_0, B_1, B_2 halmazok valamelyikébe: a lehető legkisebb indexűbe, amibe nem vezet belőle irányított él. Ezt tartsuk számon egy függvénnyel: ha $x \in B_i$ mellett döntöttünk, $j(x) := i$. Kezdetben $j(x) := 100$ $\forall x$-re. Tehát az i szerinti rekurzív konstrukció:

- $i = 0$ esetén minden $x \in A_0$-ra $j(x) := 0$.
- $i > 0$ esetén $x \in A_i$ csúcsra $j(x)$ legyen a legkisebb j index, amire $j(F(x)) \neq j$, $j(G(x)) \neq j$.

Végül $i \in 3$-ra legyen $B_i = j^{-1}(i)$. Ez valóban egy partíciója X-nek, és mindhárom B_i Borel.

A konstrukció lényege szerint $\forall i \in 3$-ra B_i-ből indul irányított él minden $j < i$ indexű B_j-be. Emiatt B_i halmazból legfeljebb $2-i$ él vezet szintén B_i-beli csúcsba. Speciálisan, B_2 független, azaz 1-színezhető.

Megállapíthatjuk továbbá, hogy mindhárom B_i-t az $A_1, \ldots, A_{k-1}$ halmazok k db független halmazra particionálnak, és B_i-n belül él csak kisebb indexűből nagyobb indexű A_j-be vezethet. Ezt használja ki az alábbi két állítás.

3.8. Állítás. *B_0 3-színezhető Borel módon.*

Bizonyítás. B_0 halmazt A_i-k független Borel-halmazokra particionálják. Egy ilyen partícióosztály csúcsait egyszerre fogjuk megszínezni, és A_i-ken i szerint csökkenő sorrendben haladunk. Legyen $B_0 \cap A_{k-1}$ minden csúcsának a színe 0. $i < k-1$ esetén tegyük fel, hogy már minden $j > i$-re kiszíneztük $B_0 \cap A_j$ halmaz pontjait. Ekkor $\forall x \in (B_0 \cap A_i)$ csúcsból kiinduló minden irányított él másik végpontjáról elmondhatjuk, hogy vagy nem B_0-beli, vagy már meg van színezve. Mivel minden x csúcsból legfeljebb két él indul ki, így tudunk választani egy legkisebb színt 3-ból, mely különbözik $F(x)$ és $G(x)$ színétől. Legyen ez az x csúcs színe. Ily módon az egész B_0-t ki tudtuk színezni. A színezés Borel, mert a színosztályokat k db lépésben, megszámlálható sok kvantorral, Borel-halmazzal és Borel-függvénnyel tudjuk definiálni. □

3.9. Állítás. *B_1 2-színezhető Borel módon.*

Bizonyítás. Ez az állítás ugyanúgy bizonyítható, mint az előző: B_1-ben minden csúcsból vezet él B_0-belibe, emiatt legfeljebb egy irányított él vezet másik B_1-beli csúcsba. Tehát A_i-k mentén i szerint csökkenő sorrendben haladva a színezéssel, mindig jut a kétféle színből egy a csúcsunknak.

□

Legyen a B_0 színezéséhez használt 3 szín $(0,0),(0,1),(0,2)$, B_1-hez használt két szín $(1,0)$ és $(1,1)$, a B_2 színe pedig $(2,0)$. Tehát $\chi_B(G_{F,G}) \leq 3+2+1$.

$n > 2$ esetén a bizonyítás ugyanígy működik: $B_0, \ldots, B_n$ halmazokat készítünk, B_i-ből legfeljebb $n-i$ db él vezet másik B_i-beli csúcsba, így B_i $n-i+1$ színnel színezhető. □

Tehát $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n})$ ha véges, akkor $\mathrm{O}(n^2)$ nagyságrendű felső korlátot tudunk mutatni rá. Lineáris korlát egyelőre nem ismert.

$n > 1$ esetén az $n = 2$ és 3 esetekről tudunk ennél jobbat mondani.

3.10. Tétel (Palamourdas)**.** *Legyen X sztenderd Borel tér, $F_1, F_2 : X \to X$ Borel-függvények. Ekkor $\chi_B(G_{F_1,F_2}) = \aleph_0$ vagy $\chi_B(G_{F_1,F_2}) \leq 5$.*

Azaz ebben az esetben teljesül a $2n+1$-es remény. A bizonyítás az előbbi 3.7 tétel bizonyításának egy továbbfejlesztése. Azon múlik, hogy a színezés, amit kaptunk, mutat szabályosságokat, amiket nem használtunk ki: például minden $(0,1)$ és $(0,2)$ színű csúcsból mutat él $(0,0)$ színűbe. Ilyen észrevételek segítségével könnyen meggondolható, hogy a $(0,1),(0,2),(1,2),(2,0)$ színosztályok uniója valójában három színnel is kiszínezhető.

$n = 3$ esetén a $2n+1$-et nem tudjuk belátni, de azért itt is ismerünk jobbat az $1+2+3+4 = 10$-nél.

3.11. Tétel (Palamourdas)**.** *Legyen X sztenderd Borel tér, $F_1, F_2, F_3 : X \to X$ Borel-függvények. Ekkor $\chi_B(G_{F_1,F_2,F_3}) = \aleph_0$ vagy $\chi_B(G_{F_1,F_2,F_3}) \leq 8$.*

A tétel bizonyítása rendkívül hosszú, és elolvasható [20] disszertációban.

3.4. Kommutáló függvények

Bár n-ben lineáris felső korlátban reménykedünk, ha az n db függvény által generált gráf kromatikus száma véges, ám csak négyzeteset ismerünk. Egy speciális esetben viszont tudunk lineáris felső korlátot adni: ha feltesszük, hogy az $F_1, \ldots, F_n$ függvények egymással kommutálnak, azaz $\forall i, j$ $F_i \circ F_j = F_j \circ F_i$. Ez egy erős megszorítás. Ilyen feltevéssel élve viszont egy igen szép eredményt bizonyított Palamourdas.

3.12. Tétel (Palamourdas)**.** *Legyen X sztenderd Borel tér, $F_1, \ldots, F_n : X \to X$ pedig olyan Borel-függvények, amik egymással páronként kommutálnak. Ekkor $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) = \aleph_0$ vagy $\chi_B(G_{F_1,\ldots,F_n}) \leq 2n+1$.*

Tehát kommutáló függvények esetében elértük a lehető legkisebb felső korlátot!

Bizonyítás. A bizonyítást $n = 2$-re mutatjuk meg, de a végén látni fogjuk, hogy ugyanígy működne $n > 2$-re is. Az F_1, F_2 jelölést cseréljük F, G-re. Tegyük fel, hogy $c : X \to k$ a $G_{F,G}$ egy Borel k-színezése. Ebből fogunk készíteni egy 5-színezést. Ehhez definiáljunk előbb egy segédszínezést: $\forall x \in X$ csúcsra $d(x) := c(F^k G^k(x))$. d-nek fontos tulajdonsága, hogy ugyanazt a színt adja egy x csúcs őseinek, k lépésre visszamenően, F és G mentén is. A kommutativitás miatt ez is egy jólszínezése a gráfnak: egy F által meghatározott él két végpontja x és $F(x)$, ezek d-színe $c(F^k G^k(x))$ és $c(F(F^k G^k(x)))$, melyek biztosan nem egyformák, hiszen c is jólszínezés volt. Hasonlóan, a G által meghatározott élek szerint is d megfelelő színezés. Most ebből kiindulva készítünk egy – eleinte rosszabbnak tűnő – $e_{-1} := d, e_0, ..., e_{k-1}$ színezés-sorozatot. Ezeket rekurzívan építjük fel a korábbiakból, és e_{k-1} már egy Borel 5-színezése lesz $G_{F,G}$-nek.

Legyen az öt szín, amit e_{k-1} végsősoron használ, $\{A, B, C, D, E\}$. Minden e_i a $k \cup \{A, B, C, D, E\}$ színhalmazt fogja használni.

- $i = 0$ eset: $e_1(x) := A$, ha $d(x) = 0$ volt, minden más esetben maradjon $e_1(x) = e_0(x) = d(x)$
- $0 < i < k$ eset: ha $d(x) \neq i$, akkor $e_i(x) := e_{i-1}(x)$ maradjon. Ha $d(x) = i$, akkor viszont $e_i(x)$ már $\{A, B, C, D, E\}$-beli lesz: belátjuk, hogy

  $$\{A, B, C, D, E\} \setminus \left(\{e_{i-1}(F(x)), e_{i-1}(G(x))\} \cup \{e_{i-1}(y) : y \in F^{-1}(x) \cup G^{-1}(x)\}\right)$$

  halmaz nem üres. Ez valójában a jólszínezés szempontjából még megengedett színek halmaza. $e_i(x)$ legyen ennek a lexikografikusan legkisebb eleme.

Tehát a d szerint i színű csúcsokat az i-edik lépésben, e_i definiálásakor színeztük át ”számról betűre”. Minden csúcs színét pontosan egyszer változtattuk a folyamat során. Nem teljesen nyilvánvaló, de nem is meglepő, hogy a kapott színezés Borel. Tehát a lényeg abban van elrejtve, hogy miért tudunk mindig egy jó színt választani $\{A, B, C, D, E\}$-ből az aktuálisan átszínezendő csúcsunknak.

Bevezetünk egy definíciót, mely adott x csúcs gráftávolság szerint i-sugarú környezetének d-színét tartja számon. Az i-sugarú környezetbe ezen szemléletben beleérjük, hogy egy irányított élen visszafele is léphetünk. Ennek segítségével tudunk minden hátramaradt részt bizonyítani.

3.13. Definíció. *Legyen $x \in X$ és $i < k$. Definiáljunk egy $P(x,i) : [-i,i]^2 \to k$ leképezést, melyre $P(x,i)(a,b) = c(F^{k+a}G^{k+b}(x)) = d(F^aG^b(x))$.*

3.14. Megfigyelés. Ha valamely x_1, x_2 csúcsokra $P(x_1,i) = P(x_2,i)$,
akkor $P(F(x_1), i-1) = P(F(x_2), i-1)$.

Ez szemléletesen nyilvánvaló: ha két csúcs i-környezetének színe megegyezik, akkor a szomszédaik $(i-1)$-környezete is. Nem szemléletesen abból a tényből következik, hogy $P(F(x), i-1)(a,b) = c(F^{k+a+1}G^{k+b}(x)) = P(x,i)(a+1,b)$.

3.15. Megfigyelés. Ha valamely x_1, x_2 csúcsokra $P(F(x_1),i) = P(F(x_2),i)$, akkor $P(x_1, i-1) = P(x_2, i-1)$.

Ez valójában ugyanaz az észrevétel, mint az előbb, csak azokat a szomszédokat vizsgálva, melyekhez irányított él mentén visszafele kell lépni. Itt is elmondható, hogy $P(x, i-1)(a,b) = c(F^{k+a}G^{k+b}(x)) = P(F(x),i)(a-1,b)$.

További észrevétel, hogy a $P(x_1,i) = P(x_2,i)$ feltétel magában foglalja, hogy x_1 és x_2 i-sugarú környezetei egymással élszíntartóan izomorfak, ahol élszín alatt azt értjük, hogy F vagy G függvény határozza-e meg az adott élt. Ez amiatt nem nyilvánvaló, mert nem egységes, hogy egy csúcs befoka mennyi.

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy egy pont e_i-színe csak az i-környezetének d-színezésétől függ.

3.16. Állítás. *Ha valamely x_1, x_2 csúcsokra és $i \geq 0$-ra $P(x_1,i) = P(x_2,i)$, akkor $e_i(x_1) = e_i(x_2)$.*

Bizonyítás. i-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $i = 0$-ra $P(x,i)$ a $(0,0) \mapsto d(x)$ hozzárendelés, emiatt $P(x_1,0) = P(x_2,0)$ annyit jelent, hogy $d(x_1) = d(x_2)$. Ebből következik $e_0(x_1) = e_0(x_2)$.

$i > 0$ esetén tegyük fel, hogy $i-1$-ig beláttuk az állítást. Felhasználhatjuk, hogy $P(x_1,i) = P(x_2,i)$ miatt $d(x_1) = d(x_2)$, így x_1 és x_2 színe ugyanazon e_j-nél vált "számról betűre". Ha $i < j$, akkor $e_i(x_1) = e_i(x_2)$ emiatt mindenképp teljesül. Ha $i = j$, akkor $e_i(x_1)$ és $e_i(x_2)$ színeket egyértelműen meghatározza x_1, illetve x_2 szomszédainak e_{i-1}-színe. Ezek viszont $P(x_1,i) = P(x_2,i)$ és az indukciós feltevés miatt tudjuk, hogy megegyeznek – itt megegyezés alatt azt értjük, hogy $e_{i-1}(F(x_1)) = e_{i-1}(F(x_2))$, illetve ugyanez F helyett F^{-1}-re, G-re és G^{-1}-re. Itt használtuk fel a fenti két megfigyelést. $\square$

Az állításból következik, hogy minden e_i, ezáltal e_{k-1} is Borel. $P(x,i)$ ugyanis rögzített i-re véges sok féle lehet, és $\forall y$-ra $\{x : P(x,i) = P(y,i)\}$ Borel. Emiatt e_i minden színosztálya véges sok Borel-halmaz uniója.

Nem maradt más hátra, mint belátni a lényegi állítást.

3.17. Állítás. *Tetszőleges $x \in d^{-1}(i)$ csúcsra*

$$\{A,B,C,D,E\} \setminus \big(\{e_{i-1}(F(x)), e_{i-1}(G(x))\} \cup \{e_{i-1}(y) : y \in F^{-1}(x) \cup G^{-1}(x)\}\big) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. i-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $i = 0$-ra az állítás nyilvánvaló. $i > 0$ esetén tegyük fel, hogy $i-1$-ig igaz, azaz $j < i$-re e_j színezések jóldefiniáltak. A kulcs észrevétel, hogy a teljes $F^{-1}(x)$, illetve $G^{-1}(x)$ halmaz e_{i-1} színei (külön-külön) megegyeznek. Ez azért van, mert például $y_1, y_2 \in F^{-1}(x)$ esetén $P(F(y_1), i)$ és $P(F(y_2), i)$ természetesen megegyezik, emiatt $P(y_1, i-1)$ és $P(y_2, i-1)$ is, így 3.4 állítás miatt $e_{i-1}(y_1) = e_{i-1}(y_2)$. Tehát legfeljebb négy szín lehet kizárva a $\{A,B,C,D,E\}$ halmazból. $\square$

Tehát valójában a lényegi állítás azon múlt, hogy egy csúcs F, illetve G mentén vett ősei azonos színűek, összesen k lépésre visszamenően. (Azért éppen k, mert a kiinduló c egy k-színezés volt, így d is, és d színosztályai szerint haladva készítettük el az e_{k-1} 5-színezésünket.) Ezt viszont az biztosította, hogy a c jólszínezésből egy olyan d-t készítettünk, mely egy csúcs színét egy "$2k$-val távolabbi" csúcs c-színéből határozza meg, így az összes olyan csúcs d-színe azonos lesz, akikből k db F, és k db G-lépés bármilyen sorrendje után egy fix közös csúcsba érkezünk meg. $\square$

3.18. Megjegyzés. A bizonyítás $n > 2$-re ugyanígy működik, $d(x) = c(F_1^k ... F_n^k(x))$ választással. Amikor egy csúcs színét "számról betűre" változtatjuk, itt ≤ 4 helyett $\leq 2n$ tiltott szín van.

Hivatkozások

[1] Stefan Banach and Alfred Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), no. 1, 244–277.

[2] Anton Bernshteyn, *Distributed algorithms, the Lovász local lemma, and descriptive combinatorics*, Inventiones mathematicae **233** (2023), no. 2, 495–542.

[3] Sebastian Brandt, Yi-Jun Chang, Jan Grebík, Cristoph Grunau, Václav Rozhoň, and Zoltán Vidnyánszky, *Local problems on trees from the perspectives of distributed algorithms, finitary factors, and descriptive combinatorics*, arXiv preprint arXiv:2106.02066 (2021).

[4] Balázs Bursics, *Borel equivalence relations and Ramsey theory* (2023).

[5] Clinton T. Conley, Steve Jackson, Andrew S. Marks, Brandon Seward, and Robin D. Tucker-Drob, *Hyperfiniteness and Borel combinatorics*, Journal of the European Mathematical Society **22** (2019), no. 3, 877–892.

[6] Clinton T. Conley, Andrew S. Marks, and Robin D. Tucker-Drob, *Brooks's theorem for measurable colorings* **4** (2016), e16.

[7] Randall Dougherty and Matthew Foreman, *Banach-Tarski decompositions using sets with the property of baire*, Journal of the American Mathematical Society **7** (1994), no. 1, 75–124.

[8] Gábor Elek, *Qualitative graph limit theory. Cantor dynamical systems and constant-time distributed algorithms*, arXiv preprint arXiv:1812.07511 (2018).

[9] Jacob Feldman and Calvin C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. i*, Transactions of the American mathematical society **234** (1977), no. 2, 289–324.

[10] Su Gao, *Invariant descriptive set theory*, Chapman and Hall/CRC, 2008.

[11] Łukasz Grabowski, András Máthé, and Oleg Pikhurko, *Measurable circle squaring*, Annals of Mathematics **185** (2017), no. 2, 671–710.

[12] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, 1995.

[13] Alexander S. Kechris and Andrew S. Marks, *Descriptive graph combinatorics*, preprint (2020).

[14] Alexander S. Kechris, Slawomir Solecki, and Stevo Todorčević, *Borel chromatic numbers*, Advances in Mathematics **141** (1999), no. 1, 1–44.

[15] Miklós Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem* (1990).

[16] Russell Lyons and Fedor Nazarov, *Perfect matchings as IID factors on non-amenable groups*, European Journal of Combinatorics **32** (2011), no. 7, 1115–1125.

[17] Andrew S. Marks, *A determinacy approach to Borel combinatorics*, Journal of the American Mathematical Society **29** (2016), no. 2, 579–600.

[18] Andrew S. Marks and Spencer T. Unger, *Borel circle squaring*, Annals of Mathematics **186** (2017), no. 2, 581–605.

[19] Benjamin D. Miller, *Measurable chromatic numbers*, The Journal of Symbolic Logic **73** (2008), no. 4, 1139–1157.

[20] Konstantinos Palamourdas, *1,2,3,...,2n+1, infinity!*, Ph.D. Thesis, 2012.

[21] Oleg Pikhurko, *Borel combinatorics of locally finite graphs*, arXiv preprint arXiv:2009.09113 (2020).

[22] Forte Shinko, *Lusin-Novikov via σ-ideals*.