Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fontaine és Colmez tétele

Anderlik Csaba

Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens

MSc diplomamunka

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2024.

Köszönetnyílvánítás

Szeretném kifejezni őszinte köszönetemet Zábrádi Gergelynek a támogatásáért és útmutatásáért, amit a dolgozatom elkészítése során nyújtott. Az irányítása, türelme és szakmai tanácsai nélkül nem sikerült volna elérnem ezt az eredményt.

Ezen kívül szeretném megköszönni Harcos Gergelynek és Maga Péternek, hogy 2022 nyarán részt vehettem a Rényi Intézet által rendezett nyári iskolán, ahol Benjamin Schraen előadásaiból inspirációt és kedvet kaptam ezen témakör megismeréséhez.

Továbbá szeretném megköszönni a családomnak a mindennapi bíztatást és lelki támogatást, amit az egész mesterszak alatt nyújtottak.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Két, az 1970 évektől meghatározó francia matematikus munkásságának köszönhetem a diplomamunkám témáját: Jean-Marc Fontaine és Pierre Colmez. Jean-Marc Fontaine életpályájának áttekintésével szeretném szemléltetni, bevezetni a diplomamunkámat, mivel az elmélet, amelyben megfogalmazódott és bizonyítást nyert a tétel, mind Fontaine zsenialitásának köszönhető. Fontaine sajnos 2019-ben itt hagyott minket, így hozzá való búcsúzásként barátai, matematikus társai írtak egy visszaemlékezést munkásságáról, hozzáfűződő kapcsolatukról a (3) cikkben, melynek írói Pierre Berthelot, Luc Illusie, Nicholas M. Katz, William Messing és Peter Scholze. A megemlékezés és a (9) önéletrajz segítségével mutatnám be Fontaine életét Colmez és Fontaine tétele szempontjából.

Jean-Marc Fontaine kutatói pályájának elindulását közvetetten Laurent Schwartz-nak, közvetlenül pedig Charles Pisot-nak köszönheti, mivel Pisot szemináriumai által ismerkedett meg a számelmélettel. Az egyik ilyen szemináriumon volt az első előadása is, ahol lokális testek bővítéseinek elágazásairól beszélt. Ezen előadás után Jean-Pierre Serre szárnyai alá vette. Serre támogátásának köszönhető doktori disszertációjának témája, mivel Fontaine a lokális testek feletti Artin-reprezentációk racionalitásáról szóló sejtését bizonyította disszertációként 1972-ben, mely sejtés megfogalmazása Serre-hez fűződik. Ezen előadás által és a disszertációnak köszönhetően Serre indította meg Fontaine-t a pályáján. Ezen pálya első állomása a lokális testekhez tartozó Galois csoportok p-adikus reprezentációinak szisztematikus tanulmányozása volt. Ez tekinthető Fontaine periódus gyűrűjeinek elméletének kezdetének.

Ezen gyűrűk elmélete Grothendieck munkásságának köszönhető, mivel Grothendieck létrehozott egy olyan funktort, amit akkoriban még csak mágikus funktorként emlegettek. Ezen funktor a p-adikus étale kohomológia csoportok és lokális testek feletti algebrai varietások filtrált de Rham kohomológia csoportjai között ad egy kapcsolatot. Ez a funktor Fontaine-t rendkívül lázba hozta, és ennek a megmagyarázására 1978-ban Rennes-ben tartott egy előadást, amivel az volt a célja, hogy ismertesse a programját ezen témakör megértéséhez. Ennek kezdeti eredménye volt egy olyan tenzor kategória megadása, mely a véges dimenziós p-adikus reprezentációk Tannakian részkategóriájával ad meg egy hozzárendelést. Ezen kategória minden esetben olyan objektumokat tartalmaz, amelyek mindig kommutatívak lesznek, a csoporthatásra nézve felcserélhetőek és rendelkeznek extra struktúrákkal, mint például a fokszámozottság és a filtráció. Ezen típusú algebrákat Fontaine $(\mathbb{Q}_p, G_K)$ algebráknak nevezte el, ahol G_K a vizsgált abszolút Galois csoport. Ezen az előadáson továbbá ismertetett egy ilyen gyűrűt, melyet egyszerűen B-nek jelölt el Barsotti-ra való emlékezésként. Ezen gyűrűt manapság Fontaine Hodge-Tate periódus gyűrűjének nevezik, azonban a jelölésében megmaradt az utalás Barsotti-ra, mivel B_{HT}-ként szokás jelölni.

Azonban mit is takar ezen B_{HT} gyűrű? Legyen K egy p-adikus test, melynek algebrai lezárása legyen $\overline{K}$, így $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-t nevezzük az abszolút Galois csoportjának. Továbbá legyen $\mathbb{C}_K$ az algebrailag zárt test telítése, ekkor a Fontaine Hodge-Tate gyűrűjét úgy definiálhatjuk, hogy $B_{HT} := \mathbb{C}_K \left[t, t^{-1}\right]$ vagy a Tate-csavarások segítségével is ismertethetjük, mivel $\mathbb{C}_K \left[t, t^{-1}\right]$ izomorf $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_K(i)$, ahol $\mathbb{C}_K(i)$ a $\mathbb{C}_K$ i-edik Tate-csavarása.

Továbbá a későbbiekben három új gyűrűt is bevezetett, melyek tartalmazásra nézve csökkenő sorrendben de Rham periódus gyűrűnek, félig-stabil periódus gyűrűnek és kristályos periódus gyűrűnek nezett el. Ezen gyűrűk központi szerepben vannak a p-adikus reprezentációk klasszifikációjában, tehát a p-adikus Hodge elméletben, melyeket B_{dR}-nek, B_{st}-nek és B_{cris}-nek szokás jelölni. Ezen gyűrűk konstrukciója hosszabb bevezetést igényel, így csak Fontaine elmélete elnevezésű fejezetben mondjuk ki pontosan. Azonban ezen három gyűrűnek fennáll a kapcsolata a Hodge-Tate periódus gyűrűvel, mivel Fontaine de Rham gyűrűjének fokszámozott algebrája pont a Hodge-Tate periódus gyűrű lesz. Továbbá a kristályos és félig-stabil periódus gyűrűvel való kapcsolata abban rejlik, hogyha vesszük a $K \otimes B_{cris}$-nek a fokszámozott algebráját, akkor az izomorf lesz a de Rham periódus gyűrű fokszámozott algebrájával, tehát a B_{HT}-vel. A félig-stabil periódus gyűrű meg a kristályos periódus gyűrű bővítése bizonyos elemek logaritmusával, így szokás log-kristályos periódus gyűrűnek is nevezni. Ezen periódus gyűrűk bevezetése, és a hozzájuk tartozó B-megengedettség és B gyengén megengedettség tulajdonságok által a p-adikus reprezentációk klasszifikációja reménytelibbé vált. Ennek egy eredménye lett egy hierarhia kialakulás közöttük, tehát például ha egy p-adikus reprezentáció de Rham tulajdonságú, akkor Hodge-Tate tulajdonságú is.

A klasszifikáció mellett a kezdetektől jelen volt a diplomamunkánk témáját adó tétel tartalma, tehát a gyengén megengedettség és megengedettség közötti kapcsolat. Fontaine és Colmez tételét úgy is nevezik, hogy azon tétel, mely által a gyengén megengedettségből következik a megengedettség, ahol a két különböző megengedettség arra utal, hogy a (φ, N)-modulusok Hodge-poligonján és a Newton-poligonján definiálható Hodge-szám és Newton-szám ha megegyezik, akkor megengedettnek nevezzük, ha tetszőleges részobjektumára nézve a Newton-szám nagyobb vagy egyenlő, mint a Hodge-szám, akkor gyengén megengedettnek nevezzük. Azonban ezen tétel csak egy segítség, hogy belássuk, hogy a félig-stabil p-adikus reprezentációk kategóriája és a megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok kategóriája között van két funktor, amelyek a kategóriák ekvivalenciáit adja és egymás kvázi-inverzei.

Ezen két kategória mit is takar igazán. A G_K Galois csoport p-adikus reprezentációjának nevezzük a $\mathbb{Q}_p$ feletti reprezentációit G_K-nak, tehát egy véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$ vektortérként lehet gondolni rájuk, vagy mint egy homomorfizmusként G_K-ból $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$-be. Ezen reprezentációt félig-stabilnak nevezzük, ha B_{st}-megengedett, amely ekvivalens azzal, hogy a következő leképezes egy izomorfizmus: $\alpha_{st}(V) : B_{st} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V) \to B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, ahol $\mathbf{D}_{st}(V) := (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$, ahol K_0 a K maradéktestéhez tartozó Witt-vektorok gyűrűjének hányadosteste. Ezen $\mathbf{D}_{st}$ azon funktor, amely az ekvivalenciát adja a félig-stabil p-adikus reprezentációk és a megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok kategóriájába. A (φ, N)-modulusok olyan objektumok, melyek véges dimenziós K_0-vektorterek, melyeken két leképezés, egy φ és N leképezés definiálható. A φ leképezésre teljesül, hogy bijekció, σ-félig-lineáris, ahol a σ az abszolút Frobenius leképezés K_0-on. Az N-et szokás ezen K_0-vektorteren definiált monodrómiának is nevezni, mely K_0-lineáris és teljesül rá, hogy $N\varphi = p\varphi N$. Továbbá ezen vektorteren van egy filtráció is.

Fontaine és Colmez tételének manapság már született legalább öt különböző bizonyítása, melyek közül az első Fontaine és Colmez nevéhez fűződik, amely később bemutatásra is kerül. Ezen első bizonyítás 2000-ben született meg, melyet az Inventiones mathematicae (6) egyik cikkében közöltek. A bizonyítás során láthatjuk majd, hogy bizonyos $\mathbb{C}_K$ együtthatós formális hatványsorok majdnem szürjektivitásából következnek. Ez a bizonyítás vezetett oda, hogy manapság már csak megengedettségnek nevezzük a korábbi majdnem megengedettséget. Két évvel később Colmez (5) az eredeti ötletüknek egy kévés bizonyítást adott. Néhány évvel Colmez után Fontaine és Laurent Fargues közös munkája során megkonstruáltak egy olyan Noether sémát $\mathbb{Q}_p$ felett, mely új lehetőségeket nyitott a p-adikus Hodge-elméletben. Ezt a sémát Fargues-Fontaine görbének nevezték el. Bár ez nem véges típusú $\mathbb{Q}_p$ felett, de projektívként vizsgálva egy egyenesként tekinthető $\mathbb{Q}_p$ felett. Így körülbelül úgy írhatnánk le ezt a geometriai objektumot, mintha a kristályos periódus gyűrű részeinek direktösszegét vizsgálnánk, és azt projektívvé tennénk. Fontaine és Fargues definiáltak egy ekvivalenciát az objektum félig-stabil, nulla meredekséggel rendelkező vektornyalábjainak kategóriája és bizonyos p-adikus reprezentációk kategóriája között. Ennek az ekvivalenciának segítségével a (8) cikkükben egy konstruktívabb bizonyítást adtak a tételünknek.

Crew (7) munkájának volt köszönhető, hogy Kedlaya a (13) cikkében bizonyította a p-adikus monodrómia tételt, amely mondhatni analogonja Grothendieck l-adikus monodrómia tételének. Berger a (2) cikkében egy merőben más megközelítése prezentált az eredeti bizonyításhoz képest, ő a kristályos reprezentációkhoz hozzárendelhető (φ, Γ)-modulusok és a filtrált φ-modulusok segítségével bizonyította a tételt, amelyhez a Frobenius leképezés meredekségei által definiált Kedlaya filtrálást használta, melyet a p-adikus monodrómia tétel által fejtett ki.

A következő bizonyítás Kisin (14) nevéhez fűződik, aki szintén a filtrált (φ, Γ)-modulusok kategóriáját használta. Azonban ő egy funktort definiált ezen kategóriából a konnexióval rendelkező differenciál modulusok kategóriájába. Ezen bizonyítás általánosítását mutatta be Genestier és Lafforgue a (11) cikkükben.

Az általam olvasott bizonyítások közül az utolsó Plût (18) bizonyítása volt, akinek a bizonyítás leginkább Colmez kévés bizonyításához áll a legközelebb, mivel Plût által használt Banach-Colmez terek kategóriája ekvivalens a Colmez által használt véges dimenziós Banach-terek kategóriájával. Továbbá Plût a másik (17) cikkében meg Colmez fundamentális lemmájának egy új bizonyítását írja le, mely elég hasonló, ahhoz amilyen formában majd a diplomamunkában kerül bizonyításra. Az általam ismertetett bizonyítás igazán Yi Ouyang, Shenxing Zhang és Jinbang Yang nevéhez fűződik.

Ezen rövid összefoglaló segítségével már látjuk a célt, így röviden bemutatom, hogy a célig vezető úton, milyen eszközökkel ismerkedünk meg. Az első fejezet folyamán két olyan témakör kerül bemutatásra, amely majd szükséges alapként fogunk használni. Az egyik az Ax-Sen-Tate elmélete, amely tartalmazza az Ax-Sen lemmákat p karakterisztika és 0 karakterisztika esetén. Továbbá bemutatja Ax és Sen metódusát, amely hasznunkra lesz Fontaine gyűrűjeinél és a hozzájuk tartozó p-adikus reprezentációknál. A fejezet másik része a megengedettséghez szükséges eszközöket biztosítja az (F, G)-gyűrűk segítségével, és tartalmaz egy tételt, amely F-reprezentációk kategóriája és R^G vektorterek kategóriája között mutat meg egy szükséges funktort, amelyhez hasonlót fogunk használni bizonyos p-adikus reprezentációk kategóriája és a megfelelő struktúrával rendelkező vektorterek kategóriája között.

A második fejezet folyamán hosszasan bemutatjuk Fontaine elméletét, melyben megismerésre kerülnek a periódus gyűrűk a hozzá tartozó reprezentációk. Továbbá bemutatásra kerülnek a (φ, N)-modulusok. Ezek folyamán Fontaine és Colmez tételéhez szükséges két legfontosabb eszközt is bizonyítunk, amelyekből az egyik Colmez fundamentális lemmája, mely egy rendkívül összetett technikai állítás sok lemmával, és Dieudonné-Manin tétele, mely meg arról szól, hogy hogyan tudjuk klasszifikálni a φ-modulusokat K_0 felett, vagy más néven izokristályok klasszifikációjáról szól. Itt φ-modulusokon olyan (φ, N)-modulusokat értünk, melyeken a monodrómiát azonosan nullának definiáljuk.

A következő fejezetben az olyan eszközök találhatóak, melyek specifikusan a tétel bizonyításában lesznek kihasználva ilyen például a $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentációk, és a hozzájuk tartozó (φ^r, N)-modulusok. Ebben a részben kezeljük le az 1 és 2 dimenziós p-adikus reprezentációkat is, mivel ezek könnyen klasszifikálhatók. Sőt mi több megmutatjuk, hogy mit értünk a (φ, N)-modulusok fundamentális komplexusán.

Mindezek után az utolsó fejezetben kimondjuk és bizonyítjuk Fontaine és Colmez tételét plusz a félig-stabil p-adikus reprezentációk kategóriájának az ekvivalenciáját a megengedetett, filtrált (φ, N)-modulusokkal.

2. fejezet

Elméleti alapozás

Fontaine periódus gyűrűjeinek az elméletéhez és a diplomamunka tételének bizonyításához szükséges néhány olyan konstrukció, fogalom, állítás szeretnék megfogalmazni, melyek nélkülözhetetlenek. Ezen fejezetben különösen olyan eszközök találhatók, melyek külön alfejezeteket érdemeltek meggyőződésem szerint.

Az első eszközök csoportja James Ax, John Tate és Peter Sen nevéhez füződik. Ezen három brilliáns elméhez köthető konstrukciók olyan eszközöket biztosítottak, amelyek hosszú távon újabb és újabb eredmények létrejöttét segítették elő. Az egyik ilyen eredmény a diplomamunkám témája is. Külön-külön véve Tate nevéhez füződik az egésznek az alapja, tehát ő volt, aki egy olyan lehetőséget látott ebben a területben, amelyet képes is volt eredményekben megmutatni. Ax és Sen nevéhez a Tate által elindított folyamatok elméletté formálása, amely arról szól, hogy egy p-adikus test feletti véges bővítésnek a reprezentációit hogyan lehet egy megfelelő végtelen bővítés reprezentációjaként vizsgálni, és Ax nevéhez fűződik két olyan lemma, amely a közös metódusukhoz fontos eszköz lesz. Az alfejezet egyik fontos tételét adja Sen, amely fontos lépése lesz Fontaine és Colmez tételének bizonyításához.

A másik alfejezet Fontaine periódus gyűrűjeinek általános alakját definiálja, mutatja be, és ad egy olyan tételt, amely bizonyos reprezentációk kategóriája és bizonyos vektorterek kategóriája között ad egy funktort. Ezen tétel azért is lesz fontos, mivel a p-adikus reprezentációk megfelelő kategóriája, és a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező vektorterek kategóriája között fennálló funktor létezése és a tulajdonságainak bizonyítása megegyezik vagy elég hasonló, mint ezen általános eset bizonyításával.

2.1. Tate és Sen elmélete

Az alfejezetbeli Ax és Sen metódusához, és a Sen operátorhoz tartozó állítások bizonyításához Fontaine és Ouyang (10) jegyzetét és Brinon és Conrad (4) jegyzetét használom.

Az alfejezet során tegyük fel, hogy K egy teljes, nem-arkimédeszi test, és ezt csak, akkor változtassuk ha kikötünk valami mást K-ról.

2.1.1. Ax-Sen lemma

Ezen rész Ax (1) könyvét követve kerül bemutatásra. Két fő eleme az Ax-Sen lemma $p > 0$ karakterisztika és 0 karakterisztika esetén. A lemmákat, ha egyszerűbben szeretnénk megfogalmazni, akkor mondhatni azt mondják el, hogyha a bővítésbeli elem közel van egy bizonyos értékelés szerint a konjugáltaihoz, akkor egy adott alaptestbeli elemhez is közel van, tehát mondhatni ő is eleme az alaptestnek.

2.1.1.1. Definíció. Legyen L egy algebrai bővítése a K testnek, akkor Δ_L függvényt definiáljuk úgy, hogy tetszőleges α-ra, mely eleme L egy szeparábilis bővítésének, akkor $\Delta_L(\alpha) := \min\{v(\alpha' - \alpha)\}$, ahol α' az α konjugáltjai L felett és v az értékelés L-en.

A definícióból látszódik, hogy $\Delta_L(\alpha) = \infty$, ha minden α'-re $v(\alpha' - \alpha) = \infty$, tehát $\alpha' = \alpha$, ami ekvivalens azzal, hogy $\alpha \in L$.

2.1.1.2. Tétel. (*Ax-Sen lemma, ha a karakterisztika* 0) *Legyen K egy* 0 *karakterisztikájú test, és legyen L egy algebrai bővítése K-nak. Továbbá, ahogy előbb is α eleme L egy szeparábilis bővítésének, akkor létezik egy olyan*

$l \in L$, hogy

$$v(\alpha - l) > \Delta_L(\alpha) - \frac{p}{(p-1)^2} v(p).$$

2.1.1.3. Lemma. *Legyen $F(X) \in \overline{L}[X]$ egy 1 főegyütthatós n-ed rendű polinom, ahol $n \geqslant 2$. Tegyük fel, hogy F-nek az összes gyökére $\overline{L}$ felett teljesül, hogy az értékelése nagyobb, mint r. Továbbá legyen $F^{(d)}$ a d-edik deriváltja F-nek, akkor ha $\lambda \in \overline{L}$ gyöke F d-edik deriváltjának, akkor a következő egyenlőtlenség teljesül:*

$$v(\lambda) \geqslant r - \frac{1}{n-d} v\left(\binom{n}{d}\right).$$

Bizonyítás. Legyen $F(X)$ polinom gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ a polinom együtthatói. Az $F(X)$ együtthatóira gondolhatunk, mint $(n-i)$-ed fokú $\mathbb{Z}$ együtthatós homogén polinom együtthatói, melynek gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$. Ez által a_i-kre teljesül, hogy $v(a_i) \geqslant (n-i)r$. Vegyük az F-nek a d. deriváltját, akkor $\frac{1}{d!}F(X)^{(d)}$ konstanstagja $a_d = \binom{n}{d}(-1)^{n-d}\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-d}$ lesz, ahol β-k a d. derivált gyökei.

Vegyük az értékelését a_d-nek, akkor azt kapjuk, hogy

$$v(a_d) = v\left(\binom{n}{d}\right) + \sum_{i=1}^{n-d} v(\beta_i),$$

akkor ezen egyenlet átrendezésével, és a $v(a_d)$-re való becsléssel kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n-d} v(\beta_i) \geqslant (n-d)r - v\left(\binom{n}{d}\right).$$

Mivel $(n-d)$ darab tagja van az összegnek, így van egy olyan tag, tehát van egy gyöke a d. deriváltnak, amelyre teljesül, hogy

$$v(\beta_i) \geqslant r - \frac{1}{n-d} \cdot v\left(\binom{n}{d}\right).$$

Ez által beláttuk a lemmát. □

Bizonyítás. Legyen $\epsilon(d)$ a következő összeg tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\epsilon(d) = \sum_{i \geqslant 0}^{p^i \leqslant d} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}.$$

A tétel bizonyításához elég belátni, hogyha $L(\alpha)/L$ d-ed fokú bővítés esetén létezik egy $l \in L$, hogy

$$v(\alpha - l) \geqslant \Delta_L(\alpha) - \epsilon(d)v(p).$$

Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni, kis d esetén könnyen látszódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(d-1)$-ig teljesül az állítás.

Legyen $P(X)$ α minimálpolinomja L felett, és legyen ezen α-val eltoltja $R(X) = P(X + \alpha)$. $R(X)$ gyökei úgy fognak kinézni, hogy $\alpha' - \alpha$, ahol α'-k α konjugáltjai.

Legyen $r = \Delta_L(\alpha)$ és $\beta = \mu + \alpha$ olyan, melyre igaz a lemma feltételei, hogy

$$v(\beta - \alpha) \geqslant r - \frac{1}{d - p^s} v\left(\binom{d}{p^s}\right),$$

ahol p^s azon maximális p-hatvány, amely osztja d-t, kivéve ha d p-hatvány, mivel akkor s a maximálisnál eggyel kisebb. β ilyen választása által gyöke lesz P p^s-edik deriváltjának, melynek foka legfeljebb $d - p^s$, így β algebrai L egy legfeljebb $d - p^s$. fokú bővítésének. Ha $\beta \in L$, akkor $\beta = l$ választás megfelelő vagy ha $\beta \notin L$, akkor létezik egy l, melyre teljesül az egyenlőtlenség β-val az indukció miatt.

Mostmár csak annyit kell megmutatni, hogy miért teljesül az egyenlőtlenség $(\alpha - l)$-re is. Két esetre bontjuk a szerint, hogy d p-hatvány vagy nem.

Ha nem p-hatvány, akkor

$$v\left(\binom{d}{p^s}\right) = v\left(\frac{d!}{(d-p^s)!p^s!}\right) = v(d!) - v((d-p^s)!) - v(p^s!) = \frac{s_p(p^s) + s_p(d-p^s) - s_p(d)}{p-1} = 0,$$

ahol s_p azon függvény, amely egy adott szám p szerinti felírását jelöli, így tényleg nulla lesz a tört. Ez által következik, hogy $v(\mu) \geqslant r$ teljesül. A β konjugáltja L felett $\beta' = \mu' - \alpha'$ alakúak lesznek, így $\Delta_L(\beta) \geqslant r$, tehát

$$v(\alpha - l) \geqslant \min\{v(\alpha - \beta), v(\beta - \alpha)\} \geqslant r - \epsilon(d)v(p).$$

Ha d p-hatvány, akkor $v\left(\binom{d}{p^s}\right) = v(p)$, és így $v(\mu) \geqslant r - \frac{v(p)}{p^{s+1}-p^s}$. β konjugáltjaira továbbá teljesül, hogy

$$v(\beta' - \beta) = v(\mu' - \mu + \alpha' - \alpha) \geqslant r - \frac{v(p)}{p^{s+1} - p^s},$$

tehát $\Delta_L(\beta) \geqslant r - \frac{v(p)}{p^{s+1}-p^s}$. Ebből következik, hogy

$$v(\beta - \alpha) \geqslant r - \frac{v(p)}{p^{s+1} - p^s} - \epsilon\left(p^{s+1} - p^s\right) v(p) = r - \epsilon\left(p^{s+1}\right) v(p),$$

és $\alpha - l = \alpha - \beta + \beta - l$ felírás segítségével adódik az állítás. □

2.1.1.4. Tétel. (*Ax-Sen lemma, ha a karakterisztika* > 0) *Legyen K egy p karakterisztikájú, tökéletes test, és legyen L egy algebrai bővítése K-nak. Továbbá, ahogy előbb is α eleme L egy szeparábilis bővítésének, akkor tetszőleges $\epsilon > 0$-ra teljesül, hogy létezik egy olyan $l \in L$, hogy*

$$v(\alpha - l) > \Delta_E(\alpha) - \epsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $L = E(\alpha)$, akkor ezen bővítés szeparábilis lesz, tehát létezik egy $c \in L$, melyre teljesül, hogy a nyoma 1 lesz. Ha veszünk egy $\epsilon > 0$, akkor tudunk olyan $r \in \mathbb{N}$-t megadni, hogy $v\left(c^{p^{-r}}\right) > -\epsilon$. Azonban a $c^{p^{-r}}$ nyomának a p^r-edik hatványa ugyanúgy egy lesz, mivel c-nek 1 a nyoma. Így feltehető, hogy c-nek az értékelése legalább $-\epsilon$.

Ha vesszük a következő halmazt: $S := \{\sigma \mid \sigma : L \hookrightarrow \overline{E}\ E\text{-beágyazás}\}$, akkor a $c\alpha$ nyoma felírható, mint

$$\mathrm{Tr}_{L/E}(c\alpha) = \sum_{\sigma \in S} \sigma(c\alpha) = \sum_{\sigma \in S} \sigma(c)\sigma(\alpha).$$

Nevezzük el $\mathrm{Tr}_{L/E}(c\alpha)$-t T-nek, akkor kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$v(\alpha - T) = v\left(\sum_{\sigma \in S} \sigma(c)(\alpha - \sigma(\alpha))\right) \geqslant \min\{v(\sigma(c)(\alpha - \sigma(\alpha)))\} \geqslant \Delta_E(\alpha) - \epsilon,$$

mivel $\sum_{\sigma \in S} \sigma(c)\alpha = Tr_{L/E}(c)\alpha = \alpha$ és Δ_E definíciója miatt. Ez által következik a tétel. □

2.1.1.5. Definíció. Legyen K egy $p > 0$ karakterisztikájú test, akkor K^{rad}-ot definiáljuk úgy, hogy

$$K^{\mathrm{rad}} := \{x \in \overline{K} \mid \text{ha létezik olyan } n, \text{ hogy } x^{p^n} \in K\}.$$

Továbbá K tökéletes lezárását jelöljük K^{perf}-fel.

2.1.1.6. Állítás. *Ha K egy teljes, nem-arkimédeszi test, G_K legyen a Galois csoportja a szeparábilis lezártnak, és ezen csoporttal való hatás kiterjed folytonosan $\mathbb{C}_K = \overline{K^s} = \widehat{\overline{K}}$-ra is. Továbbá legyen H egy zárt részcsoportja*

G_K-nak, és a Galois-elmélet alaptétele miatt legyen L a hozzá tartozó bővítés, tehát $L = (K^s)^H$ vagy másképpen $H = Gal(K^s/L)$, akkor a következő teljesül, hogy

$$\mathbb{C}_K^H = \begin{cases} \widehat{L}, & \text{ha } K \text{ karakterisztikája } 0, \\ \widehat{L^{rad}}, & \text{ha } K \text{ karakterisztikája } > 0. \end{cases}$$

Ha $H = G_K$, akkor ez arra módosul, hogy

$$\mathbb{C}_K^H = \begin{cases} \widehat{K} = K, & \text{ha } K \text{ karakterisztikája } 0, \\ \widehat{L^{rad}}, & \text{ha } K \text{ karakterisztikája } > 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha a karakterisztika nulla, akkor a két egyenlőségből az az irányú tartalmazás látszik, hogy $L \subseteq \mathbb{C}_K^H$, és így folytonosság miatt $\widehat{L} \subseteq \mathbb{C}_K^H$. Ha a karakterisztika $p > 0$, akkor $L^{rad} \subseteq \mathbb{C}_K^H$, és folytonosság miatt $\widehat{L^{\mathrm{rad}}} \subseteq \mathbb{C}_K^H$, mivel legyen $x \in L^{\mathrm{rad}}$, akkor definíció miatt létezik egy n, hogy $x^{p^n} \in L$, így tetszőleges $h \in H$-ra $(h(x))^{p^n} = x^{p^n}$, tehát $h(x) = x$.

A másik irányú tartalmazáshoz elég 0 karakterisztika esetén megmutatni a tartalmazást, mivel a p karaktrisztiájú eset következik belőle.

Legyen $\epsilon > 0$ és $\alpha \in \mathbb{C}_K^H$. Továbbá válasszunk α-hoz elemek olyan sorozatát $\overline{K}$-ban, melyekre teljesül, hogy $v(\alpha - a_n) \geqslant n$ minden n-re, tehát a sorozat határértéke $\overline{K}$-ban α lesz. Ez által

$$v(h(a_n) - a_n) \geqslant \min\{v(h(a_n - \alpha)), v(a_n - \alpha)\} \geqslant n$$

minden $h \in H$-ra. Így a sorozat minden elemére teljesül, hogy $\Delta_L(a_n) \geqslant n$, amiből az következik, hogy létezik egy olyan N index, hogy $a_N \in L$, és teljesül rá, hogy $v(a_N - \alpha) \geqslant N - \epsilon$, tehát $\alpha \in \widehat{L}$.

Térjünk rá a visszavezetésre. Tegyük fel, hogy a test karakterisztikája p, akkor $\widehat{K^{rad}}$ tökéletes. Így következő lesz igaz, hogy $K^s \subset (K^{\mathrm{rad}})^s = \overline{K} \subset (\widehat{K^{\mathrm{rad}}})^s = \widehat{\overline{K^{\mathrm{rad}}}} \subset \mathbb{C}_K$, így G_K által invariáns alteret véve $K \subset K^{\mathrm{rad}} \subset \widehat{K^{\mathrm{rad}}}$. Így K-t $\widehat{K^{\mathrm{rad}}}$-dal helyettesíthetjük, tehát feltehető, hogy K tökéletes, így $\widehat{L^{\mathrm{rad}}} = \widehat{L}$. Ez által, mivel előbb beláttuk, hogy $\mathbb{C}_K^H = \widehat{L}$, így $\mathbb{C}_K^H = \widehat{L^{\mathrm{rad}}}$ is adódik. □

2.1.2. Ax és Sen metódusa

A következő pár állítás Ax és Sen metódusát fogja taglalni, amely Tate ötleteire épült. Ezen metódus két lépésből áll, amelyből az első lépés majdnem étale leszállás, amely azt biztosítja, hogy a $H^1\left(G_K, \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{C}_K\right)\right)$ kohomológiacsoport, ahol a folytonos kohomológiát értjük, megismeréséhez miért elég csak $H^1\left(\mathrm{Gal}(K_\infty/K), \mathrm{GL}_d\left(\widehat{K_\infty}\right)\right)$ csoportot vizsgálni, majd a következő lépés a telítetlenítés, ahol telítetlenítést az angol nyelvű cikkekben decompletion-nek neveznek, amely arra utal, hogy a telítés "inverzét" visszük végbe, tehát a $H^1\left(\mathrm{Gal}(K_\infty/K), \mathrm{GL}_d\left(K_\infty\right)\right)$ vizsgáljuk. A K_∞-n K azon teljesen elágazó bővítését értjük, mely bővítésnek a Galois csoportja $\mathbb{Z}_p$.

A majdnem étale leszállás ismertetésére szükségünk van Hilbert 90. problémája.

2.1.2.1. Tétel. *(Hilbert 90. problémája) Legyen K egy test L egy Galois bővítése K-nak, akkor*

1. *$H^1(Gal(L/K), L) = 0$,*
2. *$H^1(Gal(L/K), L^\times) = 1$,*
3. *Tetszőleges $n \geqslant 1$-re, $H^1(Gal(L/K), GL_n(L))$ triviális.*

Greenberg (12) könyvében lévő bizonyítást követjük, amely eredetileg Cartier ötletein alapult.

Bizonyítás. Elég belátni arra az esetre, hogyha L/K véges bővítés, mivel a végtelen bővítés következik a véges esetből, mivel $\mathrm{Gal}(L/K)$ provéges csoport, tehát a véges csoportok inverz limesze, így ha véges csoportok esetén tudjuk az állítást, akkor az átmegy az inverz limeszükre is.

Az első állítás következik abból, hogy tetszőleges véges bővítésnek létezik normálbázisa.

Legyen c egy kociklus, $x \in L^n$, és ezek által b legyen x-ben így definiálva:

$$b(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} c_\sigma(\sigma(x)).$$

Ha veszünk olyan u lineáris formát, mely 0 minden $b(x)$-re, ahol $x \in K^n$, akkor tetszőleges $h \in L$ esetén is $b(hx)$-t u nullába viszi, mivel

$$0 = u(b(hx)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} u(c_\sigma(\sigma(h)\sigma(x))) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(h)u(c_\sigma(\sigma(x))).$$

Az automorfizmusok lineáris függetlenségének tétele miatt $u(c_\sigma(\sigma(x))) = 0$ minden σ esetén és, mivel c_σ invertálható, így $u = 0$.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorok, melyek b általi képei lineárisan függetlenek, így ha vesszük a szokásos bázisról $b(x_i)$-re való áttérés mátrixát, akkor az invertálható lesz, tehát c triviális kociklus, mivel $\sigma(B) = c_\sigma^{-1}B$ teljesül, ahol B az áttérési mátrix. □

Innentől a majdnem étale leszállás konstrukcióját ismertetem.

2.1.2.2. Állítás. *Legyen $H = Gal(\overline{K}/K_\infty)$. Ha H_0 nyílt részcsoportja H-nak és $U \in H^1(H_0, GL_d(\mathbb{C}_K))$, amelyre teljesül, hogy $v(U_\sigma - 1) \geqslant c$, ahol $c > 0$ minden $\sigma \in H_0$ esetén. Ez által létezik egy olyan $d \times d$-s $\mathbb{C}_K$-beli elemeket tartalmazó invertálható mátrix, hogy $v(M-1) \geqslant \frac{c}{2}$, és teljesül rá, hogy*

$$v(M^{-1}U_\sigma\sigma(M) - 1) \geqslant c + 1$$

minden $\sigma \in H_0$ esetén.

Továbbá ha az is igaz, hogy $M^{-1}U_\sigma\sigma(M) = \underline{1}$, ahol $\underline{1}$ a d dimenziós egységmátrix, akkor

$$v(M-1) \geqslant \frac{c}{2}$$

minden $\sigma \in H_0$ esetén.

Bizonyítás. Ezen állítás bizonyításának menete megegyezik Hilbert 90. tételének bizonyításának menetével, így azon menetet követve bizonyítódik az állítás. □

2.1.2.3. Állítás. $H^1(H, GL_d(\mathbb{C}_K)) = 1$.

Bizonyítás. Vegyünk egy X kociklust H-ban $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)$-beli értékekkel, akkor be kell látni, hogy X triviális. Azonban az előző állítás miatt elég belátni, hogyha veszünk egy $c > 0$ konstansot, és egy olyan H_0 nyílt normálosztót H-ban, melyre teljesül, hogy minden $h \in H_0$ esetén $v(X_h - 1) > c$, akkor X megszorítása H_0-ra triviális. A folytonosság miatt tudunk ilyen H_0-t választani.

Továbbá ha vesszük a következő egzakt sorozatot:

$$1 \longrightarrow H^1\left(H/H_0, \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{C}_K^{H_0}\right)\right) \xrightarrow{j} H^1(H, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)) \xrightarrow{i} H^1(H_0, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)),$$

ahol j a kiterjesztés által indukált leképezés, az i meg a megszorítás által indukált leképezés. Az előző miatt $H^1(H_0, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)) = 1$, így a másik két csoport izomort, azonban Hilbert 90. tétele miatt tudjuk, hogy $H^1\left(H/H_0, \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{C}_K^{H_0}\right)\right)$ triviális, mivel H/H_0 véges bővítés. Így ebből adódik X trivialitása is. □

2.1.2.4. Állítás. *A következő leképezés egy bijekció a két folytonos kohomológiacsoport között:*

$$j : H^1\left(\Gamma, GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)\right) \longrightarrow H^1(G_K, GL_d(\mathbb{C}_K)),$$

ahol $\Gamma = Gal(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$.

Bizonyítás. Vegyük az előző bizonyításban használt egzakt sorozatot ebben a felállásban:

$$1 \longrightarrow H^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{C}_K^H\right)\right) \longrightarrow H^1(G_K, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)) \longrightarrow H^1(H, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)).$$

Az előző állítás miatt tudjuk, hogy $H^1(H, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K)) = 1$, és az Ax-Sen lemmák miatt tudjuk, hogy $\widehat{K_\infty} = \mathbb{C}_K^H$, így adódik, hogy

$$H^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{C}_K^H\right)\right) \longrightarrow H^1(G_K, \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}_K))$$

egy izomorfizmus. □

Ez volt a majdnem étale leszállás, így térjünk át a telítetlenítésre. K_∞ definiálása által legyen K_n azon test, amely K-nak azon bővítése, melynek Galois csoportja $\Gamma_n := \Gamma^{p^n}$, ahol a generátorát jelöljük γ_n-nel.

2.1.2.5. Definíció. Tetszőleges $n \geqslant 0$ esetén definiáljuk a Tate-féle normalizált nyomfüggvényt, mint

$$\begin{aligned} R_n : K_\infty &\longrightarrow K_n, \\ x &\longmapsto p^{-m}\mathrm{Tr}_{K_{n+m}/K_n}(x), \end{aligned}$$

ha $x \in K_{n+m}$, ahol m nem nulla természetes szám, Tr meg a szokásos nyomleképezés.

A Tate-féle normalizált nyomfüggvényről belátható, hogy létezik két c_1, c_2 pozitív konstans, hogy

$$v(R_n(x)) \geqslant v(x) - c_1,$$

ahol $x \in \widehat{K_\infty}$, és

$$v((\gamma_n - 1)^{-1}x) \geqslant v(x) - c_2,$$

ahol $x \in X_n := \left\{x \in \widehat{K_\infty} \mid R_n(x) = 0\right\}$.

2.1.2.6. Állítás. *Legyen $\delta > 0$ és $r \geqslant 0$ adott. Továbbá b, b'-re teljesül, hogy $b \geqslant 2c_1 + 2c_2 + \delta$ és $b' \geqslant b$. Ha $U = 1 + U_1 + U_2$, ahol $U_1 \in M_d(K_n)$ és $v(U_1) \geqslant b - c_1 - c_2$, továbbá $U_2 \in M_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$ és $v(U_2) \geqslant b' \geqslant b$. Ez által létezik egy olyan $M \in GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$, $v(M-1) \geqslant b - c - d$, ahol $c, d > 0$, melyre igaz, hogy*

$$M^{-1}U\gamma_r(M) = 1 + V_1 + V_2,$$

ahol teljesül, hogy $V_1 \in M_d(K_n)$ és $v(V_1) \geqslant b - c_1 - c_2$, továbbá $V_2 \in M_d(\widehat{K_\infty})$ és $v(V_2) \geqslant b' + \delta$.

Bizonyítás. Legyen $U_2 = R_n(U_2) + (1 - \gamma_r)V$, amelyre teljesül, hogy

$$v(R_n(U_2)) \geqslant v(U_2) - c_1, \text{ és } v(V) \geqslant v(U_2) - c_1 - c_2.$$

Így

$$(1+V)^{-1}U\gamma_n(1+V) = (1 - V + V^2 - \dots)(1 + U_1 + U_2)(1 + \gamma_n(V)) = 1 + U_1 + R_n(U_2) + \dots,$$

ahol a további tagok már legalább másodfokú kifejezések. Ha a következő azonosításokat tesszük, hogy $M = 1 + V$, $V_1 = U_1 + R_n(U_2)$ és V_2 meg legyen az összeg további tagjai, akkor egy olyan mátrixot kapunk, mely a szükséges tulajdonságokkal rendelkezik. □

2.1.2.7. Következmény. *Ha az előző állítás feltételeit meghagyjuk, akkor teljesül, hogy létezik egy olyan $M \in GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$ is, melyre igaz, hogy $v(M-1) \geqslant b - c_1 - c_2$ és $M^{-1}U\gamma_n(M) \in GL_d(K_n)$.*

Bizonyítás. Ha az előző állítást megismételjük b-re, $b + \delta$, $b + 2\delta$-ra és így tovább, és vesszük ezen mátrixok limeszét, akkor megkapjuk a keresett M-et. □

2.1.2.8. Állítás. *Legyen* $B \in M_{d\times s}\left(\widehat{K_\infty}\right)$*. Ha létezik egy* $V_1 \in GL_d(K_i)$ *és* $V_2 \in GL_s(K_i)$*, ahol* $n \geqslant i$*, továbbá* $v(V_1 - 1) > c_2$*,* $v(V_2 - 1) > c_2$*,* $\gamma_n(B) = V_1 B V_2$*, akkor* $B \in M_{d\times s}(K_i)$*.*

Bizonyítás. Vegyük a B mátrixot és a B mátrix R_i általi képét, akkor ha belátjuk, hogy ezen két mátrix különbsége azonosan nulla mátrix, akkor abból következik, hogy B mátrixelemei K_i-beliek. Azt tudjuk, hogy $B - R_i(B)$ elemei $\widehat{K_\infty} - R_i\left(\widehat{K_\infty}\right)$-beli elemek lesznek. Az R_i-ről tudjuk, hogy K_i lineáris és felcserélhető γ_i-vel is, így

$$\begin{aligned}\gamma_i(B - R_i(B)) - B - R_i(B) &= V_1(B - R_i(B))V_2 - (B - R_i(B)) = \\ &= (V_1 - 1)(B - R_i(B))V_2 + V_1(B - R_i(B))(V_2 - 1) - (V_1 - 1)(B - R_i(B))(V_2 - 1),\end{aligned}$$

tehát $v(\gamma_i(B - R_i(B)) - B - R_i(B)) > v(B - R_i(B)) + c_2$, amelyből következik, hogy $B - R_i(B) = 0$, mivel $v(B - R_i(B)) \geqslant \infty$. □

2.1.2.9. Állítás. $GL_d(K_\infty)$ *beágyazása* $GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$*-be indukál egy bijekciót:*

$$i : H^1(\Gamma, GL_d(K_\infty)) \longrightarrow H^1\left(\Gamma, GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)\right).$$

Továbbá tetszőleges folytonos $\sigma \to U_\sigma$ *kociklus eleme* $Z^1\left(\Gamma, GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)\right)$*-nak. Ha teljesül rá, hogy*

$$v(U_\sigma - 1) > 2c_1 + 2c_2$$

minden $\sigma \in \Gamma$ *esetén, akkor létezik egy olyan* $M \in GL_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$*, hogy* $v(M - 1) > c_1 + c_2$ *és* $\sigma \to U'_\sigma = M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$*, ahol* $U'_\sigma \in GL_d(K_r)$*.*

Bizonyítás. A i szürjektívből következik M-nek a létezése, így elég a bijektivitást bizonyítani.

Legyen X egy kociklusa Γ-nak, melynek értékei $\mathrm{GL}_d\left(\widehat{K}_\infty\right)$-beliek. Ekkor létezik egy $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $\sigma \in \Gamma_n$-beli elemre teljesül, hogy $v(X_\sigma - 1) > 2c_1 + 2c_2$ a folytonosság miatt. Továbbá a 2.1.2.7. következményt használva létezik egy olyan $M \in \mathrm{GL}_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$, hogy $v(M - 1) > c_1 + c_2$, és igaz rá, hogy

$$X'_{\gamma_n} = M^{-1}X_{\gamma_n}\gamma_n(M),$$

így $X'_{\gamma_n} \in \mathrm{GL}_d(K_n)$. Ha minden $\sigma \in \Gamma$-ra $X'_\sigma = M^{-1}X_{\sigma_n}\sigma_n(M)$, akkor a 2.1.2.8 állítás miatt ha $V_1 = X'^{-1}_{\gamma_n}$ és $V_2 = \sigma(X'_{\gamma_n})$ választást tesszük, akkor $X'_\sigma \in \mathrm{GL}_d(K_n)$, amiből következik a szürjektivitás, mivel tetszőleges $\sigma \in \Gamma$-ra $X'_\sigma\sigma(X'_{\gamma_n}) = X'_{\sigma\gamma_n} = X'_{\gamma_n\sigma} = X'_{\gamma_n}\gamma_n(X'_\sigma)$, és ezen egyenlet átrendezésével $\gamma_n(X'_\sigma) = X'^{-1}_{\gamma_n}X'_\sigma\sigma(X'_{\gamma_n})$ azonosságot kapjuk, ami megfelel a 2.1.2.8. állításban lévő feltételnek, így i szürjektív lesz.

Végül lássuk be az injektivitást. Legyen X, X' két kociklusa Γ-nak, melyek értékei $GL_d(K_\infty)$-beliek és kohomológok $\mathrm{GL}_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$-ben. Akkor minden $\sigma \in \Gamma$-ra létezik egy $M \in \mathrm{GL}_d\left(\widehat{K_\infty}\right)$, hogy $M^{-1}X_\sigma\sigma(M) = X'_\sigma$. Ha n-et elég nagynak válasszuk, akkor a 2.1.2.8. állítás miatt következik, hogy $M \in \mathrm{GL}_d(K_n)$, mivel X_{γ_n} és X'_{γ_n} kohomológok lesznek $\mathrm{GL}_d(K_\infty)$-ben. $\gamma_n \in \Gamma_n$ esetén teljesül, hogy $\gamma_n(M) = X^{-1}_{\gamma_n}MX'_{\gamma_n}$. Ez által következik, hogy X és X' is kohomológok lesznek $\mathrm{GL}_d(K_\infty)$-ban is, tehát i injektív. □

2.1.2.10. Tétel. *A* $G_K \to \Gamma$ *leképezés indukál egy leképezést a folytonos kohomológiák között:*

$$\eta : H^1(\Gamma, GL_d(K_\infty)) \longrightarrow H^1(G_K, GL_d(\mathbb{C}_K)),$$

és továbbá teljesül, hogy $GL_d(K_\infty)$ *beágyazása* $GL_d(\mathbb{C}_K)$*-be bijektív.*

Bizonyítás. Az előző állítást és a 2.1.2.4. állítást használva következik a tétel, mivel mindkét állítás bijekció, így a kompozíciójuk is bijekció lesz. □

2.1.3. Sen operátora

Legyen W egy $\mathbb{C}_K$-reprezentációja G_K Galois-csoportnak, és legyen W dimenziója d. Továbbá legyen

$$\widehat{W_\infty} := W^H = \{\omega \mid \omega \in W, \quad \sigma(\omega) = \omega \quad \forall\, \sigma \in H\},$$

ha $\mathbb{C}_K^H = \widehat{K_\infty}$, akkor $\widehat{W_\infty}$ egy $\widehat{K_\infty}$-vektortér, melyen hat $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$. Legyen W_r egy d-dimenziós reprezentációja Γ-nak K_r felett.

2.1.3.1. Tétel. *A $\mathbb{C}_K \otimes_{\widehat{K_\infty}} \widehat{W_\infty} \longrightarrow W$ természetes leképezés egy izomorfizmus.*

Bizonyítás. Ezen tétel a 2.1.2.3. állítás egy más alakban megadott formája, tehát 2.1.2.3-ból következik a tétel. ☐

2.1.3.2. Tétel. *Minden $r \in \mathbb{N}$-re és W_r egy K_r-reprezentációra, melynek Γ feletti dimenziója d, akkor*

$$\widehat{K_\infty} \otimes_{\widehat{K_r}} W_r \longrightarrow \widehat{W_\infty}$$

leképezés egy izomorfizmus.

Bizonyítás. Ezen tétel a 2.1.2.9. állítás másképpen leírva, tehát 2.1.2.9-ból következik a tétel. ☐

2.1.3.3. Definíció. 1. $\widehat{W}_\infty := \widehat{K}_\infty \otimes_{K_r} W_r$, és $\widehat{W_\infty}$-ben W_r-t definiáljuk úgy, hogy $1 \otimes W_r$.

2. Az $\omega \in \widehat{W}_\infty$ vektort K-végesnek nevezzük, ha Γ általi eltoltja generál egy véges dimenziós K-vektorteret. Így definiálhatjuk W_∞-t, mint

$$W_\infty := \left\{ w \in \widehat{W}_\infty \mid w \ K\text{-véges} \right\},$$

amely $\widehat{W}_\infty$-nak egy K_∞ altere, amelyen hat a Γ.

2.1.3.4. Állítás. *1. $W_\infty = K_\infty \otimes_{K_r} W_r$,*

2. $\widehat{W}_\infty \cong \widehat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W_\infty$.

Bizonyítás. A definíció miatt a $W_\infty \supseteq K_\infty \otimes_{K_r} W_r$, mivel W_∞ egy K_∞-altere $\widehat{W_\infty}$-nek, amelyen Γ hat. Ez által csak a másik irányú tartalmazást szükséges belátni.

Legyen $\{e_1, \ldots, e_d\}$ egy bázisa W_r-nek, amely $\widehat{W_\infty}$-nek is bázisa, tehát tetszőleges $w \in W_\infty$ felírható, mint $w = \sum_i \lambda_i e_i$. Legyen X azon véges dimenziós K-vektortér, amelyet Γw generál. Legyen X-nek egy bázisa $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$, akkor e_i bázisról w_j bázisra való áttérési mátrix legyen $B \in M_{d\times s}\left(\widehat{W_\infty}\right)$. Tegyük fel, hogy $\gamma_r(w_1, \ldots, w_s) = (w_1, \ldots, w_s)V_2$ és $\gamma_r(e_1, \ldots, e_s) = (e_1, \ldots, e_s)V_1$ teljesül, akkor $\gamma_r(B) = V_1^{-1}BV_2$. Ha elég nagynak válasszuk r-et, akkor 2.1.2.8. állítás miatt teljesülni fog, hogy $B \in M_{d\times s}(K_\infty)$, tehát $w \in K_\infty \otimes_{K_r} W_r$. ☐

W legyen egy d dimenziós $\mathbb{C}_K$-reprezentációja G_K csoportnak. Legyen továbbá W_r-nek egy bázisa $\{e_1, \ldots, e_d\}$ K_r felett, amely W_∞-nek a bázisa is K_∞ felett és W-nak is. Továbbá legyen $\sigma \in \Gamma \mapsto U_\sigma \in \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ egy kociklus. Ha W reprezentációra homomorfizmusként gondolunk, akkor legyen $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}_K}(W)$. Ez által $\rho(\gamma_r) = U_{\gamma_r} \in \mathrm{GL}_d(K_r)$, melyre teljesül, hogy $v(U_{\gamma_r} - 1) > c_1 + c_2$. Ha $\sigma \in \Gamma$, $v(U_\sigma - 1) > c_1 + c_2$, akkor

$$\log(U_\sigma) := \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{(U_\sigma - 1)^k}{k}$$

konvergál egy $\mathrm{GL}_d(K_r)$ mátrixhoz.

2.1.3.5. Definíció. Legyen $\sigma \in \Gamma$-ra, és legyen $\log(\sigma) = \log_\gamma(\sigma)$ egy egyértelmű $a \in \mathbb{Z}_p$, melyre $\sigma = \gamma^a$. Minden $g \in G$-re, legyen $\log(g) := \log(g_\Gamma)$.

2.1.3.6. Definíció. Legyen W egy $\mathbb{C}_K$-reprezentáció, akkor a hozzá tartozó $\Theta = \Theta_W$ Sen-operátort úgy definiálhatjuk, hogy

$$\Theta = \frac{\log U_{\gamma_r}}{\log(\gamma_r)} = \frac{\log U_\sigma}{\log(\sigma)}.$$

2.1.3.7. Tétel. *Θ egy egyedi K_∞ lineáris endomorfizmusa W_∞-nak, amelyhez létezik egy Γ_w nyílt részcsoportja Γ-nak minden $w \in W_\infty$ esetén, melyre*

$$\sigma(w) = \exp(\log(\sigma)\Theta)(w)$$

teljesül minden $\sigma \in \Gamma_w$-re.

Bizonyítás. Legyen $\{e_1, \dots, e_d\}$ egy bázisa W_∞-nak, akkor tetszőleges $w \in W_\infty$ felírható ezen elemek lineáris kombinációjaként $\left(w = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i e_i\right)$. Így $\Gamma_w = \Gamma_r \cap \Gamma_{\lambda_1} \cap \dots \cap \Gamma_{\lambda_d}$, amely egy nyílt részcsoportja Γ-nak. Ez által tetszőleges $\sigma \in \Gamma_w$-re teljesül, hogy

$$\exp(\log(\sigma)\Theta) = \exp(\log(U_\sigma)) = U_\sigma,$$

így $\sigma(w)$ megadható, mint $\exp(\log(\sigma)\Theta)(w)$. Ez bizonyítja a formula létezését.

Ha ezen formula létezik, akkor tetszőleges $\sigma \in \Gamma_r \cap \Gamma_{\lambda_1} \cap \dots \cap \Gamma_{\lambda_d}$, ahol $\sigma = \gamma_r^a$. Ha veszünk egy elemet W_r-ből, akkor az megadható U_σ segítségével vagy az előző formula segítségével, így tehát

$$U_\gamma^a = U_\sigma = \exp(\log(\sigma)\Theta).$$

Ha vesszük mindkét oldal logaritmusát kapjuk, hogy

$$a \cdot \log(U_\gamma) = \log(U_\sigma) = \log(\sigma)\Theta,$$

mivel tudjuk, hogy Θ egyértelmű, így adódik a formula egyértelműsége, ha az előző egyenletet leosztjuk $\log(\sigma)$-val. □

2.1.3.8. Következmény. *Minden $w \in W_\infty$ igaz lesz, hogy*

$$\Theta(w) = \frac{1}{log(\sigma)} \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-}padikusan}} \frac{\sigma^t(w) - w}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-}padikusan}} \frac{\gamma^t(w) - w}{t},$$

tehát Γ kommutál Θ-val W_∞-n, és G kommutál Θ-val W-n.

Bizonyítás. A Sen operátor ezen definíciója következik abból, ha a $\exp(\log(\sigma)\Theta)(w)$ leképezést Taylor-sorba fejtjük, és nézzük az első tagját, akkor a nulla helyen vizsgálva adódik ezen formula. □

2.1.3.9. Következmény. *Minden $w \in W_\infty$-re. $\Theta(w) = 0$ akkor, és csak akkor teljesül ha w-nak a Γ-orbitja véges, tehát w stabilizátora Γ egy nyílt részcsoportjának.*

Bizonyítás. Az előző következményből és az előző tételből rögtön következik. □

2.1.3.10. Következmény. *Legyen W és W' két $\mathbb{C}_K$-reprezentációja G_K-nak.*

1. $\Theta_{W \oplus W'} = \Theta_W \oplus \Theta_{W'}$,
2. $\Theta_{W \otimes W'} = \Theta_W \otimes 1 + 1 \otimes \Theta_{W'}$,
3. $\Theta_{Hom(W,W')} = (f \mapsto f \circ \Theta_W - f \circ \Theta_{W'})$,
4. *Ha W' egy rész-reprezentációja W-nak, akkor $\Theta_{W'} = \Theta_{W|W'}$.*

Bizonyítás. A következmény 3. állítását kívéve a többi következik a Θ definíciójából és az előző következményből.

A harmadik állításhoz írjuk fel $\Theta_{\mathrm{Hom}(W,W')}(w)$ Taylor-sorát 0-ban:

$$\begin{aligned}\sigma^t f(\sigma^{-t}w) - f(w) &= (1 + t \cdot \log(\sigma))f((1 - t \cdot \log(\sigma))w) + O(t^2)f(w) - f(w) = \\ &= t \cdot \log(\sigma)f(w) - t \cdot f(\log(\sigma)w) + O(t^2)f(w).\end{aligned}$$

Erre alkalmazva Θ-nak a 2.1.3.8. következménybeli definícióját kapjuk a 3. állítást. □

2.1.3.11. Állítás. *W_∞-nek létezik egy olyan bázisa, amelyhez tartozó Θ operátor mátrixának elemei K-beliek.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma \in \Gamma$ tetszőleges, akkor tudjuk, hogy Θ-val való felcserélhetőség miatt Θ és $\sigma(\Theta)$ hasonló mátrixok. Azonban, mivel Θ-ra nézve invariáns elemek mind K-beliek, így azon mátrixok, amelyek hasonlóak Θ-val mind olyanok, melynek elemei K-beliek. □

2.1.3.12. Tétel. *Θ magja egy $\mathbb{C}_K$-altere W-nak és, amely G_K invariáns elemek által van generálva, tehát $Ker(\Theta) = \mathbb{C}_K \otimes_K W^G$.*

Bizonyítás. Legyen X a Θ magja. Azt tudjuk, hogy azon elemek, amelyek invariánsak G_K-ra nézve Θ magjában vannak, így elég azt belátni, hogy X-et azon elemek generálják, amelyek G_K által fixek. Továbbá G_K hatás és Θ egymással való felcserélhetősége miatt, így X egy $\mathbb{C}_K$-reprezentációja G_K-nak, tehát X_∞ egy jól-definiált halmaz ebben az esetben. Így elég találni K_∞-nek egy olyan bázisát, mely X_∞-beli elemekből áll, mivel linearitás miatt kiterjed X-ra a Θ.

Ha $w \in X_\infty$, akkor 2.1.3.9. következmény miatt w Γ-orbitja véges, tehát X_∞-n a Γ általi hatás folytonos, így 2.1.2.1. tételből következik, hogy létezik véges bázisa X_∞-nek, amelyet Γ elemei fixen hagynak. □

2.1.3.13. Tétel. *Legyen W_1 és W_2 két $\mathbb{C}_K$-reprezentáció, és Θ_1, Θ_2 a hozzájuk tartozó Sen-operátorok. A Θ_1 és Θ_2 akkor, és csak akkor egyezik meg, ha W_1 és W_2 izomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_K}(W_1, W_2)$, és Θ a hozzá tartozó Sen operátor. Két Sen operátort, akkor nevezünk azonosnak ha létezik egy olyan izomorfizmus $f : W_1 \to W_2$, amelyre teljesül, hogy

$$\Theta_2 \circ f = f \circ \Theta_1.$$

Ezen tulajdonság a 2.1.3.10. következmény 3. állítása miatt azonos azzal, hogy $f \in Ker(\Theta)$. Továbbá a 2.1.3.12. tétel miatt tudjuk, hogy ez azt jelenti, hogy $W^{G_K} \otimes_K \mathbb{C}_K = Ker(\Theta)$.

Tegyük fel, hogy W_1, W_2 izomorfak, tehát létezik egy izomorfizmus, amely bármely G_K-beli elemmel felcserélhető. Ez által megkonstruálható egy $W^{G_K} \otimes_K \mathbb{C}_K$-beli izomorfizmus, amely teljesíti az azonosság követelményeit.

Tegyük fel, hogy Θ_1, Θ_2 azonosak, tehát adott egy $f \in W^{G_K} \otimes_K \mathbb{C}_K$ izomorfizmus, amely felcserélhető a Sen operátorokkal. Vegyük W^{G_K}-nak egy K-bázisát: $\{f_1, \ldots, f_n\}$-t. Vegyük továbbá W_1-nek és W_2-nek egy tetszőleges bázisát, akkor az f-nek a létezése igazolja, hogy $\overline{f_i}$-khez léteznek olyan $c_i \in \mathbb{C}_K$-k, hogy

$$\det\left(c_1\overline{f_1} + \cdots + c_n\overline{f_n}\right) \neq 0,$$

ahol $\overline{f_i}$ az f_i-hez tartozó mátrix. Ez által, ha a c_i konstansokat kicseréljük x_i változókra, akkor az így kapott többváltozós polinom nem lehet azonosan nulla polinom, így mivel K egy végtelen elemszamú test így léteznek olyan λ_i elemei, hogy

$$\det\left(\lambda_1\overline{f_1} + \cdots + \lambda_n\overline{f_n}\right) \neq 0.$$

Ez által a $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ izomorfizmus megfelelő választás lesz W_1 és W_2 között. □

2.1.4. Sen tétele

2.1.4.1. Tétel. *(Sen tétele) Legyen V egy $\mathbb{Q}_p$-reprezentációja G_K-nak, és $\rho : G_K \longrightarrow Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ a hozzá tartozó homomorfizmus. Tegyük fel, hogy K-nak a maradékteste algebrailag zárt, és $\rho(G_K)$-nak a Lie algebrája $\mathfrak{g}$, akkor $\mathfrak{g}$ a legkisebb $\mathbb{Q}_p$-altere $End_{\mathbb{Q}_p}(V)$-nek, amelyre teljesül, hogy $\Theta \in \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}$.*

A következő lemma szükséges lesz a tétel bizonyításához.

2.1.4.2. Lemma. *Legyen L egy Galois-bővítése K testnek, akkor legyen $G = Gal(L/K)$ egy p-adikus Lie csoport, $\{G(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ egy p-adikus Lie filtrációja. Tegyük fel, hogy van egy olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre teljesül, hogy $\lambda : G(n) \to \mathbb{Q}_p$ folytonos függvény, és $x \in \overline{L}$ olyan elem, amelyre igaz, hogy*

$$\lambda(\sigma) \equiv (\sigma - 1)x \pmod{p^m} \text{ minden } \sigma \in G(n)\text{-re, és } m \in \mathbb{Z}\text{-re.}$$

Akkor létezik egy olyan c konstans, melyre teljesül, hogy

$$\lambda(\sigma) \equiv 0 \pmod{p^{m-c-1}} \text{ minden } \sigma \in G(n)\text{-re, és } m \in \mathbb{Z}\text{-re.}$$

Bizonyítás. Átskálázás miatt feltehető, hogy $m = 0$. Legyen $\overline{\lambda}$ a λ függvényének a $\mathbb{Z}_p$-vel kifaktorizált képe, tehát $\overline{\lambda(\sigma)} = \lambda(\sigma) + \mathbb{Z}_p$. A $\overline{\lambda}$ egy kohatár, mivel $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ beinjektálható $L/\mathcal{O}_L$-be, amiből következik, hogy $\overline{\lambda}$ 1-kociklus, tehát $\overline{\lambda}$ homomorfizmus, mivel $G(n)$ triviálisan hat $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$-n.

Legyen $H = Ker\left(\overline{\lambda}\right)$ és $E = L^H$, akkor az Ax-Sen lemma miatt tudjuk, hogy $(\sigma - 1) \in \widehat{\mathcal{O}_L}$, és létezik egy olyan $y \in E$, melyre teljesül, hogy $y \equiv x \pmod{p^{-1}}$. Továbbá így teljesül, hogy

$$\lambda(\sigma) \equiv (\sigma - 1)x \equiv (\sigma - 1)y \pmod{p^{-1}} \text{ minden } \sigma \in G(n)\text{-re.}$$

Legyen $g \in G_K$ egy olyan elem, amelyre igaz, hogy gH generálja $G(n)/H$-t, és legyen $\lambda(g) = (g-1)y + p^{-1}z$, ahol $z \in \mathcal{O}_E$. Bővítéselméletből tudjuk, hogyha $K_n = K^{G(n)}$ és E egy véges ciklikus bővítése K_n-nek, akkor $Tr_{E/K_n}(\mathcal{O}_E) \subset p^{-c}[E : K_n]\mathcal{O}_{K_n}$ teljesül, így ezt használva itt is kapjuk, hogy

$$[E : K_n]\lambda(g) \in p^{-c-1}[E : K_n]\mathcal{O}_{K_n},$$

így $\lambda(g) \equiv 0 \pmod{p^{-c-1}}$. Továbbá így tetszőleges $\sigma \in G(n)$-re is igaz lesz, tehát adódik a lemma. □

Bizonyítás. (Sen tétel bizonyítása)

Legyen V-nek egy $\mathbb{Q}_p$-bázisa $e_1, \ldots, e_d$ ha $\dim(V) = d$, és $\rho(\sigma)$ mátrixa legyen meg U_σ az $e_1, \ldots, e_d$ bázisban. Továbbá tegyük fel, hogy K_∞/K $\mathbb{Z}_p$ feletti körosztási bővítés.

A 2.1.3.11. állítás miatt létezik egy olyan $e'_1, \ldots, e'_d$ bázisa W_∞-nek, amely egy olyan K-alteret generál, amely stabil Γ egy Γ_m részcsoportjára nézve. Ha U' egy kociklus ezen bázis által megadva, akkor tetszőleges $\sigma \in G_K$ elem esetén U'_σ invertálható $d \times d$-s mátrix lesz. Jelöljük ezen bázisok közötti áttérési mátrixot M-mel, akkor $M^{-1}U'_\sigma\sigma(M) = U_\sigma$ teljesül tetszőleges $\sigma \in G_K$ esetén. Így ha például M_Θ-val jelöljük a Sen-operátor mátrixát, akkor tetszőleges G_K-beli egységelemhez közeli σ-ra teljesül, hogy $U'_\sigma = \exp(\log \circ \chi(\sigma)(M_\Theta))$, így feltehető, hogy a Sen operátor mátrixának elemei K-beli elemek.

A tétel állítását megfogalmazhatjuk úgy is, hogyha veszünk egy f $\mathbb{Q}_p$-lineáris formát akkor, és csak akkor tűnik el $\mathfrak{g}$-n, ha f kiterjesztése $\mathbb{C}_K$ által eltűnik Θ-n.

Legyen $G_n = \{\sigma \in G \mid U_\sigma \equiv I \text{ és } (\log \circ \chi)(\sigma)M_\Theta \equiv 0 \pmod{p^m}\}$ ha $n \geqslant 2$, és legyen

$$G_\infty = \bigcap_{n=2}^{\infty} G_n = \{\sigma \in G \mid U_\sigma = I \text{ és } \chi(\sigma) = 1\}.$$

Továbbá legyen $\breve{G} = G_2/G_\infty$ és $\widetilde{G_m} = G_m/G_\infty$ ha $m \geqslant 2$, akkor $\breve{G}$ egy p-adikus Lie-csoport, melynek egy Lie filtrációját adja $\left\{\widetilde{G_m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Ha $L = \overline{K}^{G_\infty}$, akkor a 2.1.1.6. állítás miatt, így $\mathbb{C}_K^{G_\infty} = \widehat{L}$. Azt tudjuk ez által, hogy tetszőleges $\sigma \in G_\infty$-re $M^{-1}\sigma M = I$, így az áttérési mátrix elemeire is igaz, hogy $\widehat{L}$-beliek, így M_Θ és $M^{-1}M_\Theta M$ elemeire is teljesül, hogy $\widehat{L}$-beliek. Ez által elég csak $\widehat{L}$-ben belátni a tételt $\breve{G}$-beli elemek esetén. Továbbá még feltehető az is, hogy algebrai egész elemek az áttérési mátrix elemei.

Ha $n > n_0$, $\sigma \in \widetilde{G_n}$, $U'_\sigma \equiv I \pmod{p^n}$, akkor $MU_\sigma = U'_\sigma\sigma(M)$ egyenlet azt mutatja, hogy $\sigma(M) \equiv M \pmod{p^n}$ minden $\sigma \in \widetilde{G_n}$-re. Továbbá az Ax-Sen lemma alapján igaz minden n-re, hogy létezik egy $M_n \in \mathrm{GL}_d(\widehat{L})$, hogy $M_n \equiv M \pmod{p^{n-1}}$ és $\sigma(M_n) = M_n$ minden $\sigma \in \widehat{G_n}$-re. Ha $\sigma \in \widehat{G_n}$ és $n \geqslant 2$, akkor $U_\sigma \equiv I + log(U_\sigma)$, és $U'_\sigma \equiv I + (\log \circ \chi)U_\sigma = I + (\log \circ \chi)(\sigma) \cdot M_\Theta \pmod{p^{2n}}$. Ha U'_σ kicseréljük az előző egyenletben, akkor kapjuk, hogy $M + M(\log U_\sigma) \equiv \sigma(M) + (\log \circ \chi)(\sigma) \cdot M_\Theta\sigma(M) \pmod{p^{2n}}$, amelyből következik, hogy $M + M_n(\log U_\sigma) \equiv \sigma(M) + (\log \circ \chi)(\sigma) \cdot M_\Theta M_n \pmod{p^{2n-1}}$.

Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ olyanok, melyekre teljesül, hogy $p^{r_1-1}M^{-1}$-nek és $p^{r_2}M_\Theta$-nak egészek az elemei. Így megválaszthatjuk n-t úgy, hogy $n > r := 2r_1 + r_2 - 1$, akkor M_n-nek és $p^{r_1-1}M_n^{-1}$-nek is egész elemei lesznek. Ha az előző egyenletet beszorozzuk $p^{r_1-1}M_n^{-1}$-gyel és leosztjuk p^{r_1-1}-gyel, akkor ezt az egyenletet kapjuk:

$$C_n + \log U_\sigma \equiv \sigma(C_n) + (\log \circ \chi)(\sigma) \cdot M_n^{-1}M_\Theta M_n \pmod{p^{2n-r_1}},$$

ahol $C_n = M_n^{-1}M \equiv I \pmod{p^{n-r_1}}$.

Legyen $A_n = M_n^{-1}M_\Theta M_n$ és $A = M^{-1}M_\Theta M$, akkor

$$\begin{aligned} M_n^{-1}M_\Theta M_n - M^{-1}M_\Theta M &= (M_n^{-1} - M^{-1})M_\Theta M_n + M^{-1}M_\Theta(M_n - M) = \\ &= (M_n^{-1}M - I)M^{-1}M_\Theta M_n + M^{-1}M_\Theta(M_n - M) \equiv 0 \pmod{p^{n-r}}. \end{aligned}$$

Ez által kapjuk, hogy $(\log\circ\chi)(\sigma)A_n \equiv (\log\circ\chi)A \pmod{p^{2n-r}}$, amiből meg az is kijön, hogy $(\sigma-1)C_n \equiv \log U_\sigma - (\log\circ\chi)(\sigma)A_n \pmod{p^{2n-r_1}}$.

Ha ezen egyenletre alkalmazzuk f-et kapjuk, hogy

$$(\sigma-1)f(C_n) \equiv f(\log U_\sigma) - (\log\circ\chi)(\sigma)f(A_n) \pmod{p^{2n-r_1}}$$

és

$$(\sigma-1)f(C_n) \equiv f(\log U_\sigma) - (\log\circ\chi)(\sigma)f(A) \pmod{p^{2n-r}}.$$

Tegyük fel, hogy $f(A)=0$, akkor a lemma miatt, és az előző kongruencia által teljesül, hogy létezik egy c konstans, melyre igaz, hogy $f(\log U_\sigma) \equiv 0 \left(\mod p^{2n-r-c-1}\right)$ tetszőleges $\sigma \in \breve{G_n}$ esetén. Ebből következik, hogy $f(\log U_\sigma) \equiv 0$ $\left(\mod p^{n-r-c+1}\right)$ tetszőleges $\sigma \in \breve{G}$ esetén, és így $f(\log U_\sigma) = 0$ is teljesül, mivel $\sigma^{p^{n-2}} \in \breve{G_n}$, és $\log U_{\sigma^{p^{n-2}}} = p^{n-2}\log U_\sigma$ tetszőleges $\sigma \in \breve{G}$ esetén.

Lássuk be most a másik irányt, tegyük fel, hogy $f(\log U_\sigma) = 0$ minden $\sigma \in \breve{G}$ esetén. Ezt indirekten fogjuk belátni, tehát tegyük fel, hogy nem igaz, így a lemma miatt teljesül, hogy $(\log\circ\chi)(\sigma) \equiv 0 \left(\mod p^{2n-r-c-1-s}\right)$, ahol s olyan konstans, melyre teljesül, hogy $p^s f(A)^{-1}$ egész. Tetszőlegesen nagy n és minden $\sigma \in \breve{G_n}$ esetén igaz ezen kongruencia. Ebből következik, hogy $(\log\circ\chi)(\sigma) = 0$ minden $\sigma \in \breve{G}$ esetén. Azonban ez ellentmondás, mivel χ olyan karakter, melynek értékkészlete végtelen, így $f(A_n) = 0$, mivel $f(A) \neq 0$ feltevésből következik, hogy $f(A_n) \neq 0$.

Az ekvivalens megfogalmazás belátásából következik Sen tétele. □

2.2. (F,G)-gyűrűk és R-reprezentációk

A szekció alatt Brinon és Conrad (4) és Fontaine és Ouyang (10) jegyzetét követem, mivel a két jegyzet tartalmazza a számunkra szükséges definíciókat és állításokat. Az R-megengedett reprezentációk kategóriája és az E-vektorterek kategóriája között megadható egy funktor, mely egzakt, hűséges és tenzor tulajdonságot is tartja. Ezen állítás bizonyításának konstrukciója megegyezik Fontaine gyűrűjeihez rendelhető bizonyos reprezentációk kategóriája és a megfelelő vektorterek kategóriája közötti funktorok ezen tulajdonságainak bizonyításával.

2.2.0.1. Definíció. (R-reprezentációk) Legyen G egy topologikus csoport és R egy topologikus gyűrű, melyen hasson folytonosan a G csoport. X-et a G csoport R-reprezentációjának nevezzük, ha X egy végesen generált R-modulus, melyen értelmezve van egy szemilineáris, folytonos G csoport általi hatás.

Példák R-reprezentációkra:

1. X lineáris reprezentáció, ha G általi hatás triviális.
2. X $\bmod p$ reprezentáció, ha $R = \mathbb{F}_p$ test, és R-n a diszkrét topológiát értjük.
3. X p-adikus reprezentáció, ha $R = \mathbb{Q}_p$ test, és R-n a p-adikus topológiát definiáljuk.
4. X szabad R-reprezentáció, ha X szabad R-modulus.

2.2.0.2. Definíció. X szabad R-reprezentációját G-nek triviálisnak nevezzük, ha a következő feltételek közül legalább az egyiket teljesíti:

1. X-nek létezik X^G elemeiből álló bázisa.
2. $X \cong R^d$, ahol a hatás komponensenként értendő, és d a R-reprezentáció dimenziója.

2.2.0.3. Állítás. *Legyen $d \in \mathbb{N}$.*

1. *X egy d dimenziós szabad R-reprezentáció, és $H^1(G, GL_d(R))$ kohomológiacsoport $[X]$ ekvivalencia osztálya között megadható egy bijekció.*
2. *X akkor, és csak akkor triviális d dimenziós szabad R-reprezentáció, ha*

$$[X] \text{ a triviális eleme } H^1(G, GL_d(R))\text{-nek.}$$

Bizonyítás. Az első állításból rögtön következik a második, így elég csak az elsőt belátni. Legyen X egy d-ed rangú, szabad R-reprezentációja G-nek, melynek bázisa $e_1, e_2, \dots, e_d$, akkor lássuk be, hogy X ekvivalenciaosztálya egy $H^1_{\text{cont}}(G, \mathrm{GL}_d(R))$-beli elem.

Vegyünk egy $g \in G$-t, akkor tetszőleges e_i báziselemeinek g általi képe $\sum_{i=1}^d a_{i,j}(g)e_i$ lesz, így megadható egy g elemhez egy $M_g = (a_{i,j}(g))_{i,j\in\{1,\dots,d\}}$ invertálható $d \times d$-s mátrix. A $g \in G \mapsto M_g \in \mathrm{GL}_d(R)$ hozzárendelés által megadott leképezés így folytonos lesz, mivel M_g invertálható és $g(e_1, \dots, e_d) = (e_1, \dots, e_d)M_g$. A $g_1 \cdot g_2 \in G$ elemmel való hatásra kétféleképpen is gondolhatunk egyrészt $g_1g_2(e_1, \dots, e_d) = (e_1, \dots, e_d)M_{g_1g_2}$, másrészt

$$g_1(g_2(e_1, \dots, e_d)) = g_1((e_1, \dots, e_d))g_1(M_{g_2}) = (e_1, \dots, e_d)M_{g_1}g_1(M_{g_2}),$$

amiből következik, hogy $M_{g_1g_2} = M_{g_1}g_1(M_{g_2})$. Az előbbi hozzárendeléssel definiált leképezést m-mel jelölve, azt kapjuk, hogy $m(g_1g_2) = m(g_1)g_1(m(g_2))$, amelyből következik, hogy $m : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ folytonos leképezés egy $Z^1(G_K, \mathrm{GL}_d(R))$-beli elem.

Ha veszünk X-nek egy másik R-bázisát, és a hozzá tartozó m' leképezést, amelyet $g \mapsto M'_g = (a_{i,j}(g)')_{i,j\in\{1,\dots,d\}}$ hozzárendeléssel definiálhatunk, akkor a T áttérési mátrix által a következő egyenlet teljesül:

$$m'(g) = T^{-1}m(g)g(T).$$

Így bármely két ilyen leképezés kohomológ lesz egymással, így m osztálya $H^1(G, \mathrm{GL}_d(R))$-ban független X bázisától, tehát $X \mapsto [X]$ hozzárendelés megfelelő, ahol m osztályát jelöltem $[X]$-szel.

Továbbá szükséges még a másik irányú hozzárendelés megadása, tehát ha veszünk egy 1-kociklust, akkor tudunk hozzá találni reprezentációt, tehát legyen $m'' \in Z^1(G, \mathrm{GL}_d(R))$ egy 1-kociklus, akkor létezik hozzá egy olyan egyértelmű, szemilineáris hatása G-nek $X = R^G$-n, mely

$$g \mapsto A'' = ((a''_{i,j}(g)))_{i,j\in\{1,\dots,d\}}$$

hozzárendelés által adott, tehát $[X]$ m'' osztályában van. □

Legyen R egy topológia gyűrű, G egy topológikus csoport, amely hat az R-en, és a G általi fixtestének egy zárt részteste F-nek. Továbbá legyen C R hányadosteste.

2.2.0.4. Definíció. R-et (F, G)-regulárisnak nevezzük, akkor ha a következőket teljesíti:

1. R egy integritási tartomány,
2. $R^G = C^G$, ahol C-n való hatást leírhatjuk, mint $g\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{g(r_1)}{g(r_2)}$, ahol $r_1, r_2 \in R$,
3. minden $0 \neq r \in R$-hez létezik egy $\lambda \in F$, melyre $g(r) = \lambda r$ teljesül, tetszőleges $g \in G$ esetén, akkor r invertálható lesz R-ben.

2.2.0.5. Észrevétel. *Ha R egy test, akkor mindig (F, G)-reguláris.*

Továbbá még az is látszódik ha majd bevezetésre kerülnek a Hodge-Tate, de Rham, kristályos és félig-stabil periódus gyűrűk, hogy ezen gyűrűk nem mások, mint $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-reguláris gyűrűk, ahol K egy p-adikus test, és G_K meg az abszolút Galois csoportja.

2.2.0.6. Definíció. Legyen V F-reprezentációja G-nek, akkor mondjuk V-t R által megengedettnek, ha $R \otimes_F V$ triviális R-reprezentációja G-nek.

2.2.0.7. Tétel. *Legyen V egy tetszőleges F-reprezentációja G-nek, továbbá az $R \otimes_F V$ G csoporthatással rendelkezve egy szabad R-reprezentációja G-nek. Legyen $\mathbf{D}_R$ egy leképezés, amely G-nek egy F-reprezentációihoz egy $E := R^G$ vektorteret rendel hozzá, tehát $\mathbf{D}_R(V) := (R \otimes_F V)^G$.*
Legyen α_V azon leképezés, hogy:

$$\begin{aligned} \alpha_V : R \otimes_E \mathbf{D}_R(V) &\longrightarrow R \otimes_F V \\ \lambda \otimes x \quad &\longmapsto \quad \lambda x, \end{aligned}$$

ahol $\lambda \in R$, $x \in \mathbf{D}_R(V)$, akkor α_V R-lineáris, és felcserélhető a G általi hatással.
Ha R (F, G)-reguláris, akkor G-nek minden V F-reprezentációjára az α_V injektív, és a $\dim_E(\mathbf{D}_R(V)) \leqslant \dim_F(V)$. Továbbá akkor, és csak akkor van egyenlőség, ha α_V izomorfizmus, és α_V akkor, és csak akkor izomorfizmus, ha V R által megengedett.

Bizonyítás. Legyen C R-nek a hányadosteste, akkor mivel R (F,G)-reguláris, így $C^G = E$. A következő kommutatív diagram miatt és $\alpha_{V,C}$ injektivitásából következik, hogy $\alpha_{V,R}$ injektív:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_E \mathbf{D}_R(V) \arrow[r] \arrow[d, hook] & R \otimes_F V \arrow[dd, hook] \\
R \otimes_E \mathbf{D}_C(V) \arrow[d, hook] & \\
C \otimes_E \mathbf{D}_C(V) \arrow[r] & C \otimes_F V.
\end{tikzcd}$$

Így feltehető, hogy R test.

Az α_V injektivitásának a belátását teljes indukcióval fogjuk tenni az alapján, hogyha veszünk $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{D}_R(V)$-beli elemeket, amelyek lineárisan függetlenek E felett, akkor R felett is lineárisan függetlenek lesznek. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-ig teljesül az állítás. Az n-edik esetet indirekten fogjuk belátni, tehát tegyük fel, hogy E felett függetlenek lineárisan, de R felett nem, tehát léteznek olyan R-beli λ_i-k, melyek közül legalább az egyik nem nulla, és $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ igaz rájuk. Feltehető továbbá, hogy $\lambda_n = -1$, így az n-edik kifejezhető könnyedén a többi lineáris kombinációjaként. Vegyük x_n-nek egy $g \neq 1 \in G$-beli elem általi képét, akkor

$$x_n = g(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\lambda_i) x_i,$$

tehát az indukció miatt $\lambda_i - g(\lambda_i) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\lambda_i \in E$, ami továbbá meg ellentmondás, mivel x_i-k E felett lineárisan függetlenek.

A hármas ekvivalencia közül a megengedettsége, és az α_V izomorfizmusa könnyen adódik, mivel ha V megengedett, akkor az azt jelenti, hogy létezik egy olyan bázisa $R \otimes_F V$-nek, amely elemek $\mathbf{D}_R(V)$-ből származnak, és mivel α_V injektív és $\alpha_V(1 \otimes x_i) = x_i$ teljesül, így ez ekvivalens azzal, hogy α_V izomorfizmus.

A másik ekvivalenciából az az irány egyértelmű mikor α_V izomorfizmus, mivel akkor abból következik a dimenziók azonossága. Így már csak a másik irányt kell belátni. Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egy bázisa V-nek F felett, akkor $1 \otimes e_i$-k által megadható $R \otimes_F V$-nek is egy bázisa R felett. Vegyük $\mathbf{D}_R(V)$-nek is egy $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ bázisát E felett, akkor ϵ_i-k felírhatók, mint $\epsilon_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j$. Ez által adódik egy $A = ((a_{i,j}))_{i,j}$ $d \times d$-s mátrix. Az α_V injektivitása miatt adódik, hogy $\det(A)$ nem nulla. A invertálhatósága R-ben következik abból, hogy R (F,G)-reguláris. Mivel ha $E = e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 \wedge e_n$ és $\varepsilon = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \epsilon_3 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n \in \mathbf{D}_R(V)$, akkor a $\varepsilon = A \cdot E$ egyenlet írható fel, és ha tetszőleges $g \in G$ elem általi képét nézzük az egyenletnek, tehát $g(\varepsilon) = g(A)g(E) = g(A)\eta(g) \cdot E$, ahol $\eta : G \to F^\times$ homomorfizmus, amelyre teljesül, hogy $g(E) = \eta(g) \cdot E$. Akkor következik, hogy $g(A) = \eta(g)^{-1} A$ egyenlet írható fel minden g-re, így teljesül az (F,G)-regularitás, így A invertálható. □

2.2.0.8. Tétel. *Legyen $V \in \mathbf{Rep}_F(G)$, akkor $\mathbf{D}_R : V \to (R \otimes_F V)^G$ leképezés megszorítása az R-megengedett reprezentációkra ad egy egzakt, hűséges és tenzor funktort $\mathbf{Rep}_F^R(G)$ kategóriából az E-vektorterek kategóriájába.*

Bizonyítás. Legyen V egy R-megengedett F-reprezentációja G-nek, és ennek legyen V' egy részreprezentációja és $V'' = V/V'$, akkor

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

egy rövid egzakt sorozat. A R-rel való tenzorozás tartja az egzaktságot, így a következő is egy rövid egzakt sorozat lesz:

$$0 \longrightarrow R \otimes_F V' \longrightarrow R \otimes_F V \longrightarrow R \otimes_F V'' \longrightarrow 0.$$

Ha vesszük továbbá a G csoporthatás általi fixtereket, akkor $\mathbf{D}_R(V')$-nél és $\mathbf{D}_R(V)$-nél is megmarad az egzaktság. Azonban, mivel R-megengedett így dimenzió tulajdonságok miatt teljesül, hogy $\mathbf{D}_R(V'')$-nél is egzakt lesz, tehát $\mathbf{D}_R$ egy egzakt funktor. Továbbá, mivel ha $V \neq 0$, akkor $D_R(V)$ se 0, tehát $\mathbf{D}_R$ hűséges funktor.

Így már csak a tenzorképzés megtartását kell belátni. Ehhez vegyük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes_F V_1) \otimes_R (R \otimes_F V_2) \arrow[r, equal] & R \otimes_F (V_1 \otimes_F V_2) \\
\mathbf{D}_R(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_R(V_2) \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted] & \mathbf{D}_R(V_1 \otimes_F V_2). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

A $\mathbf{D}_R(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_R(V_2) \to \mathbf{D}_R(V_1 \otimes_F V_2)$ leképezés definiálható ezen diagram által. A diagramból még az is adódik, hogy ezen leképezés injektív. V_1 és V_2 B-megengedettsége miatt a következő egyenlőtlenség teljesül a dimenziókra:

$$\dim_E(\mathbf{D}_R(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_R(V_2)) = \dim_R(R \otimes_F (V_1 \otimes_F V_2)) \geqslant \dim_E(\mathbf{D}_R(V_1 \otimes_F V_2)),$$

amely által adódik, hogy a leképezés szürjektív is, tehát izomorfizmus. $\square$

3. fejezet

Fontaine elmélete

A p-adikus reprezentációk elméletének megjelenése, felvirágzása annak köszönhető, hogy a kezdetektől az aritmetikai geométerek egyik célja a racionális számok abszolút Galois csoportjának a megismerése. Ennek az egyik lehetősége ha ezen csoport reprezentációinak a vizsgálata, és mivel ezen Galois csoport p helyen vett, ahol p egy prímszám, felbontási csoportja izomorf $\mathbb{Q}_p$ abszolút Galois csoportjával. Így a p-adikus reprezentációk célja ezen csoport hatásának a megismerése a $\mathbb{Q}_p$ vektortereken. Ehhez járult hozzá Fontaine az elméletével, mivel a célja az volt, hogy klasszifikálni tudja ezen reprezentációkat, és képes legyen hozzájuk csatolni különféle inveriánsokat.

Ezen fejezethez a következő három jegyzetet, cikket veszem segítségül: Conrad és Brinon (4) jegyzetét, Fontaine és Ouyang (10) könyvét és Peter Schneider (19) könyvét. Ouyang-ék (10) jegyzete a teljes kép megalkotását fogja segíteni, amelyhez Conrad (4) és Schneider (19) jegyzeteit fogom használni, amely definíciók, konstrukciók jobb megértését segítik.

3.1. Hodge-Tate és de Rham reprezentációk

A fejezetben bemutatásra kerülő két típusa a p-adikus reprezentációknak Fontaine periódus gyűrűiből fogjuk származtatni. A Hodge-Tate periódus gyűrű a Tate csavarás segítségével definiáljuk, a de Rham periódus gyűrűket meg az R gyűrűk konstrukciója segítségével definiáljuk. Ezen szekciót is Brinon (4) és Fontaine (10) jegyzete alapján mutatom be. Azonban előttük még bemutatásra kerül a Witt vektorok gyűrűje és a Cohen gyűrűk konstrukciója.

3.1.1. Witt polinomok gyűrűje és Cohen gyűrű

A következő konstrukció megalkotása Ernst Witt (20) cikkének és Serge Lang (15) könyvében lévő feladatoknak köszönhető igazán, talán mindkettőjük a p-gyűrűk bizonyos tulajdonságait szerették volna kihasználni, és ennek a segítségével egy olyan konstrukciót megadni, amelyet több helyen is képesek legyünk használni. Egy alkalmazási lehetőség például bizonyos maradéktesttel rendelkező lokális testek konstruálásához, tehát ha vesszük a $\mathbb{F}_{p^n}$-t, akkor látni fogjuk, hogy $W\left(\mathbb{F}_{p^n}\right)$ egy olyan gyűrű lesz, amely egy nem-elágazó n-ed fokú testbővítése lesz $\mathbb{Q}_p$-nek. Továbbá ezen gyűrűk konstrukciójából fejlődtek ki a Cohen gyűrűk is. A diplomamunkámban az R gyűrűkhöz, és majd a de Rham periódus gyűrű konstrukciójához fogjuk használni ezen konstrukciót.

A Witt vektorok konstrukciójához Fontaine (10) jegyzetét és Conrad (4) jegyzetét használjuk. Ezen felül a Cohen gyűrűk konstrukciója és Matsumura két neves tétele is kimondásra kerül, amelyekhez még Hideyuki Matsumura (16) könyvét használom.

3.1.1.1. Definíció. Legyen minden $i \in \mathbb{N}$-re X_i, Y_i-k változók, és legyen $\underline{X} := (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ és $\underline{Y} := (Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ vektorváltozók. Legyen $n \in \mathbb{N}$, akkor az n-edik Witt polinomot (vektort) definiáljuk úgy, hogy

$$W_n(\underline{X}) = W_n(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) := \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}},$$

amelyből látszódik, hogy $X_n \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right][W_0(\underline{X}), W_1(\underline{X}), \ldots, W_n(\underline{X})]$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Továbbá ezen $W_n(\underline{X})$-et nevezhetjük az n-edik szellem komponensnek is.

3.1.1.2. Állítás. *Minden* $\Phi(\underline{X},\underline{Y}) \in \mathbb{Z}[\underline{X},\underline{Y}]$ *(vagy* $\in \mathbb{Z}_p[\underline{X},\underline{Y}]$*) polinomhoz létezik egy egyértelmű* $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *polinomok sorozata, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$*-re teljesül a*

$$\Phi \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$$

polinomra, hogy $\Phi(W_n(\underline{X}), W_n(\underline{Y})) = W_n(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$*.*

Bizonyítás. A $\Phi_n(\underline{X},\underline{Y})$ minden n-re legyen úgy definiálva $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right][X_0, X_1, \dots, X_n, Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$-ben, hogy

$$\Phi_n(\underline{X},\underline{Y}) := \frac{1}{p^n}\left(\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}}, \sum_{i=0}^{n} p^i Y_i^{p^{n-i}}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} p^i \Phi_i^{p^{n-i}}(\underline{X},\underline{Y})\right).$$

Az így definiált függvények sorozata nem csak a $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ együtthatós polinomok gyűrűjének az eleme, hanem a $\mathbb{Z}$ együtthatós polinomgyűrűnek is. Ezen állítást indukcióval látjuk be. Definíció szerint adódik, hogy $n = 0$-ra igaz. Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás, akkor Φ_{n+1}-ről kell belátni, hogy $\mathbb{Z}$ együtthatós. Az $(n+1)$-es esethez meg a következő azonosságot ha belátjuk, akkor abból következik, hogy $\mathbb{Z}$ együtthatós.

Az azonosság meg a következő:

$$\Phi\left(X_0^{p^n} + \dots + p^n X_n; Y_0^{p^n} + \dots + p^n Y_n\right) \equiv \Phi_0(\underline{X},\underline{Y})^{p^n} + p\Phi_1(\underline{X},\underline{Y})^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1}\Phi_{n-1}(\underline{X},\underline{Y})^p \mod p^n$$

A következő módosításokat elvégezve kapjuk a Φ-nek egy jobban kezelhető alakját:

$$\begin{aligned}\Phi\left(X_0^{p^n} + \dots + p^n X_n; Y_0^{p^n} + \dots + p^n Y_n\right) &\equiv \Phi\left(X_0^{p^n} + \dots + p^{n-1} X_{n-1}^p; Y_0^{p^n} + \dots + p^{n-1} Y_{n-1}^p\right) \\ &\equiv \Phi_0(\underline{X}^p,\underline{Y}^p)^{p^{n-1}} + p\Phi_1(\underline{X}^p,\underline{Y}^p)^{p^{n-2}} + \dots + p^{n-1}\Phi_{n-1}(\underline{X}^p,\underline{Y}^p) \mod p^n\end{aligned}$$

Ezen modulo p^n-es alak, azért jó számunkra, mivel Φ_i-kről már tudjuk indukció miatt, hogy $\mathbb{Z}$ együtthatósak, és így

$$\Phi_i(\underline{X}^p,\underline{Y}^p) \equiv \Phi_i(\underline{X},\underline{Y})^p \mod p$$

kongruenciát tudjuk használni. Továbbá teljesülni fog az is, hogy

$$p^i\Phi_i(\underline{X}^p,\underline{Y}^p)^{p^{n-1-i}} \equiv p^i\Phi_i(\underline{X},\underline{Y})^{p^{n-i}} \mod p^n.$$

Ezen kongruenciát használva teljesül az állítás, mivel minden n-re modulo p^n előáll egész együtthatós polinomok összegeként. □

3.1.1.3. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen S_n, $M_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$, és minden $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ esetén $L_n(\lambda)(\underline{X}) \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ polinomok, amelyek a Witt polinomokon értelmezett összeadáshoz, szorzáshoz és skalárral való szorzáshoz tartoznak, tehát

1. $W_n(\underline{X}) + W_n(\underline{Y}) = W_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$,
2. $W_n(\underline{X}) \cdot W_n(\underline{Y}) = W_n(M_0, M_1, \dots, M_n)$,
3. $\lambda W_n(\underline{X}) = W_n(L_0(\lambda), L_1(\lambda), \dots, L_n(\lambda))$.

Ezen S_n, M_n és L_n kis n esetén könnyen zárt alakra hozhatók, mivel ekkor a szellem komponensek könnyen kezelhetőek.

3.1.1.4. Lemma. *Legyen minden* n*-re* X_n *és* Y_n *változók* p^n *súlyokkal, akkor* S_n, M_n, L_n*-re teljesülnek a következő tulajdonságok:*

1. $S_n = X_n + Y_n +$ *magasabb fokú tagok, ahol minden monomnak a súlya* p^n*,*
2. $M_n = p^n X_n Y_n +$ *magasabb fokú tagok, ahol minden monomnak a súlya* X*-ekként és* Y*-okként* p^n*. Továbbá az is igaz, hogy* $M_n(X_0, 0, \dots, 0, Y_0, \dots, Y_n) = X_0^{p^n} Y_n$*,*

3. *$L_n(\lambda) = \lambda X_n$ + magasabb fokú tagok, ahol minden monomnak a súlya p^n tetszőleges $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ esetén,*

4. *$L_n(p) \equiv X_{n-1}^p$ mod p.*

Bizonyítás. Az S_n, M_n, L_n a következőképpen néznek ki $n = 0, 1$ esetén:

1. $S_0 = X_0 + Y_0$, $S_1 = X_1 + Y_1 - \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i}$,

2. $M_0 = X_0Y_0$, $M_1 = X_1Y_0^p + X_0^pY_1 + pX_1Y_1$,

3. $L_0(\lambda) = \lambda X_0$, $L_1(\lambda) = \lambda X_1 + \frac{\lambda^p - \lambda}{p} X_0^p$.

Az n-es alak indukcióval könnyen látszik a 0-ás és 1-es eset után. Azonban még a negyedik állításhoz szükséges azon tulajdonság, hogy $a, b \in \mathbb{N}$ akkor, és csak akkor kongruensek modulo p, ha modulo p^{n+1}-en meg a^{p^n} kongruens b^{p^n}-nel. □

3.1.1.5. Definíció. Legyen A egy tetszőleges kommutatív gyűrű, akkor az n-rendű Witt polinomok (vektorok) gyűrűjét definiáljuk úgy, hogy tetszőleges $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ elemekhez tartozó n-rendű Witt polinomok (vektorok) a gyűrű elemei, és ezen elemek közötti műveleteket az S_n, M_n és $L_n(\lambda)$ polinomok segítségével értjük. Továbbá $W_n(A)$-val jelölhetjük.

A definícióban röviden fogalmaztam meg, hogy hogyan értjük az elemek közötti műveleteket. Így szeretném ezt egy kicsit bővebben kifejezni.

Az n-edik Witt polinomok gyűrűjében két elem összeadásán és szorzatán a következőt értjük. Legyen A egy tetszőleges kommutatív gyűrű és $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in W_n(A)$, akkor

$$a + b = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad ab = (m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}),$$

ahol

$$s_i = S_i(a_0, a_1, \ldots, a_i, b_0, b_1, \ldots, b_i) \text{ minden } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\text{-re},$$
$$m_i = M_i(a_0, a_1, \ldots, a_i, b_0, b_1, \ldots, b_i) \text{ minden } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\text{-re}.$$

Továbbá $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(A)$, akkor

$$w_i = W_i(a) = a_0^{p^i} + pa_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i a_i.$$

3.1.1.6. Definíció. Legyen A egy tetszőleges kommutatív gyűrű, akkor az A gyűrűhöz tartozó n-ed rendű Witt polinomok gyűrűjén definiálhatunk egy ρ leképezést a két gyűrű között:

$$\rho : W_n(A) \longrightarrow A^n, \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}).$$

A ρ leképezés lineáris és szorzattartó, tehát

$$\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b), \quad \rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$$

teljesül, ahol $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in W_n(A)$ tetszőleges.

A $W_n(A)$-n értelmezett műveletek által könnyen érthető $\rho(a) + \rho(b)$ összeg és $\rho(a)\rho(b)$ szorzat.

3.1.1.7. Állítás. *Legyen A egy tetszőleges kommutatív gyűrű. Ez által $(W_n(A), +, \cdot)$ legyen azon A-hoz tartozó kommutatív gyűrű, melynek nulleleme: $(0, 0, \ldots, 0)$ és egységeleme: $(1, 0, \ldots, 0)$. Az előbb definiált ρ leképezés egy homomorfizmus $W_n(A)$ és A között. Továbbá ha $\lambda \in \mathbb{Z}$ (vagy ha A $\mathbb{Z}_p$-modulus, akkor $\lambda \in \mathbb{Z}_p$), akkor $\lambda \cdot a \in W_n(A)$, ahol $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(A)$, és legyen így a szorzat a következő:*

$$\lambda \cdot a = (L_i(\lambda)(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}))_{0 \leqslant i \leqslant n}.$$

Ha ezek igazak, akkor ρ megőrzi a $\mathbb{Z}$-modulus ($\mathbb{Z}_p$-modulus) struktúrát.

Bizonyítás. A következő tulajdonságok miatt adódik, hogy $W_n(A)$ és A között ρ megőrzi a struktúrát. Ha p invertálható A-ban, akkor ρ bijektív lesz, és így egy izomorfizmust ad $W_n(A)$ és A^n között. Ha továbbá A-nak p-rendű torziós elemei sincsenek, akkor $A \hookrightarrow A\left[\frac{1}{p}\right]$, és így $W_n(A) \subset W_n\left(A\left[\frac{1}{p}\right]\right)$. Mivel ha $x, y \in W_n(A)$, akkor $x - y \in W_n(A)$ is, így $W_n(A)$ részgyűrűje $W_n\left(A\left[\frac{1}{p}\right]\right)$-nak.

Továbbá ha R egy p-rendű torziós elemeket nem tartalmazó gyűrű és I egy ideálja, akkor legyen $A = R/I$ a faktorgyűrű. Így teljesülni fog, hogy $W_n(A)$ előáll $W_n(R)/W_n(I)$-ként, ahol $W_n(R)$ egy kommutatív gyűrű, és $W_n(I) := \{(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \mid a_i \in I\}$ az ő egy ideálja. Így ezek meggondolása után adódik, hogy ρ leképezés tényleg megörzi a $\mathbb{Z}$ (vagy $\mathbb{Z}_p$) struktúrát. $\square$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiálhatjuk az A gyűrűhöz tartozó Witt polinomok gyűrűjét, amelyekről előbb beláttuk, hogy kommutatív gyűrűk. Ha vesszük W_{n+1}-ből W_n-be a projekciót, akkor ezen leképezés egy szürjektív homomorfizmus lesz a gyűrűk között. Jelöljük ezen projekciót π_n-vel. Ha minden n-re W_n-en a diszkrét topológiát definiáljuk, akkor π_n-ek által definiálhatunk ezen n-ed rendű Witt polinomok gyűrűein egy inverz limesz rendszert. Ezen topologikus gyűrűt jelöljük $W(A)$-val.

3.1.1.8. Definíció. Legyen A egy kommutatív gyűrű és $W_n(A)$ az n-edik Witt polinomok gyűrűje, akkor $W(A)$-t nevezzük az A Witt polinomok (vektorok) gyűrűjének, tehát $W(A) = \varprojlim W_n(A)$.

3.1.1.9. Definíció. Legyen A egy kommutatív gyűrű, $W_n(A)$ az n-edik Witt polinomok gyűrűje és $W(A)$ a Witt polinomok gyűrűje, amelyen a következő leképezéseket értelmezhetjük:

1. Az egy indexxel való eltolás, mint leképezés egy jól-definiált leképezés lesz $W_n(A)$-n és $W(A)$-n is, amelyet így definiálhatunk:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : W(A) \longrightarrow W(A) :\ & (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \longmapsto (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots), \\ \mathcal{V}_n : W_n(A) \longrightarrow W_{n+1}(A) :\ & (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \longmapsto (0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

   Ezen leképezésre Verschiebung-ként is hivatkozhatunk, mivel németül az eltolást jelenti.

2. Továbbá a $W(A)$ gyűrűn értelmezni tudjuk a Teichmüller leképezést és a Frobenius leképezést is:

$$\begin{aligned} & s : A \longrightarrow W(A) :\ a \longmapsto [a] = (a, 0, 0, \ldots), \\ & \varphi : W(A) \longrightarrow W(A) :\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \longmapsto (a_0^p, a_1^p, \ldots, a_n^p, \ldots). \end{aligned}$$

   Ha A egy tökéletes test, akkor $W(A)$-n a Frobenius leképezést jelölhetjük σ-val is.

A Teichmüller leképezés és az eltolás (Verschiebung) definíciójából is látszik, hogy a két leképezés felcserélhető lesz egymással.

3.1.1.10. Állítás. *1. Az eltolás additív leképezés és*

$$0 \longrightarrow W_k(A) \xrightarrow{\mathcal{V}_k^r} W_{k+r}(A) \longrightarrow W_r(A) \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt lesz.

2. A Teichmüller leképezés egy multiplikatív szelés A-ból $W(A)$-ba, és $W(A)$ minden eleme felírható a következő sorral:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}^n([a_n]).$$

Továbbá ha $b \in A$, akkor

$$s(b) \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (b \cdot a_0, b^p \cdot a_1, \ldots, b^{p^n} \cdot a_n, \ldots).$$

Bizonyítás. A 3.1.1.4 lemmát használva és tudva azt, hogy az eltolás és a Teichmüller leképezés felcserélhető következnek az állítások. $\square$

3.1.1.11. Állítás. *Ha A egy p karakterisztikájú test, akkor a $W(A)$ Witt polinomok gyűrűjében a Frobenius leképezés és az eltolás felcserélhető. Továbbá ha egymás után alkalmazzuk őket ($\mathcal{V}\varphi = \varphi\mathcal{V}$), akkor az a p-vel való szorzás lesz.*

Bizonyítás. Az állítás következik abból, hogy $p \cdot (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (0, a_0^p, a_1^p, \dots)$. ☐

3.1.1.12. Állítás. *Ha A egy tökéletes gyűrű, akkor $W(A)$ minden eleme a következő sorként írható fel:*

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \left[a_n^{p^{-n}}\right].$$

Bizonyítás. Ezen állítás következik a Teichmüller leképezés definíciójából és az előző előtti állításból. ☐

3.1.1.13. Következmény. *Ha A egy tökéletes gyűrű, akkor a következő két állítás teljesül:*

1. *$W(A)$-ból $W_n(A)$-ba minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a projekció indukál egy izomorfizmust $W(A)/p^nW(A)$ és $W_n(A)$ között. Tehát A előáll, mint $W(A)/pW(A)$.*
2. *ha $W(A)$ teljes, szeparábilis a p-adikus topológiára nézve, akkor $W(A)$ előáll, mint*

$$W(A) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W(A)/p^nW(A).$$

Bizonyítás. Az előző eredményekből rögtön következik a két állítás. ☐

Ezen konstrukció a következő pár állítás miatt lesz igazán fontos számunkra, mivel ha A egy p karakterisztikájú tökéletes gyűrű, akkor $W(A)$ egy szigorú p-gyűrű lesz, és így minden elem előáll egy könnyen kezelhető hatványsor alakban, ami segítségünkre lesz Fontaine periódus gyűrűinek konstuálásakor is.

3.1.1.14. Állítás. *Legyen A egy p-gyűrű, melynek k a maradékteste. Továbbá legyen $f : k \longrightarrow A$ azon leképezés, ahol a maradéktestbeli elemekhez hozzárendeli az A-beli multiplikatív reprezentánsokat, tehát ezen f definiálja a multiplikatív reprezentánsok rendszerét. Tegyük fel, hogy $\{\alpha_i \in k\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_i \in k\}_{i\in\mathbb{N}}$, akkor*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(\alpha_i)p^i * \sum_{i=0}^{\infty} f(\beta_i)p^i = \sum_{i=0}^{\infty} f(\gamma_i)p^i,$$

ahol $\gamma_i = Q_i^*(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_0, \beta_1, \dots)$, mely $Q_i^* \in \mathbb{F}_p\left[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}}\right]$, és $*$ valamelyik gyűrű operátor.

Bizonyítás. Legyen $h : \mathbb{Z}\left[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}}\right] \to A$ egy olyan leképezés, amelyet az alapján definiálunk, hogy $X_i \mapsto f(\alpha_i)$, $Y_i \mapsto f(\beta_i)$, akkor látszódik, hogy ez egy homomorfizmus. Ezen leképezés a folytonosság miatt kiterjed $\mathbb{Z}\left[X_i^{p^{-\infty}}, Y_i^{p^{-\infty}}\right]$ telítésére is a következő hozzárendeléssel definiált leképezés miatt: $x = \sum X_i p^i \mapsto \alpha = \sum f(\alpha_i)p^i$, $y = \sum Y_i p^i \mapsto \beta = \sum f(\beta_i)p^i$. Továbbá ha a maradéktesten definiáljuk ezen leképezést, akkor ugyanúgy homomorfizmusra jutunk. Így a következő teljesül:

$$\sum f(\alpha_i)p^i * \sum f(\beta_i)p^i = h(x) * h(y) = h(x * y) = \sum h(f(Q_i^*))p^i = \sum f\left(\overline{h}(Q_i^*)\right)p^i = \sum f(\gamma_i)p^i,$$

ahol $\overline{h}$ a h leképezés a maradéktesten. Ez azért teljesül, mivel a h és a multiplikatív reprezentánsok felcserélhetőek. ☐

3.1.1.15. Következmény. *Legyen A és A' p-gyűrűk, melyek maradékteste k és k'. Továbbá tegyük fel, hogy A szigorú p-gyűrű. Tetszőleges $\overline{g} : k \longrightarrow k'$ gyűrű homomorfizmushoz létezik egy $g : A \longrightarrow A'$ leképezés, amely a következő diagramot kommutatívvá teszi:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{\overline{g}} & k'. \end{array}$$

Bizonyítás. Az előző állításból rögtön következik ezen következmény. □

3.1.1.16. Következmény. *1. Legyen A és A' szigorú p-gyűrűk, melyek maradékteste megegyezik, akkor A és A' kanonikusan izomorfak.*

2. Legyen k p karakterisztikájú tökéletes gyűrű, akkor $W(k)$ az egyetlen szigorú p-gyűrű kanonikus izomorfizmus erejéig, melynek maradékteste k.

Bizonyítás. Az előző következmény bizonyítja ezen következmény állítását. □

3.1.1.17. Tétel. *1. Tetszőleges k p karakterisztikájú tökéletes gyűrű, akkor $W(k)$ azon egyértelmű, teljes, diszkrét értékelési gyűrű, amely 0 karakterisztikájú. Továbbá $W(k)$ teljesen elágazásmentes, és a maradékteste k lesz.*

2. Legyen A teljes, diszkrét értékelési gyűrű, mely 0 karakterisztikájú, és k az ő maradékteste, amely tökéletes és p karakterisztikájú. Legyen e az elágazási indexe A-nak, akkor létezik egy $\iota : W(k) \longrightarrow A$ egyedi gyűrűhomomorfizmus, amely a következő diagramot kommutatívvá teszi:

$$\begin{tikzcd} W(k) \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Továbbá ι injektív és A egy e-ad rangú szabad $W(k)$-modulus.

Bizonyítás. Ezen tétel rögtön következik a 3.1.1.15. és 3.1.1.16. következményekből. □

A következő két Matsumura tétel arra az esetre ad gyógymódot, ha a maradéktest nem tökéletes, vagy mondhatjuk úgy is, hogy ezen tételek tekinthető 3.1.1.15 következmény általánosításának is.

3.1.1.18. Tétel. *Legyen A egy diszkrét értékelési gyűrű, melynek $\mathfrak{m} := tA$ a maximális ideálja, és k a maradékteste. Legyen K egy testbővítése k-nak, akkor létezik egy olyan B diszkrét értékelési gyűrű, melynek $\mathfrak{m}' = tB$ a maximális ideálja és K maradékteste.*

A bizonyítás Matsumura (16) könyvét fogja követni.

Bizonyítás. Legyen $\{x_i\}_{\{i\in I\}}$ egy transzcendens bázisa K-nak k felett, és legyen $k_1 = k\left(\{x_i\}_{\{i\in I\}}\right)$. Vegyük a k_1-hez tartozó gyűrűt, tehát azon gyűrűt, amelyet úgy kapunk meg, hogy $A_1 = \left(A\left(\{X_i\}_{\{i\in I\}}\right)\right)_{tA\left(\{X_i\}_{\{i\in I\}}\right)}$, ahol $\{X_i\}_{\{i\in I\}}$ bijektívek $\{x_i\}_{\{i\in I\}}$-kel. Ezen A_1 gyűrű, azért k_1-hez tartozó, mivel $A_1/tA_1 \cong k_1$. A_1 egy diszkrét értékelési gyűrű, mivel $A\left(\{X_i\}_{\{i\in I\}}\right)$ egy szabad A-modulus, amely szeparábilis a t-edik topológiára nézve. Ezen gondolatmenet miatt feltehető, hogy K algebrai k felett. Legyen S azon (B,φ)-k halmaza, melyekre teljesül, hogy B tartalmazza A-t, B diszkrét értékelési gyűrű, és $\varphi : B \to K$ A-algebra homomorfizmus, melynek magja $\mathrm{rad}(B)$, amelyet t generál. A Zorn lemmát tudjuk használni ezen halmazra ha a részbenrendezésnek a tartalmazást vesszük a gyűrűkön, a leképezéseken meg a megszorítást. Vegyük azon B_0 gyűrűt, mely az S-beli gyűrűk uniójával áll elő, és $\varphi_0 : B_0 \to K$ leképezést, amely φ_i-vel egyenlő B_i-n. Ezen B_0 is eleme lesz S-nek, mivel B_0 diszkrét értékelési gyűrű, φ_0 egy A-algebra homomorfizmus. Ezen φ_0 szürjektív is lesz, tehát $\varphi_0(B_0) = K$, mivel ha lenne egy nem nulla eleme, ami $(K - \varphi_0(B_0))$-nak eleme, akkor ezen elem minimálpolinomjának gyökével bővítve B_0-t, akkor az S-beli diszkrét értékelési gyűrű lenne, de az meg a maximalitás miatt nem lehetséges, így nem létezik $(K - \varphi_0(B_0))$-nak eleme a nullán kívül. □

3.1.1.19. Tétel. *Legyen A egy teljes, lokális gyűrű, melynek $\mathfrak{m}_A$ a maximális ideálja, és k_A a maradékteste. Továbbá legyen R egy teljesen elágazásmentes, diszkrét értékelési gyűrű, mely nulla karakteriszikájú, $\mathfrak{m}_R$ a maximális ideálja, k_R a maradékteste, akkor tetszőleges $h : k_R \longrightarrow k_A$ gyűrűhomomorfizmushoz létezik egy lokális homomorfizmus R és A között, amely h által indukált.*

A bizonyítás (16) könyvét fogja követni.

Bizonyítás. Legyen $k_0 \subset k_R$ prím résztest, akkor $\varphi_0(k_0) \subset k_A$. Így ha a prímelemet p-vel jelöljük, akkor a p, mint A-beli elem $\mathfrak{m}_A$-hoz tartozik. Ez által ha veszünk egy $\mathbb{Z} \to A$ gyűrűhomomorfizmust, akkor az kiterjed egy lokális homomorfizmussá $(\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} \to A)$. Ez által a $R \otimes_{\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}} k_0 = R/pR = k_R$ szeparábilis bővítése k_0-nak, és R egy torziómentes, szabad $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$-modulus, tehát sima, amiből következik, hogy $R \to A/\mathfrak{m}_A = k_A$ leképezés felemelhető $R \to A/\mathfrak{m}_A^i$-vé, ahol i tetszőleges. Ez által igaz lesz, hogy $A = \varprojlim A/\mathfrak{m}_A^i$, tehát a következő diagram kommutatív lesz, így létezik egy lokális homomorfizmus R-ből A-ba:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[drr, dotted] & k_R \arrow[r, "h"] & k_A \\ \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} \arrow[u] \arrow[rr] & & A. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

□

Ha A-t $\mathbb{Z}_p$-nek választjuk és K p karakterisztikájú, akkor létezik egy teljesen elágazó, teljes, diszkrét értékelési gyűrű R, mely továbbá nulla karakterisztikájú és a maradékteste K a 3.1.1.18 tétel alapján, és az 3.1.1.19-es tétel alapján az R gyűrű izomorfizmus erejéig egyértelmű.

3.1.1.20. Definíció. Legyen k egy p karakterisztikájú test, akkor a k-hoz tartozó Cohen-gyűrűt definiáljuk úgy, hogy azon egyértelmű nulla karakaterisztikájú, teljesen elágazó, teljes, diszkrét értékelési gyűrű, melynek maradékteste k. Jelöljük a k-hoz tartozó Cohen-gyűrűt $\mathcal{C}(k)$-val.

3.1.1.21. Állítás. *Legyen $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ azon lokális gyűrű, melynek maximális ideálját p generálja, és a maradékteste izomorf k-val, akkor minden $r \leqslant n$-re teljesül, hogy p^r-nel való szorzás megad egy izomorfizmust $\mathcal{C}_{n+1}(k)/p\mathcal{C}_{n+1}(k)$ és $p^r\mathcal{C}_{n+1}(k)/p^{r+1}\mathcal{C}_{n+1}(k)$ között. Továbbá $p^{n+1}\mathcal{C}_{n+1}(k) = 0$.*

3.1.1.22. Definíció. Legyen k egy test, akkor B-t k p-bázisának nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $[k^p(b_1, b_2, \dots, b_r) : k^p] = p^r$ tetszőleges r és különböző $b_1, b_2, \dots, b_r \in B$ esetén,

2. $k = k^p(B)$.

Bizonyítás. Legyen B egy p-bázisa k-nak, akkor minden $n \geqslant 0$-ra $k = k^{p^n}(B)$, $B^{p^{-n}} := \left\{ b^{p^{-n}} \mid b \in B \right\}$ egy p-bázisa $k^{p^{-n}}$-nek. Legyen $I_n := \bigoplus_{i=0}^{|B|} \{0, \dots, p^n - 1\}$ egy halmaz, amelyhez definiáljuk a következő halmazt:

$$T_n := \left\{ \mathfrak{b}^\alpha := \prod_{b \in B} b^{\alpha_b}, \text{ ahol } \alpha := (\alpha_b)_{b \in B} \in I_n \right\}.$$

Ezen halmaz generálja k-t, mint egy k^{p^n}-vektortér, így minden $m \geqslant 0$-ra T^{p^m} generálja k^{p^m}-t, mint egy $k^{p^{n+m}}$-vektortér.

Legyen $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ azon részgyűrűje $W_{n+1}(k)$-nak, amelyet $W_{n+1}\left(k^{p^n}\right)$ és $[b]$ generál, ahol $b \in B$. A Verschiebung és a Teichmüller leképezés tulajdonságait ismerve teljesül, hogy minden $x = (x_0, \dots, x_n) \in W_{n+1}(k)$ felírható, mint

$$[x_0] + \mathcal{V}([x_1]) + \cdots + \mathcal{V}^n([x_n]).$$

Így a következő azonosság is teljesül:

$$[y]\mathcal{V}^r(x) = \mathcal{V}^r\left(\left[y^{p^r}\right]x\right)$$

minden $0 \leqslant r$-re. Ez által $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ gyűrűre gondolhatunk úgy, mint

$$\left\{ \mathcal{V}^r\left(\left[(\mathfrak{b}^\alpha)^{p^r} x\right]\right) \mid \mathfrak{b}^\alpha \in T_{n-r},\ x \in k^{p^n},\ r = 0, \dots, n \right\}$$

halmaz által generált additív részcsoportja $W_{n+1}(k)$-nak. A Verschiebung és a Frobenius leképezés felcserélhetősége miatt a következő azonosság is teljesül:

$$\mathcal{V}^r(\varphi^r([x])) = p^r[x] \mod \mathcal{V}^{r+1}.$$

Ezen azonosságok és tulajdonságok által legyen $\mathfrak{U}_r$ egy ideálja $\mathcal{C}_{n+1}(k)$-nak, melyet definiáljuk úgy, mint

$$\mathfrak{U}_r := \mathcal{C}_{n+1}(k) \cap \mathcal{V}^r(W_{n+1}(k)),$$

ekkor $\mathfrak{U}_r$ ideál generálódik a $\left\{\mathcal{V}^m\left(\left[(\mathfrak{b}^\alpha)^{p^m}x\right]\right) \mid \mathfrak{b}^\alpha \in T_{n-m},\ x \in k^{p^n},\ m \geqslant r\right\}$ halmaz által. Így $k \cong \mathcal{C}_{n+1}(k)/\mathfrak{U}_1$, és p^r-nel való szorzás indukál egy izomorfizmust $r \leqslant n$ esetén $\mathcal{C}_{n+1}(k)/\mathfrak{U}_1$ és $\mathfrak{U}_r/\mathfrak{U}_1$ között.

Ha $r = n$, akkor $\mathfrak{U}_n$ p^n által generált ideál, és ez által minden $r \leqslant n$-re $\mathfrak{U}_r = p^r\mathcal{C}_{n+1}(k)$ csökkenő indukció miatt. Továbbá tetszőleges $x \in (\mathcal{C}_{n+1}(k) - \mathfrak{U}_1)$-beli elemre, legyen $y = p^{-r}(\overline{x}^{-1})$, akkor $xy = 1 - z$, ahol $z \in \mathfrak{U}_1$, és $xy(1 + z + \cdots + z^n) = 1$, tehát x invertálható. Így teljesül az összes állítás. $\square$

3.1.1.23. Tétel. *A k testhez tartozó Cohen-gyűrűt megtudjuk adni, mint a következő inverz-limesz:*

$$\mathcal{C}(k) = \varprojlim_n \mathcal{C}_n(k).$$

Bizonyítás. A tétel következik 3.1.1.21. állításból. $\square$

3.1.1.24. Állítás. *Vegyük a kanonikus projekciót $pr : W_{n+1}(k) \longrightarrow W_n(k)$, akkor ezen leképezés indukál egy $\vartheta : \mathcal{C}_{n+1}(k) \longrightarrow \mathcal{C}_n(k)$ szürjektív homomorfizmust, ahol ezen leképezés az $(n+1)$-edik Cohen gyűrűről az n-edik Cohen gyűrűre való projekció.*

Bizonyítás. A 3.1.1.21. állítás bizonyításában lévő $\mathcal{C}_n(k)$ definíciója által ϑ jól-definiált lesz.

A szürjekció bizonyításához elég belátni, hogy a fokszámozott leképezés szürjektív. Így ha $r < n$, akkor a következő kommutatív diagram miatt teljesül $\mathrm{gr}(\vartheta)$ szürjektivitása:

$$\begin{tikzcd}
p^r\mathcal{C}_{n+1}(k)/p^{r+1}\mathcal{C}_{n+1}(k) \arrow[r, "\mathrm{gr}(\vartheta)"] \arrow[d, "j"] & p^r\mathcal{C}_n(k)/p^{r+1}\mathcal{C}_n(k) \arrow[d, "j'"] \\
\mathcal{V}^r(W_{n+1}(k))/\mathcal{V}^{r+1}(W_{n+1}(k)) \simeq k \arrow[r, "\mathrm{gr(pr)}"] & \mathcal{V}^r(W_n(k))/\mathcal{V}^{r+1}(W_n(k)) \simeq k,
\end{tikzcd}$$

ahol j és j' a beágyazások, mivel azonosítják $p^r\mathcal{C}_{n+1}(k)/p^{r+1}\mathcal{C}_{n+1}(k)$-t és $p^r\mathcal{C}_n(k)/p^{r+1}\mathcal{C}_n(k)$-t k^{p^r}-nel. Továbbá $p^n\mathcal{C}_n(k) = 0$, így $r = n$ esetén is teljesül $gr(\vartheta)$ szürjektivitása, így ϑ szürjektív homomorfizmus lesz. $\square$

A Witt polinomok gyűrűjének konstrukcióját hasznosítsuk egy p-adikus test abszolút Galois csoportjához tartozó reprezentációkhoz tartozó néhány állításhoz.

Legyen K egy p-adikus test, $\overline{K}$ az algebrai lezártja. $\mathbb{C}_K$ a p-adikus telítése $\overline{K}$-nak. Ha K maradékteste k lesz, akkor $W(k)$-val jelöljük a Witt vektorok gyűrűjét k-nak és $K_0 = W(k)\left[\frac{1}{p}\right]$. Továbbá legyen $P_0 = W\left(\overline{k}\right)\left[\frac{1}{p}\right] = \overline{K_0^{ur}}$ és $P = P_0K$. A következő állítások erejére fixáljuk le ezen jelöléseket. Először vizsgáljuk meg a $\overline{K}$, majd $\overline{P}$ reprezentációkat.

Ha X egy $\overline{K}$ reprezentációja G_K-nak, akkor $\alpha_X : \overline{K} \otimes_K X^{G_K} \longrightarrow X$ leképezés injektív és akkor, és csak akkor izomorfizmus, ha X triviális.

3.1.1.25. Állítás. *X akkor, és csak akkor triviális, ha G_K-val való hatás diszkrét.*

Bizonyítás. Ha a G_K hatás triviális, akkor Hilbert 90. tétele miatt teljesül, hogy X triviális. Így elég csak a másik irányt belátni. Tegyük fel, hogy X triviális, akkor $e_1, \ldots, e_d \in X^{G_K}$ legyen egy bázisa X-nek $\overline{K}$ felett.

Legyen $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$ egy eleme X-nek. Rendeljük hozzá G_K-nak azon elemeinek halmazát, amelyek az x-et fixen hagyják. Ezt a halmazt jelöljük G_x-szel. G_K diszkrétségéhez elég belátni, hogy ezen G_x-ek nyílt részcsoportokat alkotnak. Ha veszünk egy $g \in G_K$-t, akkor $g(x) = \sum_{i=1}^{d} g(\lambda_i)e_i$, tehát G_x felírható a következőképpen:

$$G_x = \bigcap_{i=1}^{d} \{g \in G_K \mid g(\lambda_i) = \lambda_i\} = \bigcap_{i=1}^{d} G_{\lambda_i}.$$

Azonban, mivel λ_i-k algebraik K felett, így G_{λ_i} nyíltak, tehát így G_x is nyílt. □

3.1.1.26. Következmény. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak. V akkor, és csak akkor $\overline{K}$ megengedett, ha G_K-val való hatás diszkrét.*

Bizonyítás. Az előző állítást fogjuk használni a bizonyításhoz. Legyen $v_1, \ldots, v_d$ egy bázisa V-nek $\mathbb{Q}_p$ felett, ekkor $1 \in \overline{K}$-val tenzorozva kapjuk $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-nek egy bázisát. Így az előző tétel miatt $\overline{K}$-megengedettsége ekvivalens azzal, hogy G_{v_i}-k nyíltak. Azonban ez ekvivalens azzal, hogy a reprezentáció, mint leképezés magja ezen G_{v_i}-k metszete, de mivel a folytonos leképezés magja nyílt, így G_{v_i}-k is nyíltak, tehát adódik a következmény. □

3.1.1.27. Állítás. *Legyen $\overline{P}$ P-nek az algebrai lezárása $\mathbb{C}_K$ felett és Gal$(\overline{P}/P) = I_K$.*

1. *X legyen egy $\overline{P}$-reprezentációja G_K-nak. X akkor, és csak akkor triviális, ha I_K-val való hatás X-en diszkrét.*
2. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak. V akkor, és csak akkor $\overline{P}$-megengedett, ha I_K-val való hatás V-n diszkrét.*

Bizonyítás. A második állítás rögtön adódik az elsőből, így csak az elsőt fogjuk belátni. Tegyük fel, hogy X egy $\overline{P}$-reprezentációja G_K-nak, amely d dimenziós, és az I_K-nak a hatása rajta diszkrét. Hilbert 90. tétele miatt így tudjuk, hogy $\overline{P} \otimes_K X^{I_K} \to X$ leképezés izomorfizmus és $\overline{P}^{I_K} = P$. Legyen $Y := X^{I_K}$, akkor Y egy P-reprezentációja G_k-nak, ahol k a maradéktest. Így elég belátni, hogy G_k P-reprezentációi triviálisak, mivel akkor $P \otimes_K Y^{G_k} \to Y$ izomorfizmus, és így $\overline{P} \otimes_K X^{G_K} \to X$ is izomorfizmus, mivel $X^{G_K} = Y^{G_k}$.

Azonban G_k egy d-dimenziós P-reprezentációjára gondolhatunk, mint egy $d \cdot f_K$ dimenziós P_0-reprezentációja G_k-nak, ahol f_K a P/P_0 bővítés foka, és mivel tudjuk, hogy P_0-reprezentációi G_k-nak triviálisak, így beláttuk az állítást. □

Továbbá az előző fejezetben definiált Sen operátor segítségével is megadható a megengedett fogalma.

3.1.1.28. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja K-nak, akkor V $\mathbb{C}_K$-megengedett akkor, és csak akkor ha a Sen operátora $(\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$-nek identikusan nulla.*

Bizonyítás. A 3.1.1.25. állítás és a 2.1.3.12. tételből következik rögtön a bizonyítása. □

3.1.1.29. Állítás. *Ha k maradéktest algebrailag zárt. $\Theta = 0$ akkor, és csak akkor teljesül, ha $\rho(G_K)$ véges. Általánosságban, ha $\Theta = 0$ akkor, és csak akkor teljesül, ha $\rho(I_K)$ véges.*

Bizonyítás. Sen tétele (2.1.4.1. tétel) segítségével fogjuk bizonyítani. Elég csak azon esetet bizonyítani, amikor k algebrailag zárt, mivel különben a teljes csoport helyett elég csak az inercia részcsoportra áttérni, és K helyett, meg $\overline{K^{ur}}$-ra, és ezen áttérés után olyan szituációba jutunk, ahol a maradéktest megint algebrailag zárt.

A Sen tétel (2.1.4.1. tétel) miatt $\Theta = 0 \iff \mathfrak{g} = 0$. Így elég belátni, hogy $\rho(G_K)$ véges akkor, és csak akkor ha $\mathfrak{g} = 0$. Ha $\rho(G_K)$ véges, akkor abból egyértelmű, hogy $\mathfrak{g} = 0$. Ha $\mathfrak{g} = 0$, akkor létezik egy nyílt részcsoportja $\rho(G_K)$-nak, amely triviális. E miatt következik, hogy $\rho(G_K)$ véges. □

3.1.1.30. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K. V akkor, és csak akkor $\mathbb{C}$-megengedett, ha I_K hatása V-n diszkrét.*

Bizonyítás. Az előző állításból és a 3.1.1.28. következményből rögtön következik az állítás. □

3.1.1.31. Következmény. *Legyen V egy 1 dimenziós p-adikus reprezentációja K-nak, tehát $V = \mathbb{Q}_p(\eta)$, ahol η egy folytonos $\mathbb{Z}_p$ együtthatós karakter. Így az előző állítás arra módosul, hogy $\eta(I_K)$ legyen véges. Amelyre gondolhatunk úgy is, hogyha $\mathbb{C}_K(\eta) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\eta)$, hogy*

$$\mathbb{C}_K(\eta)^{G_K} \begin{cases} = 0, & \text{ha } \eta(I_K) \text{ nem véges}, \\ \cong K, & \text{ha } \eta(I_K) \text{ véges}. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az előző állításból következik, mivel ez annak az egy dimenziós esete. □

3.1.2. Hodge-Tate reprezentációk

Legyen K egy tetszőleges test, K^s maximális szeparábilis bővítése K-nak és G_K ezen test abszolút Galois csoportja. Vegyük a következő egzakt sorozatot:

$$1 \longrightarrow \mu_{p^n}(K^s) \longrightarrow (K^s)^\times \xrightarrow{a \mapsto a^{p^n}} (K^s)^\times \longrightarrow 1,$$

ahol p egy prímszám, és $\mu_{p^n}(K^s)$ a K maximális szeparábilis bővítésének p^n-ed rendű elemeinek halmaza, amely izomorf $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-vel izomorf ha K karakterisztikája nem azonos p-vel, ha megegyezik, akkor a triviális csoport.

Ha K karakterisztikája nem p, akkor $\mu_{p^n}(K^s) \to \mu_{p^{n+1}}(K^s)$ leképezés, amelyet a p-adik hatványra való emeléssel definiálunk egy homomorfizmus, így a Mittag-Leffler feltételek teljesülése miatt egy inverz rendszert definiálnak.

Ha veszünk egy tetszőleges R kommutatív, egységelemes gyűrűt, akkor $R[x, y]/(xy - 1)$ gyűrű spektrumát nevezzük multiplikatív csoport sémának, melyet $\mathbb{G}_m$-mel szokás jelölni. Ez azért fontos számunkra, mivel az előbb definiált inverz rendszert nevezzük a multiplikatív csoport séma Tate modulusának:

$$T_p(\mathbb{G}_m) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mu_{p^n}(K^s).$$

$T_p(\mathbb{G}_m)$ egy szabad $\mathbb{Z}_p$ modulus, melynek rangja 1. Így $T_p(\mathbb{G}_m)$ generátorát a következő elemmel azonosíthatjuk: $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 \neq 1, \epsilon_{i+1}^p = \epsilon_i$, ezen sorozatot jelöljük $t := (\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$-vel. Látszódik t tényleg $T_p(\mathbb{G}_m)$ eleme és generátora.

Ha vesszük K^s/K bővítést, akkor ezen bővítés Galois lesz. Egy $g \in G_K := \mathrm{Gal}(K^s/K)$ elem a t-n a következőképpen hat:

$$g(t) = \chi(g)t, \text{ ahol } \chi : G_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \text{ a körosztási karakter,}$$

tehát $T_p(\mathbb{G}_m)$ egy szabad 1 dimenziós $\mathbb{Z}_p$ reprezentáció. Ez által jelölhetjük $T_p(\mathbb{G}_m)$-t $\mathbb{Z}_p(1)$-gyel, és $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$-et meg jelölhetjük $\mathbb{Q}_p(1)$-gyel. Amelyre gondolhatunk úgy, mint $\mathbb{G}_m$-nek egy 1 dimenziós p-adikus reprezentációja.

Továbbá minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén definiálhatjuk $\mathbb{Z}_p(i)$-t, mint

$$\mathbb{Z}_p(i) = \mathbb{Z}_p t^i = \begin{cases} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes i}, & \text{ha } i > 0, \\ \mathbb{Z}_p, & \text{ha } i = 0, \\ (\mathbb{Z}_p(1)^*)^{\otimes -i}, & \text{ha } i < 0, \end{cases}$$

ahol $\mathbb{Z}_p(1)^*$ a $\mathbb{Z}_p(1)$ duálisa. A t^i-n való hatása egy $g \in G_K$ elemnek $\chi^i(g)t^i$ lesz, tehát χ^i által megadott $\mathbb{Z}_p(i) := \mathbb{Z}_p(\chi^i)$ és $\mathbb{Q}_p(i) := \mathbb{Q}_p(\chi^i)$ reprezentációkat nevezhetjük a $\mathbb{Z}_p$ i-edik Tate-csavarásához tartozó $\mathbb{Z}_p$-reprezentációjának és $\mathbb{Z}_p$ i-edik Tate-csavarásához tartozó p-adikus reprezentációjának. Ha veszünk egy tetszőleges p-adikus reprezentációt, akkor ez által továbbá minden i-re definiálható a reprezentáció i-edik Tate-csavarása.

Legyen M egy $\mathbb{Z}_p$-modulus, akkor M-nek az i-edik Tate csavarását definiálhatjuk úgy, hogy

$$M(i) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i).$$

Az $M \mapsto M(i)$ hozzárendeléssel definiált leképezés megad egy izomorfizmust a $\mathbb{Z}_p$-modulusok között. Ha G_K hat M-en, akkor $M(i)$-n is hat a következőképpen

$$g(x \otimes u) = g(x) \otimes g(u) = \chi^i(g) g(x) \otimes u,$$

ahol χ a körosztási karakter. A G_K hatásból látszik, hogy $M \mapsto M(i)$ izomorfizmus $i \neq 0$ esetén nem lesz egymással felcserélhető.

A Tate-csavarás alkalmazására mutatunk egy későbbiekben is fontos állítást.

3.1.2.1. Állítás. *Legyen K egy p-adikus test, L egy Galois bővítése. $\mathbb{C}_K$ i-edik Tate csavarását definiáljuk $\mathbb{C}_K t^i$-nek, amelyen G_K hatása a következő: $g(t^i) = \chi^i(g)t^i$, ahol χ a körosztási karakter.*

1. *$H^n(G_K, \mathbb{C}_K(i)) = 0$ ha $i \neq 0$ és $n \geqslant 2$,*
2. *$H^0(G_K, \mathbb{C}_K) = K$, és $H^1(G_K, \mathbb{C}_K)$ egy 1 dimenziós K-vektortér, melyet $\log(\chi)$ generál, amely $H^1(G_K, K)$-nak eleme.*

Az $n = 0$ esetet a 3.1.1.31. következmény egy másképpen megfogalmazott alakja.

Bizonyítás. Legyen K_∞/K körosztási $\mathbb{Z}_p$-bővítés, legyen $\mathbf{H}_K := \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)$, és legyen $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$. Legyen L egy véges Galois bővítése K_∞-nek, akkor legyen $\alpha \in L$ olyan, hogy teljesüljön rá, hogy $\mathrm{Tr}_{L/K_\infty}(\alpha) = 1$, és továbbá legyen $c, c' \in H^n(L/K_\infty, \mathbb{C}_K(i)^{G_L})$. Így

$$c'(g_1, \ldots, g_{n-1}) = \sum_{h \in \mathrm{Gal}(L/K_\infty)} g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_{n-1} h(\alpha) c(g_1, \ldots, g_{n-1}),$$

egyenlet miatt, akkor $dc' = c$, így ha vesszük a limeszét, akkor kapjuk, hogy $H^n(H_K, \mathbb{C}_K(i)) = 0$. Ez által $n = 1$ esetben, ha vesszük azon egzakt sorozatot, melyben a két leképezés a kiterjesztés és a szűkítés, akkor azt kapjuk, hogy a kiterjesztés egy izomorfizmus:

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma_K, \mathbb{C}_K(i)^{\mathbf{H}_K}) \longrightarrow H^1(G_K, \mathbb{C}_K(i)) \longrightarrow H^1(\mathbf{H}_K, \mathbb{C}_K(i))^{\Gamma_K} = 0.$$

Így azt kapjuk, hogy $\mathbb{C}_K(i)^{\mathbf{H}_K} = \widehat{K_\infty}(i)$. Azt tudjuk, hogy $\widehat{K_\infty} = K_m \oplus X_m$, ahol X_m azon elemek által generált K_m-beli halmaz, melyeknek a normalizált nyomának képe 0. Ha továbbá olyan nagy m-et választunk, hogy $v_K(\chi(\gamma_m) - 1) > d$ teljesül, ahol γ_m K_m generátora, χ a körosztási karakter, d meg a K_m dimenziója, akkor $\chi^i(\gamma_m) - 1$ invertálható lesz X_m-ben minden i-re.

Ha vizsgáljuk $H^1\left(\Gamma_{K_m}, \widehat{K_\infty}(i)\right)$-t, akkor azt kapjuk, hogy

$$H^1\left(\Gamma_{K_m}, \widehat{K_\infty}(i)\right) = \frac{\widehat{K_\infty}}{\chi^i(\gamma_m)\gamma_m - 1} = \frac{K_m \oplus X_m}{\chi^i(\gamma_m)\gamma_m - 1} = \frac{K_m}{\chi^i(\gamma_m)\gamma_m - 1},$$

így ha $i = 0$, akkor $H^1\left(\Gamma_{K_m}, \widehat{K_\infty}(i)\right) = K_m$ különben meg 0-val egyenlő.

Azt tudjuk, hogy $\widehat{K_\infty}(i)$ egy K-vektortér, és $\#\mathrm{Gal}(K_m/K)$ invertálható, így $H^j\left(\mathrm{Gal}(K_m/K), \widehat{K_\infty}(i)^{\Gamma_{K_m}}\right) = 0$ ha $j > 0$. Ha vesszük a következő egzakt sorozatot, mint előbb

$$0 \longrightarrow H^1\left(\Gamma_K, \widehat{K_\infty}(i)\right) \longrightarrow H^1\left(\mathrm{Gal}(K_m/K), \widehat{K_\infty}(i)^{\Gamma_{K_m}}\right) \longrightarrow H^1\left(\mathbf{H}_K, \widehat{K_\infty}(i)\right)^{\Gamma_K},$$

ahol $H^1\left(\Gamma_K, \widehat{K_\infty}(i)\right) = 0$ lesz az előző gondolatmenet miatt ha i nem egyenlő nulla, és ha i nulla akkor meg $K \times \log(\xi)$, mivel $H^1\left(\Gamma_K, \widehat{K_\infty}\right) = H^1(\Gamma_K, K) = \mathrm{Hom}(\Gamma_K, K) = K \cdot \log(\xi)$.

$H^1(G_K, \mathbb{C}_K(i))$ egy dimenziós lesz, mivel tudjuk, hogy $H^n(\mathbf{H}_K, \mathbb{C}_K(i)) = 0$, ha $n \geqslant 2$ és a kiterjesztés szűkítés egzakt sorozat miatt, mely megfogalmazható úgy is, hogy a következő egzakt sorozathoz:

$$1 \longrightarrow \mathbf{H}_K \longrightarrow G_K \longrightarrow \Gamma_K \longrightarrow 1$$

definiálható egy Hochschild-Lyndon-Serre spektrál sorozat, melynek az első két sora nem nulla így Γ_K komológia dimenziója 1. ☐

Így már rátérhetünk Fontaine első periódus gyűrűjére.

3.1.2.2. Definíció. (A Hodge-Tate gyűrű) Legyen $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$.

$$B_{HT} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_K(i) = \mathbb{C}_K\left[t, \frac{1}{t}\right].$$

Ezen definíció által ellátható egy multiplikatív struktúrával. Ekkor B_{HT}-t nevezzük a Hodge-Tate gyűrűnek. Továbbá B_{HT} telítése a következő lesz: $\widehat{B_{HT}} = \mathbb{C}_K((t)) = \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} c_i t^i,\ c_i = 0,\ \text{ha } i \ll 0\right\}$.

3.1.2.3. Állítás. *B_{HT} gyűrű $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-reguláris, tehát*

1. *B_{HT} integritási tartomány,*

2. *$(Frac(B_{HT}))^{G_K} = B_{HT}^{G_K} = K$, ahol Frac-cal jelöljük a hányados testet,*

3. *minden $b \in B_{HT}$, $b \neq 0$, $g(b) \in \mathbb{Q}_p b$ minden $g \in G_K$ esetén, akkor b invertálható.*

Bizonyítás. Az első állítás látszik B_{HT} definíciójából. 3.1.1.31. következményt használva bizonyítjuk a második állítást. Ezen $B_{HT} \subset \mathrm{Frac}(B_{HT}) \subset \widehat{B_{HT}}$ tartalmazások miatt elég belátni, hogy $\widehat{B_{HT}}^{G_K} = K$, mivel $B_{HT} \supset K$. Legyen $b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i t^i \in \widehat{B_{HT}}, g \in G_K$, akkor $g(b) = \sum g(c_i)\chi^i(g)t^i$. Ezen b elem, akkor lesz fix ha minden g-re $g(b) = b$ ez meg csak, akkor teljesül, ha $c_i t^i$ fix, tehát $\mathbb{C}_K(i)$-nek a G_K hatás általi fixteste. $\mathbb{C}_K(i)^{G_K} = 0$ ha $i \neq 0$ és $\mathbb{C}_K^{G_K} = K$ ha $i = 0$ a 3.1.1.31. következmény miatt, tehát ezzel kijött, hogy $\widehat{B_{HT}}^{G_K} = K$.

Legyen $b = \sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} c_i t^i$ nem nulla B_{HT}-beli elem, amelyre továbbá a feltevés miatt teljesül, hogy minden $g \in G_K$-ra $g(b) \in \mathbb{Q}_p b$, tehát $g(b) = \eta(g)b$, ahol $\eta(g) \in \mathbb{Q}_p$. Azonban $g(b) = \sum g(c_i)\chi^i(g)t^i$, így $g(c_i)\chi^i(g) = \eta(g)c_i$ minden tagra és minden g-re, tehát $g(c_i) = (\eta\chi^{-i})(g)c_i$. $\eta\chi^{-i}$ egy olyan karakter, mely felfogható egy dimenziós reprezentációként $\mathbb{C}_K$ felett minden i-re. Továbbá ha $c_i \neq 0$, akkor $\mathbb{Q}_p c_i$ egy 1 dimenziós $\mathbb{Q}_p$ vektortér $\mathbb{C}_K$ felett, amely stabil G_K általi hatásra, így $\eta\chi^{-i}$ $\mathbb{C}_K$-megengedett, tehát 3.1.1.31. következmény miatt azon i-re, melyre $c_i \neq 0$, akkor igaz, hogy I_K általi hatás $\eta\chi^{-i}$-n keresztül véges, amely csak egy indexre lehet legfeljebb igaz, amelyből következik, hogy b invertálható, mivel $b = c_j t^j$, ahol $c_j \neq 0$ és j azon index, amelyre a hatás véges. ☐

3.1.2.4. Definíció. V legyen G_K p-adikus reprezentációja. Ezen reprezentáció Hodge-Tate ha B_{HT}-megengedett.

3.1.2.5. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentáció, akkor $\mathbf{D}_{HT}$-t definiáljuk úgy, amely V reprezentációhoz a következőt rendeli hozzá: $(B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. $\mathbf{D}_{HT}$ definíciójából adódó természetes leképezés*

$$\alpha_{HT} : B_{HT} \otimes_K \mathbf{D}_{HT}(V) \to B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

injektív, és $dim_K \mathbf{D}_{HT}(V) \leqslant dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Továbbá akkor, és csak akkor egyenlő, ha Hodge-Tate reprezentáció. Ekkor α_{HT} izomorfizmus.

Bizonyítás. Az előző állítás miatt és 2.2.0.7. tétel segítségével következik ezen állítás rögtön. ☐

3.1.2.6. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentáció, és legyen $W = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ egy $\mathbb{C}_K$-reprezentáció. V akkor, és csak akkor Hodge-Tate, ha W-hez tartozó Θ Sen-operátor félig-egyszerű és a sajátértékei egészek.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy V legyen Hodge-Tate, akkor W-t elő tudjuk állítani, mint egy direkt összeg, mivel legyen

$$W_i := (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}(-i) \otimes_K \mathbb{C}_K$$

így ez által adódik, hogy $W = \bigoplus W_i$.

W_i egy 1-dimenziós altér, így előáll, mint $\mathbb{C}_K e$, valamely nem nulla e-re. Ekkor $e \in (W_i)_\infty$, tehát $\gamma^t(e) = \chi(\gamma)^{it} e$. Sen-operátor jól kezelhető alakját használva igaz, hogy

$$\Theta(e) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-padikusan}}} \frac{\gamma^t(e) - e}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-padikusan}}} \frac{\chi(\gamma)^{it} e - e}{t} = ie,$$

tehát Θ W_i-n csak az i-vel való szorzás, ebből meg adódik, hogy W-nek a saját értékei egészek és, hogy W félig-egyszerű, mivel W_i-k egyszerűek.

Tegyük fel, hogy Θ félig-egyszerű és a sajátértékei egészek, ekkor feltudjuk bontani W_i sajátalterekre, melyekhez tartozó sajátérték egészek, tehát a Θ csak egésszel való szorzás W_i-n. Ha $W_i(-i)$-t vizsgáljuk, akkor észrevehetjük, hogy a W_i-n a Θ az i-vel és W_{-i}-n a Θ a $-i$-vel való szorzás, így a Θ $W_i(-i)$-n az azonosan 0 leképezés. A 2.1.3.12. tétel miatt $W_i(-i)$ előáll, mint $\mathbb{C}_K \otimes_K (W_i(-i))^{G_K}$. Az előző állítást használva adódik, hogy V Hodge-Tate, mivel $dim_{\mathbb{Q}_p} V \geqslant dim_K(\mathbf{D}_{HT}(V))$ és

$$dim_K(\mathbf{D}_{HT}(V)) \geqslant \sum_{i \in \mathbb{Z}} dim_K((W_i(-i))^{G_K}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} dim_{\mathbb{C}_K}(W_i) = dim_{\mathbb{Q}_p} V,$$

és így $dim_K(\mathbf{D}_{HT}(V)) = dim_{\mathbb{Q}_p} V$. ☐

Ha V p-adikus reprezentáció, akkor a $\mathbf{D}_{HT}(V)$ egy fokszámozott K-vektortér, mivel

$$\mathbf{D}_{HT}(V) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} gr^i(\mathbf{D}_{HT}(V)),$$

ahol a $gr^i(\mathbf{D}_{HT}(V)) = (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$.

3.1.2.7. Definíció. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor az i-edik Hodge-Tate súlyt úgy definiáljuk, hogy

$$h_i := dim_K\left((\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}\right),$$

azon esetekben mikor ezen dimenzió nem nulla.

3.1.3. Az $\mathfrak{R}$ gyűrű

Ha veszünk egy K p-adikus testet, melynek legyen a maradékteste k. Ezen maradéktest Witt vektorok gyűrűjét meg jelöljük $K_0 := W(k)$-val, akkor az $\mathcal{O}_{K_0}/p\mathcal{O}_{K_0}$ gyűrűn az abszolút Frobenius leképezés egy gyűrű homomorfizmus lesz, így tudjuk definiálni a hozzá tartozó $\mathfrak{R}$ gyűrűjét. K_0-t tartalmazó tetszőleges L testek $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ gyűrűjéhez definiált R gyűrűk lesznek a számunkra hasznosak a de Rham periódus gyűrű definiálásánál. Így látható a szekció címe nem egy konkrét R gyűrűhöz fűződik, hanem bizonyos gyűrűk konstrukciójához. Ehhez Ouyang (10) és Brinon (4) jegyzeteit vettem igénybe.

3.1.3.1. Definíció. Az A gyűrűből képzett $R(A)$ gyűrűt definiáljuk úgy, hogy

$$R(A) := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

ahol minden n-re legyen $A_n = A$, és minden n-re továbbá legyen az átmenő leképezés az abszolút Frobenius leképezés, tehát minden $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A)$ igaz lesz, hogy $(x_{n+1})^p = x_n$.

Továbbá minden n-re jelöljük $R(A)$-ból A-ba a projekció θ_n-nel.

3.1.3.2. Állítás. *$R(A)$ egy tökéletes, p karakterisztikájú gyűrű.*

Bizonyítás. A gyűrű biztos, hogy p karakterisztikájú lesz, mivel a Frobenius leképezés az $R(A)$-n egy homomorfizmust ad. Továbbá $R(A)$ tökéletes, mivel a Frobenius leképezés automorfizmus is, abból eredendően, ahogy $R(A)$ elemeit definiáltuk, és ha $x \in R(A)$-ra igaz, hogy $\varphi(x) = 0$, akkor $x = 0$. $\square$

3.1.3.3. Állítás. *Legyen A egy gyűrű, mely szeparábilis és teljes a p-adikus topológiára nézve, akkor A/pA-nak vehetjük az R gyűrűjét. Ekkor $R(A/pA)$ és $R(A)$ halmaz között megadható egy bijekció, ahol*

$$R(A) := \left\{ \left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid x^{(n)} \in A, \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)} \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A/pA)$, akkor minden n-re létezik egy felemeltje x_n-nek A-ban, amely legyen $\widehat{x_n}$. Az $R(A/pA)$ definíciója miatt így minden $n, m \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy

$$\widehat{x^p_{n+1}} \equiv \widehat{x_n} \mod pA \text{ és így } \widehat{x^{p^{m+1}}_{n+m+1}} \equiv \widehat{x^{p^m}_{n+m}} \mod p^m A,$$

mivel ha két elem tetszőleges m-re $p^m A$-ban kongruensek, akkor ezen elemek p-edik hatványa $p^{m+1}A$-ban is kongruensek lesznek. Így tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $(x^{p^m}_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik limesze A-ban, és a limesz független a felemeléstől, így a limeszt jelölhetjük $x^{(n)}$-nel, akkor ez alapján megadhatunk egy leképezés $R(A/pA)$ és $R(A)$ között a következő hozzárendeléssel: $x \longmapsto \left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ha vesszük a $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A) \longmapsto \left(x^{(n)} \mod pA\right)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A/pA)$ hozzárendeléssel definiált leképezést, akkor látszik ez az előző leképezés inverze. Így megadtuk a bijekciót $R(A)$ és $R(A/pA)$ között. $\square$

Legyen K egy p-adikus test, legyen $\mathcal{O}_K$ az egészek gyűrűje, $\mathfrak{m}_K$ maximális ideálja $\mathcal{O}_K$-nak, és így ez által k legyen a maradéktest, melynek karakterisztikája legyen $p > 0$. $W = W(k)$ Witt vektorok gyűrűje és K_0 a W

hányadostestje, tehát $K_0 = \mathrm{Frac}(W) = W\left[\frac{1}{p}\right]$. Továbbá jelöljük $\mathbb{C}_K$-vel K teljes, algebrailag zárt testbővítését. Vegyük a $\overline{K}$ egy olyan L résztestjét, amely tartalmazza K_0-t, és ennek az egészek gyűrűje legyen $\mathcal{O}_L$.

$\mathcal{O}_L$ teljesíti a szükséges tulajdonságokat, így $\mathcal{O}_L$ azonosítható $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_L/p^n\mathcal{O}_L$-lel, amelyből következik, hogy $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{\hat{L}}/p\mathcal{O}_{\hat{L}}$, ahol $\hat{L}$ a p-adikus telítése L-nek, és így

$$R\left(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L\right) = R\left(\mathcal{O}_{\hat{L}}/p\mathcal{O}_{\hat{L}}\right) = \left\{\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\hat{L}}, \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\}.$$

3.1.3.4. Definíció. $\mathfrak{R} := R\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}\right) = R\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}\right)$.

3.1.3.5. Állítás. *$\mathfrak{R}$ gyűrű egy teljes értékelési gyűrű a $v_{\mathfrak{R}}$-re nézve, ahol az értékelés a $\mathbb{C}_K$-n lévő szokásos értékelés a p-re normalizálva. Továbbá $\mathfrak{R}$ tökéletes és p karakteriszitikájú. Hányadosteste:*

$$\mathit{Frac}(\mathfrak{R}) = R(\mathbb{C}_K) = \left\{x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \mid x^{(n)} \in \mathbb{C}_K,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\},$$

amely teljes, nem-arkimédeszi, tökéletes, p karakterisztikájú test, amely továbbá algebrailag zárt.

Bizonyítás. Az állításban megfogalmazottak alapján az $\mathfrak{R}$-en az értékelés, nem más mint $v_{\mathfrak{R}}(x) := v_{\mathbb{C}_K}(x) = v_{\mathbb{C}_K}\left(x^{(0)}\right)$, amelyet a p-adikus értékelésből származtatunk. Ez által az $\mathfrak{R}$-re tett állítások igazak. Az értékelés szokásos kiterjesztésével $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$-re teljesül az algebrai lezártságon kívül minden más állítás.

Lássuk be $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$ algebrai zártságát, ehhez elég belátni, hogy egy nem azonosan nulla polinomnak van gyöke $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$-ben. Azonban, mivel $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$ tökéletes, így elég bizonyítani, hogy szeparábilisan zárt, tehát egy $P(X) = a_0 + a_1X^1 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathfrak{R}[X]$ szeparábilis polinomnak van gyöke $\mathfrak{R}$-ben.

$P(X)$ szeparabilitásából következik, hogy létezik két olyan $H_0(X), G_0(X) \in Frac(\mathfrak{R})[X]$ polinom, hogy

$$G_0(X)P(X) + H_0(X)P'(X) = 1,$$

ahol $P'(X)$-szel jelöljük a szimbolikus deriváltját a $P(X)$ polinomnak. Továbbá ha veszünk egy olyan elemét $\mathfrak{R}$-nek, melynek az értékelése legyen 1 ($\pi \in \mathfrak{R}$), akkor ha $G_0(X)$-et és $H_0(X)$-et a következőképpen módosítjuk, akkor létezik egy $m \in \mathbb{N}$, hogy arra teljesül, hogy $G(X)P(X) + H(X)P'(X) = \pi^m$, ahol a módosított polinomok: $G(X) = \pi^m G_0(X)$ és $H(X) = \pi^m H_0(X)$. A gyök megtalálásához a következő lemmára lesz szükség.

3.1.3.6. Lemma. *Legyen $s \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor létezik egy olyan $x \in \mathfrak{R}$, melyre teljesül, hogy $v(P(x)) \geqslant p^s$.*

Bizonyítás. A θ_s projekció magjában azon elemek vannak, amelyek értékelése $\geqslant p^s$, így ezen x-re, ha létezik, teljesülni fog, hogy $\theta_s(P(x)) = 0$. Így vegyük P-nek a θ_s általi felemeltjét, amely legyen $\overline{P}(X)$, amely együtthatói így $\theta_s(a_i) \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. A $\overline{P}$-nek létezik gyöke $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-ban, mivel $\overline{K}$ algebrailag zárt. Legyen $y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ a gyöke $\overline{P}$-nek és ezen modulo p redukciója legyen $\overline{y}$. Akkor ezen $\overline{y}$-hoz létezik egy $x \in \mathfrak{R}$, melyre teljesül, hogy $\theta_s(x) = \overline{y}$. Ez által ezen x megfelelő lesz. □

A lemma segítségével megkonstruálunk egy $\mathfrak{R}$-beli gyökét. Ezen konstrukció induktív lesz. Tegyük fel, hogy x_n-ig már megkonstruáltuk a gyököt, akkor keressük x_{n+1}-et $x_{n+1} = x_n + y$ alakban, ahol y-t még nem tudjuk micsoda. Ha behelyettesítjük x_{n+1}-et P-be, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + yP'(x_n) + \sum_{i\geqslant 2} y^i P^{(i)}(x_n),$$

ahol $P^{(i)}$ az i-edik szimbolikus derivált. Így ha $\frac{-P(x_n)}{P'(x_n)}$-t választjuk y-nak, akkor $v(y) \geqslant n - m$, így ez által $v\left(y^i P^{(i)}(x_n)\right) \geqslant n + 1$. Így x_n-nek létezni fog limesz, amely a lemma miatt megadja egy gyökét $P(X)$-nek $\mathfrak{R}$-ben. □

A de Rham periódus csoport konstrukciójához a $\mathbb{C}_K$, $\mathfrak{R}$ és $\mathfrak{R}$ hányadostestének jobb megismerése szükséges, így most a multiplikatív csoportjainak néhány tulajdonságát mutatjuk be. A $\mathbb{C}_K^\times$ csoport nevezetes részcsoportjait jelöljük a következőkkel:

1. $U_{\mathbb{C}_K} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}-K}^\times = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} - \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_K} := \{x \in \mathbb{C}_K \mid v(x) = 0\}$, tehát $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ invertálható elemeinek csoportja,

2. $U^{+}_{\mathbb{C}_K} = 1 + \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_K} := \{x \in \mathbb{C}_K \mid v(x-1) > 0\} \subseteq U_{\mathbb{C}_K}$,
3. $U^{1}_{\mathbb{C}_K} = 1 + p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} := \{x \in \mathbb{C}_K \mid v(x-1) \geqslant 1\} \subseteq U^{+}_{\mathbb{C}_K}$.

Ezen nevezetes részcsoportokra teljesülnek a következő állítások:

1. A következő sorozat egzakt: $0 \longrightarrow U_{\mathbb{C}_K} \longrightarrow \mathbb{C}_K^{\times} \xrightarrow{v} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$,
2. A következő sorozat egzakt: $1 \longrightarrow U^{+}_{\mathbb{C}_K} \longrightarrow U_{\mathbb{C}_K} \longrightarrow \overline{k}^{\times} \longrightarrow 1$, és a Teichmüller leképezés generál egy izomorfizmust $U_{\mathbb{C}_K} = \overline{k}^{\times} \times U^{+}_{\mathbb{C}_K}$,
3. tetszőleges $x \in U^{+}_{\mathbb{C}_K}$-hoz létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre teljesül, hogy $x^{p^n} \in U^{1}_{\mathbb{C}_K}$,
4. $U^{1}_{\mathbb{C}_K}$ szeparábilis és teljes p-adikus topológiára nézve.

Ezen nevezetes részcsoportok $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^{\times}$-ban is definiálhatók:

1. $U_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}^{\times} = \mathfrak{R} - \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} := \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x) = 0\}$, tehát $\mathfrak{R}$ invertálható elemeinek csoportja,
2. $U^{+}_{\mathfrak{R}} = 1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}} := \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x-1) > 0\} \subseteq U_{\mathfrak{R}}$,
3. $U^{1}_{\mathfrak{R}} := \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x-1) \geqslant 1\} \subseteq U^{+}_{\mathfrak{R}}$.

A következő állítás a $\mathbb{C}_K^{\times}$ részcsoportjainak tulajdonságaihoz hasonló állításokat fog tartalmazni.

3.1.3.7. Állítás. *1. A következő sorozat egzakt:* $0 \longrightarrow U_{\mathfrak{R}} \longrightarrow \mathit{Frac}(\mathfrak{R})^{\times} \xrightarrow{v} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$*, ahol* v *leképezés az értékelés* $\mathfrak{R}$*-en.*

2. $\mathit{Frac}(\mathfrak{R})^{\times} \cong \mathit{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{C}_K^{\times}\right)$.

3. $U_{\mathfrak{R}} = \mathit{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^{\times}\right) = \overline{k}^{\times} \times U^{+}_{\mathfrak{R}}$.

4. $U^{+}_{\mathfrak{R}} = \mathit{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], U^{+}_{\mathfrak{R}}\right) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^{1}_{\mathfrak{R}}$.

5. $U^{1}_{\mathfrak{R}} = \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x-1) \geqslant 1\}$ *izomorf a következő inverz limesszel:* $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} U^{1}_{\mathfrak{R}}/(U^{1}_{\mathfrak{R}})^{p^n}$.

Az állításban használt jelölések magyarázása: $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^{\times}$ az $\mathfrak{R}$ hányadostestének multiplikatív csoportja, $U_{\mathfrak{R}}$ az $\mathfrak{R}$-beli egységek csoportja, $U^{+}_{\mathfrak{R}} = \left\{x \in \mathfrak{R} \mid x^{(n)} \in (1 + \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_K})\right\}$.

Bizonyítás. Az első állítás rögtön következik a $\mathbb{C}_K^{\times}$-on megadott állításból. A másodikhoz tegyük fel, hogy $f \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \mathbb{C}_K^{\times}\right)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re p^{-n} helyen f-et úgy definiáljuk, hogy $f(p^{-n}) = x^{(n)}$, akkor egy $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^{\times}$-beli elemet fogunk kapni. Továbbá ha veszünk egy $x = \left(x^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^{\times}$-beli elemet, akkor f leképezést definiálunk az által, hogy p^{-n}-hez hozzárendeljük $x^{(n)}$-t, akkor kapunk egy homomorfizmust $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$-ból $\mathbb{C}_K^{\times}$-ba, tehát beláttuk a második állítást is.

Legyen $x \in \mathfrak{R}$, hogy $x \in U_{\mathfrak{R}}$, amely ekvivalens azzal, hogy $x^{(0)} \in U_{\mathbb{C}_K}$. Ez által kapjuk, hogy

$$U_{\mathfrak{R}} = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}^{\times}\right) = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \overline{k}^{\times} \times U^{+}_{\mathbb{C}_K}\right) = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \overline{k}^{\times}\right) \times \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], U^{+}_{\mathbb{C}_K}\right) = \overline{k}^{\times} \times U^{+}_{\mathfrak{R}}.$$

Mivel kihasználjuk $\mathbb{C}_K^{\times}$ nevezetes részcsoportjainak tulajdonságait. Továbbá az utolsó egyenlőség azért teljesül, mivel $\overline{k}$-ban, és $U^{+}_{\mathbb{C}_K}$-ban minden elemnek pontosan egy darab p-edik gyöke van. Ez által adódik a harmadik állítás is.

A negyedik állításhoz kézzel megadjuk az izomorfizmust. Legyen a hozzárendelés a következő: $p^{-n} \otimes u \mapsto u^{p^{-n}}$, ahol $u \in U^{1}_{\mathfrak{R}}$, akkor ezen hozzárendelés által látszódik, hogy egy izomorfizmust adtunk meg. Mivel ha $u \in U^{1}_{\mathfrak{R}}$, akkor pontosan egy p^n gyöke van $U^{+}_{\mathfrak{R}}$-ban, és ha $x \in U^{+}_{\mathfrak{R}}$ és $v(x-1) > 0$ is igaz, akkor

$$v\left(x^{p^{-n}} - 1\right) = p^n v(x-1) \geqslant 1$$

elég nagy n esetén, tehát $x^{p^n} \in U^1_{\mathfrak{R}}$. Így adódik a negyedik állítás.

Tudjuk, hogy $U^1_{\mathfrak{R}} = \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x-1) \geqslant 1\}$, ez által $U^{p^n}_{\mathfrak{R}} = \{x \in \mathfrak{R} \mid v(x-1) \geqslant p^n\}$. Az izomorfizmus $U^1_{\mathfrak{R}}$ és az inverz limesz között ebből adódik. ☐

A következő pár állítás és definíció az $\mathfrak{R}$-en lévő Galois hatásról szól.

3.1.3.8. Állítás. *A $G_{K_0} = Gal\left(\overline{K}/K\right)$ természetes módon hat $\mathfrak{R}$-en és $\mathfrak{R}$ hányadostestén. Ha vesszük K_0 egy olyan L bővítését, amely benne van $\overline{K}$-ban, és legyen H az L-hez tartozó Galois csoport G_{K_0}-ban, akkor*

1. $\mathfrak{R}^H = R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$,
2. $(Frac(\mathfrak{R}))^H = Frac(R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L))$,

ahol $\mathfrak{R}^H$ maradéktestét jelöljük $k_L = \overline{k}^H$, amely L-nek lesz a maradékteste. Ha $L^\times$-on az értékelés diszkrét, akkor $k_L = \mathfrak{R}^H$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^H$, ahol $x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ és tetszőleges $h \in H$-ra, akkor $h(x) = \left(h(x^{(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ez által

$$x \in \mathfrak{R}^H \iff x^{(n)} \in \mathcal{O}^H_{\mathbb{C}_K} \text{ minden } n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Az első állítás következik abból, hogy

$$\mathbb{C}^H_K = \widehat{L} \quad \text{és} \quad (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K})^H = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_L/p^n\mathcal{O}_L.$$

A $\overline{k} \hookrightarrow \mathfrak{R} \twoheadrightarrow \overline{k}$ leképezések objektumainak vesszük H általi fixtestét, akkor azt kapjuk, hogy $\overline{k}_L \hookrightarrow \mathfrak{R}^H \twoheadrightarrow \overline{k}_L$. Mivel ezen két leképezés kompozíciója nem más, mint az identitás, így $\mathfrak{R}^H$ maradékteste k_L.

Tegyük fel, hogy az értékelés $L^\times$-en diszkrét, akkor elég belátni, hogyha $x = \left(x^{(n)}\right) \in \mathfrak{R}^H$, és ha értékelése pozitív, akkor $x = 0$. Tudjuk azt, hogy $v\left(x^{(n)}\right) = p^n v\left(x^{(0)}\right)$, így mivel az értékelés diszkrét, így $v(x) = v\left(x^{(0)}\right) = \infty$, tehát $x = 0$. Adódik az is, hogy $\mathfrak{R}^H = k_L$, mivel a korábbiakban láttuk, hogy $k_l \subseteq \mathfrak{R}^H = R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$ és, most meg láttuk, hogy $R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L) \subseteq k_L$. ☐

Vegyünk egy olyan $\left\{\epsilon^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melyre teljesül, hogy $\epsilon^{(0)} = 1$, $\epsilon^{(1)} \neq 1$, és $n \geqslant 2$-től kezdve a következő rekurzió teljesül, hogy $\left(\epsilon^{(n+1)}\right)^p = \epsilon^{(n)}$, akkor ha vesszük a következő bővítések unióját, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_0\left(\epsilon^{(n)}\right),$$

akkor ezen bővítésre gondolhatunk úgy is, hogy a K_0 testhez minden n-re hozzávesszük a p^n-edik egységgyököt. Ezen egységgyökök uniójának bővítését jelöljük K_0^{cyc}-val.

3.1.3.9. Állítás. *Ezen $\epsilon = \left\{\epsilon^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $R\left(\mathcal{O}_{K_0^{cyc}}/p\mathcal{O}_{K_0^{cyc}}\right)$-ban egység lesz, és $\epsilon \in U^1_{\mathfrak{R}}$. Továbbá tetszőleges $g \in G_{K_0}$-ra teljesül, hogy*

$$g(\epsilon) = \epsilon^{\chi(g)} \quad \text{és} \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1,$$

ahol $\pi = \epsilon - 1$, amelyre igaz, hogy $v(\pi) = \frac{p}{p-1}$, és χ a körosztási karakter. Így $\epsilon^{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_p(1)$.

Bizonyítás. Tudjuk azt, hogy $\pi^{(0)}$-re gondolhatunk úgy, mint $\lim\limits_{m\to\infty}(\epsilon^{(m)}-1)^{p^m}$. Mivel $\epsilon^{(0)} - 1 = 0$ és $v(\epsilon^{(m)} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{m-1}}$ minden $m \geqslant 1$-re, akkor $v(\pi) = v(\pi^{(0)}) = \frac{p}{p-1}$. Így adódik, hogy ϵ egység $R\left(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{cyc}}}/p\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{cyc}}}\right)$-ban. ☐

3.1.3.10. Tétel. *Legyen $H = Gal\left(\overline{K}/K_0^{cyc}\right)$, és legyen $\pi = \epsilon - 1 \in \mathfrak{R}^H$, akkor*

1. $\widehat{k[[\pi]]}^{rad} = \mathfrak{R}^H$,
2. $\widehat{k((\pi))}^{rad} = (Frac(\mathfrak{R}))^H$.

Továbbá legyen θ_m a következő projekció, hogy

$$\begin{array}{cccc} \theta_m : & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x_m \end{array}$$

minden $m \in \mathbb{N}$-re, akkor $\theta_m(\mathfrak{R}^H) = \mathcal{O}_{K_0^{cyc}}/p\mathcal{O}_{K_0^{cyc}}$.

Bizonyítás. A bizonyítás megkönnyítés véget használjuk a következő jelöléseket:

$$E_0 := k((\pi)),\ F = E_0^{\mathrm{rad}},\ L = K_0^{\mathrm{cyc}} = \bigcup_{n\geqslant 1} K_0\left(\epsilon^{(n)}\right),\ \text{és } H = H_{K_0} = \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/L\right).$$

Ez által adódik, hogy $\mathfrak{R}^H = \mathfrak{R}(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$, és igaz az is a 3.1.3.8. állítás miatt, hogy $\mathfrak{R}^H$ maradékteste k. Mivel $\pi \in \mathfrak{R}^H$, és $\mathfrak{R}^H$ teljes az értékelésre nézve, így $k[[\pi]] \subset \mathfrak{R}^H$ és $k((\pi)) \subset (\mathrm{Frac}(\mathfrak{R}))^H$. Továbbá mivel $\mathfrak{R}^H$ és $(\mathrm{Frac}(\mathfrak{R}))^H$ tökéletes is így a következő is igaz, hogy

$$\widehat{k[[\pi]]^{\mathrm{rad}}} \subset \mathfrak{R}^H,\ \text{és } \widehat{k((\pi))^{\mathrm{rad}}} \subset (\mathrm{Frac}(\mathfrak{R}))^H.$$

Így már elég csak belátni, a másik irányú tartalmazást. Azonban ahhoz meg elég csak belátni, hogy $\mathcal{O}_F$ sűrű $\mathfrak{R}^H$-ban. Sőt mi több, mivel $\mathfrak{R}^H = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_F/p^n\mathcal{O}_F$, így elég belátni, hogy $\theta_m(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$ minden m esetén. Ennek a belátásához használjuk a következő további jelöléseket: $\mathfrak{w}_n = \epsilon^{(n)} - 1$, így

$$\mathcal{O}_{K_0}\left[\epsilon^{(n)}\right] = W[\mathfrak{w}_n],\ \text{és } \mathcal{O}_L = \bigcup_{n=0}^{\infty} W[\mathfrak{w}_n].$$

Amely a korábbiak miatt egyenlő $\pi^{(n)}$-nel, így $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ egy $\pi^{(n)}$-n által generált k-algebra. Így elég csak belátni, hogy $\pi^{(n)} \in \theta_m(\mathcal{O}_F) = \theta_m(k[[\pi]]^{\mathrm{rad}})$ minden m esetén.

Azonban minden $l \in \mathbb{Z}$ esetén $\pi^{p^{-l}} \in k[[\pi]]^{\mathrm{rad}}$, amelyre gondolhatunk úgy is, hogy $\pi^{p^{-s}} = \left(\left(\epsilon^{(n+l)} - 1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Továbbá $\epsilon^{(n+l)} - 1 = \pi^{(n+l)}$, ha $n + l \geqslant 0$, így ha $l = n - m$, akkor

$$\pi^n = \theta_m\left(\pi^{p^{n-m}}\right) \in \theta_m\left(k[[\pi]]^{\mathrm{rad}}\right)$$

minden m esetén, tehát beláttuk a tételt. □

3.1.3.11. Tétel. *(Fontaine alaptétele) Legyen E_0^s szeparábilis lezárása $E_0 = k((\pi))$-nak $\mathfrak{R}$ hányadostestében, akkor E_0^s sűrű Frac$(\mathfrak{R})$-ben, és a G_{K_0} csoport általi hatásra nézve stabil marad. Továbbá megadható egy izomorfizmus Gal$\left(\overline{K}/K_0^{cyc}\right)$ Galois csoport elemei és Gal(E_0^s/E_0) Galois csoport elemei között úgy, mint*

$$g|_{E_0^s} \in Gal(E_0^s/E_0),$$

ahol $g \in Gal(\overline{K}/K_0^{cyc})$, és ahol az izomorfizmus a következő hozzárendeléssel adható meg: $g \mapsto g|_{E_0^s}$.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításában levő gondolatmenet miatt elég csak azt belátni, hogy

$$\theta_0\left(\mathcal{O}_{\overline{E_0}}\right) = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

Tövábbá $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ előáll a következő diszkrét limeszként:

$$\mathcal{O}_{\overline{K}} = \varinjlim_{\substack{[L:K]<\infty \\ L/K_0 \text{ Galois}}} \mathcal{O}_L,$$

így elég csak egy véges K_0 feletti Galois bővítésre belátni, hogy

$$\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \subset \theta_0\left(\mathcal{O}_{\overline{E_0}}\right).$$

Ennek a belátásához a következő testeket definiáljuk: $K_{0,n} = K_0(\epsilon^{(n)})$ és $L_n = K_{0,n}L$, ekkor L_n Galois bővítése $K_{0,n}$, melynek Galois csoportját jelöljük I_n-nel, így létezik egy N index, amelytől kezdve ezen Galois csoportok sorozat stabilizálódik, tehát

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots,$$

mivel L véges bővítése K_0-nak, és I_n-ek izomorfak L/K_0 bővítés részbővítéseivel. Ezen Galois csoportot jelöljük I-vel. Azonban feltehetjük, hogy $L_n/K_{0,n}$ bővítés teljesen elágazó minden n-re, mivel $\overline{k} \subset \mathcal{O}_{\overline{E_0}}$, így K_0-at kicserélhetjük egy véges elágazásmentes bővítéssel. Így legyen α_n a generátora $\mathcal{O}_{L_n}$ maximális ideáljával, ekkor $\mathcal{O}_{L_n} = \mathcal{O}_{K_{0,n}}[\alpha_n]$.

Legyen $P_n \in K_{0,n}[X]$ α_n minimálpolinomja. Mivel tudjuk, hogy létezik egy olyan n, melyre I_n-ek sorozata stabilizálódik, így elég nagy n esetén P_n foka $|I|$ lesz. Válasszuk n-t ilyenre, akkor P_n írható úgy is, hogy $P_n(X) = \prod_{g\in I}(X - g(\alpha_n))$.

Ez által a tétel első részének belátásához elég, hogyha létezik egy olyan n, amelyre a generátor képe θ_0-nál eleme $\theta_0(\mathcal{O}_{\overline{E_0}})$-nak. Továbbá az elágazáselméletbeli ismeretek miatt, tudunk olyan n-et is választani, hogy $v(g(\alpha_n) - \alpha_n) < \frac{1}{|I|}$ minden $g \neq 1 \in I$-re, mivel tetszőleges $g \neq 1 \in I$ esetén teljesül, hogy $v(g(\alpha_n) - \alpha_n) \to 0$, ha n tart végtelenbe.

Legyen $\overline{P_n}$ a P_n polinom modulo p, és $Q_n \in \mathcal{O}_{\overline{E_0}}[X]$ legyen azon polinom, amelynek a felemeltje $\overline{P_n}$. Továbbá legyen x Q_n-nek egy gyöke, akkor legyen $b \in \mathcal{O}_{\overline{E_0}}$ egy felemeltje $\theta_0(x)$-nek, akkor létezik egy olyan $g_0 \in J$, melyre teljesül, hogy

$$v(b - g_0(\alpha_n)) \geqslant v(b - g(\alpha_n))$$

minden $g \in I$ esetén. Ha az előbbieket, n választásánál tett tulajdonságot plusz a Krasner lemmát használjuk, akkor megkapjuk, hogy $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \subset \theta_0(\mathcal{O}_{\overline{E_0}})$, így következik a tétel első része, mivel

$$v\left(g_0^{-1}(b) - \alpha_n\right) = v(b - g_0(\alpha_n)) \geqslant \frac{1}{|I|} > v(\alpha_n - g(\alpha_n)),$$

és így $\alpha_n \in K_{0,n}\left(g_0^{-1}(b)\right)$, tehát a képe meg eleme $\theta_0(\mathcal{O}_{\overline{E_0}})$-nek.

Így már csak az izomorfizmust kell belátni. Először lássuk be, hogy ez egy csoport homomorfizmus. Ha veszünk egy $e \in E_0^s$, és hozzá egy olyan $P(X) = \sum_{i=0}^{|I|} a_i X^i \in E_0[X]$, melynek gyöke, akkor tetszőleges $g \in G_{K_0}$-re $g(e)$ gyöke lesz $g(P)$-nek. Ezen gyökről tudjuk, hogy eleme E_0-nak, mivel π-nek a g általi képe megadható, mint $(1+\pi)^{\chi(g)} - 1$. E_0 generálódik π által, tehát mivel $(1+\pi)^{\chi(g)} - 1 \in E_0$, így $g(E_0) = E_0$ tetszőleges g-re.

A szüjektivitás következik abból, hogyha veszünk egy F teljes p karakterisztikájú testet, akkor annak nincs nem-triviális olyan szeparábilis bővítése, mely része $\widehat{F^{rad}}$-nak.

Az injektivitást indirekten lássuk be. Legyen $g \neq 1 \in \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_0^{\mathrm{cyc}}\right)$, amely eleme a homomorfizmus magjának, akkor tetszőleges $e \in E_0^s$-re $g(e) = e$. E_0^s sűrű $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$-ban, így $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$-beli elemeken is teljesülni fog. Azonban legyen $a = \left(a^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Frac}(\mathfrak{R})$, ahol $a^{(n)} \in \mathbb{C}_K$, amelyre teljesül, hogy $g(a) = a$, tehát $g\left(a^{(0)}\right) = a^{(0)}$. Azonban θ_0 szürjektív, így g a triviális elem $\mathbb{C}_K$-n, és így $\overline{K}$-n is, tehát ez $\mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_0^{\mathrm{cyc}}\right)$ egységeleme. Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

3.1.4. de Rham reprezentációk

A Hodge-Tate reprezentációk megismerése után észrevehető, hogy nem elég hasznosak, mivel nem árulnak el eleget a G_K csoportról és annak hatásairól. Így Fontaine-ék a p-adikus reprezentációk egy olyan rész-kategóriáját keresték, amely elég bő, hogy az algebrai geometriából származtatott reprezentációkat tartalmazza, de továbbá megadható legyen egy ekvivalencia a szemi-lineáris algebrák kategóriájával. Továbbá meglepő módon látni fogjuk, hogy a következőkben bevezetésre kerülő de Rham periódus gyűrű a B_{HT} gyűrű fokszámozott algebrája lesz.

Legyen $\mathfrak{R}$ az előző fejezetben definiált gyűrű, akkor a Witt vektorok gyűrűje előállítható a következőképpen:

$$W(\mathfrak{R}) = \varprojlim_{f_n} W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right),$$

ahol $f_n : (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0^p, x_1^p, \dots, x_{n-1}^p)$ az átmenő leképezés, amely $W_{n+1}\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right)$-ből $W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right)$-be képeződik minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az inverz rendszer alapját a következő kommutatív diagram adja:

$$\begin{tikzcd} & W_{n+1}\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \arrow[d, "f_n"] \\ W(\mathfrak{R}) \arrow[ur] \arrow[r] & W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \end{tikzcd}$$

Továbbá minden n-re tudjuk definiálni a következő leképezést:

$$w_{n+1} : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K},$$

amely $(a_0, a_1, \dots, a_n)$-t $a_0^{p^n} + pa_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n a_n$-ba viszi, így definiálható $\theta_n : W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p^n$ leképezés ha a w_n-t komponáljuk a hányados leképezéssel, tehát ezen diagram kommutatív lesz:

$$\begin{tikzcd} W_{n+1}\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d] \\ W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \arrow[r, "\theta_n"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p^n = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n \end{tikzcd}$$

A hányados leképezések egy inverz rendszerét adják $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-nak, így a $W(\mathfrak{R})$ inverz rendszerénél definiált f_n-ek által tudunk egy gyűrű leképezést definiálni $W(\mathfrak{R})$-ből $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-be, amelyet a következő kommuatív diagram mutat:

$$\begin{tikzcd} W_{n+1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}\right) \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "f_n"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p^{n+1} \arrow[d] \\ W_n\left(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\right) \arrow[r, "\theta_n"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p^n = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n. \end{tikzcd}$$

Az így definiálható leképezést jelöljük θ-val, és definiáljuk a következő hozzárendeléssel:

$$\theta : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)},$$

ahol $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in W(\mathfrak{R})$, és $x_n^{(m)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$. Legyen mostantól $W := W(\mathfrak{R})$. Legyen $K_0 = W\left[\frac{1}{p}\right]$, akkor

$$W\left[\frac{1}{p}\right] = K_0 \otimes_W W = \bigcup_{n=1}^{\infty} Wp^{-n} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Wp^{-n}.$$

3.1.4.1. Állítás. *1. Ezen θ egy W-algebra homomorfizmus, amely kommutál a G_{K_0} általi hatással,*

2. θ szürjektív,

3. a θ magja főideál, melyet egy ξ elem generál, ahol $\xi := [\mathfrak{w}] + p = (\mathfrak{w}, 1, 0, \dots) \in W(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{w}^{(0)} = -p$,

4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (Ker(\theta))^n = 0$.

Bizonyítás. Ha $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in W(R)$, akkor $\pi_n : W(\mathfrak{R}) \to W_n(\mathfrak{R})$-beli projekció általi képe legyen $(x_{0,n}, \dots, x_{n-1,n})$. Legyen $x_{i,n}$ felemeltje $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-ben $x_i^{(n)}$ minden i-re, akkor

$$\theta_n(x_{0,n}, \dots, x_{n-1,n}) = \sum_{i=0}^{n-1} p^i \overline{\left(x_i^{(n)}\right)^{p^{n-i}}} = \sum_{i=0}^{n-1} p^i \overline{x_i^{(n)}}.$$

Ezen $\theta_n : W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ leképezés egy homomorfizmus minden n esetén, és a G_{K_0} hatással is kommutatív, így a limeszét véve θ is homomorfizmus lesz és G_{K_0}-val kommutatív.

Legyen $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, akkor létezik egy olyan $x \in \mathfrak{R}$, hogy $x^{(0)} = a$. Ha vesszük x Teichmüller leképezését, és annak θ általi képét, akkor adódik, hogy $\theta([x]) = a$. Ebből következik a szürjektivitás.

A harmadik állításhoz elég belátni, hogy $\mathrm{Ker}(\theta) \subset (\xi, p)$ teljesül, mivel $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-nek nincsen p-torziós elemei és $W(\mathfrak{R})$ p-adikusan szeparábilis és teljes gyűrű.

Ha veszünk egy $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathrm{Ker}(\theta)$, akkor

$$0 = \theta(x) = x_0^0 + p \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} x_i^{(i)},$$

tehát $v(x_0^{(0)}) \geqslant 1 = v(p)$, tehát $v(x_0) \geqslant 1 = v(\mathfrak{w})$. Ez által létezik egy olyan b_0, hogy $x_0 = b_0\mathfrak{w}$. Legyen b=$[b_0]$, akkor

$$x - b\xi = (x_0, x_1, \dots) - (b, 0, 0, \dots) \cdot (\mathfrak{w}, 1, 0, 0, \dots) = (x_0 - b_0\mathfrak{w}, \dots) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots) = p(y_1', y_2', \dots) \in pW(\mathfrak{R}),$$

ahol $(y_i')^p = y_i$. Így következik a harmadik állítás is.

Tegyük fel, hogy van egy nem nulla $x = (x_0, x_1, \dots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Ker}(\theta))^n$, akkor minden n-re $x \in (\mathrm{Ker}(\theta))^n$, így $v(x_0^{(0)}) \geqslant n$ minden n-re, tehát feltehető, hogy $x_0 = 0$. Ebből adódik, hogy $x \in pW(\mathfrak{R})$, azonban x tovább bontható, így $0 = \theta(x) = \theta(px') = p\theta(x')$ miatt $\theta(x') = 0$, tehát $x' \in pW(\mathfrak{R})$. Ebből következik, hogy $x = p^2 x'' \in p^2 W(\mathfrak{R})$, de ezen gondolatmenetet tovább lehet vinni, így $x = 0$, amely ellentmondás, így $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Ker}(\theta))^n = 0$. □

3.1.4.2. Definíció. 1. B_{dR}^+ gyűrűt definiáljuk úgy, mint a $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$-nak a $\mathrm{Ker}(\theta)$ szerinti p-adikus telítése, amely azt jelenti, hogy

$$B_{dR}^+ := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left(W(\mathfrak{R}) \left[\frac{1}{p}\right] / (\mathrm{Ker}(\theta))^n \right) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left(W(\mathfrak{R}) \left[\frac{1}{p}\right] / (\xi)^n \right).$$

2. Továbbá B_{dR} legyen a B_{dR}^+ hányadosteste, tehát

$$B_{dR} := \mathrm{Frac}(B_{dR}^+) = B_{dR}^+ \left[\frac{1}{\xi}\right].$$

3.1.4.3. Lemma. *B_{dR}^+ egy teljes, diszkrét értékelési gyűrű, melynek maradékteste $\mathbb{C}_K$, melyen hat G_{K_0}. Továbbá B_{dR} egy értékelési test.*

Bizonyítás. A B_{dR}^+ definíciója által adódik a lemma. □

3.1.4.4. Definíció. Minden $i \in \mathbb{Z}$-re legyen $\mathrm{Fil}^i(B_{dR})$ egy szabad B_{dR}^+-modulus, melyet ξ^i generál. Akkor definiálhatunk B_{dR}-en egy filtrálást, amelyre teljesülnek a következők:

1. csökkenő filtrálás, tehát

$$\dots \supset \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = B_{dR}^+ \xi^i \supset \mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR}) = B_{dR}^+ \xi^{i+1} \supset \dots,$$

2. szeparábilis filtrálás, tehát

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = 0,$$

3. kimerítő filtrálás, tehát

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = B_{dR}.$$

A $\mathrm{Fil}^0(B_{dR}) = B_{dR}^+$, és minden i-re $\mathrm{Fil}^i B_{dR} = \mathfrak{m}^i_{B^+_{dR}}$ lesz, ahol $\mathfrak{m}^i_{B^+_{dR}}$-vel jelöljük B^+_{dR} maximális ideáljának i-edik hatványát.

Továbbá B_{dR}-n az értékelést definiáljuk úgy, hogy melyik az a legnagyobb i, amelyre az elem még benne van a filtrációban, tehát

$$x \in \mathrm{Fil}^i(B_{dR}), \quad \text{de } x \notin \mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR}) \quad \Rightarrow \quad v_{dR}(x) = i.$$

Továbbá ha $x \notin B_{dR}$-nak, akkor meg $v_{dR}(x) = \infty$.

3.1.4.5. Állítás. *$\overline{K}$ részteste B^+_{dR}-nak, amely megőrzi a Galois hatást, és $\overline{K} \cap Fil^1(B_{dR}) = 0$.*

Bizonyítás. A 3.1.4.1 állítás által láttuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\xi)^n = 0$ és, mivel $\xi^n \cdot W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right] \subset (\xi)^n$, így

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \xi^n \cdot W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right] = 0,$$

tehát $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$ és $W(\mathfrak{R})$ is beágyazható B^+_{dR}-ba. Ez által $W(\mathfrak{R})$ és $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$ részgyűrűk B^+_{dR}-be, és még $K_0 = W\left[\frac{1}{p}\right]$ résztest B^+_{dR}-be, tehát $\overline{K}$ is az lesz.

$\overline{K} \cap \mathrm{Fil}^1(B_{dR}) = 0$ állítás meg egy Hensel lemmás meggondolás miatt teljesül. Ha veszünk egy K_0 együtthatós polinomot, mivel K_0 beágyazható B^+_{dR}-ba és a 3.1.4.1 állítás miatt θ szürjektív, így ezen polinomnak $\mathbb{C}_K$ felett különböző gyökei vannak, és mivel B^+_{dR} felett is igaz a Hensel lemma, így B^+_{dR} felett is különböző gyökei lesznek, így teljesül a kívánt állítás, és továbbá a felemelés egyértelműsége miatt teljesül a Galois hatás megőrzése is. □

Legyen $\epsilon \in \mathfrak{R}$, amelyre teljesül, hogy $\epsilon^{(0)} = 1$ és $\epsilon^{(1)} \neq 1$, ekkor legyen $\boldsymbol{\pi} = [\epsilon] - 1 \in W(\mathfrak{R})$, mivel $\theta([\epsilon] - 1) = \epsilon^{(0)} - 1 = 0$, így $\mathrm{Fil}^1(B_{dR})$-nek eleme lesz $[\epsilon] - 1$. Ez által

$$(-1)^{n+1}\frac{([\epsilon]-1)^n}{n} \quad \in W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]\xi^n,$$

tehát

$$\log([\epsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{([\epsilon]-1)^n}{n} \in B^+_{dR}.$$

3.1.4.6. Állítás. *Legyen $t = \log([\epsilon])$, akkor $t \in Fil^1(B_{dR})$, de $t \notin Fil^2(B_{dR})$. Ebből látszódik, hogy t generálja a B^+_{dR} maximális ideálját.*

Bizonyítás. Ha $n \geqslant 1$ $t \in \mathrm{Fil}^1(B_{dR})$, akkor $\frac{([\epsilon]-1)^n}{n} \in \mathrm{Fil}^1(B_{dR})$ teljesül az előzőek miatt. Továbbá ha $n \geqslant 2$, akkor

$$\frac{([\epsilon]-1)^n}{n} \in \mathrm{Fil}^2(B_{dR})$$

is igaz. Így elég belátni, hogy $[\epsilon] - 1 \notin \mathrm{Fil}^2(B_{dR})$. Azonban, mivel $[\epsilon] - 1 \in \mathrm{Ker}(\theta)$, így $[\epsilon] - 1 = \lambda\xi$, ahol $\lambda \in W(\mathfrak{R})$, akkor

$$([\epsilon] - 1) \notin \mathrm{Fil}^2(B_{dR}) \Longleftrightarrow \theta(\lambda) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \notin W(\mathfrak{R})\xi.$$

Ez által elég belátni már csak, hogy $[\epsilon] - 1 \notin W(\mathfrak{R})\xi^2$.

Ezt lássuk be indirekten, tegyük fel, hogy teljesül, akkor $[\epsilon] - 1 = \lambda\xi^2 = (\lambda_0, \lambda_1, \dots)(\mathfrak{w}^2, \dots)$. Azonban ha a két oldalt megvizsgáljuk elemenként, akkor $\epsilon - 1 = \lambda_0\mathfrak{w}^2$ kapunk, ami ellentmondás, mivel tudjuk, hogy $v(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$, és az előző egyenletből meg az jött ki, hogy legalább 2 az értékelése. □

A $\mathbb{Z}_p(1)$ Tate-modulusra lehet úgy gondolni, mint $\mathbb{Z}_p t$, így részgyűrűje B^+_{dR}-nek, mivel

$$\log([\epsilon^\lambda]) = \log([\epsilon]^\lambda) = \lambda\log([\epsilon]) = \lambda t.$$

Továbbá minden $g \in G_{K_0}$ esetén $g(t) = \chi(g)t$, ahol χ körosztási karakter, és

$$\mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = B_{dR}^+ t^i = B_{dR}^+(i),$$
$$B_{dR} = B_{dR}^+\left[\frac{1}{t}\right] = B_{dR}^+\left[\frac{1}{\xi}\right],$$

így

$$\mathrm{gr}(B_{dR}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i(B_{dR}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i B_{dR}/\mathrm{Fil}^{i+1} B_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_{dR}^+(i)/tB_{dR}^+(i) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_K(i).$$

Ebből következik a következő állítás, hogy

3.1.4.7. Állítás. $gr(B_{dR}) = B_{HT} = \mathbb{C}_K\left[t, \frac{1}{t}\right] \subset \widehat{B_{HT}} = \mathbb{C}_K((t))$.

3.1.4.8. Állítás. $B_{dR}^{G_K} = K$.

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy $K \subset \overline{K} \subset B_{dR}^+ \subset B_{dR}$ tartalmazás sorozat teljesül. Így elég csak belátni, hogy $K \supset B_{dR}^{G_K}$, tehát vegyünk egy $b \in B_{dR}^{G_K}$ elemet, és lássuk be, hogy $b \in K$. Mivel $b \in B_{dR}^{G_K}$, így létezik egy maximális i index, amelyre $b \in \mathrm{Fil}^i(B_{dR})$, de nem eleme $\mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR})$-nek. Vegyük B_{dR}-nek az i-edik fokszámozott algebrája és ebben b képét, amely legyen $\overline{b}$. Azt tudjuk, hogy $\mathrm{gr}^i(B_{dR}) = \mathbb{C}_K(i)$ és, hogy $\mathbb{C}_K(i) = 0$ ha i nem nulla, így $\overline{b} \in K \subset B_{dR}^+$, mivel b nem nulla. Ha azonban a $(b - \overline{b})$-t vesszük, akkor $b - \overline{b} \in (\mathrm{Fil}^i(B_{dR}))^{G_K}$, így $b = \overline{b}$, ami azt jelenti, hogy $b \in K$. □

3.1.4.9. Definíció. V p-adikus reprezentációja G_K-nak akkor, és csak akkor de Rham, ha B_{dR}-megengedett, tehát $\alpha_{dR}(V)$ izomorfizmus.

Jelöljük a G_K-hoz tartozó de Rham $\mathbb{Q}_p$ feletti reprezentációinak kategóriáját $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{dR}(G_K)$-val.

3.1.4.10. Lemma. *V de Rham reprezentáció akkor, és csak akkor ha*

$$\dim_K(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Bizonyítás. A de Rham reprezentáció definíciójából rögtön következik. □

Ha V p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor $\mathbf{D}_{dR}(V)$ egy filtrált K-vektortér, amelynél a filtráció i-edik részalgebrája:

$$\mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) := (\mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Vegyük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \to \mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR}) \to \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \to \mathbb{C}_K(i) \to 0,$$

tenzorozzuk meg V-vel, mivel ez tartja az egzaktságot az elején, akkor kapjuk, hogy

$$0 \to \mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0.$$

Ez után vegyük G_K általi invariánsát, tehát azon elemeket, amelyeket G_K fixál, akkor kapjuk, hogy

$$0 \to \mathrm{Fil}^{i+1}(\mathbf{D}_{dR}(V)) \to \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) \to (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Ez által az i-edik fokszámozott algebrája $\mathbf{D}_{dR}(V)$-nek a következő lesz:

$$\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V))/\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathbf{D}_{dR}(V)) \hookrightarrow (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Továbbá

$$\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{HT}(V).$$

3.1.4.11. Állítás. *Ha V p-adikus reprezentáció de Rham, akkor V Hodge-tate reprezentáció és*

$$gr^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) = (\mathbb{C}_K(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}, \qquad gr(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \mathbf{D}_{HT}(V).$$

Az állítás igazságát az előző gondolatmenet mutatja.

3.1.4.12. Tétel. *A $\mathbf{D}_{dR} : \mathbf{Rep}^{dR}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathbf{Fil}_K$ egy egzakt, hűséges funktor, amely a tenzorszorzásra nézve is zárt.*

Bizonyítás. Ezen tétel bizonyítása a 2.2.0.7. tétel segítségével fog menni, amely segítség az, hogy K-vektorterek kategóriájában teljesül a tétel, így csak a filtrációt kell ellenőrizni.

Vegyük V de Rham reprezentáció következő rövid egzakt sorozatát:

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0,$$

ahol V' egy részreprezentációja és $V'' = V/V'$. $\mathbb{C}_K(i)$-vel való tenzorozása, majd G_K csoportra való invarialitás után $\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V'))$-nél és $\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V))$-nél az egzaktság teljesül. Azonban, mivel V de Rham, így a dimenzió tulajdonságok miatt teljesül $\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V''))$-nél is az egzaktság, tehát

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V')) \longrightarrow \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) \longrightarrow \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V'')) \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sorozat lesz, amelyből következik, hogy a filtráción teljesül az egzaktság.

A következő hozzárendelés által definiált leképezésből következik a tenzortartás tulajdonság a filtráción:

$$\begin{gathered} c_1 v_1 t^i \otimes c_1 v_1 t^j \longmapsto c_1 c_2 (v_1 \otimes v_2) t^{i+j} \\ \mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V_1)) \otimes \mathrm{gr}^j(\mathbf{D}_{dR}(V_1)) \longrightarrow \mathrm{gr}^{i+j}(\mathbf{D}_{dR}(V_1 \otimes V_2)). \end{gathered}$$

A leképezés hozzárendeléséből adódik, hogy injektív, és a dimenzió tulajdonságok miatt a szürjektivitás is teljesül, tehát a leképezés egy izomorfizmus, így a tenzor tulajdonság megtartás teljesül. ☐

3.1.4.13. Állítás. *Legyen V p-adikus reprezentáció, amely de Rham, akkor V Hodge-Tate is lesz. Továbbá*

$$\dim_K(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K(gr^i(\mathbf{D}_{dR}(V))).$$

Bizonyítás. Az előző tételből és a két tétel előtti állításból következik ezen állítás is. ☐

A de Rham reprezentációk körében is tudjuk definiálni a Hodge-Tate súlyokat, mivel ha veszünk egy V de Rham reprezentációt, akkor $\mathbf{D}_{dR}(V)$ filtrációinak azon i-ei lesznek a Hodge-Tate súlyok, melyekre az i-edik fokszámozott algebrája nem nulla, tehát lehet úgy is mondani, hogy i-ről $i+1$-re ugrik a $\mathbf{D}_{dR}(V)$, mivel $\mathrm{gr}^i(\mathbf{D}_{dR}(V)) = \mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V))/\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathbf{D}_{dR}(V))$. Így ez akkor, és csak akkor nem nulla, ha a $\mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{dR}(V))$ és $\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathbf{D}_{dR}(V))$ különböző.

3.2. Fontaine kristályos és félig-stabil gyűrűi

A következő periódus gyűrűk bevezetésének oka, hogy a de Rham periódus gyűrű rendelkezik egy kis deficittel, amely nem más mint, hogy a Frobenius automorfizmus $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$-on nem hagyja helyben θ magjának elemeit, tehát a B_{dR}-en a Frobenius leképezés nem egy endomorfizmus. Így Fontaine és társainak be kellett vezetni egy olyan részgyűrűjét $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$-nek, mely elemeit a Frobenius leképezés fixen hagyja, továbbá a hányadostestén értelmezett egy Frobenius endomorfizmus. Ezen periódus gyűrűt nevezték el kristályos periódus gyűrűnek. A következőkben ez kerül bevezetésre Conrad (4) és Ouyang (10) jegyzete alapján.

Továbbá bevezetésre kerül a félig-stabil periódus gyűrű, melyre gondolhatunk úgy, mintha a $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^{\times}$-beli elemek logaritmusát adtuk volna hozzá a kristályos periódus gyűrű elemeihez. Ezen periódus gyűrű bevezetéséhez is a kristályosaknál is használt jegyzeteket veszem segítségül.

3.2.0.1. Definíció. Legyen A egy kommutatív gyűrű, és A-nak legyen I egy tetszőleges ideálja, akkor az I-hez tartozó osztott hatványburkolón a $\gamma_n : I \to A$ leképezések ($n = 0, 1, 2, \ldots$-re) halmazán definiált, és a következő tulajdonságokkal ellátott struktúrát értjük:

1. $\gamma_0(x) = 1, \quad \gamma_1(x) = x, \quad \gamma_n(x) \in I$ minden $x \in I$-re, ha $n > 1$,
2. $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(x)$ minden $x, y \in I$, és $n \in (\mathbb{N} \cup 0)$,
3. $\gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x)$ minden $x \in I$, minden $n \in (\mathbb{N} \cup 0)$, és minden $\lambda \in A$,
4. $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!}\gamma_{n+m}(x)$ minden $x \in I$, és minden $n, m \in (\mathbb{N} \cup 0)$,
5. $\gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{(nm)!}{(n!)^m m!}\gamma_{nm}(x)$ minden $x \in I$, és minden $n, m \in (\mathbb{N} \cup 0)$.

Ezen definíció azért szükséges számunkra, hogy képesek legyünk definiálni Fontaine következő periódus gyűrűjét a B_{cris}-t. A korábbiakban már definiáltuk a θ leképezést, melynek magjáról beláttuk, hogy egy elemmel is generálható, és ezen elemet elneveztük ξ-nek. Ezen ξ-t megadtuk úgy is, hogy $\xi = [\varpi] + p = (\varpi, 1, 0, \dots)$, ahol $\varpi^0 = -p$.

3.2.0.2. Definíció. A^0_{cris} legyen azon modulus, amelyet úgy definiálunk, hogy $\mathrm{Ker}(\theta)$ osztott hatványburkolója $W(\mathfrak{R})$-ben. Az osztott hatványburkoló definíciójából adódik, hogy $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$-nak egy $W(\mathfrak{R})$ részmodulusa, amelyet $\gamma_n(\xi)$ generál, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ez által A^0_{cris} úgy definiálható, hogy

$$A^0_{cris} := \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \gamma_n(\xi), \quad N < \infty, \quad a_n \in W(\mathfrak{R}) \right\}.$$

Az osztott hatványburkoló további tulajdonságaiból látszódik, hogy nem csak $W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]$-nak $W(\mathfrak{R})$-részmodulusa, hanem $W(\mathfrak{R})\left[\frac{\xi}{p}\right]$ gyűrűnek is részgyűrűje. Továbbá ha $\mathrm{Ker}(\theta)$-val vesszük a telítését $W(\mathfrak{R})\left[\frac{\xi}{p}\right]$-nak, akkor adódik, hogy

$$A^0_{cris} \subset W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] \subset B^+_{dR}.$$

3.2.0.3. Lemma. *1. $W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ gyűrű szeparábilis, ahol szeparabilitáson azt értjük, hogy tetszőleges I ideáljára nézve $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.*

2. $W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ teljes a p-adikus telítésre nézve,

3. $W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] \longrightarrow \varprojlim_n \left(W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] \Big/ p^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] \right)$ leképezés egy izomorfizmus.

Bizonyítás. Először az 1. állítást látjuk be. $W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ gyűrű egyértelmű maximális ideálja a p által generált ideál, így ha belátjuk azt, hogy

$$J = \bigcap_{n=0}^{\infty} p^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] = 0,$$

akkor az első rész adódik.

Tegyük fel, hogy létezik $x \in J$, amely nem nulla, akkor ebből következik, hogy minden n-re $x \in p^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$, tehát előáll úgy, hogy

$$x = p^n \sum_k a_{k,n} \left(\frac{\xi}{p}\right)^k,$$

ahol $a_{k,n} \in W()$ minden k-ra. Ha nézzük x-nek a θ-nál lévő képét látjuk, hogy

$$\theta(x) = \theta\left(p^n \sum_k a_{k,n} \left(\frac{\xi}{p}\right)^k\right) = p^n \theta\left(\sum_k a_{k,n} \left(\frac{\xi}{p}\right)^k\right) = p^n \theta(a_{0,n}),$$

mivel $\theta(\xi) = 0$. Ebből következik, hogy $\theta(x) = 0$, mivel az előző egyenlet minden n-re igaz, így $a_{0,n} = \xi b_{0,n}$, ahol $b_{0,n} \in W(\mathfrak{R})$, tehát $x = \xi x_1$ alakban is előáll, ahol

$$x_1 = p^{n-1}\left((b_{0,n}p + a_{1,n}) + \left(\sum_{k\geqslant 2} a_{k,n}\left(\frac{\xi}{p}\right)^{k-1}\right)\right) \in p^{n-1}W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right].$$

Így minden n-re az is igaz, hogy $x \in \xi^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ indukció által. Az indukció $n = 0$, 1-re igaz az előbbiek miatt és, mivel $x_1 \in p^{n-1}W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ miatt az indukciót lehet alkalmazni x_1-re, tehát $x_1 \in \xi^{n-1}W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$, és $x = \xi x_1$, így $x \in \xi^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ teljesül.

Ez által $x \in \bigcap\limits_{n=1} \xi^n W(\mathfrak{R})\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] \subset \bigcap\limits_{n=1} \mathrm{Ker}(\xi^n)$, így a 3.1.4.1 állítás 3. pontja miatt, amely azt mutatta meg, hogy $\bigcap\limits_{n=1} \mathrm{Ker}(\xi^n) = 0$, így $x = 0$, ami ellentmondás, tehát $J = 0$. □

Ezen lemma miatt tudjuk definiálni A_{cris}-t is, és Fontaine kristályos periódus gyűrűjéhez is szükségünk lesz rá, amit B_{cris} jelölünk.

3.2.0.4. Definíció. $A_{cris} := \varprojlim\limits_{n} \left(A^0_{cris}/p^n A^0_{cris}\right)$ és legyen B^+_{cris} úgy definiálva, hogy A_{cris} p-adikus telítése, tehát $B^+_{cris} := A_{cris}\left[\frac{1}{p}\right]$.

Ezen definíció azért helyes, mivel A^0_{cris} az előző lemma által szeparábilis, és így beinjektálható A_{cris}-be. Továbbá B^+_{dR}-be is beinjektálható, mivel $A^0_{cris} \subset B^+_{dR}$, és A^0_{cris}-ból van egy injekció $W(\mathfrak{R})\left[\frac{\xi}{p}\right]$-be, és tudjuk a korábbiak miatt, hogy $W(\mathfrak{R})\left[\frac{\xi}{p}\right]$-ből meg B^+_{dR}-be van egy injekció, így a kompozíció egy injektív leképezést ad.

Ez által A_{cris} elemei a következőképpen írhatók:

$$A_{cris} := \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n(\xi), \quad a_n \to 0 \text{ } p\text{-adikusan } W(\mathfrak{R})\text{-ben van}\right\}.$$

Ez ugyanígy igaz B^+_{cris}-ra is, tehát

$$B^+_{cris} := \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\gamma_n(\xi), \quad b_n \to 0 \text{ } p\text{-adikusan } W(\mathfrak{R})\left[\frac{1}{p}\right]\text{-ben van}\right\}.$$

3.2.0.5. Állítás. *Legyen θ a szokásos leképezésünk A_{cris}-ből $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-be, akkor Ker($\theta$) egy osztott hatványideál, tehát minden $a \in A_{cris}$, amely a θ leképezés magjában van, akkor $\frac{a^m}{m!} \in A_{cris}$ és $\theta\left(\frac{a^m}{m!}\right) = 0$ minden $m \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A θ gyűrűhomomorfizmus $W(\mathfrak{R})$-ből $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-ba azonban természetesen kiterjeszthető A^0_{cris}-ra, és így A_{cris}-re is, amely B^+_{dR} definíciója miatt kiterjed rá is.

Ahhoz, hogy belássuk az állításunkat szükséges, hogy tetszőleges $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n(\eta) \in A^0_{cris}$, akkor $\frac{a^m}{m!} \in A^0_{cris}$, mivel ha A^0_{cris}-ra igaz, akkor onnan a folytonosság miatt következik az állításunk.

Ez által

$$\frac{a^m}{m!} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ i_1+\dots+i_n=m}} \prod_n a_n \frac{\xi^{ni_n}}{n!^{i_n}(i_n)!} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ i_1+\dots+i_n=m}} \prod_n a_n \frac{\gamma_{ni_n}(\xi)(ni_n)!}{n!^{i_n}(i_n)!},$$

és, mivel $\frac{n\cdot i_n!}{n!^{i_n}\cdot(i_n)!}$ természetes szám $n > 1$ esetén, így $\frac{a^m}{m!} \in A^0_{cris}$. Ezen törtre gondolhatunk úgy mintha $n \cdot i_n$ darab különböző jelöletlen elemet szeretnék i_n különböző dobozba beletenni úgy, hogy nem számít melyik elemet melyik dobozba tettük. Az által, hogy $\frac{a^m}{m!}$-t a második alakra tudtuk hozni, így következik, hogy $\theta\left(\frac{a^m}{m!}\right) = 0$, tehát beláttuk, hogy a magja egy osztott hatványburkoló. □

3.2.0.6. Állítás. *Ha az előző θ leképezésünket nézzük, akkor ezen leképezést a maradéktestre is tudjuk definiálni, melynek magja osztott hatványburkoló lesz.*

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogyha p egy prímszám, akkor p osztja $\frac{p^m}{m!}$-t $\mathbb{Z}_p$-ben tetszőleges $m \in \mathbb{N}$-re, így ezen állítás segítségével és az előző állításból rögtön következik ez is. □

A korábbiakban már beszéltünk $t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon]-1)^n}{n} \in B_{dR}^+$-ről. Ezen elem fontos lesz, hogy B_{cris}-t definiálni tudjuk, így kimondunk egy állítást vele kapcsolatban.

3.2.0.7. Állítás. *A korábbiakban definiált t-re teljesül, hogy $t \in A_{cris}$ és $t^{p-1} \in pA_{cris}$.*

Bizonyítás. Az első része az állításnak könnyen következik t-nek a szummás felírásából, mivel

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon]-1)^n}{n},$$

és $[\epsilon]-1$-ről tudjuk, hogy θ leképezés magjában van, így előáll ξb alakban, ahol $b \in W(\mathfrak{R})$. Így $\frac{([\epsilon]-1)^n}{n} = (n-1)!b^n\gamma_n(\xi)$ és $(n-1)!$ p-adikusan tart 0-hoz, így $\theta\left(\frac{([\epsilon]-1)^n}{n}\right) = 0$, tehát $t \in A_{cris}$.

A másik állítás belátásához elég belátni, hogy $([\epsilon]-1)^{p-1} \in pA_{cris}$. ϵ definíciójából tudjuk, hogy

$$([\epsilon]-1)^n = \lim_{m\to\infty} (\zeta_{n+m}-1)^{p^m},$$

ahol persze ζ_{p^n} egy p^n. primitív egységgyök. Ez által ha nézzük $([\epsilon]-1)^n$ p-adikus értékelését, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$-gyel egyenlő, ami által tudjuk, hogy

$$(\epsilon-1)^{p-1} = \mathfrak{w}^p \cdot (\text{egység})$$

alakban áll elő. Ez által továbbá

$$(\epsilon-1)^{p-1} \equiv [\mathfrak{w}^p] \cdot (\text{egység}) \equiv (\xi-p)^p \cdot (\text{egység}) \equiv \xi^p \cdot (\text{egység}) \mod pA_{cris},$$

azonban $\xi^p = p(p-1)!\gamma_p(\xi)$, mely eleme pA_{cris}-nek, így $(\epsilon-1)^{p-1} \equiv 0 \mod pA_{cris}$, tehát $t^{p-1} \in pA_{cris}$. □

A bizonyításban már burkoltan utaltunk a Forbenius leképezés hatására a A_{cris}-n, mivel beláttuk, hogy a p-edik hatványra emelés által a ξ képe $p(\eta+(p-1)!\gamma_p(\xi))$ lesz és, mivel különböző n hatványai ξ-nek a Forbenius leképezés által $\varphi(\xi^n) = p^n(\eta+(p-1)!\gamma_p(\xi))^n$ lesznek. φ-t úgy definiálhatjuk γ_n elemeken, hogy

$$\varphi(\gamma_n) = \frac{p^n}{n!}(\eta+(p-1)!\gamma_p(\xi)^n),$$

így adódik, hogy a φ az A_{cris}^0-án belülre képez. Ez által a A_{cris}-re és B_{cris}^+-re is a folytonosság miatt ki tudjuk terjeszteni.

Ez által már tudjuk a következőképpen definiálni B_{cris}-t is.

3.2.0.8. Definíció. Fontaine-féle kristályos periódus gyűrűje legyen $B_{cris} := B_{cris}^+\left[\frac{1}{t}\right] = A_{cris}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{t}\right]$.

Definícióból látszik, hogy ezen periódus gyűrű sokkal finomabb, mint a de Rham típusú periódus gyűrű. Továbbá a B_{cris}^+-on definiált φ leképezést megadhatjuk B_{cris}-en is ha $\frac{1}{t}$ képe $\frac{1}{pt}$ lesz, mivel

$$\varphi(t) = \log([\epsilon^p]) = \log([\epsilon]^p) = p \cdot \log([\epsilon]) = pt.$$

Ahogy a többi peridódikus gyűrűnél ennél is ismertetni kell, hogy hogyan hat ratja a G_K Galois csoport, mivel fontos a megengedettség definiálásához.

3.2.0.9. Állítás. *1.* $B_{cris}^{G_K} = K_0$.

2. *A* $\iota : K \otimes_{K_0} B_{cris} \to B_{dR}$ *leképezés injektív, ahol a leképezést úgy definiáljuk, hogy*

$$\iota : \lambda \otimes b \longmapsto \lambda b,$$

ahol $b \in B_{cris}$ *és* $\lambda \in K$.

Bizonyítás. Először a másodikat bizonyítjuk, mivel abból következik az első állítás. 3.2.0.3. lemma bizonyításához hasonlóan fogunk most is eljárni, mivel $A^0_{cris,\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_K \otimes_{W(\mathfrak{R})} A^0_{cris} \subset W_{\mathcal{O}_K}(\mathfrak{R})\left[\frac{\xi}{p}\right]$. Így A_{cris} felírható, mint a π_K prímelemre nézett inverz limesz:

$$A_{cris} = \varprojlim_n \left(A^0_{cris,\mathcal{O}_K}/\pi_K^n\right) = \varprojlim_n \left(A^0_{cris,\mathcal{O}_K}/p^n\right) \subset B^+_{dR,K} = B_{dR}.$$

Ebből meg következik a második állítás, mivel így ι egy beágyazás. Az első állítás azért következik ebből, mivel az mindig igaz, hogy $K_0 \subset B^{G_K}_{cris}$. A másik irány meg abból következik, hogy $B^{G_K}_{dR} \supset (K \otimes_{K_0} B_{cris})^{G_K} = K \otimes_{K_0} B^{G_K}_{cris} \supset K \otimes_{K_0} K_0 = K$, és mivel $B^{G_K}_{dR} = K$, így végig egyenlőség van tehát, $B^{G_K}_{cris} = K_0$. □

A csoporthatás és a Frobenius leképezés fontos szerepet játszik mindegyik periódus gyűrűn, így jó tudni, hogy a csoporthatás és a Frobenius leképezés kommutatív egymással.A következőkben a logaritmust definiáljuk, terjesztjük ki $\mathbb{C}_K{}^\times$-ra és $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-ra, hogy a félig-stabil periódus gyűrűt is tudjuk definiálni.

3.2.1. Logaritmus $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-on

A BSc-s szakdolgozatom során már definiáltam a logaritmust $\mathrm{Frac}(\mathbb{Q}_p)^\times$-on, és a hozzá tartozó legfontosabb tulajdonságokat. Azonban most közülük egy párat ismétlésként megemlítések. A logaritmus additivitási tulajdonságához a következő észrevétel szükséges.

3.2.1.1. Észrevétel. *Legyen* N *egy tetszőleges természetes szám és* c_N *a legkisebb közös többször* 1*-től* N*-ig, tehát* $c_N = \prod_{l=1}^{N} l^{log_l N}$, *akkor*

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} + \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{Y^n}{n} = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{(XY+X+Y)^n}{n} + \frac{1}{c_N}P_N(X,Y),$$

ahol $P_N(X,Y)$ *egész együtthatós legalább* $N+1$*-ed fokú monomok összege.*

Legyen K egy p-adikus test, melynek hányadosteste legyen $\mathbb{C}_K$, akkor a következő 4 tulajdonságot sorolom fel, mivel ezek $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-on is szükségesek lesznek:

1. Ha $x \in U^1_{\mathbb{C}_K}$, akkor x-nek a logaritmusát a szokásos hatványsorral definiáljuk:

   $$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},$$

   amelyre továbbá a 3.2.1.1 észrevétel miatt teljesül, hogy $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Ez által a logaritmus megad egy bijekciót $U^1_{\mathbb{C}_K}$ és $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ között.

   Továbbá ezen függvény inverze az exponenciális függvény lesz, mely $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$-ből $U^1_{\mathbb{C}_K}$-be képez. ahol az exponenciális leképezést a szokásos hatványsorral definiáljuk.

2. Ha $x \in U^+_{\mathbb{C}_K}$, akkor a logaritmus a következőként definiálunk:

   $$\log(x) = \frac{1}{p^m}\log(x^{p^m}),$$

   ha m azon legnagyobb természetes szám melyre $v(x^{p^m} - 1) \geqslant 1$.

3. Ha $a \in \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}_K}$, akkor a felírható, mint $[\overline{a}]x$, ahol $\overline{a} \in \overline{k}^\times$, tehát $[\overline{a}] \in W\left(\overline{k}\right)$ és $x \in U^+_{\mathbb{C}_K}$. Ez által definiálhatjuk $\log(a)$-t $\log(x)$-xel.

4. Ha $x \in \mathbb{C}_K^\times$ és $v(x) = \frac{r}{s}$, ahol r egész és s természetes szám, akkor $v(x^s) = r = v(p^s)$, tehát

$$\log\left(\frac{x^s}{p^r}\right) = s \cdot \log(x) - r \cdot \log(p).$$

Ha teljesül azon tulajdonság, hogy a p helyen a logaritmus 0-t vesz fel, akkor a definiált logaritmusunkat Iwasawa logaritmusnak is nevezik.

Mostmár térjük rá arra, hogy hogyan tudjuk definiálni a logaritmust $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-on. A $\mathbb{C}_K^\times$-on definiált Iwasawa logaritumus által a logaritmust a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} \log : \mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times &\longrightarrow B_{dR} \\ x &\longmapsto \log([x]), \end{aligned}$$

ahol $[x]$-en az x-nek a Teichmüller reprezentánsára gondoltunk. A 3.2.1.1 észrevétel miatt az additivitási tulajdonság $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-on is teljesülni. Továbbá ha $x \in U^1_{\mathfrak{R}}$, akkor

$$\log([x]) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{([x]-1)^n}{n} = ([x]-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{([x]-1)^n}{n+1},$$

mivel A_{cris}-en konvergens, tehát a logaritmus már $U^1_{\mathfrak{R}}$-ből A_{cris}-be jól-definiált, és teljesíti azt, hogy $\log([x]) = 0$ akkor, és csak akkor ha $x = 0$. Ez által a logaritmus injektív. Azon tulajdonság miatt, hogyha $x \in U^+_{\mathfrak{R}}$, akkor létezik egy olyan $m > 0$, hogy $x^{p^m} \in U^1_{\mathfrak{R}}$, teljesül, hogy a logaritmus leképezést ki tudjuk terjeszteni $U^+_{\mathfrak{R}}$-ról B^+_{dR}-ba. Ha $x \in U^+_{\mathfrak{R}}$, akkor logarimus általi képét definiáljuk $\frac{\log([x^{p^m}])}{p^m}$. Sőt mi több, mivel $\mathfrak{R}^\times = \overline{k}^\times \times U^+_{\mathfrak{R}}$, így $a \in \mathfrak{R}^\times$, akkor $\log([a]) = \log([x])$ hozzárendelés által a logaritmus $\mathfrak{R}^\times$ is jól definiált, ha $a = a_0 x$, ahol $a_0 \in \overline{k}^\times$ és $x \in U^+_{\mathfrak{R}}$.

Így már látjuk, hogy mi lesz a képe egy $\mathfrak{R}$ hányadostestebeli elemnek, mivel ha $x \in \mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$, melynek az értékelése $\frac{r}{s}$, akkor $\frac{x^s}{\varpi^r} \in \mathfrak{R}^\times$, ahol $\varpi = (-p, \dots) \in \mathfrak{R}$, $v(\varpi) = 1$, így

$$\log\left(\left[\frac{x^s}{\varpi^r}\right]\right) = s\log([x]) - r\log([\varpi]),$$

tehát

$$\log([x]) = \frac{r\log([\varpi]) + \log\left(\left[\frac{x^s}{\varpi^r}\right]\right)}{s}.$$

Így ha definiáljuk $\log([\varpi])$-t, akkor meg is vagyunk. Azt tudjuk, hogy $\theta\left(\frac{[\varpi]}{-p} - 1\right) = 0$, mivel $\theta([\varpi]) = -p$, így a $\frac{[\varpi]}{-p}$ képe a logaritmus által a következő lesz:

$$\log\left(\frac{[\varpi]}{-p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{[\varpi]}{-p} - 1\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{np^n},$$

amely B^+_{dR}-n egy jól definiált eleme.

3.2.1.2. Definíció. Legyen $\mathbf{u}$ a következő eleme B^+_{dR}-ben:

$$\mathbf{u} = \log([\varpi]) := \log\left(\frac{\varpi}{-p}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{np^n}.$$

Ez által $\mathrm{Frac}(\mathfrak{R})^\times$-on kapunk egy jól definiált logaritmust, amely felcserélhető lesz a G_K csoport általi hatással, mivel a G_K tetszőleges $g \in G_K$-ra ϖ-n úgy hat, hogy $g(\varpi) = \varpi\epsilon^{\eta(g)}$, ahol η a G_{K_0}-nak egy $\mathbb{Z}_p$-karaktere. Továbbá $g(\mathbf{u}) = \log(g[\varpi]) = \mathbf{u} + \eta(g)t$.

Legyen $W := W(\mathfrak{R})$ az alrész végéig.

3.2.1.3. Észrevétel. *Ha $x \in Frac(\mathfrak{R})^\times$, és ha $\varphi(\log([x])) = \log([\varphi(x)])$ teljesül, akkor $\varphi(\log([x])) = p\log([x])$. Ez azt mutatja, hogy a Frobenius leképezés kiterjed a logaritmus B^+_{dR}-beli képére.*

3.2.1.4. Definíció. Legyen $U := \mathrm{Im}(\log : U_{\mathfrak{R}}^{+} \longrightarrow B_{cris}^{+}) \subset (B_{cris}^{+})^{\varphi=p}$. Ezen definíció miatt látszódik, hogy $t \in U$.

3.2.1.5. Állítás. $\mathbf{u}$ *nem eleme* $\mathbb{C}_{cris} := B_{cris}\left[\frac{1}{p}\right]$*-nek.*

Bizonyítás. Az A_{cris} bevezetésénél láttuk, hogy A_{cris} részhalmaza $W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nak, így ha vesszük mindkettő hányadostestét, akkor adódik, hogy $\mathbb{C}_{cris}$ részhalmaza $\mathrm{Frac}\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big)$-nak. Így elég belátni, hogy $\mathbf{u}$ nem eleme ennek a hányadostestnek, amelyet mondhatunk úgy is, hogy nem létezik olyan nem nulla eleme $\alpha \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-ben, hogy $\alpha\mathbf{u}$ nem eleme $W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek.

Továbbá láttuk azt a 3.2.0.3. állításban, hogy $W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ szeparábilis a p-adikus topológiára nézve. Így elég csak azt belátni, hogyha $r \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] - pW\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big)$, akkor $p^r\alpha\mathbf{u} \notin W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$. Az által, hogy $\alpha \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$ felírható egy $\frac{\xi}{p}$ hatványsor alakban és, mivel feltettük, hogy $\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] - pW\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big)$-nek is eleme, így ez pont azt jelenti, hogy csak véges sok olyan tagja van a hatványsornak, amelynek az együtthatóját a θ a $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}}$-be képezi, mivel ha nem így lenne, akkor a θ az együtthatókat mind a $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}}$-be képezné, így ebből meg az következne, hogy $\alpha \in pW\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$, ami meg ellentmondás.

Most bontsuk fel három részre az α-t:

$$\alpha = p\sum_{n=0}^{i-1} a_n\left(\frac{\xi}{p}\right)^n + a_i\frac{\xi^i}{p^i} + \sum_{n=i}^{\infty} a_n\left(\frac{\xi}{p}\right)^n := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Bontsuk ez által a $-p^{j-1}\mathbf{u}$-t is, ahol j azon legkisebb egész szám, melyre $p^j > i$ és nagyobb, mint r is.

$$-p^{j-1}\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\xi^n}{np^{n+1-j}} = \sum_{n=0}^{p^j}\frac{-\xi^n}{np^{n-j+1}} + \frac{\xi^{p^j}}{p^{p^j+1}} + \sum_{p^j}^{\infty}\frac{-\xi^n}{np^{n-j+1}} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Így elég megmutatni, hogy $-p^{j-1}\alpha\mathbf{u}$ nem eleme $W(R)\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek.

$$-p^{j-1}\alpha\mathbf{u} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\cdot(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

Ez által látszódik, hogy

1. Ha $\beta_1 \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek, akkor $\alpha\beta_1 \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek, és így $\alpha_1\beta_1 \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek,
2. $\alpha_2\beta_3,\ \alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_3 \in \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}(B_{dR})$-nek,
3. Ha m-re teljesül, hogy $p^j < m < p^j + i < 2p^j$, és $\frac{\xi^m}{p^{m-j+1}m}\alpha_1 \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek, akkor $\alpha_1\beta_3 \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] + \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}(B_{dR})$-nek,
4. $\alpha_2\beta_2 = \frac{a_i\xi^{i+p^j}}{p^{j+p^j+1}} \in \mathrm{Fil}^{i+p^j}(B_{dR})$-nek.

A végső szükséges állítást indirekten fogjuk bizonyítani, tehát tegyük fel, hogy $-p^{j-1}\mathbf{u} \in W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$-nek, ebből következik, hogy $\frac{a_i\xi^{i+p^j}}{p^{j+p^j+1}} \in \mathrm{Fil}^{i+p^j}(B_{dR})\bigcap\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right] + \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}(B_{dR})\Big) = \mathrm{Fil}^{i+p^j}\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big) + \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}(B_{dR})$.

Ha nézzük a $\frac{a_i\xi^{i+p^j}}{p^{j+p^j+1}}$ θ általi képét és $\mathrm{Fil}^{i+p^j}\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big) + \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}(B_{dR})$, akkor ellentmondásra jutunk, mivel $\theta\left(\frac{a_i\xi^{i+p^j}}{p^{j+p^j+1}}\right) = \frac{\theta(a_i)}{p}$, amely nem eleme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}}$-nek, habár $\theta\Big(\mathrm{Fil}^{i+p^j}\Big(W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]\Big) + \mathrm{Fil}^{i+p^j+1}B_{dR}\Big) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}}$.

Ez által beláttuk, hogy $-p^{j-1}\mathbf{u} \notin W\left[\left[\frac{\xi}{p}\right]\right]$, amiből következik, hogy $\alpha\mathbf{u}$ se eleme, és ebből következik, hogy $\mathbf{u}$ se eleme. □

Továbbá ezen állításnál tudunk erősebbet is mondani, hogy $\mathbf{u}$ nem is algebrai $\mathbb{C}_{cris}$ felett.

3.2.1.6. Állítás. $\mathbf{u}$ *elem transzcendens* $\mathbb{C}_{cris}$ *felett.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}$ algebrai, tehát létezik egy $P_{\mathbf{u}}$ $\mathbb{C}_{cris}$ együtthatós nem nulla polinom, mely $\mathbf{u}$-nak a minimálpolinomja. Ezen polinom legyen a következő:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

ekkor ha tetszőleges $g \in G_K$ csoport elemmel hatunk a $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$-n, akkor ugyanúgy nullát fogunk kapni, és mivel az $\mathbf{u}$-n való hatás $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \eta(g)t$, ahol η G_K-nak egy $\mathbb{Z}_p$ karaktere, akkor

$$g(a_0) + g(a_1)(\mathbf{u} + \eta(g)t) + \cdots + (\mathbf{u} + \eta(g)t)^n = 0.$$

Mivel a minimálpolinom egyértelmű, így létezik egy olyan együttható, amelyet fixen hagy, tehát létezik egy olyan i, melyre $a_i = g(a_i) + i\eta(g)t$. Így ha $a = a_i + i\mathbf{u}$, akkor $g(a) = a$ és, mivel a korábbiakban láttuk, hogy $B_{dR}^{G_K} = K_0$, akkor $\mathbf{u} = i^{-1}(a - a_i)$. Az által, hogy $K_0 \subset B_{cris}$, így $i^{-1}(a - a_i) \in \mathbb{C}_{cris}$, amely meg ellentmondás, mivel az előző állítás azt mondta, hogy $\mathbf{u} \notin \mathbb{C}_{cris}$-nek. Így $\mathbf{u}$ transzcendens. $\square$

3.2.1.7. Következmény. *A* $\log : (\mathit{Frac}(\mathfrak{R}))^\times \longrightarrow B_{dR}^+$ *leképezés magja a* $\overline{k}^\times$*, és a* $\mathit{Im}(\log) = U \oplus \mathbb{Q}_p\mathbf{u}$.

Bizonyítás. U definíciójából és az $\mathbf{u}$ tulajdonságából adódik az állítás. $\square$

3.2.2. Filtárálás B_{cris}-en

3.2.2.1. Definíció. Legyen A egy részgyűrűje B_{dR}-nek, akkor

1. minden $r \in \mathbb{Z}$-re, az A-nak a filtráció r-edik részalgebráját definiáljuk úgy, hogy $\mathrm{Fil}^r(A) := A \cap \mathrm{Fil}^r(B_{dR})$. Továbbá legyen a θ leképezés $\mathrm{Fil}^0(A)$-n a következő: $\theta : A \cap B_{dR}^+ \to \mathbb{C}_K$, amely θ megszorítása A-ra.

2. Ha A egy olyan részgyűrűje B_{cris}-nek, amely stabil φ-re nézve, akkor definiálni tudunk A-nak bizonyos ideáljait minden $r \in \mathbb{Z}$-re, amelyek legyenek:

$$I^{[r]}A := \{a \in A \mid \varphi^n(a) \in \mathrm{Fil}^r(A) \text{ minden } r \in \mathbb{N}\text{-re}\}.$$

A definíció miatt látszik, hogyha $I^{[0]}A = A$, akkor $\{I^{[r]}A\}$ egy A-beli ideálok csökkenő sorozata, amelyről megmutatja azt, hogy hogyan viselkedik a Frobenius leképezéssel, és az A-n definiált filtrációval.

Először az $I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ ideáljait vizsgáljuk meg. Legyen $x \in W(\mathfrak{R})$, $x' = \varphi^{-1}(x)$, és $\overline{x} \in \mathfrak{R}$ legyen a modulo p redukciója x-nek. Továbbá legyen $\overline{\boldsymbol{\pi}} = \pi = \epsilon - 1$, ekkor a Frobenius inverzének a képe és $\boldsymbol{\pi}$-nek a hányadosa legyen a következő:

$$\tau := \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\pi}'} = \frac{[\epsilon] - 1}{[\epsilon'] - 1} = 1 + [\epsilon'] + [\epsilon']^2 + \cdots + [\epsilon']^{p-1}.$$

Így τ θ általi képe 0 lesz, mivel az ϵ egy primitív p-edik egységgyök, és továbbá τ redukáltja $\frac{\epsilon-1}{\epsilon'-1}$ lesz, mivel

$$\overline{\tau} = 1 + \epsilon' + \cdots + \epsilon'^{p-1} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon' - 1},$$

és így a p-adikus értékelése $\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} = 1$, tehát τ generálja θ magját.

3.2.2.2. Állítás. *Minden* $r \in \mathbb{N}$*-re teljesül, hogy*

1. $I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ *ideált generálja* $\boldsymbol{\pi}^r$*, tehát* $I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ *ideál* r*-edik hatványa lesz* $IW(\mathfrak{R})$*-nek,*

2. *Egy* $a \in I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ *akkor, és csak akkor generálja* $I^{[r]}W(\mathfrak{R})$*-t ha a* p*-adikus értélése* $\frac{rp}{p-1}$ *lesz.*

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk, azonban az $r = 1$ eset bizonyítása is elég nehéz, így külön lemmaként is megfogalmazzuk az $r = 1$ esetet.

3.2.2.3. Lemma. *1. $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$ ideált generálja $\boldsymbol{\pi}$,*

2. Egy $a \in I^{[1]}W(\mathfrak{R})$ akkor, és csak akkor generálja $IW(\mathfrak{R})$-t ha a p-adikus értélése $\frac{p}{p-1}$ lesz.

Bizonyítás. A lemma állításai, tehát $\boldsymbol{\pi}$ generálja $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$-t és, hogyha $a = (a_0, a_1, \dots) \in I^{[1]}W(\mathfrak{R})$ akkor, és csak akkor generálja $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$-t, ha $v(a_n) = \frac{p}{p-1}$ minden n-re.

Először lássuk be, hogy $\boldsymbol{\pi}$ generálja $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$-t. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor $\theta(\varphi^n\boldsymbol{\pi}) = ([\epsilon]^{p^n} - 1) = 0$, tehát $\boldsymbol{\pi} \in I^{[1]}W(\mathfrak{R})$. Továbbá, mivel $v(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$, így $I^{[1]}W(\mathfrak{R}) \subset (\boldsymbol{\pi}, p)$ által generált ideálnak. Azonban, mivel $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}})^{\mathbb{N}}$ p-torzómentes, így $(\boldsymbol{\pi}) = I^{[1]}W(\mathfrak{R})$.

Másodszor lássuk be, ha tetszőleges $a = (a_0, a_1, \dots) \in I^{[1]}W(\mathfrak{R})$ akkor, és csak akkor generálja $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$-t, ha $v(a_n) = \frac{p}{p-1}$ minden n-re. Legyen $\alpha_n = a_n^n$ és $m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\theta(\varphi^m(a)) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \alpha_n^{p^m} = 0.$$

Először azt szeretnénk belátni, hogy minden $(r, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ párra, hogy $v(\alpha_m) \geqslant p^{-m}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r})$. Ezt teljes indukcióval látjuk be azonban, mivel rendezett párokról kell belátni, így lexikografikus felírás szerint megy az indukció.

Ha $r = m = 0$, akkor $\theta(a) \equiv \alpha_0 \mod p$, így $v(\alpha_0) \geqslant 1$, tehát ha mindkettő nulla, akkor teljesül az állítás. Következő lépésként nézzük meg azt, hogyha az egyik nulla, mivel $m = 0$ következik $r = m = 0$ esetből, így elég belátni $r = 0$ esetet. Ha $r = 0$, akkor

$$0 = \theta(\varphi^m(a)) = \sum_{n=0}^{m-1} p^n \alpha_n^{p^m} + p^m \alpha_m^{p^m} \mod p^{m+1},$$

tegyük fel, hogy $(m-1)$-ig teljesül az állítás, tehát minden i-re, mely kisebb m-nél, akkor arra igaz, hogy $v(\alpha_i) \geqslant p^{-i}$. Ez által $v\left(p^i \alpha_i^{p^m}\right) \geqslant i + p^{m-i} \geqslant m + 1$, tehát $v(\alpha_m) \geqslant p^{-m}$.

Következő lépésként nézzük meg ha egyik se nulla, akkor

$$0 = \theta(\varphi^m(a)) = \sum_{n=0}^{m-1} p^n \alpha_b^{p^m} + p^m \alpha_m^{p^m} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} p^n \alpha_n^{p^m} \right).$$

Tegyük fel megint, hogy az indukció teljesül $(m-1)$-ig, akkor az első szumma elemeit tudjuk úgy kezelni, hogy

$$v(p^n \alpha_n^{p^m}) \geqslant n + p^{m-n}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}) \geqslant m + (1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}).$$

A második szumma elemeit meg úgy tudjuk kezelni, hogy

$$v(p^n \alpha_n^{p^m}) \geqslant n + p^{m-n}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r+1}) \geqslant m + (1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}).$$

Ez által adódik, hogy $v(\alpha_m) \geqslant p^{-m}\,(1 + p + \cdots + p^{-r})$, tehát adódik a második állítás is. □

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{gr}^i(W(\mathfrak{R})) = \mathrm{Fil}^i(W(\mathfrak{R}))/\mathrm{Fil}^{i+1}(W(\mathfrak{R}))$, és legyen θ^i a projekció $\mathrm{Fil}^i(W(\mathfrak{R}))$-ből $\mathrm{gr}^i(W(\mathfrak{R}))$-re. A lemma előtt láttuk, hogy $\mathrm{Fil}^i(W(\mathfrak{R}))$ τ^i által generált ideál, ekkor $\mathrm{gr}^i(W(\mathfrak{R}))$ egy 1 dimenziójú szabad $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{cris}}$-modulus, melyet $\theta^i(\tau^i)$ generál, amelyet jelöljünk $\theta^1(\tau)^i$-val. A τ definíciója miatt $\varphi^n(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}'\tau^{1+\varphi+\varphi^2+\cdots+\varphi^n}$ lesz minden n természetes számra. Ebből következik, hogy

$$\theta(\varphi^i(\tau)) = p \text{ ha } i \geqslant 1, \quad \text{akkor } \theta^1(\varphi^n(\pi)) = p^n(\epsilon^{(1)} - 1)\theta^1(\tau).$$

Először lássuk be az első állítást. Az látszik, hogy $\boldsymbol{\pi}^r W(\mathfrak{R}) \subset I^{[r]}W(\mathfrak{R})$, így a másik irányú tartalmazás kell csak az első állítás belátásához. Ezen tartalmazást meg r szerinti indukcióval fog menni. Tegyük fel, hogy $(r-1)$-ig igaz az állítás, és ha $a \in I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ teljesül, akkor $a = \boldsymbol{\pi}^{r-1}b$ alakban írható, ahol $b \in W(\mathfrak{R})$. Azt is tudjuk, hogy $\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = 0$ tetszőleges n természetes számra. Azonban a következő is igaz, hogy

$$\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = \theta(\varphi^n(b)) \cdot (\theta^1(\varphi^n(\boldsymbol{\pi}))^{r-1} = (p^n(\epsilon^{(1)} - 1))^{r-1} \cdot \theta(\varphi^n(b))\theta^1(\tau)^{r-1}.$$

Továbbá, mivel $\theta^1(\tau)^{r-1}$ a generátora $\mathrm{gr}^{r-1}(W(\mathfrak{R}))$-nek és, mivel $p^n(\epsilon^{(1)}-1) \neq 0$, így $\theta(\varphi^n(b)) = 0$ minden n esetén ha $b \in I^{[1]}W(\mathfrak{R})$. Az előző lemmát használva így adódik, hogy létezik egy olyan $c \in W(\mathfrak{R})$, hogy $b = \boldsymbol{\pi} c$, tehát $a \in \boldsymbol{\pi}^r W(\mathfrak{R})$.

Következzen most a második állítás belátása, amely következik abból, hogy $v\left(\overline{\boldsymbol{\pi}^r}\right) = rv(\epsilon - 1) = \frac{rp}{p-1}$ és, hogy x akkor, és csak akkor egység $W(\mathfrak{R})$-ben ha $\overline{x}$ egység $\mathfrak{R}$-ben. □

Ezzel jól leírtuk a $I^{[r]}W(\mathfrak{R})$ ideáljait, most vizsgáljuk meg az $I^{[r]}A_{cris}$ ideálokat.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ osszuk maradékosan $(p-1)$-gyel, akkor legyen $t^{\{n\}}$ a következő

$$t^{\{n\}} := t^{r_n}\gamma_{q_n}\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right) = (p^{q_n}q_n!)^{-1}t^n,$$

ahol $n = r_n + (p-1)q_n$. Bontsuk fel prímszám szerint:

1. Ha $p = 2$:

$$t^{\{n\}} = \frac{t^n}{2^n n!} = \gamma_n\left(\frac{t}{2}\right), \text{ és } t^{\{2n\}} = \gamma_{2n}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\gamma_n\left(\frac{t^2}{8}\right)}{(2n-1)!},$$

2. Ha $p > 2$:

$$t^{\{(p-1)n\}} = \gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right).$$

Legyen továbbá definiálva két halmaz:

$$\Lambda_\epsilon := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\{n\}} \;\middle|\; a_n \in W,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} \subset K_0[[t]] \cap A_{cris},$$
$$\mathbf{O}_\epsilon := W[[\boldsymbol{\pi}]],$$

ahol mostantól egy ideig $W(\mathfrak{R})$-re csak W-ként hivatkozunk. Továbbá $\boldsymbol{\pi}$ definíciója miatt $\boldsymbol{\pi} \in \Lambda_\epsilon$, így $\mathbf{O}_\epsilon \subseteq \Lambda_\epsilon$. $\mathbf{O}_\epsilon$ egy W-részalgebrája A_{cris}-nek, amely stabil φ-re, és G_K hatásra nézve, amely továbbá hat $\Gamma_{K_0} = \mathrm{Gal}(K_0^{cyc}/K_0)$-n. Az is látszik, hogy $t = \log([\epsilon]) = \boldsymbol{\pi} \cdot u$, ahol u egy egység Λ_ϵ-ban.

Legyen Δ_{K_0} a Γ_{K_0}-nak egy torziós részcsoportja, akkor $\mathbf{O} := \mathbf{O}_\epsilon^{\Delta_{K_0}} \subset \Lambda := \Lambda_\epsilon^{\Delta_{K_0}}$, és $\pi_0 \in \mathbf{O}$ legyen a következő:

$$\pi_0 = -p + \sum_{a\in\mathbb{F}_p} [\epsilon]^{[a]} = (p-1)\sum_{p-1|n} \frac{t^n}{n!} \text{ vagy, ha } p = 2, \text{ akkor } \pi_0 = 2\sum_{2|n}\frac{t^n}{n!}.$$

3.2.2.4. Lemma. *Ha $p \neq 2$, akkor*

$$\Lambda = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right) \;\middle|\; a_n \in W\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n\left(\frac{\pi_0}{p}\right) \;\middle|\; a_n \in W\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}.$$

Ha $p = 2$, akkor

$$\Lambda = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n\left(\frac{t^2}{8}\right) \;\middle|\; a_n \in W, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n\left(\frac{\pi_0}{8}\right) \;\middle|\; a_n \in W, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}.$$

Továbbá $\mathbf{O} = W[[\pi_0]]$ és $\mathbf{O}_\epsilon \otimes_{\mathbf{O}} \Lambda = \Lambda_\epsilon$.

Bizonyítás. Λ első alakjai teljesülnek abból, hogy azon részteste $K_0((t))$-nek, amely Δ_{K_0} részcsoport által fixált az nem más, mint $K_0((t^{p-1}))$ vagy ha $p = 2$, akkor $K_0((t^2))$. Továbbá, mivel $\pi_0 = w\boldsymbol{\pi}^{p-1}$ vagy $p = 2$ esetén $\pi_0 = w\boldsymbol{\pi}^2$, ahol w egység $\mathbf{O}$-ban. Így $\mathbf{O} = W[[\boldsymbol{\pi}^{p-1}]] = W[[\pi_0]]$, és tudjuk a következőt, hogy $t = u\boldsymbol{\pi}$, így $\frac{t^{p-1}}{p}$-t lecserélhetjük $\frac{\pi_0}{p}$-val, így adódik a második alakja Λ-nak. □

3.2.2.5. Állítás. *1. Ha $p \neq 2$, akkor π_0 a generátora $I^{[p-1]}W(\mathfrak{R})$-nek, ha $p = 2$, akkor π_0 a $I^{[2]}W(\mathfrak{R})$-nek a generátora.*

2. Ha $p \neq 2$, akkor létezik egy egység $u \in \mathbf{O}$, melyre teljesül, hogy $\varphi(\pi_0) = u\pi_0(p+\pi_0)^{p-1}$, különben $\varphi(\pi_0) = u\pi_0(2+\pi_0)^2$.

Bizonyítás. 3.2.2.2 állítás által tudjuk, hogy $[\epsilon]^{[a]} - 1$, ahol $a \in \mathbb{F}_p^\times$, a generátora $I^{[1]}W(\mathfrak{R})$-nek, így vegyük a $\boldsymbol{\pi}$-nek a normáját $K_0((t))/K_0((t^{p-1}))$-ben az legyen π_1, akkor

$$\pi_1 = \prod_{h \in \Delta_{K_0}} h(\boldsymbol{\pi}) = \prod_{a \in \mathbb{F}_p^\times} ([\epsilon]^{[a]} - 1) \in \mathbf{O}.$$

Ez által π_1 generálja $I^{[p-1]}W(\mathfrak{R})$-t. Mivel $\pi_1 = \boldsymbol{\pi} w$, ahol $w \in \mathbf{O}$ egy egység, így $\mathbf{O}$ a $\boldsymbol{\pi}$ szerinti W együtthatós hatványsorok gyűrűjére gondolhatunk, mint π_1 szerinti W együtthatós hatványsorok gyűrűje. Mivel $\pi_0 \in \mathbf{O}$, így π_0 felírható, mint $\pi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \pi_1^m$, ahol $a_m \in W$ és a_1 egység. Továbbá $a_0 = \theta(\pi_0) = 0$, így π_1 és π_0 ugyanazt az ideált generálja. Ezzel az első állítás ki is jött.

Legyen $q = \pi_0 + p = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\epsilon]^{[a]}$ és $q' = \varphi^{-1}(q)$. Ez által adódik, hogy q' θ leképezés $\mathbf{O}'_\epsilon = \varphi^{-1}(\mathbf{O}_\epsilon) = W[[\boldsymbol{\pi}']]$-re való megszorításának a magjának a generátora, így $\boldsymbol{\pi} = \varphi(\boldsymbol{\pi}') = \boldsymbol{\pi}'\tau = u_1'\boldsymbol{\pi}'q'$, ahol τ ugyanezen ideál generátora, tehát u_1' egység $\mathbf{O}'_\epsilon$-ben. Ekkor $\varphi(\boldsymbol{\pi}) = u_1\boldsymbol{\pi}q$, és ebből következik, hogy $\varphi(\boldsymbol{\pi}^{p-1}) = u_1^{p-1}\boldsymbol{\pi}^{p-1}q^{p-1}$, mivel π_0 és $\boldsymbol{\pi}^{p-1}$ generátorai $\mathbf{O}_\epsilon \cap I^{[p-1]}W(\mathfrak{R})$-nek. Továbbá így $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$, ekkor az u egyértelműsége miatt, és $\mathbf{O} = \mathbf{O}_\epsilon^{\Delta_{K_0}}$ miatt következik, hogy u és u^{-1} is $\mathbf{O}$-nak eleme. □

Legyen A_0 egy kommutatív gyűrű és A_1, A_2 két A_0 algebra, melyek szeparáltak és teljesek a p-adikus topológiára nézve. Legyen $A_1 \widehat{\otimes_{A_0}} A_2$ szeparábilis tenzorszorzat, amely $A_1 \otimes_{A_0} A_2$ tenzorszorzat p-adikus telítése.

3.2.2.6. Tétel. *Legyen $W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda$ és A_{cris} két $W(\mathfrak{R})$-algebra, akkor létezik közöttük egy p-adikus topológiára nézve folytonos izomorfizmus:*

$$\begin{aligned} \alpha : W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda &\longrightarrow A_{cris} \\ \sum a_m \otimes \gamma_m\left(\frac{\pi_0}{p}\right) &\longmapsto \sum a_m \gamma_m\left(\frac{\pi_0}{p}\right). \end{aligned}$$

Továbbá ezen izomorfizmus indukál egy izomorfizmust $W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}_\epsilon}}\Lambda_\epsilon$ és A_{cris} között.

Bizonyítás. A második állítás rögtön következik a következő izomorfizmusokból:

$$W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}_\epsilon}}\Lambda_\epsilon \cong W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}_\epsilon}}\mathbf{O}_\epsilon \otimes_{\mathbf{O}} \Lambda \cong W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda.$$

Mivel ha a végén izomorfizmus van, akkor az elején is az kell legyen.

Különbséget kell tegyük $p = 2$ és $p \neq 2$ esetek között, mivel $p = 2$ esetén megváltozik a Λ, azonban a két eset bizonyításában nincs különbség. A következőket tudjuk korábbról, hogy $q \in \mathrm{Ker}(\theta)$, $q'^p = p!\gamma_p(q') \in pA_{cris}$, $\pi_0 = q - p \in pA_{cris}$ és $\frac{\pi_0}{p} \in Fil^1(A_{cris})$, így ez által következik, hogy α jól-definiált, folytonos homomorfizmus. Továbbá, mivel $W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda$ szeparábilis, p-adikus topológiára teljes, nincsenek p-ed rendű torzióelemei, és ez igaz A_{cris}-re is, így elég csak modulo p igazolni az izomorfizmust. $A_{cris}/pA_{cris} = A^0_{cris}/pA^0_{cris}$-ról tudjuk, hogy osztott hatványburkolója $\mathfrak{R}$-nek, amely $\overline{q'}$ által generált ideálhoz tartozik, tehát A_{cris}/pA_{cris} egy szabad modulus $\mathfrak{R}/\overline{q'}$ felett, melynek egy bázisa $\gamma_{pm}(q')$ vagy $\gamma_m(\frac{q'}{p})$, ahol $m \in \mathbb{N}$. Az előző állítást használva kapjuk, hogy $\varphi(q') = u\pi_0 q^{p-1}$, így $\pi_0 = u'\pi_0' q'^{p-1} = u'(q'^p - pq'^{p-1})$ ebből következik, hogy $\mathfrak{R}/\overline{q'^p} = \mathfrak{R}/\overline{\pi_0}$, és A_{cris}/pA_{cris} egy szabad modulus lesz $\mathfrak{R}/\overline{\pi_0}$-ben, melyeknek $\gamma_m\left(\frac{\pi_0}{p}\right)$ lesz A_{cris}/pA_{cris}-ban a bázisa $\mathfrak{R}/\overline{\pi_0}$ felett. $W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda/pW(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda$ definíciójából is látszik, hogy egy szabad modulus $\mathfrak{R}/\overline{\pi_0}$ felett, melynek ugyanúgy $\gamma_m\left(\frac{\pi_0}{p}\right)$ egy bázisa, így egyértelmű $W(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda/pW(\mathfrak{R})\widehat{\otimes_{\mathbf{O}}}\Lambda$ és A_{cris}/pA_{cris} között izomorfizmus. □

3.2.2.7. Állítás. *Minden $r \in \mathbb{N}$-re jelöljük $I^{[r]}A_{cris}$-t $I^{[r]}$-val, ha $r \geqslant 1$, akkor $I^{[r]}$ egy osztott hatványideálja A_{cris}-nek, amely $t^{\{s\}}$ által generált $W(\mathfrak{R})$-részmodulusa A_{cris}-nek, ahol $s \geqslant r$.*

Bizonyítás. Ha $s \geqslant r$, akkor $I^{(r)}$ legyen egy olyan $W(\mathfrak{R})$-részmodulus, melyet t^r generál, ekkor $I^{(r)}$ definíciója által $I^{(r)} \subset I^{[r]}$, és $I^{(r)}$ egy osztott hatványideálja, így elég belátni a tartalmazás másik irányát.

Ezen tartalmazás bizonyítása teljes indukcióval fog menni. Így tegyük fel, hogy $(r-1)$-ig teljesül az állítás, akkor tetszőleges $a \in I^{[r]}$-t fel tudjuk a következő alakban írni:

$$a = \sum_{n \leqslant r-1} a_n t^{\{n\}},$$

ahol a $W(\mathfrak{R})$-beli a_n-ek p-adikusan tartak nullába. Ha $b = a_{r-1}$, akkor a felírható $bt^{\{r-1\}} + a'$ alakban, ahol $a' \in I^{(r)}$, tehát $bt^{\{r-1\}} \in I^{[r]}$. Azonban $\varphi^d\left(bt^{\{r-1\}}\right) = p^{(r-1)d}\varphi^d(b)t^{\{r-1\}} = c_{r,d}\varphi^d(b)t^{r-1}$, ahol $c_{r,d}$ egy nem nulla racionális szám. Ez által $t^{r-1} \in (\mathrm{Fil}^{r-1} - \mathrm{Fil}^r)$-nak, $b \in I^{[1]} \cap W(\mathfrak{R})$, és mivel $I^{[1]} \cap W(\mathfrak{R})$ ideál $\boldsymbol{\pi}$ által van generálva. Így $bt^{\{r-1\}}$ az A_{cris}-beli ideálhoz tartozik, melyet $\boldsymbol{\pi}^{\{r-1\}}$ generál. Azonban A_{cris}-ben t és $\boldsymbol{\pi}$ egy azon ideált generálja, így $bt^{\{r-1\}}$ a $t^{\{r\}}$ által generált ideálhoz tartozik, és mivel az pont az $I^{(r)}$, így beláttuk a másik irányú tartalmazást. ☐

3.2.2.8. Állítás. *Minden $r \in \mathbb{N}$-re, jelöljük A^r_{cris}-t $A_{cris}/I^{[r]}$-rel, és $W(\mathfrak{R})^r$-t meg $W(\mathfrak{R})/I^{[r]}W(\mathfrak{R})$-rel, ha A^r_{cris}-nek és $W(\mathfrak{R})^r$-nek nincsenek p-ed rendű torziópontjai és $\iota^r : W(\mathfrak{R})^r \longrightarrow A^r_{cris}$ leképezés injektív, akkor ι^r komagja p-ed rendű torzióselemek halmaza lesz, melyek $p^m m!$ által nullázódnak, ahol m a legnagyobb olyan egész szám, melyre teljesül, hogy $(p-1)m < r$.*

Bizonyítás. Minden r-re $A_{cris}/\mathrm{Fil}^r(A_{cris})$ torziómentes, továbbá $A_{cris} \longrightarrow (A_{cris}/\mathrm{Fil}^r(A_{cris}))^{\mathbb{N}}$ leképezés, melyet úgy definiálunk, hogy $x \in A_{cris} \longmapsto (\varphi^n(x) \mod \mathrm{Fil}^r(A_{cris}))_{n\in\mathbb{N}}$, akkor a magja nem más, mint $I^{[r]}$. Így ha $\mathrm{Fil}^r(A_{cris})$ általi faktoron nézzük a leképezést, akkor az injektív lesz és torziómentes. Ebből következik ι^r definíciója által, hogy injektív így $W(\mathfrak{R})^r$ torziómentes. A^r_{cris} a $\gamma_s(p^{-1}\pi_0)$ elemek képei által van generálva, ahol azon s-eken fut végig, melyekre teljesül, hogy $0 < (p-1)s < r$. Mivel $p^s s!\gamma_s(p^{-1}\pi_0) \in W(\mathfrak{R})$ teljesül, és p-adikus értékelésre nézve $p^s s!$ növekvő sorozat, így teljesül az állítás maradék része is. ☐

3.2.2.9. Állítás. *Minden $r \in \mathbb{N}$-re legyen $\mathit{Fil}^r_p(A_{cris}) := \{x \in \mathit{Fil}^r(A_{cris}) \mid \varphi(x) \in p^r A_{cris}\}$. Akkor a következő 3 állítás teljesül:*

1. *A következő sorozat egzakt:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \longrightarrow \mathit{Fil}^r_p(A_{cris}) \xrightarrow{p^{-r}\varphi - 1} A_{cris} \longrightarrow 0.$$

2. *$\mathit{Fil}^r_p(A_{cris})$ ideál $q'\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$ által generált $W(\mathfrak{R})$-részmodulusa A_{cris}-nek, ahol $j + (p-1)n \geqslant r$.*

3. *Ha m azon legnagyobb egész szám melyre teljesül, hogy $(q-1)m < r$, akkor minden $x \in \mathit{Fil}^r(A_{cris})$, $p^m m! x \in \mathit{Fil}^r_p(A_{cris})$.*

Bizonyítás. A $p^{-r}\varphi - 1$ leképezés definíciója miatt a magja tartalmazza a $\mathbb{Z}t^{\{r\}}$-t. Első lépésként lássuk be, hogy $p^{-r}\varphi - 1$ leképezés magja $\mathbb{Z}t^{\{r\}}$. Ehhez a másik irányt kell belátni tehát, ha $x \in \mathrm{Ker}(p^{-r}\varphi - 1)$, akkor $x \in I^{[r]}$, tehát felírható úgy, hogy

$$x = \sum_{n=r}^{\infty} a_n t^{\{n\}},$$

ahol $a_n \in W(\mathfrak{R})$ és a_n p-adikusan 0-hoz tart. Továbbá tudjuk azt is, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re, hogy $(p^{-r}\varphi)^n(x) \equiv \varphi^n(a_r)t^{\{r\}} \mod p^n A_{cris}$, ekkor $x = bt^{\{r\}}$, ahol $b \in W(\mathfrak{R})$ sőt $b \in \mathbb{Z}_p$, mivel $\varphi(b) = b$.

Legyen N azon részmodulusa A_{cris}-nek, amelyet $q'\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$ generál, ahol $j \geqslant r-(p-1)n$. $q'\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$ Frobenius leképezés általi képére igaz, hogy

$$\varphi\left(q'\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)\right) = q^j p^{n(p-1)}\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right) = p^{j+n(p-1)}\left(\frac{p+\pi_0}{p}\right)^j \gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right),$$

amiből látszódik, hogy $N \subseteq \mathrm{Fil}^r_p(A_{cris})$.

Így elég azt megmutatni az első állítás bizonyításához, hogyha $a \in A_{cris}$, akkor létezik egy olyan $x \in N$, hogy $p^{-r}\varphi - 1(x) = 0$, mivel $\mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \subseteq N$. Továbbá elég ezt csak modulo p megmutatni, mivel N és A_{cris} is szeparábilis és teljes a p-adikus topológiára nézve. Ha a a következő, akkor $x = -a$ megfelelő lesz: $a = \sum_{n > \frac{r}{p-1}} a_n \gamma_n \left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$, ahol $a_n \in W(\mathfrak{R})$ minden n esetén.

A második állításhoz szükséges, hogy minden $i \in \mathbb{N}$-re, amelyre igaz, hogy $(p-1)i \leqslant r$ és $b \in W(\mathfrak{R})$, akkor létezik $x \in N$, hogy $p^{-r}\varphi - 1(x) - b\gamma_i\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$ eleme egy olyan ideálnak, amelyet p és $\gamma_n\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$ generál, ha $n > i$. Ha $x = yq'^{r-(p-1)i}\gamma_i\left(\frac{t^{p-1}}{p}\right)$ megfelelő lesz, ha $y \in W(\mathfrak{R})$ olyan, mely a $\varphi(y) - q'^{r-(p-1)i}y = b$ egyenlet megoldása.

A harmadik állítás meg következik a 3.2.2.8. állításból. $\square$

3.2.2.10. Tétel. *1. Legyen $B^+_{cris} = \{x \in B_{cris} \mid \varphi^n(x) \in Fil^0(B_{cris})$ minden $n \in \mathbb{N}$-re$\}$, akkor $\varphi(B'_{cris}) \subseteq B^+_{cris} \subseteq B'_{cris}$, ha $p \neq 2$. Ha $p = 2$, akkor $\varphi^2(B'_{cris}) \subseteq B^+_{cris} \subseteq B'_{cris}$.*

2. Minden $r \in \mathbb{N}$-re a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r(B^+_{cris}) \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} B^+_{cris} \longrightarrow 0.$$

3. Minden $r \in \mathbb{Z}$-re a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r(B_{cris}) \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} B_{cris} \longrightarrow 0.$$

Bizonyítás. A B'_{cris} definíciójából következik, hogy $B^+_{cris} \subseteq B'_{cris}$, így csak azt kell belátni, hogy $\varphi(B'_{cris}) \subseteq B^+_{cris}$. A $p = 2$ és $p \neq 2$ eseten analog módon működik, csak szükséges a két részre bontani a bizonyítást. A $p \neq 2$ esetet fejtem ki. Legyen $x \in B'_{cris}$, akkor létezik olyan $r, j \in \mathbb{N}$ és $y \in A_{cris}$, hogy $x = t^{-r}p^{-j}y$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\varphi^n(x) = t^{-r}p^{-nr-j}\varphi(y)^n$, akkor $\varphi^n(y) \in \mathrm{Fil}^r(A_{cris})$ minden n-re, tehát akkor $y \in I^{[r]}$. Így x a következőképpen írható fel, hogy

$$x = p^{-j}\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{\{m+r\}-r},$$

és a φ általi képe meg:

$$\varphi(x) = p^{-j-r}\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(a_m)p^{m+r}t^{\{m+r\}-r}.$$

Továbbá ha ezen kifejezést egy kicsit alakítgatjuk, akkor a következő kinézetet érhetjük el, hogy

$$\varphi(x) = p^{-j-r}\sum_{m=0}^{\infty} c_m\varphi(a_m)t^m,$$

ahol c_m egy racionális szám, akkor a p-adikus értékelése a következő lesz:

$$v(c_m) \geqslant (m+r)\left(1 - \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Ez által adódik, hogy

$$\varphi(x) \in p^{-j-r}W(\mathfrak{R})[[t]] \subset p^{-j-r}A_{cris} \subset B^+_{cris}$$

így teljesül a tétel első állítása.

Az előző állításból rögtön következik a tétel második állítása, és a harmadik állításhoz vegyük a következő egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r+i) \longrightarrow \mathrm{Fil}^{r+i}(B^+_{cris}) \longrightarrow B^+_{cris} \longrightarrow 0,$$

ahol i olyan egész szám, melyre teljesül, hogy $i + r \geqslant 0$. Mivel $\mathbb{Q}_p(-i)$-vel való tenzorozás tartja az egzaktságot, így a következő sorozat is egzakt lesz:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow t^{-i}\mathrm{Fil}^r(B^+_{cris}) \longrightarrow t^{-i}B^+_{cris} \longrightarrow 0,$$

ha ennek a sorozatnak vesszük az inverz limeszét, akkor megkapjuk a tétel harmadik állításának egzakt sorozatát. $\square$

3.2.2.11. Definíció. Legyen $h, d \in \mathbb{Z}$ és $h \geqslant 1$, akkor $P_{h,d}$-t és $P^+_{h,d}$-t definiáljuk úgy, hogy

$$P_{h,d} := \{x \in B_{cris} \mid \varphi^h(x) = p^d x\} \quad \text{és} \quad P^+_{h,d} := P_{h,d} \cap B^+_{cris}.$$

Legyen $B_e := P_{1,0} = B^{\varphi=1}_{cris}$ és ${}^h B_e := P_{h,0} = B^{\varphi^h=1}_{cris}$.

Ha a $h = 1$ eseteket nézzük, akkor látszódik, hogy minden d-re $P_{1,d} = B_e t^d$, így egy szabad B_e-modulus, melynek a dimenziója 1.

3.2.2.12. Észrevétel. *Vegyük a* $\log : \mathfrak{R}^\times \to U \hookrightarrow B^+_{cris}$ *leképezést, akkor ezen leképezés magja a* $\overline{k}^\times$ *lesz, és a logaritmus* $U^+_{\mathfrak{R}}$*-n izomorfizmust ad* U*-val, amely továbbá a következő kommutatív diagramot adja:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \epsilon^{\mathbb{Q}_p} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & U^+_{\mathfrak{R}} \arrow[r, "\log^{(0)}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{C}_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p t \arrow[r] \arrow[d, hook] & U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Fil^1(B_{dR}) \arrow[r] & B^+_{dR} \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{C}_K \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

ahol a $\log^{(0)}$ *leképezést a következő:* $\log^{(0)} : x \mapsto \log(x^{(0)})$.

Ezen észrevétel következménye, hogy $U \cap \mathrm{Fil}^1(B_{dR}) = \mathbb{Q}_p t = \mathbb{Q}_p(1)$ és $U + \mathrm{Fil}^1(B_{dR}) = B^+_{dR}$.

3.2.2.13. Tétel. *1.* $Fil^0(B_e) = \mathbb{Q}_p$*, és* $P^+_{1,d} = 0$ *ha* $d \geqslant 1$.

2. $U = P^+_{1,1}$*, így*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p t \longrightarrow P^+_{1,1} \longrightarrow \mathbb{C}_K \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt.

3. Legyen $u \in U - \mathbb{Q}_p t$*, akkor ha* $d > 0$, $P^+_{1,d} := \{x = x_0 t^{d-1} + x_1 u t^{d-2} + \cdots + x_{d-1} u t^{d-1} \mid x_0, \ldots, x_{d-1} \in U\}$ *és* $P^+_{1,d}$*-t generálja* U.

4. A következő sorozat egzakt, melyet a p-adikus Hodge-elmélet fundamentális egzakt sorozatának is szoktak nevezni:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_e \oplus B^+_{dR} \longrightarrow B_{dR} \longrightarrow 0,$$

vagy szokták a következő alakpban is írni:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_e \longrightarrow B_{dR}/B^+_{dR} \longrightarrow 0.$$

Bizonyítás. Ha $x \in P^+_{1,d}$, akkor $t^{-d} \in B_e \cap \mathrm{Fil}^{-d}(B_{dR})$, amiből következik, hogy $x = 0$ ha $d < 0$, és még 3.2.2.10 tétel állításaiból következik a tételünk első állításának maradék része, ha B_e-re alkalmazzuk a tételt.

Ha $x \in P^+_{1,1}$ és $u \in U$ olyan, melyre teljesül, hogy $\theta(x) = \theta(u)$, akkor $x - u = t x_0$, ahol $x_0 \in B_e \cap B^+_{dR} \subset \mathrm{Fil}^0(B_e) = \mathbb{Q}_p$, ez által a második állítás következik, mivel $x = u + t x_0 \in U$.

A harmadik állítást teljes indukcióval fogjuk belátni, tegyük fel $(d-1)$-ig igaz az állítás. Ha $x \in P^+_{1,d}$, akkor legyen c, c_0 és $u \in U$ olyan, hogy $\theta(x) = c$, $\theta(u) = c_0$, melyhez találunk $x_{d-1} \in U$, melyre $\theta(x_0) = \frac{c}{c_0^{d-1}}$, akkor $\theta\left(x - x_{d-1} u^{d-1}\right) = 0$. A $x - x_{d-1} u^{d-1} = ty$ alakban írható, ahol $y \in B^+_{dR} \cap P_{1,d-1}$. Továbbá $\varphi^n(y) \in B^+_{dR}$ így 3.2.2.10. tételt használva adódik, hogy $y \in B^+_{cris}$, így $y \in P^+_{1,d-1}$, és ebből következik a harmadik állítás.

Az utolsó állításnál elég belátni, hogy $B_e \oplus B^+_{dR} = B_{dR}$. Ezen állítás is teljes indukcióval fog bizonyítódni, tegyük fel, hogy $(d-1)$-ig teljesül, hogy $\mathrm{Fil}^{-d+1}(B_{dR}) \in B_e \oplus B^+_{dR}$. Tegyük fel, hogy $x = t^{-d}\lambda \in \mathrm{Fil}^{-d} B_{dR}$ és $\theta(x) = c \neq 0$.

Ekkor ezen tétel harmadik állítását használva adódik, hogy létezik olyan $y \in P^+_{1,d}$ és $\theta(y) = c$. Így ebből következik, hogy $t^{d-1}y \in B_e$ és $x - t^{-d}y = t^{-d}(\lambda - y) \in \mathrm{Fil}^{-d+1}(B_{dR})$. Így az indukciós feltétel miatt $x \in B_e \oplus B^+_{dR}$, tehát következik az állítás, mivel $B_e \oplus B^+_{dR} \supset B_{dR}$ tartalmazás egyértelmű. □

3.2.2.14. Állítás. *A $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e \longrightarrow B_{cris}$ leképezés injektív, ahol a leképezés a következő:*

$$\lambda \otimes x \longmapsto \lambda x, \text{ ahol } \lambda \in P_0 \text{ és } x \in B_e.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_i \lambda_i \otimes x_i \in P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e$. Tegyük fel, hogy a leképezés nullába képezi, akkor ha belátjuk, hogy $x = 0$, akkor igaz az állítás.

A bizonyítás tagszám szerinti teljes indukcióval fog menni. Ha egy tag van, akkor rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-ig teljesül az állítás. Legyen $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0$, akkor φ általi képe is nulla, tehát $\sum_{i=0}^{n} \varphi(\lambda_i)x_i = 0$. Feltehetjük, hogy létezik egy olyan j, melyre $\varphi(\lambda_j) \neq \lambda_j$, mivel különben az akkor, és csak akkor igaz, ha $x = 0$. Így

$$\sum_i (\varphi(\lambda_j)\lambda_i - \varphi(\lambda_i)\lambda_j) \otimes x_i \longmapsto 0,$$

azonban ezen elemnek már eggyel kevesebb tagja van, így $(\varphi(\lambda_j)\lambda_i - \varphi(\lambda_i)\lambda_j) = 0$ minden i-re, tehát $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \mathbb{Q}_p$, ez által $x = 0$. □

3.2.2.15. Állítás. *Legyen $\mathbb{Q}_{p^h} = W(\mathbb{F}_{p^h})[\frac{1}{p}] \subset P_0$, akkor ezen test felett az előző állításban említett leképezés egy izomorfizmus:*

$$\iota_h : \mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e \longrightarrow {}^hB_e,$$

továbbá $Fil^0({}^hB_e) = \mathbb{Q}_{p^h}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{Q}_{p^h}$-nak a következő egy normál bázisa $\mathbb{Q}_p$ felett: $b_0 \neq 0, \varphi(b_0) =: b_1, \varphi(b_0)^2 =: b_2, \ldots, \varphi(b_0)^{h-1} =: b_{h-1}$. Legyen ezen b-k csillaggal jelölt változata a duális bázisa, akkor $\varphi(b_i^*) = b_{i-1}^*$, tehát ez által az inverz leképezés a következő:

$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{h-1} b_i \otimes \rho_h(b_i^* x),$$

ahol $x \in^h B_e$ és $\rho(x) = x + \varphi(x) + \varphi^2(x) + \cdots + \varphi^{h-1}(x) \in B_e$. Mivel megadtuk a leképezés inverzét, így beláttuk, hogy egy izomorfizmus. □

3.2.2.16. Definíció. Minden $h \geqslant 1 \in \mathbb{N}$-re definiáljunk halmazokat:

$$V_h := \{x \in B^+_{cris} \mid \varphi^h(x) = px,\ \theta(x) = 0\} = P^+_{h,1} \cap \mathrm{Fil}^1(B_{dR}).$$

3.2.2.17. Állítás. *Ha $V_h \neq 0$, akkor V_h egy egy dimenziós $\mathbb{Q}_{p^h}$-vektortér és a $V_h \to V_1$ leképezés szürjektív, ahol a leképezés a következő: $x \mapsto x\varphi(x)\ldots\varphi^{h-1}(x)$.*

Bizonyítás. 3.2.2.13. tétel miatt tudjuk, hogy $V_1 = \mathbb{Q}_p t$. Először lássuk be, hogy a leképezés szürjektív. Vegyünk egy nem nulla $x \in V_h$-et, akkor $0 \neq x\varphi(x)\ldots\varphi^{h-1}(x) = at \in V_1$, ahol $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ és, mivel tudjuk, hogy $\mathbb{Q}_{p^h}$-n lévő norma leképezés szürjektív, így minden $a \in \mathbb{Q}_{p^h}$-ra létezik olyan b, hogy $b\varphi(b)\varphi^2(b)\ldots\varphi^{h-1}(b) = a^{-1}$, akkor ha $t_h := bx \in V_h$, akkor $t_h\varphi(t_h)\ldots\varphi^{h-1}(t_h) = t$, tehát szürjektív a leképezés.

Továbbá tudjuk, hogy V_h minden h-ra a definíció miatt tényleg egy $\mathbb{Q}_{p^h}$ vektortér, így már csak azt kell belátni, hogy egy dimenziós. Vegyünk megint egy nem mulla $x \in V_h$, akkor $x \in B^+_{cris}$, és így $\varphi^i(x) \in B^+_{cris} \subset B^+_{dR}$ minden i-re. Az azonosság által adódik, hogy $x\varphi(x)\varphi^2(x)\ldots\varphi^{h-1}(x) = at \in B_{cris}$, amely invertálható, így x-is invertálható B_{cris}-ben. Azonban ez az állítás igaz $(\mathrm{Fil}^1(B_{dR}) - \mathrm{Fil}^2(B_{dR}))$-ben is, tehát $x \in (\mathrm{Fil}^1(B_{dR}) - \mathrm{Fil}^2(B_{dR}))$, és $\varphi^i(x) \in (\mathrm{Fil}^0(B_{dR}) - \mathrm{Fil}^1(B_{dR}))$ minden i-re. Ekkor $\frac{x}{t_h} \in B_{cris}$, és $\varphi^i\left(\frac{x}{t_h}\right) \in B^+_{dR} \cap B_{cris}$ minden i-re. Így 3.2.2.10. tételt használva adódik, hogy $\frac{x}{t_h} \in B'_{cris}$ és $\frac{x}{t_h} = \varphi^h\left(\frac{x}{t_h}\right) \in B^+_{cris}$, ebből adódik az állítás, mivel $\frac{x}{t_h} \in (B^+_{cris})^{\varphi^h=1} = \mathbb{Q}_{p^h}$ és $V_h = \mathbb{Q}_{p^h} t_h$. □

3.2.3. Colmez fundamentális lemmája

A következő al-szekció Fontaine és Colmez tételének egy legfontosabb szükséges eszközének a bizonyításáról szól. Ezen állítás a következőben bevezetésre kerülő halmazon értelmezett leképezésről azt állítja, hogy vagy véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$ felett a képe vagy szürjektív. Ezen alfejezethez még Plût (17) cikkét is használom. Azonban Yi Ouyang, Shenxing Zhang és Jinbang Yang bizonyítását használjuk a fundamentális lemmához.

3.2.3.1. Lemma. *(Függvényegyenlet Lemma) Legyen A egy részgyűrűje a K testnek, I egy ideálja A-nak, p egy olyan prímszáma A-ban, mely eleme I-nek, q legyen p-nek egy bizonyos hatványa, és s egy olyan eleme K-nak, amelyre teljesül, hogy $sI \subset A$. Ha $g(X) = X + \sum_{i=2}^{\infty} a_i X^i$ hatványsor, mely A együtthatós, és $f_g(X)$ egy olyan K együtthatós hatványsor, mely kielégíti a következő egyenletet:*

$$f_g(X) = g(X) + s \cdot f_g(X^q),$$

akkor a következő kifejezés definiál egy 1 dimenziós formális csoportok közötti szabályt A felett:

$$\Gamma_g(X, Y) = f_g^{-1}\left(f_g(X) + f_g(Y)\right).$$

Továbbá a két állítás is teljesül:

1. *ha $\tilde{g}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b_i} X^i$, akkor $f_{\tilde{g}}^{-1}(f_g(X)) \in A[[X]]$, és ha még azt is feltesszük, hogy $\tilde{b_1} = 1$, akkor Γ_g és $\Gamma_{\tilde{g}}$ formális csoport szabályok izomorfak A felett, ahol az izomorfizmust $f_{\tilde{g}}^{-1}(f_g(X))$ adja,*
2. *ha K lokális test, $A = \mathcal{O}_K$, q a számossága a maradéktestnek, $I = \mathfrak{p}$, $s = \pi$, tehát s az egyértelmű prímeleme I-nek, akkor Γ_g egy Lubin-Tate formális csoport szabályokat teljesítű halmaz.*

Bizonyítás. A lemmát itt nem bizonyítjuk, mivel csak egy speciális esetben szükséges számunkra. □

Ha így használjuk az előző lemmát, hogy $q = p^h$, $K = \mathbb{Q}_q$, $A = \mathbb{Z}_q$, $I = p\mathbb{Z}_q$, $s = p$, és $g(X) = X$, akkor

$$l_\Gamma(X) := f_X(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{q^n}}{p^n} \in \mathbb{Q}_p[[X]]$$
$$\Gamma(X, Y) := l_\Gamma^{-1}(l_\Gamma(X) + l_\Gamma(Y)) \in \mathbb{Z}_p[[X, Y]].$$

Így az előző lemma miatt $\Gamma(X, Y)$ megad egy Lubin-Tate formális csoport szabályt p prímelemhez $\mathbb{Z}_q$ felett. Továbbá $\mathbb{Z}_q \cong End(\Gamma)$ a következő hozzárendelés által:

$$a \mapsto [a]_\Gamma(X), \text{ ahol } [a]_\Gamma(X) = l_\Gamma^{-1}(a \cdot l_\Gamma(X)) = aX + \text{legalább másodfokú tagok} \in End(\Gamma)$$

3.2.3.2. Állítás.

1. *Az $l_h : (\mathfrak{m}_R, \oplus_\Gamma) \longrightarrow P_{h,1}^+$ leképezés egy izomorfizmus, ahol a leképezésen a következőt értjük:*

   $$l_h : x \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} [x]^{p^{nh}}.$$

   Az $\mathfrak{m}_R$-n a művelet a $\Gamma(X, Y)$-n.

2. *V_h egy 1 dimenziós $\mathbb{Q}_{p^h}$-reprezentációja G_K-nak és a következő sorozat egzakt:*

   $$0 \longrightarrow V_h \longrightarrow P_{h,1}^+ \longrightarrow \mathbb{C}_K \longrightarrow 0,$$

   ahol $P_{h,1}^+ \longrightarrow \mathbb{C}_K$ leképezés a korábbban definiált θ leképezés. Ennek következményeként $\theta(P_{h,d}^+) = \mathbb{C}_K$ minden $d \geqslant 1$-re.

Bizonyítás. Először az első állítást látjuk be, abból is azt, hogy l_h jól definiált leképezés, tehát tetszőleges $x \in \mathfrak{m}_R$ esetén $l_h(x)$ $P_{h,1}^+$-ban jól-definiált elem.

Legyen $x = \left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}_R$, akkor ez kiterjeszthető az összes egész számra ha negatív szám esetén $x^{(n)}$-t úgy definiáljuk, hogy $x^{(n)} = \left(x^{(n+1)}\right)^p$, tehát be kell látni, hogy $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{-n}[x]^{p^{nh}}$ B^+_{cris}-beli elem, mivel $\varpi^h(l_h(x)) = pl_h(x)$ teljesül, így $l_h(x) \in P^+_{h,1}$. Bontsuk $n_0 \in \mathbb{Z}$-nél két részletre ezen összeget.

Először vizsgáljuk meg, hogy az n_0-nál nagyobb összegek esetén igaz. Legyen $u = x^{p^{n_0 h}}$, ahol n_0 azon egész, melyre igaz, hogy $x^{(n_0 h)} \in p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$. Ekkor a következő hatványsor A_{cris}-beli:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[u^{p^{nh}}\right]}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{nh}!}{p^n} \cdot \frac{[u]^{p^{nh}}}{p^{nh}!},$$

mivel $\frac{[u]^n}{n!}$ minden n esetén A_{cris}-beli. Így u helyett x-szel a következő hatványsor $B_{cris}+$-beli az előző hatványsor miatt:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\left[x^{p^{nh}}\right]}{p^n} = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[u^{p^{nh}}\right]}{p^n}.$$

A hatványsor másik részletéről is lássuk be, hogy B^+_{cris}-beli.

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0-1} \frac{\left[x^{p^{nh}}\right]}{p^n} = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\left[u^{p^{nh}}\right]}{p^n} \in B^+_{cris},$$

mivel $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{\left[u^{p^{nh}}\right]}{p^n}$ konvergens $W(\mathfrak{R})$-ben.

Az l_h egy csoport homomorfizmus lesz, mivel

$$l_h(x) = l_\Gamma([x]) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[x^{p^{h^{-n}}}\right] p^n = \lim_{n\to\infty} p^n l_\Gamma\left(\left[x^{p^{h^{-n}}}\right]\right).$$

Az l_h injektivitása és szürjektivitása a Lubin-Tate elméletből következik. Azonban ezt nem részletezzük, mivel ez túlmutat a diplomamunkám keretein.

Az állítás második része is a Lubin-Tate elméletből következik, amelyhez használja l_h tulajdonságát. □

3.2.3.3. Definíció. A következő sorozatot Lubin-Tate elemek sorozatának nevezzük, ha a következő tulajdonságokat teljesíti:

1. $\varphi^h(t_h) = pt_h$, $\theta(t_h) = 0$, ha $h \neq 0$,
2. $t_0 = 1$ és $t_1 = t$,
3. ha $t \geqslant 1$, akkor $t_{hr}\varphi^h(t_{hr})\dots\varphi^{h(r-1)}(t_{hr}) = t_h$,

ha $\{t_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ kompatibilis elemek rendszere B^+_{cris}-ben, melyekre teljesül, hogy $V_h = \mathbb{Q}_{p^h} t_h$. Ez egy jó definíció, mivel V_{hr}-ből V_h-be az $x \mapsto x\varphi^h(t_{hr})\dots\varphi^{h(r-1)}(x)$ hozzárendelés által adott leképezés szürjektív.

3.2.3.4. Állítás. *Legyen $\{t_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ egy Lubin-Tate sorozat, akkor a következő tulajdonságok fognak teljesülni:*

1. *t_h invertálható B_{cris}-ben minden h-ra,*
2. *ha $h \geqslant 2$, akkor $t_h \in (Fil^1(B_{dR}) - Fil^2(B_{dR}))$ prímeleme B_{dR}-nek v_{dR} értékelésre nézve, és $\varphi^n(t_h) \in (Fil^0(B_{dR}) - Fil^1(B_{dR}))$, ha $1 \leqslant n \leqslant h-1$,*
3. *minden d-re, $P_{h,d} =^h B_e t_h^d$ egy 1 dimenziós szabad ${}^hB_e$-modulus.*

Bizonyítás. Ezen állítás következik a Lubin-Tate sorozat definíciójából. □

3.2.3.5. Definíció. Legyen $h \geqslant 1$, akkor a következőképpen tudunk definiálni egy halmazt:

$$B_{e,h} = \left\{x \in B_{cris}^{\varphi^h=1} \mid \text{létezik egy olyan } d \in \mathbb{N},\ \text{hogy } xt_h^d \in B^+_{cris}\right\}.$$

Definícióból látszik, hogy $B_{e,h}$ független t_h választásától.

3.2.3.6. Állítás. *Legyen $h \geqslant 1$ egész szám, akkor*

1. $P_{h,0}^+ = \mathbb{Q}_{p^h}$ *és minden nullánál kisebb d-re* $P_{h,d}^+ = 0$,
2. *A következő sorozat egzakt:*
$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^h} t_h \longrightarrow P_{h,1}^+ \xrightarrow{\theta} \mathbb{C}_K \longrightarrow 0,$$
3. $u \in P_{h,1}^+$ *és* $u \notin \mathbb{Q}_{p^h} t_h$, *akkor*
$$P_{h,d}^+ = \left\{ a_0 t_h^{d-1} + a_1 u t_h^{d-2} + \cdots + a_{d-1} u^{d-1} \mid a_i \in P_{h,1}^+ \right\},$$
4. *A következő sorozat egzakt:*
$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^h} \longrightarrow B_{e,h} \bigoplus B_{dR^+} \longrightarrow B_{dR} \longrightarrow 0.$$
Ezen sorozatot hívják a $B_{e,h}$ fundamentális rövid egzakt sorozatának.

Bizonyítás. 3.2.2.13. tétel bizonyításának menetével megegyezik, így nem bizonyítom újra azon menettel. □

Innentől kezdve azon állítások és lemmák sora következik, melyek közvetlen Colmez fundamentális lemmájának bizonyításához szükségesek. Azon lemma állítását csak ezen állítások után mondom ki.

3.2.3.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{h-1} \in \mathbb{C}_K$ nem mind nullák. Legyen $\delta : P_{h,1}^+ \to \mathbb{C}_K$ a következő hozzárendelés által megadott leképezés: $x \mapsto \sum_{i=0}^{h-1} \mu_i \theta(\varphi^i x)$, akkor ezen leképezés szürjektív és magjának dimenziója h.*

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy δ szürjektív, ehhez elég csak belátni, hogy $l_h \circ \delta$ szürjektív, mivel l_h bijekció. Ezen $l_h \circ \delta$ leképezés a következő hozzárendeléssel adható meg:

$$x = \left(x^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{m}_R \longmapsto \sum_{i=0}^{h-1} \mu_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} p^{-n} x^{-(nh+i)}.$$

Így feltehető, hogy $\delta' := l_h \circ \delta$ szürjektivitását belátni. Azonban továbbá ez ekvivalens azzal, ha minden i-re $\delta' \circ \varphi^i$ szürjektivitását belátni. Így ha $i \in \{0, \ldots, h-1\}$-re $v(\mu_i) + \frac{i}{h}$ minimális, akkor $\delta' \circ \varphi^{h-i}$ a következő μ-k választásával:

$$\mu_j' = \begin{cases} \mu_{i+j} \theta(p), \text{ ha } 0 \leqslant j \leqslant h-i-1 \\ \mu_{i+j-h}, \text{ ha } h-i \leqslant j \leqslant h-1, \end{cases}$$

ahol minden j-re μ_j'-re a következő teljesül:

$$v(\mu_j') \geqslant v(\mu_i) + \frac{i}{h} + \frac{j}{h} - \frac{i+j-h}{h} = v(\mu_0'),$$

és így $\delta' \circ \varphi^{h-i} = \sum_{j=0}^{h-1} \mu_j' \theta \circ \varphi^j$. Így feltehető az is $\mu_0 = 1$, és minden i-re $v(\mu_i) \geqslant \frac{-i}{h}$.

Definiáljuk $\mu_{i+nh} := p^{-n} \mu_i$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re, akkor $\delta'(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i x^{(-i)}$. Vegyük a következő hatványsort: $f_+ = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i x^{p^i} \in \mathbb{C}_K[[X]]$, ha belátjuk, hogy létezik egy $b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, melyre $f_+(x) = b$, akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{m}_R$-hez találtunk olyan $b \in \mathbb{C}_K$-beli elemet, amelyre teljesül, hogy $\delta(x) = b$, tehát ez által belátjuk a szürjektivitást.

Tegyük fel, hogy $q = p^h$, akkor $f_+(x)$ a következőképpen írható:

$$f_+(x) = g(x) + \frac{1}{p} f_+(x^q), \text{ ahol } g(x) = x + \mu_1 x^p + \mu_2 x^{p^2} + \cdots + \mu_{h-1} x^{p^{h-1}}.$$

Legyen továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $\delta_n(x) = \sum_{i=-nh}^{\infty} \mu_i x^{(-i)}$, akkor δ_n-re teljesülni fog, hogy $\delta_n\left(x^{q^n}\right) = p^n f_+(x^{(0)})$.

Legyen $b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, $v(b) \geqslant \frac{1}{h(p-1)}$, akkor indukcióval definiálni fogunk egy $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ sorozatot, melyre teljesülni fog, hogy $f_+(x_i)p^{-i}b$, és minden i-re $(x_{i+j}^{q^j})_{j\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik limesze. Tegyük fel, hogy i-ig megkonstruáltuk x-et. Legyen y olyan, melyre teljesül, hogy $x_i^q = y$, így $f_+(y) = g(y) + p^{-i-1}b$. Legyen $x_{i+1} = y + z$, akkor

$$f_+(x_{i+1}) = f_+(y) - g(y).$$

Ha átrendezzük az egyenletet, akkor hatványsor alakban írhatjuk azt:

$$f_+(x_{i+1}) - f_+(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \sum_{j=1}^{p^i} \binom{p^i}{j} z^j y^{p^i-j} = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sum_{p^i=j}^{\infty} \binom{p^i}{j} \mu_i y^{p^i-j},$$

ha $\nu_j := \sum_{p^i=j}^{\infty} \binom{p^i}{j} \mu_i y^{p^i-j}$, akkor $F(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j z^j$.

Ha $j = mp^e$, $(m,p) = 1$, akkor $v(g(y)) \geqslant \min\limits_{0\leqslant j\leqslant h-1} (v(\mu_j) + p^j v(y)) \geqslant -1 + \frac{1}{h}$. Így $F(z) + g(y)$ Newton-poligonja a $\left(0, -1 + \frac{1}{h}\right)$ és $(q, -1)$ végpontú szakasz felett van, tehát létezik q gyöke, melyre teljesül, hogy $v(z) \geqslant \frac{1}{qh}$. Ha az egyik ilyen gyököt választva az x_{i+1}-hez, akkor $\left(x_{i+j}^{q^j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ egy Cauchy-sorozatot kapunk, és mivel $\mathbb{C}_K$ teljes, így létezik limesze. Legyen x'_i a limesz, akkor igaz lesz rá, hogy $(x'_{i+1})^q = x'_i$. Ha $x \in \mathfrak{m}_R$ olyan, melyre igaz, hogy $x^{(ih)} = x'_i$, és $f_+\left(x_{i+j}^{q^j}\right) = p^{-i}b - p^j g(x_{i+j}) - \cdots - pg\left(x_{i+j}^{q^{j-1}}\right)$. Így

$$\delta_n(x) = p^n f_+(x^{(hn)}) = p^n f_+(x'_n) = b + (\text{legalább n értékelésű tagok}),$$

ebből következik, hogy $\delta(x) = b$, tehát szürjektív.

Most lássuk be, hogy a magja h dimenziós. Legyen Λ egy rácsa $\mathrm{Ker}(\delta)$-nak, mint például:

$$\Lambda = \left\{x \in \mathrm{Ker}(\delta) \mid v(x) \geqslant \frac{1}{h}\right\} \quad \text{és} \quad p\Lambda = \left\{x \in \mathrm{Ker}(\delta) \mid v(x) \geqslant \frac{q}{h}\right\},$$

akkor elég csak megmutatni, hogy $\Lambda/p\Lambda$ elemszáma q. Így kell találni egy i sorozatot, melyre teljesül, hogy $x_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, $f_+(x_i) = 0$ és $v\left(x_i - x^{(ih)}\right) > \frac{1}{h}$.

Legyen $z_i = x_i - x^{(ih)}$, akkor $f_+\left(x^{(ih)} + z\right) = 0$, $f_+\left(x^{(ih)}\right) + F(z) = 0$, ahol $F(z)$ az első résznél ismertetett hatványsor csak y helyett $x^{(ih)}$-val. $x^{(ih)}$ helyen f_+-re igaz lesz, hogy

$$f_+\left(x^{(ih)}\right) = \sum_{j\geqslant 0} \mu_j \left(x^{(ih)}\right)^{p^j} = \sum_{j\geqslant 0} \mu_j x^{(ih-j)} = \sum_{k\geqslant -ih} \mu_{ih+k} x^{(-k)} = p^{-i} \sum_{k\geqslant -ih} \mu_k x^{(-k)} = -p^{-i} \sum_{k<-ih} \mu_k x^{(-k)}$$

és ha $k < -ih$, akkor $\mu_k x^{(-k)}$ értékelésére legalább $i + \frac{1}{h}$, így $v\left(f_+\left(x^{(ih)}\right)\right) > \frac{1}{h}$, és így létezik egy z, melyre teljesül, hogy $v(z) > \frac{1}{h}$.

Az x_i konstrukciója miatt $x^{(ih)} = \sum_{j>1} z_j^{q^{j-1}}$. Ebből következik, hogy $\Lambda/p\Lambda$-nak q eleme van, mivel

$$v\left(x_i - x^{(ih)}\right) > \frac{1}{qh}, \text{ tehát } v(z_i) > \frac{1}{qh}, \ x^{(0)} \equiv z_1^q \mod p\Lambda,$$

és, mivel z_1-ekből $q-1$ különböző van, melynek értékelése több, mint $\frac{1}{qh}$ és legfeljebb $\frac{1}{h}$. $\square$

3.2.3.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$, melyek képei $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_K}$-ben lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_p$ felett. Legyen $\eta : (P_{h,1}^+)^h \to \mathbb{C}_K^h$ a következő hozzárendelés által megadott leképezés: $(x_1, \ldots, x_h) \mapsto \left(\sum\limits_{i=0}^{h} \lambda_i \theta(\varphi^r(x_i))\right)_{0\leqslant r\leqslant h-1}$, akkor ezen leképezés szürjektív és magjának $\mathbb{Q}_{p^h}$-dimenziója h.*

Ezen állítás bizonyításához egy lemmára lesz szükség.

3.2.3.9. Lemma. *Legyenek x_i-k egy p karakterisztikájú integritási tartomány feletti változók, akkor*

$$\det\left(\left(x_i^{p^j}\right)_{(i,j)\in\{0,\dots,n-1\}}\right) = \prod_{a\in I}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i\right),$$

ahol I egy olyan részhalmaza $\mathbb{F}_p^n$-nek, mely a nullát nem tartalmazza, és az $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in I$ első nem nulla tagja 1.

Bizonyítás. (Lemma bizonyítása) Ha feltetsszük, hogy minden i-re $a_i = 1$, és x_i-t kicseréljük $-\sum_{j\neq i} a_j x_j$-val, akkor a mátrix determinánsa 0, így $\sum_i a_i x_i$ tényezője lesz $x_i^{p^j}$ determinánsának, ebből már következik a lemma. □

Bizonyítás. (Állítás bizonyítása) Legyen $q = p^h$. Mint az előző állítás bizonyításában itt is használni fogjuk l_h-t, tehát elég lesz belátni, hogy $\eta' := \eta \circ l_h^h$ szürjektív. Legyen S, T a következő két halmaz:

$$S = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_h) \in \mathfrak{m}_R^h \mid v(x_i) \geqslant \frac{1}{q-1} \text{ minden } i\text{-re}\right\},$$
$$T = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_h) \in \mathbb{C}_K^h \mid v(x_i) \geqslant \frac{p^{i-1}}{q-1} \text{ minden } i\text{-re}\right\},$$

akkor $\eta'(S) \subset T$, és így elég belátni, hogy $\eta' : S \to T$ leképezés szürjektív, és a magja egy h dimenziós $\mathbb{Z}_{p^h}$ vektortér.

Legyen továbbá H azon $\mathbb{Q}_{p^h}$-ferdetest, melyet λ generálja, ahol ϑ-ra teljesül, hogy $\vartheta^h = p$, és $\vartheta x = \varphi(x)\vartheta$ tetszőleges $x \in \mathbb{Q}_{p^h}$. A konstrukciók miatt látszik, hogy η felcserélhető H-val való hatással, így η'-vel is felcserélhető, tehát $\mathrm{Ker}(\eta')$ egy H-modulus. Ha $\mathcal{H}$ maximális rangú részgyűrűje H-nak, akkor szeparábilis, teljes a p-adikus topológiára nézve, ϑ egy prímeleme $\mathcal{H}$-nak és $\mathcal{H}/\vartheta\mathcal{H} = \mathbb{F}_{p^h}$.

Ezen definíciók miatt S és T $\mathcal{H}$-részmodulus, melyre teljesül, hogy $\vartheta S = \varphi(S)$, $\vartheta T = \Theta(T)$. Így elég megmutatni, hogy $\overline{\eta'} : S/\varphi(S) \to T/\Theta(T)$ szürjektív, és a magja egy 1 dimenziós $\mathbb{F}_q$-vektortér.

Legyen $x \in S$, akkor ha $r \in \{0, 1, \dots, h-1\}$

$$\theta \circ \varphi^r \circ l_h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{-n}\theta\left(\left[x^{p^{nh+r}}\right]\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{-n}\left(x^{(-nh-r)}\right),$$

így $v\left(p^{-n}\left(x^{(-nh-r)}\right)\right) = -n + p^{nh+r}$, amely meg nagyobb, mint $\frac{p^{nh+r}}{q-1} - n$. A $v\left(p^{-n}\left(x^{(-nh-r)}\right)\right) \geqslant \frac{p^{r+1}}{q-1}$ egyenlőtlensé az esetek nagyrészében teljesül, kivéve ha:

1. $r = 0$, $n = -1$, akkor $1 + \frac{q^{-1}}{q-1}$-nél nagyobb,
2. $n = 0, 1$, akkor $\frac{1}{q-1}$-nél nagyobb,
3. $n = 0$, $1 \leqslant r \leqslant h-2$, akkor $\frac{p^r}{q-1}$-nél nagyobb,
4. $n = 0$, $r = h-1$, akkor $\frac{p^{h-1}}{q-1}$-nél nagyobb.

Ez által $\overline{\eta'}(x_1, x_2, \dots, x_{h-1})$ a következőképpen írható:

$$\left(\sum_{i=1}^h \lambda_i\left([x_i] + \frac{1}{p}\left[x_i^{p^h}\right]\right), \sum_{i=1}^h \lambda_i[x_i^p], \dots, \sum_{i=1}^h \lambda_i\left[x_i^{p^{h-2}}\right], \sum_{i=1}^h \lambda_i\left(p\left[x_i^{\frac{1}{p}}\right] + [x_i]^{p^{h-1}}\right)\right).$$

Legyen $\widehat{\lambda}_i, \widehat{p} \in \mathfrak{R}$ olyan, melyre igaz, hogy $\widehat{\lambda}_i^{(0)} = \lambda_i$ és $\widehat{p}^{(0)} = p$, akkor $\overline{\eta'}$ szürjektivitását a következő egyenletrendszer megoldhatóságával lehet kifejezni, tehát ha ennek van $(x_1, x_2, x_h) \in S^h$ megoldása, akkor $\overline{\eta'}$ szürjektív:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i\left(x_i + \frac{1}{p}x_i^{p^h}\right) = b_0, \\ \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i x_i^{p^j} = b_j, \\ \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i\left(\widehat{p}x_i^{\frac{1}{p}} + x_i^{p^{h-1}}\right) = b_{h-1}, \end{cases}$$

ahol $j \in \{1, \ldots, h-2\}$, $b = (b_i)_{i \in \{0,1,\ldots,h-1\}} \in \mathfrak{R}^h$, mely b_i-kre teljesül, hogy $v(b_i) \geqslant \frac{p^r}{q-1}$.

Ha feltesszük, hogy $\alpha \in \mathfrak{R}$ olyan, melyre igaz, hogy $\alpha^{p(q-1)} = \widehat{p}$, akkor $S = (\alpha^p \mathfrak{R})^h$. Így legyen $x_i = (\alpha y_i)^p$, akkor az egyenletrendszer így módosul:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i \left(y_i^p + y_i^{p^{h+1}} \right) = \alpha^{-p} b_0, \\ \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i y_i^{p^{j+1}} = \alpha^{-p^{j+1}} b_j, \\ \sum_{i=1}^h \widehat{\lambda}_i \left(\widehat{p} y_i \alpha^{(p-1)(q-1)} + y_i^{p^h} \right) = \alpha^{-p^h} b_{h-1}. \end{cases}$$

Továbbáá ha $\mu_i = \widehat{\lambda_i^{p-h}}$ azonosítást vesszük, akkor a következő lineáris alakba hozható az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h \mu_i^{p^j} y_i = c_j \\ , \sum_{i=1}^h \mu_i^{p^{h-1}} \left(y_i + y_i^{p^h} \right) = c_{h-1} \\ , \sum_{i=1}^h \mu_i^{p^h} \left(\widehat{p} y_i \alpha^{(p-1)(q-1)} + y_i^{p^h} \right) = c_h, \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol $c = (c_i)_{i \in \{1,2,\ldots,h\}} \in \mathfrak{R}^h$.

A $\left(\left(\mu_j^{p^i} \right) \right)_{(i,j) \in \{1,\ldots,h\}}$ mátrix $\mathfrak{R}$-ben invertálható lesz 3.2.3.9. lemma miatt és, mivel λ_i-k lineárisan függetlenek. Ha

$$\sum_{i=1}^h \mu_i^{p^{-1}} y_i = c_{-1},$$
$$\sum_{i=1}^h \mu_i y_i = c_0,$$

akkor a következőket lehet felírni:

$$\sum_{i=1}^h \mu_i^{p^{h-1}} y_i = c_{h-1} - c_{-1}^q, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^h \mu_i^{p^h} y_i = \alpha^{-(p-1)(q-1)} (c_{h-1} - c_{-1}^q). \tag{3.3}$$

Legyen $A = ((a_{i,j}))_{(i,j) \in \{1,\ldots,h\}}$ mátrix a $\left(\left(\mu_j^{p^i} \right) \right)_{(i,j) \in \{1,\ldots,h\}}$ mátrix inverze $\mathfrak{R}$-ben, amelyre teljesül a $(y_1, \ldots, y_h) = (c_{-1}, c_0, c_1, \ldots, c_h) A^T$ egyenletrendszer. Ezen egyenletrendszert (c_{-1}, c_0) meghatározza. A 3.2-as egyenletrendszer a következő alakra hozható, hogy

$$-\sum_{j=1}^h b_j c_{j-2} = c_{h-1} - c_{-1}^q,$$

$$-\sum_{j=1}^h b'_j c_{j-2} = \alpha^{-(p-1)(q-1)} (c_{h-1} - c_{-1}^q)$$

ha y_i helyére $\sum_{j=1}^h a_{i,j} c_{j-2}$-t helyettesítünk, és továbbá $b_i = \sum_{j=1}^h \mu_j^{p^{h-1}} a_{j,i}$ és $b'_i = \sum_{j=1}^h \mu_j^{p^h} a_{j,i}$.

A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} b_1 c_{-1} + b_2 c_0 + b_3 c_1 + \cdots + b_h c_{h-2} + c_{h-1} - c_{-1}^q = 0, \\ b'_1 c_{-1} + b'_2 c_0 + b'_3 c_1 + \cdots + b'_h c_{h-2} + \frac{c_h - c_0^q}{\alpha^{(p-1)(q-1)}} = 0, \end{cases}$$

amely átrendezhető egy c_0 változójú egyenletté:

$$((c_0^q - c_h) - \alpha^{(p-1)(q-1)} (b'_2 c_0 + b'_3 c_1 + \cdots + b'_h c_{h-2}))^q - (b_3 c_1 + \cdots + b_h c_{h-2} + b_2 c_0) b_1'^q \left(\alpha^{(p-1)(q-1)} \right)^q +$$
$$+ \frac{b_1}{b'_1} \left(b'_2 c_0 + b'_2 c_0 + b'_3 c_1 + \cdots + b'_h c_{h-2} + \frac{c_h - c_0^q}{\alpha^{(p-1)(q-1)}} \right) b_1'^q \left(\alpha^{(p-1)(q-1)} \right)^q = 0.$$

Ez felírható c_{-1}-re is, és mivel mindkét egyenletnek q darab gyöke van $\mathfrak{R}$-nek, így q^2 darab (c_{-1}, c_0) pár van, tehát q^2 darab $(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ megoldása van $\mathfrak{R}$-ben. Ezzel beláttuk a szürjektivitást.

Legyen Z_c az $\mathfrak{R}$-beli megoldások halmaza c-hez. Mostmár csak azt kell belátni, hogy $\overline{\eta'}$ magja 1 dimenziós $\mathbb{F}_{p^h}$ felett. Az könnyen látszódik, hogy $\overline{\mathrm{Ker}(\eta')} = \mathrm{Ker}\left(\overline{\eta'}\right)$. Ha $b \in \mathcal{O}_C$ olyan, hogy $\theta(b) = 0$, akkor $y \in \mathfrak{R}$ ekvivalens azzal, hogy $b = 0$, így $\mathrm{Ker}(\eta') = Z_0/\varphi(S)$. Ez által elég belátni, hogy ezen halmaz q elemű. A következő egzakt sorozatból következik, hogy elég belátni, hogy $Z_0 \cap \varphi(S)$ q elemű:

$$0 \longrightarrow Z_0 \cap \varphi(S) \longrightarrow Z_0 \longrightarrow Z_0/\varphi(S) \longrightarrow 0.$$

Ha az $y_i = \alpha^{p-1} z_i$ helyettesítést elvégezzük 3.1-os egyenletrendszerben, akkor

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{h} \mu_i^{p^j} z_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{h} \mu_i^{p^{h-1}} \left(z_i + \alpha^{(p-1)(q-1)} z_i^q\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{h} \mu_i^{p^h} (z_i + z_i^q) = 0. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $c_0 = (\alpha c_{-1}^q - b_1 c_1)/b_2$, és

$$\alpha' c_{-1}^{q^2} + ((-1)^q b_1^q - b_2^{q-1} b_2' \alpha') c_{-1}^q + (b_1 b_2' - b_2 b_1') b_2^{q-1} c_0 = 0.$$

A b_1 felírható, mint

$$b_1 = \det\left(\left(\left(\mu_i^{p^{j-2}}\right)\right)_{(i,j)}\right) = \prod_{j=1}^{h} \left(\sum_{i=1}^{h} a_{i,j} \mu_i^{p^{-1}}\right),$$

és a 3.2.3.9. lemma miatt egység $\mathfrak{R}$-ben, így $v\left((-1)^q b_1^q - b_2^{q-1} b_2' \alpha'\right) = 0$ és $v\left(b_1 b_2' - b_2 b_1'\right) \geqslant (q-1) v(b_2)$.

A Newton-poligonoknál ismert gondolatmenet miatt következik, hogy $Z_0 \cap \varphi(S)$ q elemű, tehát $\overline{\eta'}$ magja 1 dimenziós $\mathbb{F}_{p^h}$ felett, mivel pontosan q darab (c_{-1}, c_0) pár van $\mathfrak{R}$-ben, amely megoldja az előző egyenletet, tehát q darab $(z_1, z_2, \ldots, z_h)$ megoldás van $\mathfrak{R}^h$-ban. $\square$

3.2.3.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{C}_K$, melyek lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}_p$ felett. Legyen $\eta : (P_{h,1}^+)^h \to \mathbb{C}_K^h$ a következő hozzárendelés által megadott leképezés: $(x_1, \ldots, x_h) \mapsto \left(\sum_{i=0}^{h} \lambda_i \theta(\varphi^r(x_i))\right)_{0 \leqslant r \leqslant h-1}$, akkor ezen leképezés szürjektív és magjának $\mathbb{Q}_{p^h}$-dimenziója h.*

Ezen állítás bizonyításához is szükségünk van egy lemmára.

3.2.3.11. Lemma. *Legyen $P_1, \ldots, P_n$ polinomok $\mathfrak{R}[X_1, \ldots, X_n]$-ben, melyek a következő egyenletrendszert teljesítik:*

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = -M_0 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1^q \\ X_2^q \\ \vdots \\ X_n^q \end{pmatrix} - M_2 \begin{pmatrix} X_1^{q^2} \\ X_2^{q^2} \\ \vdots \\ X_n^{q^2} \end{pmatrix},$$

ahol M_0, M_2 olyan $n \times n$-es mátrixok, melyek elemei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}$-ben vannak és az M_0 determinánsa nem nulla, akkor tetszőleges $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{R}^n$-re a következő egyenletrendszernek q^n megoldása lesz $\mathfrak{R}^n$-ben:

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 \\ P_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ P_n &= b_n. \end{aligned}$$

Bizonyítás. (Lemma bizonyítása) Tegyük fel, hogy $v(M_0) \geqslant c$ és $v(M_2) \geqslant c$, ahol c nagyobb mint nulla. Jelöljük X-szel a $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ vektort és b-vel a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ vektort, akkor az egyenletrendszer ekvivalens lesz a $X^{(q)} = M_0 X + M_2 X^{(q^2)} + b$-vel, ahol $(\cdot)^{(q^i)}$ a mátrix elemeinek q^i-adik hatványra való emelése. Ha vesszük az egyenlet q-adik hatványát, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$X^{(q)} = \left(M_0 + M_2 M_0^{(q)} M_0\right) X + M_2 M_0^{(q)} M_2 X^{(q^2)} + M_2 M_2^{(q)} X^{(q^3)} + \left(M_2 M_0^q b + M_2 b^{(q)} b\right),$$

ha $X^{(q^2)}$-t helyettesítünk az előző egyenletbe. Ha megint q-adik hatványát vennénk az egyenletnek, és visszaírnánk az első egyenletbe, akkor kapnák egy újabb egyenletet, amelyben X q^4-edik hatányon szerepelne, a b q^2-hatványon szerepelne. Ha ez folytatjuk, akkor a rekurzió miatt kapunk egy $X^{(q)} = MX + b'$ alakú egyenletrendszert, ahol $MX = \sum_{i=0}^{\infty} M_i X^{(q^i)}$, $b' = \sum_{i=0}^{\infty} M_i' b^{(q^i)} b$, és továbbá igaz lesz, hogy $v(M) = v(M_0)$, $\det(M) \neq 0$, M_i és M_i' az M_0 és M_2 valamilyen nem lineáris kombinációja.

Feltehetjük, hogy a b' nulla, így egy egyszerűbb, de ugyanannyi megoldással rendelkező egyenletrendszerre jutunk, és mivel az $X^{(q)} = MX$ egyenletrendszernek a megoldás száma q^n lesz, amely egyszerűen látszik a p-adikus differenciálegyenletek megoldhatósága miatt, így tudjuk, hogy a $X^{(q)} = MX + b'$ egyenletnek q^n darab megoldása van, és továbbá a $X^{(q)} = M_0 X + M_2 X^{(q^2)} + b$ is. A lemma állításában leírt egyenletnek is így q^n darab megoldása lesz, mivel az $X^{(q)} = MX + b'$ egyenletet az eredeti egyenletrendszerből nyertük rekurzióval. □

Bizonyítás. (Állítás bizonyítása) Legyen V egy C-nek egy $\mathbb{Q}_p$-altere, amelyet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ generál. Vegyük továbbá egy Λ rácsát V-nek, akkor $\Lambda/(V \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_K} \Lambda)$ egy h dimenziós $\overline{\mathbb{F}_p}$-vektortér. Legyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ egy olyan bázisa V-nek, melyhez létezik $0 \leqslant v_1 \leqslant \cdots \leqslant v_h \leqslant 1$ és $n_0 = 0 < n_1 < \cdots < n_s = h$, hogy $v(\lambda_i) = v_j$ ha $n_{j-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_j$, akkor $\lambda_{n_{j-1}+1}, \ldots, \lambda_{n_j}$ lineárisan függetlenek modulo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ azon ideálja, melyet v_j értékelésű elemek generálnak. Definiáljuk m leképezést úgy, hogy $m(i) = j$, ha $v(\lambda_i) = j$. Továbbá $m(n_j) = j$. Ha $s = 1$, akkor az 3.2.3.8. állítás miatt következik. Így tegyük fel, hogy $s \geqslant 2$.

Vegyük l_h^h-t, mint az előző lemmákban, akkor legyen $\eta' := \eta \circ l_h^h : \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}^h \to \mathbb{C}_K^h$. Vegyük a következő halmazt:

$$S := \{(x_1, x_2, \ldots, x_h) \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{R}}^h \mid v_{\mathfrak{R}}(x_i) \geqslant \rho_{m(i)}\}$$

Ha $r = 0, 1, \ldots, h-1$, akkor

$$v\left(\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \theta(\varphi^r(l_h(x_i)))\right) = v\left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_i p^{-n} x_i^{(-nh-r)}\right) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant h} \left(v(\lambda_i) + p^{nh+r} v_R(x_i) - n\right),$$

ami könnyű számítások által adódik, hogy nagyobb, mint $v_{m(r+1)} + p^r \rho_{m(r+1)}$. Legyen T a következő halmaz:

$$T := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_h) \in C^h \mid v(x_r) \leqslant v_{m(r+1)} + p^r \rho_{m(r+1)}\right\},$$

akkor $\eta'(S) \subseteq T$ így, mint a 3.2.3.8. állítás bizonyításánál elég belátni, hogy $\overline{\eta'} : S/\varphi(S) \to T/\Theta(T)$ szürjetív és a magja egy dimenziós $\mathbb{F}_q$-vektortér.

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathfrak{R}$, melyre teljesül, hogy

$$\left(\frac{\xi_j^{(0)}}{\xi_{j+1}^{(0)}}\right)^{p^{n_j}} = \frac{\lambda_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_j}} \qquad \text{és} \qquad \frac{\left(\xi_s^{(0)}\right)^{p^h}}{\xi_1^{(0)}} = p\frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_s}},$$

akkor $v(\xi_j) = \rho_j$ és

$$\begin{aligned} \tau : \bigoplus_{j=1}^{s} \left(\mathfrak{R}/\xi_j^{p-1}\mathfrak{R}\right)^{n_j - n_{j-1}} &\longrightarrow S/\varphi(S) \\ (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant h} &\longmapsto (\xi_{m(i)} y_i) \end{aligned}$$

leképezés egy bijekció, így elég belátni, hogy $\overline{\eta'} \circ \tau$ szürjektív.

Ha $n_{j-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_j$, akkor $\widehat{\lambda_i}$ legyenel azon $\mathfrak{R}$-beli elemek, melyekre igaz, hogy $\theta(\widehat{\lambda_i}) = \lambda_i$ és $\mu_i = \widehat{\lambda_i}/\widehat{\lambda_{n_j}}$, így $\mu_i \in \mathfrak{R}^\times$ és $\mu_{n_{j-1}+1}, \mu_{n_{j-1}+2}, \ldots, \mu_{n_j}$ lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_p$ felett.

Legyen $r = 0, 1, \ldots, h$, és ha $c_r = \widehat{\lambda_{nm(r+1)}}^{p^{h-r}} \xi^q_{m(r+1)}$, $Q_r = \sum_{i=1}^h \sum_{n/-1}^1 \widehat{\lambda_i}\widehat{p}^{-n} X_i^{p^{nh+r}}$. Továbbá P_r polinomokat meg definiáljuk úgy, hogy $P_r := c_r^{-1} Q_r(\xi_{m(1)}Y_1, \ldots, \xi_{m(h)}Y_h)^{p^{h-r}}$ minden r-re. Ez által elég belátni, hogy $P_0 = b_0, P_1 = b_1, \ldots, P_{h-1} = b_{h-1}$ egyenletrendszernek van megoldása $\mathfrak{R}^h$-ban tetszőleges $b = (b_0, b_1, \ldots, b_h) \in \mathfrak{R}^h$-ra.

P_r polinomok a következő formában írhatók:

$$P_r(Y_1, \ldots, Y_h) = \sum_{i=1}^h \left(a_{ir} Y_i + b_{ir} Y_i^q + c_{ir} Y_i^{q^2} \right),$$

ahol $a_{ir} = c_r^{-1} \left(\widehat{\lambda}_i \widehat{p}\right)^{p^{h-r}} \xi_{m(i)}$, $b_{ir} = c_r^{-1} \widehat{\lambda}_i^{p^{h-r}} \xi^q_{m(i)}$, $c_{ir} = c_r^{-1} \left(\widehat{\lambda}_i \widehat{p}^{-1}\right)^{p^{h-r}} \xi^{q^2}_{m(i)}$.

Ezen egyenletrendszer megoldásának létezéséhez használjuk a 3.2.3.11. lemmát. Legyen $M_0 = ((a_{ir}))_{(i,r)\in\{1,2,\ldots,h\}}$, $M_1 = ((b_{ir}))_{(i,r)\in\{1,2,\ldots,h\}}$ és $M_2 = ((c_{ir}))_{(i,r)\in\{1,2,\ldots,h\}}$, akkor $M_0, M_2 \in M_h(\mathfrak{m}_{\mathfrak{R}})$, $\det(M_0) \neq 0$ és M_1 invertálható $\mathfrak{R}$ feletti mátrix. Ha módosítjuk a változókat, akkor M_1 mátrixra feltehetjük, hogy identikus, tehát mostmár egy olyan helyzethez jutottunk, ahol tudjuk használni a lemmát, tehát pontosan q^h megoldása van az egyenletrendszernek, tehát $\overline{\eta'}$ szürjektív.

Végül lássuk be, hogy $\overline{\eta'}$ magja egy dimenziós $\mathbb{F}_q$ vektortér. Legyen Z_0 a megoldáshalmaza a $Q_0 = Q_1 = \cdots = Q_{h-1} = 0$ egyenletrendszernek, akkor a halmaznak q^h különböző eleme van. Mint az előző állításnál itt is elég belátni, hogy $Z_0 \cap \varphi(S)$-nek q^{h-1} eleme van. Ezen halmaz a $Q_0 \circ \varphi = Q_1 \circ \varphi = \cdots = Q_{h-1} \circ \varphi$, $Q_0 \circ \varphi = Q_1^p, Q_1 \circ \varphi = Q_2^p, \ldots, Q_{h-1} \circ \varphi = Q_h^p$ egyenletrendszernek megoldáshalmaza, ahol $Q_h = Q_{h-1} \circ \varphi = \sum_{i=1}^h \sum_{n=-1}^1 \widehat{\lambda}_i \widehat{p}^{-n} X_i^{q^{n+1}}$.

Legyen $c_h = \widehat{\lambda_h} \xi_s^q$ és $P_h = c_h^{-1} Q_h(\xi_{m(1)}Y_1, \ldots, \xi_{m(h)}Y_h)$, akkor $Z_0 \cap \varphi(S)$ halmaz felfogható, mint $P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_h = 0$ megoldáshalmazaként. Így ha használjuk megint a 3.2. lemmát, akkor következik belőle, hogy q^{h-1} különböző megoldása van pontosan az egyenletrendszernek, tehát $Z_0 \cap \varphi(S)$ q^{h-1} elemszámú, tehát következik belőle, hogy $\overline{\eta'}$ magja egy 1 dimenziós $\mathbb{F}_q$ vektortér.

□

3.2.3.12. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{C}_K$, melyek lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}_p$ felett, akkor léteznek olyan $a_1, \ldots, a_h \in P^+_{h,1}$ elemek, melyekre teljesül, hogy*

1. *$\sum_{i=1}^h \lambda_i \theta(\varphi^j(a_i)) = 0$ minden j-re 0-tól $(h-1)$-ig,*
2. *Vegyünk egy olyan mátrixot, melynek elemei azon $a_{i,j}$-k, melyekre teljesül, hogy $a_{i,j} = \varphi^{i-1}(a_j)$, akkor ezen mátrix determinánsa nem nulla.*

Bizonyítás. Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_h) \in \mathrm{Ker}(\eta) \subseteq (P^+_{h,1})^h$ vektor, amely legyen $\mathrm{Ker}(\eta)$-nak egy H-részmodulusának egy generátora, akkor $\{a, \varphi(a), \varphi^2(a), \ldots, \varphi^{h-1}(a)\}$ halmaz egy $\mathbb{Q}_{p^h}$ bázisa $\mathrm{Ker}(\eta)$-nak. Ha vesszük a következő hozzárendeléssel definiált leképezést:

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{h-1}) \longmapsto t_0 a + t_1 \varphi(a) + t_2 \varphi^2(a) + \cdots + t_{h-1} \varphi^{h-1}(a),$$

akkor ezen leképezés egy izomorfizmus, tehát $a_1, a_2, \ldots, a_h \in P^+_{h,1}$ olyan elemek, amelyre teljesülnek az állítások. □

Ezek a szükséges előkészületek Colmez fundamentális lemmájához.

3.2.3.13. Tétel. *(Colmez fundamentális lemmája) Legyen h egy kettőnél nagyobb egész szám és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{C}_K$ nem mind nulla elemek. Legyen Y azon halmaz, amelyet úgy definiálunk, hogy*

$$Y := \{(u_1, u_2, \ldots, u_h) \in U^h \mid \text{létezik } c \in \mathbb{C}_K, \text{ melyre teljesül minden } i\text{-re, hogy } \theta(u_i) = c\lambda_i\}.$$

Legyenek továbbá $b_1, b_2, \ldots, b_h \in B_2$ nem mind nulla elemek, melyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^h \lambda_i \theta(b_i) = 0$, akkor ez által tudunk definiálni egy leképezést, hogy

$$\rho : Y \longrightarrow B_2$$
$$(u_1, u_2, \ldots, u_h) \longmapsto \sum_{i=1}^h b_i u_i,$$

akkor ρ képe $\mathbb{C}_K(1)$-ben van, és a következő kettő tulajdonság közül az egyik teljesül:

1. *$Im(\rho) = \rho(\mathbb{Q}_p(1)^{h'})$ és ρ képének dimenziója legfeljebb h,*

2. *vagy $Im(\rho) = \mathbb{C}_K(1)$ és a mag dimenziója h.*

Bizonyítás. A bizonyítást két részre bontjuk az alapján, hogy a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$-k lineárisan összefüggőek vagy sem.

Tegyük fel először, hogy lineárisan függetlenek. Vegyük egy olyan $A = ((a_{i,j}))_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,h\}}$ mátrixot, melyre teljesül, hogy $a_{i,j} = \varphi^{i-1}(a_j)$, akkor a lemma miatt a determinánsa nem nulla, így legyen $det(A) = d$, akkor igaz lesz rá, hogy $\varphi(d) = (-1)^{h-1}p^h d$. Ez által $d = qt$, ahol $q \in \mathbb{Q}_{p^2}^\times$. Legyen továbbá $A' \in M_h(B_{cris}^+)$ mátrix melyre teljesül, hogy $AA' = A'A = tI$, ahol I a $(h \times h)$-s identitás mátrix, így $det(A') = q^{-1}t^{h-1}$. Legyenek β_i-k olyanok, hogy teljesül rájuk, hogy

$$A \begin{bmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_2} \\ \vdots \\ \widehat{\lambda_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\beta_1 \\ t\beta_2 \\ \vdots \\ t\beta_h \end{bmatrix},$$

ahol $\widehat{\lambda}_i$-k λ_i-k felemeltjei B_{cris}^+-ban. Továbbá A' definíciója miatt teljesül, hogy

$$\begin{bmatrix} \widehat{\lambda_1} \\ \widehat{\lambda_2} \\ \vdots \\ \widehat{\lambda_h} \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} t\beta_1 \\ t\beta_2 \\ \vdots \\ t\beta_h \end{bmatrix}.$$

Legyen $P := \left(\left(\widehat{\lambda}_i^{\,j}\right)\right)_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,h\}}$ mátrix, amely egyenlő $A'B'$ mátrixxal, ahol $B' := ((\beta_i^j))_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,h\}}$. A definícióik által igaz lesz rájuk, hogy $det(P) = \left(\widehat{\lambda_1} + \widehat{\lambda_2} + \cdots + \widehat{\lambda_h} + t\right) t^{h-1}$, $\det(B')$ egység lesz B_{cris}^+-ban és B' invertálható mátrix B_{cris}^+ felett, mivel $\widehat{\lambda}_i^{\,j} = \widehat{\lambda}_i + \delta_{i,j}t$, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta. Továbbá az is teljesül, hogy A' felírható, mint $P(B')^{-1}$. Vegyük ez által a következő izomorfizmust:

$$\alpha : Y \longrightarrow P_{h,1}^+$$
$$y = (u_1, \ldots, u_h) \longmapsto x = \sum_{i=1}^{h} a_i \frac{u_i}{t}.$$

Ez tényleg egy jól-definiált izomorfizmus, mivel $tx \in B_{cris}^+$ a 3.2.2.10. tétel miatt, és mivel $\theta(\varphi^j(tx)) = 0$ minden j-re, mivel $\theta(\varphi^j(tx)) = cp^j \sum_{i=1}^h \theta(\varphi^j(a_i))\lambda_i = 0$.

Azt tudjuk, hogy

$$A \begin{bmatrix} \frac{u_1}{t} \\ \frac{u_2}{t} \\ \vdots \\ \frac{u_h}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi(x) \\ \vdots \\ \varphi^{h-1}(x) \end{bmatrix}$$

teljesül, így ha α'-nek azon leképezését definiáljuk, amely minden $x \in P_{h,1}^+$-ra a következőképpen van definiálva, hogy $\alpha'(x) = (x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{h-1}(x))A'^T$ vagy, mint $(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{h-1}(x))B^T P^T$. A definíció miatt látszódik, hogy α és α' egymás inverzei.

Ha vesszük α' és ρ-nak a kompozícióját, akkor egy olyan leképezést kapunk, amely a következő hozzárendeléssel definiált:

$$x \longmapsto t \sum_{i=1}^{h} \theta\left(\frac{c_j}{t}\right) \theta(\varphi^{h-1}(x)),$$

mivel ha $x \in P^+_{h,1}$, akkor azt a következőbe képződik:

$$(b_1, b_2, \dots, b_h)A' \begin{bmatrix} x \\ \varphi(x) \\ \vdots \\ \varphi^{h-1}(x) \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_h)PB \begin{bmatrix} x \\ \varphi(x) \\ \vdots \\ \varphi^{h-1}(x) = \sum_{j=1}^h c_j \varphi^{j-1}(x), \end{bmatrix}$$

mivel $\theta((b_1, b_2, \dots, b_h)P) = 0$ és $\theta(c_j) = 0$ minden j-re. Így a 3.2.3.7. állítás miatt következik a tétel abban az esetben ha az λ-k lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy a λ-k nem függetlenek $\mathbb{Q}_p$ felett. Továbbá tegyük fel, hogy az első h' elem még független a λ-k közül, tehát a maradék $h - h'$ elem kifejezhető ezen elemek segítségével, tehát $\lambda_j = \sum_{i=1}^{h'} a_{i,j}\lambda_i$, ahol $j \in \{h'+1, h'+2, \dots, h\}$. Ha $v_j = u_j - \sum_{i=1}^{h'} a_{i,j}u_i$, akkor $\theta(v_j) = 0$ és $v_j \in \mathbb{Q}_p(1)$.

Továbbá legyen Y' azon halmat, mely csak a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h'}$-hoz tartozik, így ha vesszük a

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow Y' \oplus \mathbb{Q}_p(1)^{h-h'} \\ (u_1, u_2, \dots, u_h) &\longmapsto (u_1, \dots, u_{h'}, v_{h'+1}, \dots, v_h) \end{aligned}$$

leképezést, akkor Y' konstrukciója miatt egy bijekció. Így a ρ a következőképpen írható le:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{h'} c_i u_i + \sum_{i=h'+1}^{h} b_i v_i,$$

ahol $c_i = b_i + \sum_{j=h'+1}^h b_j a_{i,j}$.

Ha c_i-k nem mind nullák és $\sum_{i=1}^{h'} \lambda_i \theta(c_i) = 0$, így ha vesszük a $\rho' : Y' \to B_2$ leképezést, akkor a lineárisan független esetre jutunk, tehát ρ' szürjektív és $\mathrm{Ker}(\rho')$ h' dimenziós vektortér. ρ' által ρ is szürjektív és $\dim_{\mathbb{Q}_p}(Ker(\rho)) = h$, mivel $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Ker}(\rho)) =_{\mathbb{Q}_p} (\mathrm{Ker}(\rho')) + h - h' = h' + h - h'$.

Ha c_i-k mind nullák, akkor $\mathrm{Im}(\rho) = \rho\left(\mathbb{Q}_p(1)^{h-h'}\right)$ és $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Im}(\rho)) \leqslant h$, mivel $\rho(x) = \sum_{i=h'+1}^h b_i v_i$. Ezzel beláttuk az összes esetet, így végeztük Colmez fundementális lemmájának bizonyításával. □

A következő két állítás szükséges lesz Fontaine és Colmez tételének bizonyításához, azonban ezen két állítás mondhatni Colmez fundamentális lemmájának más formái, vagy annak következményei, alkalmazása.

A korábbiakban már definiáltunk egy pár fontos részgyűrűt. A B_2-t úgy definiáltuk, hogy $B_2 = B^+_{dR}/\mathrm{Fil}^2 B_{dR}$, és továbbá U-t vagy $P^+_{1,1}$-t, mint $U = \{u \in B_{\mathrm{cris}} \mid \varphi(u) = pu\} \cap B^+_{dR} = P^+_{1,1}$.

Vegyünk egy véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$-vektorteret, ha $\mathbb{C}_K$-vel megtenzorozzuk kapunk egy $V_{\mathbb{C}_K}$ $\mathbb{C}_K$-vektorteret. Ha ezen vektortereknek vesszük a -1-es Tate csavarását, akkor a következő kommutatív diagrammot kapjuk:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, tail] & U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \arrow[r] \arrow[d, tail] & V_{\mathbb{C}_K}(-1) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V_{\mathbb{C}_K} \arrow[r] & B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \arrow[r] & V_{\mathbb{C}_K}(-1) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

3.2.3.14. Állítás. *Legyen V egy véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$-vektortér, melynek legalább 2 a dimenziója, és jelöljük a dimenzióját h-val. Tegyük fel, hogy létezik egy szürjektív B_2-lineáris leképezés: $\eta : B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to B_2(-1)$, amely leképezés kiterjed a hányadostestére is: $\overline{\eta} : \mathbb{C}_K(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{\mathbb{C}_K} \to \mathbb{C}_K(-1)$. Legyen $\overline{X}$ egy 1 dimenziós $\mathbb{C}_K$-altere $V_{\mathbb{C}_K}(-1)$-nek, és X az inverzképe $U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-ben, ez által a következő kommutatív diagrammot tudjuk felírni:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\theta"] & U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\theta"] & B_2(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, two heads, "\theta"] & B_2(-1) \arrow[d, two heads, "\theta"] \\
\overline{X} \arrow[r, hook] & V_{\mathbb{C}_K}(-1) \arrow[r, equal] & V_{\mathbb{C}_K}(-1) \arrow[r, "\overline{\eta}"] & \mathbb{C}_K(-1).
\end{tikzcd}$$

Ha $\overline{X} \subset Ker(\overline{\eta})$, akkor az X-re szűkítése az η-nak keresztül faktorizálódik a hányadostestre. Továbbá, ha $\eta(V) \neq \eta(X)$, akkor η_X leképezés szürjektív, és a magja egy $\mathbb{Q}_p$-vektortér, melynek a dimenziója h.

Bizonyítás. Ezen állítás csak Colmez fundamentális lemmájának egy másik alakja, így ezen állítás bizonyítását nem végezzük el. ☐

3.2.3.15. Állítás. *Legyen V_1 egy véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$-vektortér, melynek legalább 2 a dimenziója, és jelöljük a dimenzióját h-val, és legyen $\Lambda_1 = B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$. Legyen Λ_2 egy B_{dR}^+-részmodulusa $\Lambda_1(-1)$-nek, és továbbá legyen*

$$(\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_1 \text{ egy egyszerű } B_{dR}^+\text{-modulus,}$$
$$(\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_2 \text{ egy egyszerű } B_{dR}^+\text{-modulus.}$$

Legyen X az inverzképe $\Lambda_1+\Lambda_2$-nek $U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$-ban, és legyen ρ a természetes projekció:

$$\rho : U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \longrightarrow \Lambda_1(-1)/\Lambda_2.$$

Akkor a következő két állítás közül legalább az egyik igaz:

1. *Vagy $\dim_{\mathbb{Q}_p}\rho(X) \leqslant h$, és $Ker(\rho)$ egy nem véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$ vektortér,*
2. *vagy ρ szürjektív, és $Ker(\rho)$ egy véges h dimenziós $\mathbb{Q}_p$ vektortér.*

Bizonyítás. $(\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_2$ és $(\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_1$ egy dimenziós $\mathbb{C}_K$ vektorterek, így Λ_1-ben megadhatunk olyan $\{e_1,\dots,e_h\}$ elemeket, amely a következőképpen generálják Λ_1-et és Λ_2-t:

$$\Lambda_1 = e_1\cdot B_{dR}^+ \oplus e_2\cdot B_{dR}^+ \oplus\cdots\oplus e_h\cdot B_{dR}^+, \qquad \Lambda_2 = (t^{-1}e_1)\cdot B_{dR}^+ \oplus (te_2)\cdot B_{dR}^+ \oplus e_3\cdot B_{dR}^+ \oplus\cdots\oplus e_h\cdot B_{dR}^+$$

Ezért a következő két kommutatív diagramot tudjuk felírni.

1. A kommutatív diagram sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, hook] & (\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Lambda_1(-1)/\Lambda_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
& & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) \arrow[r, equal] & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) &
\end{tikzcd}$$

2. Ezen diagram sorai is egzaktak lesznek:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\Lambda_1+\Lambda_2)/\Lambda_2 \arrow[r] & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 \arrow[r] & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ebből következik, hogy $\Lambda_1(-1)/\Lambda_1(1)$-nek egy bázisát adja a $\{\rho\left(t^{-1}e_1\right),\ldots,\rho\left(t^{-1}e_h\right)\}$. A $\eta : \sum_{i=1}^h a_ie_i \mapsto a_2t^{-1}$ hozzárendeléssel definiált leképezés $B_2(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$-ből $B_2(-1)$-be, ha ezen leképezést leszűkítjük X-re, akkor a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_K \arrow[r] & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 \arrow[r] & \Lambda_1(-1)/(\Lambda_1+\Lambda_2) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

ahol $\mathbb{C}_K \to \Lambda_1(-1)/\Lambda_2$ leképezés $c \mapsto ct^{-1}\rho\left(t^{-1}e_2\right)$ hozzárendeléssel definiált. Így az előző állítás segítségével ha $\eta(X) = \eta(V_1)$, akkor az állításunk első része lesz igaz, ha meg meg $\eta(X) \neq \eta(V_1)$, akkor η_X szürjektív, tehát ρ is szürjektív, és így $\mathrm{Ker}(\rho) = \mathrm{Ker}(\eta_X)$, tehát az állítás második része lesz ekkor igaz. □

3.2.4. Félig-stabil periódus gyűrű

3.2.4.1. Definíció. Félig-stabil periódus gyűrűnek vagy log-kristályos periódus gyűrűnek nevezzük azon gyűrűt, melyet $B_{st} := B_{cris}[\mathbf{u}]$-ként definiálunk, tehát ezen gyűrű B_{cris}-részalgebrája B_{dR}-nek, amelyet $\mathbf{u} = \log[\mathfrak{w}]$ generál. Továbbá B_{st} hányadostestét definiáljuk $\mathbb{C}_{st}$-nek.

A következő tétel teljesül, mivel $\mathbf{u}$ transzcendens $\mathbb{C}_{cris}$ felett.

3.2.4.2. Tétel. *A $B_{cris}[x] \longrightarrow B_{st}$ leképezés B_{cris}-algebrák között egy homomorfizmus, ahol $x \mapsto \mathbf{u}$ hozzárendelés által adódik. Továbbá ezen homomorfizmus egy izomorfizmus.*

3.2.4.3. Tétel. *1. A következő leképezés injektív:*

$$\begin{aligned} \iota : K\otimes_{K_0} B_{st} &\longrightarrow B_{dR} \\ \lambda\otimes b &\mapsto \lambda b. \end{aligned}$$

2. $(\mathbb{C}_{st})^{G_K} = K_0$ és továbbá

$$(B^+_{cris})^{G_K} = (B_{cris})^{G_K} = (B_{st})^{G_K} = K_0.$$

Bizonyítás. 3.2.0.9. állítás miatt $K\otimes_{K_0} B_{cris} \subset B_{dR}$ egy integritási tartomány, így $\mathrm{Frac}(K\otimes_{K_0} B_{cris})$ véges bővítése $\mathbb{C}_{cris}$-nek, és $\mathbf{u}$ $\mathrm{Frac}(K\otimes_{K_0} B_{cris})$ felett transzcendens. Ez által adódik, hogy

$$K\otimes_{K_0} B_{st} = K\otimes_{K_0} B_{cris}[\mathbf{u}] = (K\otimes_{K_0} B_{cris})[u] \subset B_{dR},$$

amelyből következik az első állítás. Továbbá tudjuk az is, hogy

$$K_0 \subset (B^+_{cris})^{G_K} \subset (B_{cris})^{G_K} \subset (B_{st})^{G_K} \subset (\mathbb{C}_{st})^{G_K}$$

és mivel teljesül az első állítás, így

$$(\mathbb{C}_{st})^{G_K}\otimes_{K_0} K \subset (B_{dR})^{G_K} = K$$

ez által $(\mathbb{C}_{st})^{G_K} = K_0$. □

B_{st} egy periódus gyűrű, így struktúrájából eredendően két féle operátort is tudunk rajta értelmezni. Az egyik a Forbenius leképezés, mivel a logaritmus leképezés által φ kiterjed B_{st}-re úgy, hogy $\mathbf{u}$-t a p-szeresébe viszi. Továbbá φ felcserélhető lesz B_{st}-n G_K-val, és így φ leképezés B_{st}-n injektív lesz. A másikat meg a következő definícióban vezetjük be.

3.2.4.4. Definíció. Legyen N azon operátor, amelynek a definíciója legyen a következő:

$$N : B_{st} \longrightarrow B_{st}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathbf{u}^n \longmapsto (-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot b_n \mathbf{u}^{n-1}.$$

Ezen operátort monodrómiának nevezzük. Erre gondolhatunk úgy, mint B_{cris}-n lévő deriváció, mivel igaz lesz, hogy $N(\mathbf{u}) = -1$.

3.2.4.5. Állítás. *A monodrómia operátor egy nilpotens operátor, amely a következő három dolgot elégíti ki:*

1. *A következő sorozat egzakt:*
$$0 \longrightarrow B_{cris} \longrightarrow B_{st} \xrightarrow{N} B_{st} \longrightarrow 0.$$
2. *$gN = Ng$ minden $g \in G_K$-re.*
3. *$N\varphi = p\varphi N$.*

Bizonyítás. A monodrómia definíciójából következik, hogy ezen sorozat egzakt. Legyen $g \in G_K$ tetszőleges, akkor az $\mathbf{u}$ képe a következő lesz: $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \eta(g)t$. Azonban, mivel $\eta(g)t \in B_{cris}$, akkor $N(\eta(g)t) = 0$, így felcserélhető a csoporthatás és a monodrómia. Az utolsó állítás a következő lépések miatt lesz igaz:

$$N\varphi\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{u}^n\right) = N\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(b_n)p^n\mathbf{u}^n\right) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} n\varphi(b_n)p^n\mathbf{u}^{n-1} = p\varphi N\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\mathbf{u}^n\right).$$

Továbbá a harmadik tulajdonságból látszódik a monodrómia nilpotenssége. □

3.3. Kristályos és félig-stabil reprezentációk

A periódus gyűrűk után térjünk át a hozzájuk tartozó reprezentációkra. Ezen két p-adikus reprezentáció kategóriája finomabb struktúrával rendelkezik, mint a de Rham és Hodge-Tate típusok, mivel a félig-stabil reprezentációk kategóriája ekvivalens lesz a szemi-lineáris algebrák bizonyos kategóriájával. Ehhez is Conrad (4) és Fontaine (10) jegyzetét fogom használni.

3.3.0.1. Állítás. *A B_{cris} és B_{st} Fontaine gyűrűire a következők teljesülnek:*

1. *B_{cris} és B_{st} integritási tartományok,*
2. *$B_{cris}^{G_K} = B_{st}^{G_K} = \mathbb{C}_{st}^{G_K} = K_0$,*
3. *Ha $b \neq 0 \in B_{cris}$, amelyre $\mathbb{Q}_p b$ stabil G_K-ra nézve, akkor b invertálható B_{cris} felett. Ezen állítás ugyanúgy igaz B_{st} gyűrűre is,*

tehát B_{cris} és B_{st} $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-regulárisak.

Bizonyítás. Az első állítás következik abból, hogy B_{dR} integritási tartomány, és B_{dR}-ben mindkét gyűrű részgyűrű. A második állítás meg következik a 3.2.4.3. tételből.

Legyen $b \in B_{dR}$, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{Q}_p b$ stabil G_K-val való hatásra nézve, továbbá feltehető, hogy $b \in B_{dR}^+$, de nem eleme az első filtráltnak. Továbbá még feltehető, hogy $g(b) = \eta(g)b$, akkor $\mathbb{Q}_p\overline{b} \cong \mathbb{Q}_p(\eta)$, ha $\overline{b} = \theta(b)$. A 3.1.1.31. következmény miatt ez egy 1 dimenziós, stabil $\mathbb{Q}_p$-altere $\mathbb{C}_K$-nek, amelyből még tovább következik, hogy $\eta(I_K)$ véges és $\overline{b} \in P$, ha $P_0 = W(\overline{k})\left[\frac{1}{p}\right]$-nak az algebrai lezártja.

Indirekten fogjuk belátni a 3. állítást, tehát tegyük fel, hogy $\theta(b) \neq b$, tehát $b' = b - \overline{b} \neq 0$ és $b' \in \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) - \mathrm{Fil}^{i+1}(B_{dR})$ valamely $i \geqslant 1$-re.

A b és $\overline{b}$ definíciójából következik, hogy $\mathbb{Q}_p b'$ stabil a G_K hatásra nézve, így $\mathbb{Q}_p\theta(t^{-i}b')$-n a G_K hatása $\chi^{-i}\eta$, amely az I_K-n való hatása véges, ahol χ a körosztási karakter. Ebből az következik, hogy $b' = 0$ és $b = \theta(b)$ $\overline{P}$-ben, mivel $\chi^{-i}\eta(I_K)$ és $\eta(I_K)$ nem lehet mindkettő véges.

Azonban erről még nem tudjuk, hogy B_{cris}-ben is invertálható, tehát be kell még látni, hogy B_{cris}-ben is az, azonban t^i invertálható $B_{cris} \subset B_{st}$-ben, így elég belátni, hogy $\overline{P} \cap B_{st} = P_0$. Tegyük fel, hogy nem igaz tehát $\overline{P} \cap B_{st} = Q \subset P_0$, akkor létezik P_0-nak egy L véges bővítése, amely része Frac(Q)-nak. A második állítás miatt tudjuk, hogy $B_{st}^{G_L} = P_0$, de Frac$(Q)^{G_L} = L$, amely ellentmondás, így $\overline{P} \cap B_{st} = P_0$, tehát b inverálható B_{cris}-ben is. □

Legyen V egy tetszőleges p-adikus reprezentáció, akkor

$$\mathbf{D}_{st}(V) := (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},\ \mathbf{D}_{cris}(V) := (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

$\mathbf{D}_{st}(V)$, $\mathbf{D}_{cris}(V)$ K_0-vektorterek és $\alpha_{st}(V)$, $\alpha_{cris}(V)$ leképezések injektívek, ahol ezen leképezéseken a következőt értjük:

$$\begin{aligned}\alpha_{st}(V) &: B_{st} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V) \longrightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V,\\ \alpha_{cris}(V) &: B_{cris} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{cris}(V) \longrightarrow B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.\end{aligned}$$

3.3.0.2. Definíció. 1. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor V félig-stabil vagy log-kristályos reprezentáció ha B_{st}-megengedett, tehát $\alpha_{st}(V)$ egy izomorfizmus.

2. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor V kristályos ha B_{cris}-megengedett, tehát $\alpha_{cris}(V)$ egy izomorfizmus.

Mivel V egy p-adikus repezentációja G_K-nak, ekkor $\mathbf{D}_{cris}(V)$ altere $\mathbf{D}_{st}(V)$-nek, tehát

$$\dim_{K_0}(\mathbf{D}_{cris}(V)) \leqslant \dim_{K_0}(\mathbf{D}_{st}(V)) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

3.3.0.3. Állítás. *1. Legyen V egy p-adikus reprezentáció akkor, és csak akkor félig-stabil ha* $\dim_{K_0}(\mathbf{D}_{st}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$.

2. Legyen V egy p-adikus reprezentáció akkor, és csak akkor kristályos ha $\dim_{K_0}(\mathbf{D}_{cris}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$.

Bizonyítás. Az előző egyenlőtlenség miatt rögtön adódik, hogyha kristályos a reprezentáció, akkor félig-stabil is. □

3.3.0.4. Állítás. *Ha V egy félig-stabil p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor V de-Rham reprezentáció is és*

$$\mathbf{D}_{dR}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V).$$

Bizonyítás. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V) \supseteq \mathbf{D}_{dR}(V)$. Mivel $K \otimes_{K_0} B_{st}$ természetesen beágyazható B_{dR}-be, így $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V)$ részhalmaza $\mathbf{D}_{dR}(V)$-nek, mivel

$$\begin{aligned}K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V) &= K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = (K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V))^{G_K} =\\ &= ((K \otimes_{K_0} B_{st}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \hookrightarrow (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{dR}(V).\end{aligned}$$

Ez által következik $\mathbf{D}_{dR}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V)$. Ha azt tesszük fel, hogy félig-stabil, akkor a dimenziók miatti egyenlőtlenségek által adódik, hogy V de Rham is. □

3.3.0.5. Következmény. *Ha V egy félig-stabil p-adikus reprezentációja G_K-nak. A $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-n is megadható a monodrómia leképezés és a Frobenius leképezés úgy, hogy*

$$\begin{aligned}\varphi(b \otimes v) &= \varphi(b) \otimes v,\\ N(b \otimes v) &= N(b) \otimes v,\end{aligned}$$

akkor φ és N minden $g \in G_K$ elemre felcserélhető $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-n is. Továbbá φ injektív.

Bizonyítás. N és φ definíciójából és az előző állításból rögtön következik. □

3.3.0.6. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor $D := \mathbf{D}_{st}(V)$ egy véges dimenziós vektortér K_0 felett, melynek legfeljebb $dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ a dimenziója, és továbbá*

1. D stabil φ-re és N-re nézve is,

2. *N K_0-lineáris és nilpotens,*

3. *φ σ-félig lineáris és bijektív,*

4. *$N\varphi = p\varphi N$ teljesül D-n is.*

Ha vesszük D-nek K-val való tenzorszorzatát ($D_K := K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V)$), melyre teljesül, hogy $D_K \subset \mathbf{D}_{dR}(V)$, és így továbbá megadható rajta egy K-filtrálás, mivel

$$Fil^i(D_K) = D_K \bigcap Fil^i(\mathbf{D}_{dR}(V)).$$

Továbbá $\mathbf{D}_{cris}(V)$-re gondolhatunk, mint $\mathbf{D}_{st}(V)$ abban az esetben, hogyha a monodrómia leképezés azonosan nulla, így V akkor, és csak akkor kristályos, ha V félig-stabil és $\mathbf{D}_{st}(V)$-n N azonosan nulla.

Bizonyítás. A φ leképezés bijektivitásán kívül minden más egyértelmű. Így csak azt kell belátni. Tudjuk, hogy D véges dimenziós K_0-vektortér és, mivel φ injektív, így következik, hogy φ D-n egy bijekció. $\square$

Továbbá a megengedett, filtrált (φ, N)-modulusokhoz hozzá tudunk rendelni félig-stabil p-adikus Galois reprezentációkat. Ezen leképezés szükséges lesz a két kategória közötti ekvivalencia megadásához, mivel a későbbiek során $\mathbf{D}_{st}$-ről és az előző mondatban leírt leképezésről, amelyet $\mathbf{V}_{st}$-ként jelölünk, ki fog derülni, hogy a kategóriák közötti funktorokat adnak.

Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus K felett, akkor B_{st}-vel tenzorszorozva is megadható egy filtrált (φ, N)-modulus struktúra. A tensorszorzat elemein φ leképezés mindkét tagon külön-külön hat, tehát ha $b \in B_{st}$ és $d \in D$, akkor $\varphi(b \otimes d) = \varphi(b) \otimes \varphi(d)$. Továbbá a monodrómiával való hatás az lesz, hogy $N(b \otimes d) = N(b) \otimes d + b \otimes N(d)$. Az által, hogyha tovább tenzorszorozzuk K-val K_0 felett, akkor $K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes D) \subset B_{dR} \otimes D_K$ tartalmazás miatt a $B_{dR} \otimes D_K$ modulustól örökölt filtrálás által megadható $B_{st} \otimes D$-n is a filtrálás úgy, hogy

$$\mathrm{Fil}^i(B_{st} \otimes D) = \mathrm{Fil}^i(K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes D)) \cap (B_{st} \otimes D).$$

Így tudjuk már $\mathbf{V}_{st}$-t definiálni.

3.3.0.7. Definíció. Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{st}(D) :&= \{v \in B_{st} \otimes D \quad | \quad \varphi(v) = v, \quad N(v) = 0, \quad v \in \mathrm{Fil}^0(B_{st} \otimes D)\} = \\ &= \{v \in B_{st} \otimes D \quad | \quad \varphi(v) = v, \quad N(v) = 0, \quad 1 \otimes v \in \mathrm{Fil}^0(K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes D))\} \end{aligned}$$

A definíciójából látszódik, hogy stabil G_K-val való hatásra, és egy altere lesz egy $\mathbb{Q}_p$ feletti $B_{st} \otimes D$ vektortérnek. Ezen leképezés is felcserélhető lesz a tenzorképzésre és dualitásra nézve is.

3.3.1. (φ, N)-modulusok K_0 felett

3.3.1.1. Definíció. Legyen $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$ a (φ, N)-modulusok K_0 feletti kategóriájának jele, amelyet akár log-φ-izokristályok kategóriájának is nevezhetünk. $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$ tartalmazza azon véges dimenziós K_0 vektortereket, amelyeken a φ, N leképezések definiáltak. Továbbá ezen leképezések rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

1. φ bijektív és félig-lineáris az abszolút Frobenius leképezéssel K_0-on,

2. N K_0-lineáris leképezés,

3. $N\varphi = p\varphi N$.

Két $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$ objektum közötti morfizmusok nem mások, mint K_0-lineáris leképezések, amelyek N-nel és φ-vel felcserélhetőek.

A definícióból játszik, hogy $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$ egy Abel-kategória. Továbbá tudjuk definiálni két objektum tenzor objektumát és duál objektumát is. Legyen $D_1, D_2 \in \mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$, akkor ezen két elem tenzor objektumán a $D_1 \otimes_{K_0} D_2$ objektumot értjük, ahol φ és N a következőképpen hat:

$$\begin{aligned} \varphi(d_1 \otimes d_2) &= \varphi(d_1) \otimes \varphi(d_2), \\ N(d_1 \otimes d_2) &= N(d_1) \otimes d_2 + d_1 \otimes N(d_2). \end{aligned}$$

Legyen $D \in \mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$, akkor ezen objektum duálisán a következő objektumot értjük: $D^* := \mathcal{L}(D, K_0)$, tehát azon lináris leképezések halmaza, melyek $\alpha : D \to K_0$ esetén φ-vel, N-nel a következőképpen viselkednek:

$$\varphi(\alpha) = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1},$$
$$N(\alpha) = -\alpha \circ N.$$

Továbbá tudjuk definiálni azon K_0 feletti modulusok kategóriáját, melyeken a monodrómia azonosan nulla.

3.3.1.2. Definíció. Legyen $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi)$ a φ-modulusok K_0 feletti kategóriája, amely $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$-nek teljes részkategóriája. Ezen objektumokat k feletti φ-isokristályoknak nevezzük, ahol k K_0 maradékteste.

3.3.1.3. Állítás. *A monodrómia operátor $\mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$-beli objektumokon nilpotens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy N nem nilpotens, tehát igaz, hogy $N^i(D) = N^{i+1}(D) = N^{i+2}(D) = \dots$, és jelöljük $D' := N^i(D)$, amelyről mivel nem nilpotens, így $D' \neq 0$. D invariáns N-re nézve, így D' is az. Továbbá tetszőleges i-re teljesül, hogy $N^i\varphi = p^i\varphi N^i$, így D' is (φ, N)-modulus, tehát φ és N bijektívak. Mivel D' (φ, N)-modulus, így egy véges dimenziós vektortér, melynek legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázisa, ahol $n = dim_{K_0}(D)$. Ezen bázis mellett legyen M_φ és M_N a két leképezés mátrixa ezen bázisra nézve. Ezen mátrixokra teljesül, hogy invertálhatóak. Továbbá, mivel teljesül az előző al-fejezetbe lévő azonosság N-re és φ-re, így $M_\varphi \cdot M_N = pM_\varphi\sigma(M_N)$. Azonban ez által a következő egyenlet is teljesül, hogy

$$v_p(\det(M_N)) = \dim_{K_0}(D') + v_p(\det(\sigma(M_N))) = \dim_{K_0}(D') + v_p(\det(M_N)),$$

amely meg akkor és, csak akkor teljesül ha $\dim(M_N) = 0$, amely meg az invertálhatóság miatt nem teljesülhet, tehát N nilpotens a K_0 feletti (φ, N)-modulusok kategóriája felett. ☐

3.3.2. Dieudonné-Manin tétele

A Dieudonné-Manin tétel az izokristályok klasszifikációját mutatja meg bizonyos feltételek mellett ez szükséges lesz Fontaine és Colmez tételében lévő ekvivalencia megkonstruálásához.

3.3.2.1. Definíció. Legyen D egy 1 dimenziós φ-modulus K_0 felett, akkor Newton-számot definiáljuk úgy, hogy $v_p(\lambda)$, ahol $\lambda \in K^\times$, amelyre úgy kell gondoljuk, hogy a φ mátrixa egy adott bázis felett. Jelöljük $t_n(D)$-vel.

Ezen definíció azért megfelelő, mivel tegyük fel, hogy D egy 1 dimenziós (φ, N)-modulus, akkor $D = K_0 d$, ahol $\varphi(d) = \lambda d$, ahol $d \neq 0$ egy adott bázis és $\lambda \in K_0$. Továbbá, mivel φ bijekció, így $\lambda \neq 0$. Tegyük fel, hogy választunk egy másik bázist, tehát $d' = cd$, ahol $c \neq 0 \in K_0$, akkor $\varphi(d') = \lambda' d'$, azonban adódik, hogy

$$\varphi(d') = \sigma(c)\lambda d = \frac{\sigma(c)}{c}\lambda d',$$

tehát $\lambda' = \lambda\frac{\sigma(c)}{c}$. Mivel σ egy automorfizmus, így $v_p(\lambda) = v_p(\lambda')$, tehát független a bázis választásától.

3.3.2.2. Definíció. Ha D egy r dimenziós φ-modulus K_0 felett, akkor Newton-számát D-nek úgy definiáljuk, hogy

$$t_n(D) := t_N\left(\bigwedge_{K_0}^{r} D\right).$$

3.3.2.3. Állítás. *A következő azonosság teljesül: $t_N(D) = v_p(det(A))$, ahol A a D-n értelmezett φ leképezés egy bázisához tartozó mátrix.*

Bizonyítás. Legyen $\{e_1, \dots, e_d\}$ egy bázisa D-nek K_0 felett, és legyen e_i-knek a φ általi képe $\sum_{j=0}^{d} a_{i,j}e_j$. Ez által adatik φ-nek egy mátrixa az $a_{i,j}$-kből ezen bázishoz. Azonban ha vesszük egy másik bázisát, akkor legyen az ahhoz tartozó mátrix A' és B a két bázis közötti transformációs mátrix. Továbbá lineáris algebrából tudjuk, hogy ezen transformációs mátrix segítségével a következő kapcsolat teljesül a két mátrix között: $A = \sigma(P)A'P^{-1}$. Így a Newton-szám $1-$ és több dimenziós definíciói által adódik az állítás. ☐

3.3.2.4. Állítás. *A következő három állítás teljesül:*

1. *Ha* $0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$ *egy rövid egzakt sorozata* φ*-modulusoknak, akkor*

$$t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'').$$

2. $t_N(D_1 \otimes_{K_0} D_2) = \dim_{K_0}(D_2) \cdot t_N(D_1) + \dim_{K_0}(D_1) \cdot t_N(D_2).$

3. $t_N(D^*) = -t_N(D).$

Bizonyítás. Legyen D egy bázisa $\{e_1, \ldots, e_d\}$ és D' φ-modulusnak meg ezen bázis első n eleme, ahol $n \leqslant d$. Így D'' bázisa megadható, mint azon elemek halmaza, melyek felemeltjei $e_{n+1}, \ldots, e_d$ báziselemek. Ez által φ-nek D'-ben és D''-ben is van egy mátrixa ezen bázisban, ezek legyenek M' és M''. Így D-beli mátrixa megadható, mint

$$M = \begin{pmatrix} M' & * \\ 0 & M''. \end{pmatrix}$$

Ha használjuk az előző állítást plusz a determináns tulajdonságait adódik, hogy

$$t_N(D) = v_p(\det(M)) = v_p(\det(M') \cdot \det(M'')) = t_N(D') + t_N(D'').$$

Ez által adódik az első állítás.

Vegyük D_1-nek és D_2-nek egy-egy bázisát, ezek legyenek $\{e_1, \ldots, e_{d_1}\}$ és $\{f_1, \ldots, f_{d_2}\}$, ahol $d_1 = \dim_{K_0}(D_1)$ és $d_2 = \dim_{K_0}(D_2)$. Továbbá φ D_1-beli ezen bázishoz tartozó mátrixa legyen M_1 és φ-nek D_2 ezen bázisához tartozó mátrixa legyen M_2. Így ha vesszük ezen két φ-modulus tenzorát, akkor $\{e_i \otimes f_j\}_{\{i,j \in \{1,\ldots,d_1\} \otimes \{1,\ldots,d_2\}\}}$ egy bázisa lesz $D_1 \otimes D_2$-nek. Lineáris algebrából tudjuk, hogy φ leképezés mátrixa és determinánsa $D_1 \otimes D_2$-n a következő lesz: $M_1 \otimes M_2$, ahol $\otimes$ a Kroneker-szorzat, és $\det(M_1 \otimes M_2) = det(M_1)^{\dim_{K_0}(D_1)} \cdot \det(M_2)^{\dim_{K_0}(D_2)}$, így az előző állítás miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t_n(D_1 \otimes D_2) &= v_p(\det(M_1 \otimes M_2)) = v_p\left(\det(M_1)^{\dim_{K_0}(D_1)} \cdot \det(M_2)^{\dim_{K_0}(D_2)}\right) = \\ &= \dim_{K_0}(D_1) v_p(\det(M_1)) + \dim_{K_0}(D_2) v_p(\det(M_2)) = \dim_{K_0}(D_1) t_N(D_1) + \dim_{K_0}(D_2) t_N(D_2). \end{aligned}$$

Így ebből adódik a második állítás.

A harmadik állítás meg következik abból, hogyha M a φ-nek egy D-beli bázisban a mátrixa, akkor D^*-beli ezen bázishoz tartozó mátrixa φ-nek $\sigma(M^{-1})$ lesz, melynek determinánsa M -1-szerese. □

3.3.2.5. Definíció. Legyen D egy φ-modulus K_0 felett, akkor a meredekségét definiáljuk úgy, hogy

$$\mu(D) = \frac{t_N(D)}{\dim_{K_0}(D)}.$$

Továbbá D-t tiszta φ-modulusnak nevezzük $\mu(D)$ meredekséggel, hogyha legyen azon M W-rácsa D-nek, ahol W-n $W(\mathfrak{R})$-t értünk, melyre $\mu(D) = \frac{d}{h}$ esetén teljesül, hogy $p^{-d}\varphi^h(M) = M$, ahol $h \geqslant 1$ és $h, d \in \mathbb{Z}$.

3.3.2.6. Állítás. *Legyen D egy φ-modulus és legyen $h, d \in \mathbb{Z}$, $h \geqslant 1$, akkor $\varphi_{h,d} = p^{-d}\varphi^h$ (ezen leképezésről látszik, hogy bijektív D-n), akkor a következő három állítás teljesül:*

1. *D^μ független (h, d)-tól és M-től.*

2. *$x \in D^\mu$ akkor, és csak akkor teljesül ha $W[x, \varphi_{h,d}(x), \ldots, \varphi^i_{h,d}, \ldots]$ egy véges W-modulus. D^μ részmodulusa D-nek.*

3. *$\{D^\mu\}_{\mu \in \mathbb{Q}}$ sorozat monoton csökkenő filtrációja D-nek, amely szeparábilis és kimerítő, tehát*

   (a) ha $\mu \leqslant \mu'$, akkor $D^\mu \supset D^{\mu'}$,

   (b) $D^\mu = D$ ha $\mu \ll 0$ és $D^\mu = 0$ ha $\mu \gg 0$.

Bizonyítás. Legyen M egy W-modulusa D-nek, ahol W-n $W(\mathfrak{R})$-t értünk, akkor $M_{h,d}$-t definiáljuk úgy, hogy

$$M_{h,d} = \bigcap_{n \geqslant 0} \varphi_{h,d}^{-n}(M)$$

és így D^μ megadható, mint $M_{h,d}\left[\frac{1}{p}\right]$. Továbbá a definícióból adódik, hogy $M_{h,d}$ stabil $\varphi_{h,d}$-ra nézve.

Legyen $M' = T(M)$, ahol M' egy olyan rácsa D-nek, melyen egy $T \in \mathrm{GL}(D)$-vel hat. Legyen továbbá k azon hatványkitevő, melyre $T(M) \supset p^k M$. Legyen $x \in M_{h,d}\left[\frac{1}{p}\right]$, ekkor létezik olyan $l \in \mathbb{N}$, hogy $p^l x \in M_{h,d}$. Így $\varphi_{h,d}^n(p^l x) \in M$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Így $\varphi_{h,d}^n(p^{l+k}x) \in M'$ is teljesül, tehát $p^{l+k}x \in M'_{h,d}$, amelyből következik, hogy $x \in M'_{h,d}\left[\frac{1}{p}\right]$. Ez által teljesül az M-től való függetlenség. Tegyük fel, hogy veszünk egy másik (h', d') párt, amely a (h,d)-nek $s \in \mathbb{Z}$-szerese, és így legyen $M' = \bigcap_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \varphi_{h,d}^i(M)$. Ekkor M' egy olyan rácsa D-nek, melyre teljesül, hogy $M'_{sh,sd} = M_{h,d}$, így

$$M_{sh,sd}\left[\frac{1}{p}\right] = M'_{sh,sd}\left[\frac{1}{p}\right] = M_{h,d}\left[\frac{1}{p}\right].$$

Ebből adódik a (h,d) párra való függetlensége is.

Legyen $d < d'$, akkor $M_{h,d} \supset M_{h,d'}$ következik definíció szerint, amely pont a szeparáltságra ad egy bizonyítást. Legyen M egy rács D-ben, akkor létezik olyan $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, hogy $p^{l_1}M \subset \varphi(M) \subset p^{l_2}M$, ha $l > l_1$, akkor $M_{1,l} = 0$, és ha $l < l_2$, akkor $M_{1,l} = M$, tehát ebből adódik, hogy teljeskörű.

Legyen $\mu = \frac{d}{h}$ és M egy rács D-ben, akkor $x \in D^\mu$, azt jelenti, hogy létezik egy $l \in \mathbb{N}$, hogy $p^l x \in M_{h,d}$, ami megegyezik azzal, ha azt mondom, hogy $\varphi_{h,d}^n(p^l x) \in M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ez által adódik, hogy

$$W_{\mathcal{O}_E}[x, \varphi_{h,d}(x), \varphi_{h,d}^2(x), \dots] \supset p^{-l}M,$$

tehát véges W-modulus. Ha $W_{\mathcal{O}_E}[x, \varphi_{h,d}(x), \varphi_{h,d}^2(x), \dots]$ véges W-modulus, akkor létezik egy olyan

$$M \supset W_{\mathcal{O}_E}[x, \varphi_{h,d}(x), \varphi_{h,d}^2(x), \dots]$$

W-rácsa D-nek, hogy $x \in M_{h,d} \subset D^\mu$. Így következik a második állítás is. □

3.3.2.7. Állítás. *Legyen $0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0$ egy rövid egzakt sorozata φ-modulusoknak, akkor a következő két állítás teljesül:*

1. $0 \longrightarrow D_1^\mu \longrightarrow D^\mu \longrightarrow D_2^\mu \longrightarrow 0$ *egy rövid egzakt sorozat.*
2. *Ha $D_1 = D_0^\mu$ valamely $\mu_0 \in \mathbb{Z}$-re, akkor* $0 \longrightarrow D_1^\mu \longrightarrow D^\mu \longrightarrow D_2^\mu \longrightarrow 0$ *egy rövid egzakt sorozat.*

Bizonyítás. Az első állítás következik az előző állítás második részéből. Három esetre kell bontani a második állítást, ahol a három eset a $\mu < \mu_0$, $\mu = \mu_0$ és $\mu > \mu_0$. Ebből két eset mondhatni megegyezik, mivel $\mu > \mu_0$ eset következik az egyenlőségből, az előző állítás harmadik része miatt.

Először lássuk be a $\mu_0 > \mu$ esetet. Ha $D^\mu = D$ teljesül, akkor az állítás első része miatt igaz, hogy $D/D^{\mu_0} \supseteq (D/D^{\mu_0})^\mu \supseteq D^\mu/(D^{\mu_0})^\mu = D/D^{\mu_0}$, amiből következik, hogy végig egyenlőség van. Ha nem egyenlő, akkor vegyük fel a következő egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow D^\mu/D^{\mu_0} \longrightarrow D/D^{\mu_0} \longrightarrow D/D^\mu \longrightarrow 0,$$

ha erre alkalmazzuk a $(\cdot)^\mu$ leképezést, tehát vesszük az egzakt sorozatbeli φ-modulusoknak a μ-jét, akkor $(D^\mu/D^{\mu_0})^\mu = (D/D^{\mu_0})^\mu = D^\mu/D^{\mu_0}$, mivel $(D/D^\mu)^\mu = 0$. Így ebből következik a $\mu < \mu_0$ eset.

Lássuk be $\mu = \mu_0$ esetet, mivel abból következik a harmadik eset is. Ez meg továbbá ekvivalens azzal, hogy $(D/D^{\mu_0})^{\mu_0} = 0$. Legyen $\mu = \frac{d_0}{h}$ és $\lambda = \frac{d}{h}$, akkor $D = D^\lambda$.

Ehhez először azt fogjuk belátni, hogy létezik olyan W-modulus D-ben, ahol W-n $W(\mathfrak{R})$-t értünk, mely stabil $\varphi_{h,d}$ leképezésre nézve és $M \cap D^{\mu_0}$ stabil φ_{h,d_0}-ra nézve. Ezt tovább egyszerűsítjük arra, hogy találjunk egy olyan W-rácsot D-ben, mely stabil $\varphi_{h,d}$ leképezésre nézve és a képe D/D^{μ_0}-ban is egy W-rács.

Legyen $\overline{L}$ egy W-rács D/D^{μ_0}-ban, melyet $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_j}$ generál, és így L egy olyan D-beli W-rács, melyet $\overline{e_i}$-k ősképei generálnak.

Legyen L_0 egy olyan D^{μ_0}-beli W-rács, mely stabil φ_{h,d_0}-ra nézve, akkor létezik egy olyan N, melyre $L \cap D^{\mu_0} \subseteq p^{-N}L_0$. Legyen $e_{j+1}, \ldots, e_n$ $p^{-N}L_0$-nek egy bázisa. Így L megfelelő ilyen W-rács lesz. Továbbá ha vesszük azt az M W-modulust, melyet az $e_1, e_2, \ldots, e_n$-ek generálnak, akkor a kívántaknak megfelelőt kapunk.

Így már képesek leszünk belátni, hogy $(D/D^{\mu_0})^{\mu_0} = 0$. Tegyük fel indirekten, hogy ez nem teljesül, akkor létezik egy olyan $x \in D$, mely nem eleme D^{μ_0}-nak, és $\varphi^n_{h,d}(x) \in M + D^{\mu_0}$ tetszőleges n esetén. Így $\varphi^n_{h,d_0}(x)$ felírható egy $x_n \in M$, $y_n \in M \cap D^{\mu_0}$ segítségével, mint $x_n + p^{-k_n}y_n$, ahol $k_n \in \mathbb{Z}$ azon legkisebb egész, melyre teljesül ezen felírás. Így $\varphi^n_{h,d_0}(x)$-re teljesül, hogy eleme $p^{-k_n}M$-nek.

Minden n-re ezen felírásból ha vesszük a k_n-ek sorozatát észrevehetjük, hogy ez egy csökkenő sorozat, így ha N-et k_0 és $d - d_0$ maximumának választjuk meg, akkor $p^N x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}_{h,d_0}(M)$, amelyből továbbá következik az, hogy $p^N x \in D^{\mu_0}$ és x is eleme D^{μ_0}-nak, amely meg ellentmondás, így következik a maradék két eset is. □

3.3.2.8. Állítás. *A következő állítások teljesülnek:*

1. *Tetszőleges $\mu \in \mathbb{Z}$-re létezik egy olyan $\mu' < \mu$, melyre $D^{\mu'} = D^{\mu}$. Amelyet másképpen kifejezve azt jelenti, hogy balról folytonos a $\{D^{\mu}\}_{\mu\in\mathbb{Z}}$ filtrálás, tehát $D^{<\mu} = D^{\mu}$.*

2. *Ha $\mu = \frac{d}{h}$, $\dim_{K_0}(D^{\mu}) = l$, és ha $D^{<\mu} = D^{\mu}$, akkor $D^{\mu'} = D^{\mu}$, ahol*

$$\mu' = \frac{l \cdot d + 1}{lh}.$$

Bizonyítás. Az előző állítás első része miatt D helyett elég csak D/D^{μ}-t vizsgálni, így feltehető, hogy $D^{\mu} = 0$.

Legyen $\mu = \frac{d}{h}$. Vagyünk egy M rácsot D-n, akkor erre teljesülni fog, hogy $\bigcap_{i=0}^{\infty} \varphi^{-i}_{d,h}(M) = 0$. Így létezik egy olyan k index, hogy $\bigcap_{i=0}^{k} \varphi^{-i}_{d,h}(M) \subseteq p^2 M$. Ekkor tetszőleges N indexre továbbá teljesül, hogy $\bigcap_{i=0}^{N} k\varphi^{-i}_{d,h}(M) \subseteq p^{2N}M$. Vegyünk egy L rácsot $\cap_{i=0}^{k}\varphi^{-i}_{d,h}(M)$-ben, akkor igaz lesz, hogy $\varphi^{-j}_{kh,kd}(L) = \bigcap_{i=kj}^{k(j+1)} \varphi^{-i}_{d,h}(M)$.

Így továbbá teljesül az, hogy

$$\bigcap_{i=0}^{j} \varphi^{-i}_{kh,kd}(L) = \bigcap_{i=0}^{k(j+1)} \varphi^{-i}_{d,h}(M) \subseteq p^{2(j+1)}M,$$

ekkor az is igaz lesz, hogy

$$\bigcap_{i=0}^{j} \varphi^{-i}_{kh,kd-1}(L) = \bigcap_{i=0}^{j} p^{-i}\varphi^{-i}_{kh,kd}(L) \subseteq \bigcap_{i=0}^{j} p^{-j}\varphi^{-i}_{kh,kd}(L) \subseteq p^{j}M.$$

Ebből ez által adódik, hogy $D^{\frac{kd-1}{kh}} = 0$, mivel $\bigcap_{i=0}^{j} \varphi^{-i}_{kh,kd-1}(L) = 0$. A $\frac{kd-1}{kh}$ megfelelő μ' lesz.

A második részhez tudjuk használni az előző állítás második részét, amely által D helyett használhatunk $D \cap D^{\mu}$-t, tehát feltehető $D = D^{\mu}$. A tény által, hogy $D^{>\mu} = D$ következik, hogy létezik egy olyan α, hogy $D^{\frac{\alpha d+1}{\alpha h}} = D$, ha $\mu = \frac{d}{h}$.

Így van olyan M D-beli rács, mely stabil $\varphi_{\alpha h,\alpha d+1}$-re. Erre a rácsra továbbá teljesül, hogy $\varphi^n_{\alpha h,\alpha d}(M)$ tart a nullába ha n tart a végtelenbe. Ez által tudunk olyan rácsot is találni, mely $\varphi_{h,d}$ esetén is teljesíti ezeket. Ezen rács legyen L, akkor L-re teljesülni fog, hogy elég nagy n esetén $\varphi^n_{h,d}(L) \subseteq pL$.

Egy ilyen rácsra teljesülni fog, hogy $\varphi^i_{h,d}(L) \supseteq \varphi^{i+1}_{h,d}(L)$, tehát a következő sorozat írható fel:

$$\frac{L}{pL} \supset \frac{L}{\varphi_{h,d}(L) \cap pL} \supset \frac{\varphi_{h,d}(L)}{\varphi^2_{h,d}(L) \cap pL} \supset \cdots \supset \frac{\varphi^{i-1}_{h,d}(L)}{\varphi^i_{h,d}(L) \cap pL} \supset \ldots.$$

Ha létezik egy olyan i index, melyre a két egymás melletti elem dimenziója megegyezik, akkor tetszőleges i-nél nagyobb j indexre is teljesül a dimenzióbeli azonosság. Így $\dim_k\left(\frac{\varphi^j_{h,d}(L)}{\varphi^j_{h,d}(L)\cap pL}\right) = 0$ ha j elég nagy. Ebből következik a második állítás, mivel azt tudjuk, hogyha $\dim_k\left(\frac{L}{pL}\right) = l$, akkor $\varphi^l_{h,d}(L) \subset pL$, és így L stabil $\varphi_{lh,ld+1}$-re, tehát

$$D^{\frac{ld+1}{lh}} = D.$$

□

3.3.2.9. Következmény. *Legyen $\lambda := \sup\{\mu \in \mathbb{Q} \ : \ D^\mu = D\}$, akkor λ racionális szám és $D^\lambda = D$.*

Bizonyítás. Legyen D dimenziója n. Ha λ irracionális, akkor Dirichlet approximációs tétele miatt létezik olyan racionális szám, melyre a következő teljesül:

$$\frac{p}{q} < \lambda < \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2},$$

ahol $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$. Ha q-t úgy válasszuk meg, hogy legyen nagyobb, mint a dimenzió, akkor (p, q) párra teljesül az előző lemma miatt, hogy

$$D^{\frac{p}{q}+\frac{1}{\lambda q}} = D^{\frac{p}{q}} = D,$$

azonban ez ellentmondás, így λ racionális. A másik része az állításnak is következik az előző állításból. □

3.3.2.10. Állítás. *Legyen $gr_\mu D = D^\mu/D^{<\mu}$, akkor $gr_\mu D$ tiszta és a meredeksége μ lesz.*

Bizonyítás. A 3.3.2.7. állítás miatt D helyett elég csak $D^\mu/D^{>\mu}$-t vizsgálni. Az állítást indirekten fogjuk bizonyítani, tehát tegyük fel, hogy $D = D^\mu$ és $D^{>\mu} = 0$.

Legyen $\mu = \frac{d}{h}$, akkor létezik egy M W-rácsa D-nek, ahol W-n $W(\mathfrak{R})$-t értünk, mely stabil $\varphi_{h,d}$-re, akkor mivel D véges dimenziós és $\dim_k(D) = \dim_{K_0}(M/pM)$, így a következő sorozat stabilizálódik:

$$\frac{M}{pM} \supseteq \frac{\varphi_{h,d}(M)}{\varphi_{h,d}(M)\cap pM} \supseteq \cdots \supseteq \frac{\varphi^{n-1}_{h,d}(M)}{\varphi^{n-1}_{h,d}(M)\cap pM} \supseteq \frac{\varphi^n_{h,d}(M)}{\varphi^n_{h,d}(M)\cap pM} \supseteq \cdots.$$

Tegyük fel, hogy N azon index, melyre ezen sorozat stabilizálódik, és tegyük fel továbbá, hogy az N. tag nulla lesz már. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy $\varphi^n_{Nh,Nd}(M) \subseteq p^n M$, ebből következik, hogy $M \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} \varphi^{-n}_{Nh,Nd+1}(M)$. Azonban ez nem lehet, mivel $D^{>\mu} = 0$, így elég nagy N'-re megadható az N'.-tagból önmagába képező bijekció. Azonban (Nh, Nd) pár lecserélhető (h, d) párra, így

$$\varphi^n_{h,d} : \frac{\varphi_{h,d}(M)}{\varphi_{h,d}(M)\cap pM} \longrightarrow \frac{\varphi_{h,d}(M)}{\varphi_{h,d}(M)\cap pM}$$

minden n-re.

Definiáljuk egy sorozatot úgy, hogy a sorozat elemeire teljesüljön, hogy $x_n - x_{n-1} \in p^{n-1}M$ ha $n \geqslant 1$ és $\varphi^i_{h,d}(x_n) \in p^i M$ minden $1 \leqslant i \leqslant n$. Tegyük fel, hogy a sorozatot n-ig definiáltuk és $\varphi^n_{h,d}(x_n) = p^n z_n$, akkor $(n+1)$. tag legyen $x_{n+1} = x_n + p^n y$. Ha $y \in M$, akkor tényleg teljesülnek rá a feltételek, így csak elég egy olyan y-t megadni, ami M-beli és teljesíti továbbá, hogy $\varphi_{h,d}(z_n) + \varphi^{n+1}_{h,d}(y) \in pM$. Azonban ez a $\varphi^n_{h,d}$ bijekció miatt lehetséges.

Ha vesszük ezen sorozat határértékét, akkor az egy nem nulla M-beli elem lesz, amely minden n-re teljesíti, hogy $\varphi^n_{h,d}(x) \in p^n M$, tehát $D^{>\mu}$-beli, ami meg ellentmondás, mivel feltettük, hogy $D^{>\mu} = 0$. Így D tényleg tiszta és a meredeksége μ lesz. □

3.3.2.11. Állítás. *Legyen D egy φ-modulus, akkor a következőképpen megadható rajta egy filtráció:*

$$0 \subseteq D^{\mu_1} = gr_{\mu_1} D \subseteq D^{\mu_2} \subseteq \cdots \subseteq D^{\mu_r} = D,$$

ahol $r \in \mathbb{N}$. Ezen filtrációt nevezzük a D Harder-Narasimhan filtrációjának. Ezen filtráció egyértelmű is.

Bizonyítás. Ezen állítás teljesül az előző következmény és a 3.3.2.7. állítás segítségével. ☐

3.3.2.12. Állítás. $0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0$ *egy rövid egzakt sorozata* φ*-modulusoknak, akkor minden* $\mu \in \mathbb{Q}$*-ra* $0 \longrightarrow D_1^{\mu} \longrightarrow D^{\mu} \longrightarrow D_2^{\mu} \longrightarrow 0$ *is egy rövid egzakt sorozat lesz.*

Bizonyítás. Ezen állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $dim_{K_0}(D) = 1$, akkor D^{μ} definíciója miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy a dimenzió legalább 2 és D_1 részobjektuma D-nek. Ha D' a D Hardar-Narasimhan filtrációjának utolsó előtti tagja és $D'' = D/D'$, akkor tetszőleges $\mu \in \mathbb{Q}$-re

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D' \longrightarrow 0 \text{ sorozat egzakt, és így a } 0 \longrightarrow D'^{\mu} \longrightarrow D^{\mu} \longrightarrow D''^{\mu} \longrightarrow 0 \text{ sorozat is egzakt,}$$

az előző állítás miatt. A következő kommutatív diagramban, így a sorok és az oszlopok is egzaktak, ahol $D_1' = D_1 \cap D'$, $D_2' = D'/D_1'$, $D_1'' = D_1/D_1'$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & D_1' \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & D_2' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_1'' \arrow[r] \arrow[d] & D'' \arrow[r] \arrow[d] & D_2'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Észrevehetjük, hogy a Kígyó lemma teljesülése miatt $D_2'' = D''/D_1'' \cong D_2/D_2'$. Ha alkalmazzuk ezen diagramra a μ-t, akkor az indukció miatt teljesül, hogy a középső soron kívül minden sor és oszlop egzakt. A középső sor is egzakt kell legyen, mivel megint tudjuk használni a Kigyó lemmát. ☐

3.3.2.13. Tétel. *(Dieudonné-Manin) Legyen* D φ*-modulus* K_0 *felett, akkor* D *előáll a következőképpen:*

$$D = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Q}} D_{\mu},$$

ahol D_{μ} *a* D*-nek a* μ *meredekségű tiszta része. Továbbá csak véges sok* $\mu \in \mathbb{Q}$ *esetén lesz* D_{μ} *nem nulla. Ez által* D *Newton-száma megadható a tiszta részek meredekségeinek segítségével:*

$$t_N(D) = \sum_{\mu \in \mathbb{Q}} \dim_{K_0} D_{\mu} \cdot \mu.$$

Bizonyítás. Legyen D egy k feletti φ-modulus és $\{D_i\}_{\{i \in \{0,1,\ldots,r\}\}}$ halmaz D-nek az egyértelmű Harder-Narasimhan filtrációja. Továbbá tegyük fel, hogy $\mu_i = \mu(D_i/D_{i-1.})$. Mivel φ bijektív D-n, így feltehető, hogy φ és σ helyett az inverzüket vesszük. Ez által φ^{-1}-hez is tudjuk a Harder-Narasimhan filtrációt definiálni. Legyen $\{D_i'\}_{\{i \in \{0,1,\ldots,r\}\}}$ a filtráció. D_i'/D_{i_1}'-re teljesül, hogy tiszták lesznek és a meredekségük $\mu_i' = \mu(\varphi^{-1}, D_i'/D_{i-1}')$ lesz, ahol ezen jelölés arra utal, hogy D_i'/D_{i-1}' φ^{-1}-modulus, amely tiszta és μ_i' a meredeksége, és μ_i'-k monoton csökkenőek. Azonban a definíció által φ^{-1}-modulusra gondolhatunk úgy, mint egy φ-modulus, melynek $-\mu$ a meredeksége és tiszta lesz, és $\{D_i'\}_{\{i \in \{0,1,\ldots,s\}\}}$ a filtrációja. Ezen filtrációhoz tartozó $-\mu_i'$ számok sorozata monoton csökkenő, ahol $-\mu_i' = \mu(D_i'/D_{i-1}')$.

Ez által már csak annyit kell bizonyítani, hogy $D = \bigoplus_{i=0}^{s}(D_i/D_{i-1})$. Ezt φ^{-1} szerinti Harder-Narasimhan filtráció hossza szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $s = 1$ esetén ez egyértelmű. Tegyük fel, hogy $(s-1)$-ig teljesül az állítás. Azt tudjuk, hogy minden μ_1-nél nagyobb szám esetén a $D^{\mu} = 0$ és $D^{\mu_1} = D_1$. Így az indukció miatt, és az előző állítás által teljesül a Dieudonné-Manin tétele. Mivel az előzők fordítva is teljesülnek, tehát $D^{\mu} = 0$, ha $\mu > -\mu'_s$ és $D^{-\mu_s} \cong D/D'_{s_1}$, ez által $\mu_1 = -\mu'_s$, tehát D_1 direktösszeadandója D-nek, így eggyel kevesebb tagra már tudjuk alkalmazni az indukciót, tehát beláttuk a Dieudonné-Manin tételt. □

3.3.2.14. Következmény. *Legyen k algebrailag zárt, akkor a következő két állítást tudjuk kimondani.*

1. *Ha D tiszta és a $\mu = \frac{d}{h}$ meredeksége, akkor $D \cong K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} D_{\varphi^h = p^d}$.*
2. *φ-modulusok rövid egzakt sorozata mindig hasad.*

Ezen állítás következik a Dieudonné-Manin tételből.

3.3.3. Megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok

3.3.3.1. Definíció. Legyen $\mathbf{MF}_K(\varphi, N)$ K feletti filtrált (φ, N)-modulusok kategóriája. A $\mathbf{MF}_K(\varphi, N)$ kategória objektumai (D, D_K) párok, ahol $D \in \mathbf{Mod}_{K_0}(\varphi, N)$ és $D_K := K \otimes_{K_0} D \in \mathbf{Fil}_K$. A kategória objektumai közötti morfizmusokat definiáljuk úgy, hogy legyen $D_1, D_2 \in \mathbf{MF}_K(\varphi, N)$, akkor η_K morfizmus legyen egy K-lineáris leképezés $K \otimes_{K_0} D_1$ és $K \otimes_{K_0} D_2$ között, amelyre továbbá teljesül, hogy $\eta_K(\mathrm{Fil}^i(D_{1,K})) \subset \mathrm{Fil}^i(D_{2,K})$ minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén.

A definícióból látszik, hogy ezen kategória is additív lesz és ugyanúgy definiálható két objektum tenzora, és egy objektum duális objektuma is.

3.3.3.2. Definíció. Legyen $\Delta \in \mathrm{Fil}_K$ véges dimenziós filtrált K-vektortér, akkor a Hodge-szám definiálható úgy, hogyha $\dim_K(\Delta) = 1$, akkor $\max\{i \in \mathbb{Z} : \ \mathrm{Fil}^i(\Delta) = \Delta\}$, amelyet jelöljünk $t_H(\Delta)$-val. Ha $\dim_K(\Delta) > 1$, akkor

$$t_H(\Delta) := t_h\left(\bigwedge_K^i \Delta\right),$$

ahol $\bigwedge_K^i(\Delta)$ az i-edik külső algebrája Δ a hozzátartozó filtrációval.

Ha D egy filtrált (φ, N)-modulus K felett, akkor értelmezve van rajta φ leképezés és N operátor is, amelyek csak a filtrációtól függnek.

A Newton-számok definíciójánál előjött egy állítás, amely megkönnyíti ezen érték kiszámítását. Így gondolhatjuk, hogy a Hodge-számok esetén is valami hasonló igaz lesz.

3.3.3.3. Állítás.

$$t_H(\Delta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K(gr^i(\Delta))$$

Bizonyítás. Δ fokszámozott algrebráját feltudjuk írni a filtráció szerint, tehát:

$$\mathrm{gr}(\Delta) = \bigoplus_{t=1}^{s} \mathrm{gr}^{i_t}(\Delta),$$

ahol $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$. Ha vesszük $\mathrm{Fil}^{i_s}(\Delta)$ egy bázisát, majd vesszük az előző bázis kibővítését úgy, hogy az adjon egy bázist $\mathrm{Fil}^{i_{s-1}}(\Delta)$-ben, majd így tovább, akkor végül Δ-nak kapjuk egy bázisa, mivel $\mathrm{Fil}^{i_1}(\Delta) = \Delta$. Legyen ezen bázis $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$. Legyen továbbá $\delta_j \in \mathbb{Z}$ olyan egészek, melyekre teljesül $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén, hogy $e_j \in \left(\mathrm{Fil}^{\delta_j}(\Delta) - \mathrm{Fil}^{\delta_j+1}(\Delta)\right)$, így az i-edik filtráltja Δ-nak $\bigoplus_{\delta_j \geqslant i} K \cdot e_j$ alakban írható. Amelyből következik, hogy

$$t_H(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j = \sum_{t=1}^{s} i_t \cdot \dim(gr^{i_t}(\Delta)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K(gr^i(\Delta)),$$

mivel ha $i \neq i_t$, ahol $t \in \{1, \ldots, s\}$, akkor $\dim(\mathrm{gr}^i(\Delta)) = 0$. □

3.3.3.4. Állítás. *1. Ha* $0 \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Delta'' \longrightarrow 0$ *rövid egzakt sorozat, ahol* $\Delta, \Delta', \Delta'' \in Fil_K$*, akkor*

$$t_H(\Delta) = t_H(\Delta') + t_H(\Delta'').$$

2. $t_H(\Delta_1 \otimes \Delta_2) = \dim_K(\Delta_1)t_H(\Delta_2) + \dim_K(\Delta_2)t_H(\Delta_1)$.

3. $t_H(\Delta^*) = -t_H(\Delta)$.

Bizonyítás. Az első állítás következik abból, hogyha vesszük ezen Δ-k i-edik fokszámozott algebráját tetszőleges i-re, akkor a felett is egzakt marad a sorozat, így az előző állítás miatt következik ez is.

A második állítás bizonyítása megegyezik a t_N esetén végzett bizonyítással, tehát ha vesszük az objektumok egy-egy bázisát, akkor a tenzorszorzatuk egy bázisa az objektumok báziselemeinek tenzorszorzata lesz, és megint használva az előző állítást adódik ez is.

A harmadik rögtön látszik t_H definíciójából. ☐

3.3.3.5. Definíció. D filtrált (φ, N)-modulust K felett, akkor nevezzük megengedettnek, ha

1. $t_H(D) = t_N(D)$,
2. Ha tetszőleges D' részmodulusára teljesül, hogy D' egy olyan K_0-altér, mely stabil φ-vel és N-nel való hatásra nézve. Továbbá D'-n a D-ből indukált filtrációt értelmezzük és $t_H(D') \leqslant t_H(D)$.

Jelöljük ezen teljes részkategóriáját $\mathbf{MF}_K(\varphi, N)$-nek $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N)$-nel.

3.3.3.6. Állítás. *Ha* $0 \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Delta'' \longrightarrow 0$ *rövid egzakt sorozat , ahol* $\Delta, \Delta', \Delta'' \in \mathbf{Fil}_K$*. Továbbá ha* Δ *megengedettnek, akkor* $t_H(D'') \geqslant t_N(D'')$*.*

Bizonyítás. A Hodge-szám és Newton-szám tulajdonságai miatt $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'')$ és $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$. Mivel D megengedett, így $t_H(D) = t_N(D)$, tehát $t_N(D'') \leqslant t_H(D'')$. ☐

3.3.3.7. Állítás. *A* $\mathbf{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ *kategória kommutatív, tehát ha* D_1 *és* D_2 *két ilyen objektum,* $\eta : D_1 \to D_2$ *közöttük egy morfizmus, akkor*

1. A morfizmus magja egy megengedett, filtrált (φ, N)*-modulus.*

2. A morfizmus komagja is egy megengedett, filtrált (φ, N)*-modulus.*

3. $Im(\eta) \xrightarrow{\sim} CoIm(\eta)$*.*

Bizonyítás. Az első és a második bizonyítása megegyezik, így csak az első látjuk be. Az első belátásához szükséges, hogy belássuk $\mathrm{Ker}(\eta)$ Newton- és Hodge-száma megegyezik. Azt tudjuk, hogy $t_H(\mathrm{Ker}(\eta) \leqslant t_N(\mathrm{Ker}(\eta))$, mivel $\mathrm{Ker}(\eta)$ részobjektuma D_1-nek, és tudjuk azt is, hogy $t_H(\mathrm{Im}(\eta) \leqslant t_N(\mathrm{Im}(\eta))$, mivel $\mathrm{Im}(\eta) \cong \mathrm{CoIm}(\eta)$ részobjektuma D_2-nek. Továbbá a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\eta) \longrightarrow D_1 \longrightarrow \mathrm{Im}(\eta) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat miatt teljesül a másik irányú egyenlőtlenség is, mivel $t_H(D_1) = t_H(\mathrm{Ker}(\eta) + t_H(\mathrm{Im}(\eta)) \leqslant t_N(\mathrm{Ker}(\eta) + t_N(\mathrm{Im}(\eta)) = t_N(D_1)$, azonban D_1 megengedett, így egyenlőség van.

Az η magját, és komagját is tudjuk definiálni, mint K feletti vektortér, így az η is megadható K felett, ezt jelöljük η_K-val.

Tegyük fel a harmadik állításhoz, hogy az $\mathrm{Im}(\eta)$ és $\mathrm{CoIm}(\eta)$ megengedett, akkor mivel $\mathrm{Im}(\eta)$ és $\mathrm{CoIm}(\eta)$ izomorfak, mint (φ, N)-modulusok és η_K felcserélhető a filtrációval, így tényleg izomorf lesz $\mathrm{Im}(\eta)$ és $\mathrm{CoIm}(\eta)$, mint megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok. ☐

3.3.3.8. Definíció. (Newton-poligon) Legyen D egy φ-modulus K_0 felett, akkor a felbontása legyen $D = \bigoplus_{j=1}^{n} D_{\alpha_j}$, ahol egyik D_{α_j} se legyen 0, és továbbá meredeksége legyen α_j, ahol az α-k monoton növekedők. Ez által definiáljuk D-hez tarzozó $P_N(D)$ Newton-poligont úgy, hogy a konvex burka a

$$\begin{gathered}(0,0), (v_1, \alpha_1 \cdot v_1), \ldots, (v_1 + v_2 + \cdots + v_j, \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_j \cdot v_j), \\ \ldots, (v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) \text{ és } (dim_{K_0} D, t_N(D))\end{gathered}$$

pontoknak.

3.3.3.9. Definíció. (Hodge-poligon) Legyen Δ egy filtrált K-vektortér, akkor legyen $\mathrm{gr}(\Delta) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Delta_{\alpha_j}$, ahol mindegyik $\mathrm{gr}^{\alpha_j}(\Delta)$ legyen egy nem nulla K-vektortér, ahol az α-k monoton növekedők, és $\mathrm{gr}^{\alpha_j}(\Delta)$-k h_j dimenziósak. Ez által definiáljuk Δ-hez tarzozó $P_H(\Delta)$ Hodge-poligont úgy, hogy a konvex burka a

$$(0,0), (h_1, \alpha_1 \cdot h_1), \ldots, (h_1 + h_2 + \cdots + h_j, \alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2 + \cdots + \alpha_j \cdot h_j),$$
$$\ldots, (h_1 + h_2 + \cdots + h_n, \alpha_1 \cdot h_1 + \alpha_2 \cdot h_2 + \cdots + \alpha_n \cdot h_n) \text{ és } (\dim_{K_0} D, t_N(D))$$

pontoknak.

3.3.3.10. Állítás. *Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus K felett, melynek K_0 feletti dimenziója véges és φ bijektív D-n. D akkor, és csak akkor megengedett ha a következő két állítás egyszerre teljesül:*

1. *ha tetszőleges $D' \in \mathbf{MF}_K(\varphi, N)$-re teljesül, hogy $t_H(D') \leqslant t_N(D')$,*
2. *Ha D egy filtrált (φ, N)-modulus K felett, akkor D Hodge poligonját definiáljuk úgy, hogy $P_H(D) = P_H(D_K)$, akkor a Hodge-poligon és Newton-poligon végpontja megegyezik.*

Bizonyítás. Ezen állítás csak a D megengedettségének a definíciójának egy másik alakja. $\square$

4. fejezet

Konstrukciók Fontaine és Colmez tételéhez

4.1. (φ, N)-modulusok Tate-csavarása

4.1.0.1. Definíció. Legyen Δ egy filtrált K-vektortér, melyre teljesül, hogy

$$Fil^0(\Delta) = \Delta, \text{ és } Fil^1(\Delta) = 0,$$

akkor ezen vektortér filtrációját triviálisnak mondjuk.

4.1.0.2. Állítás. *Legyen D egy triviálisan filtrált (φ, N)-modulus K felett akkor, és csak akkor megengedett, ha D tiszta és a meredeksége 0, tehát $N = 0$.*

Bizonyítás. Ha a filtrációja triviális egy ilyen modulusnak, akkor ez azt jelenti, hogy a Hodge-poligonja egy egyenes, tehát tetszőleges részmodulusának Hodge-száma 0.

Ha feltesszük, hogy D megengedett, akkor minden részmodulusának a Newton-száma nem negatív, tehát D tiszta és a meredeksége is nem negatív. Azonban D filtrációja triviális, tehát $t_N(D) = 0$, így a meredeksége 0.

Ha feltesszük, hogy D tiszta és a meredeksége 0, akkor tetszőleges részmodulusának is nulla lesz a meredeksége és minden részmodulusa tiszta lesz, tehát minden ilyen részmodulus Newton-száma nulla, tehát D megengedett. □

4.1.0.3. Állítás. 1. *Minden nem-elágazó p-adikus reprezentációja G_K-nak kristályos.*

2. *$\mathbf{D}_{st}$ definiál egy ekvivalenciát G_K p-adikus nem-elágazó reprezentációinak kategóriája és a megengedett, triviálisan filtrált (φ, N)-modulusok kategóriája között.*

Bizonyítás. A 2.2.0.7. tétel megfelelő p-adikus esetre való átültetéséből adódik. □

4.1.0.4. Definíció. Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus, akkor tetszőleges $i \in \mathbb{Z}$-re D-nek az i-edik Tate-csavarását úgy definiáljuk, hogy

1. $D\langle i\rangle = D$, mint egy K_0 vektortér,
2. $\mathrm{Fil}^r(D\langle i\rangle)_K = \mathrm{Fil}^{r+i}(D_K)$ minden $r \in \mathbb{Z}$-re,
3. φ és N hatások a következőképpen definiálhatók $D\langle i\rangle$-n: $N_{|D\langle i\rangle} = N_{|D}, \quad \varphi_{|D\langle i\rangle} = p^{-i}\varphi_{|D}$.

A következő állítást félig-stabil p-adikus reprezentáció típus helyett kimondható de Rham és kristályos tulajdonsággal rendelkező reprezentációra is.

4.1.0.5. Állítás. 1. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak. Ezen reprezentáció félig-stabil akkor, és csak akkor ha minden $i \in \mathbb{Z}$-re az i-edik Tate-csavarása félig-stabil.*

2. *D egy filtrált (φ, N)-modulus. D akkor, és csak akkor megengedett, ha minden $i \in \mathbb{Z}$-re az i-edik Tate-csavarása félig-stabil.*

3. *Minden $i \in \mathbb{Z}$-re a következő leképezés egy izomorfizmus:* $\mathbf{D}_{st}(V(i)) \to \mathbf{D}_{st}(V)\langle i\rangle$.

Bizonyítás. Az első két állítás a Tate csavarás definíciója által látszik. Így elég csak a harmadikat belátni.

Legyen $D = \mathbf{D}_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ és $D' = \mathbf{D}_{st}(V(i)) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(i))^{G_K}$. Ha t a generátora $\mathbb{Z}_p(i)$-nek, akkor $V(i)$ leírható, mint $V(i) = \{v \otimes t^i \mid v \in V\}$. Ez által a következő hozzárendeléssel definiálhatunk egy izomorfizmust:

$$d = \sum b_n \otimes v_n \in D\langle i\rangle \longmapsto \sum b_n t^{-i} \otimes (v_n \otimes t^i) = (t^{-i} \otimes t^i)d \in D',$$

ahol $b_n \in B_{st}, v_n \in V$. □

4.1.0.6. Állítás. 1. *Legyen V egy reprezentációja G_K-nak, mely akkor, és csak akkor de Rham, ha I_K-nak is de Rham reprezentációja, ahol I_K a K inercia csoportja.*

2. *Legyen V egy reprezentációja G_K-nak, mely akkor, és csak akkor félig-stabil, ha I_K-nak is félig-stabil reprezentációja, ahol I_K a K inercia csoportja.*

Bizonyítás. Legyen $P = P_0K = \widehat{K^{ur}}$ algebrai lezártja $\overline{P}$ $\mathbb{C}_K$-n belül, akkor $\overline{P} \subset B_{dR}^+$ és $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$, így $B_{dR}^{I_K} = P$, mivel $B_{dR}(\overline{P}/P) = B_{dR}(\overline{K}/K) = B_{dR}$.

Ha V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor $\mathbf{D}_{dR,P}(V) := (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I_K}$ egy P-vektortér, melynek legfeljebb $dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ a dimenziója. Így V akkor, és csak akkor de Rham reprezentációja I_K-nak ha V dimenziója egyenlő $\mathbf{D}_{dR,P}(V)$ P feletti dimenziójával.

Ha $\mathbf{D}_{dR,P}(V)$-re gondolhatunk úgy, mint G_k egy P szemi-lineáris reprezentációként, ahol $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ és k a maradéktest, és 2.2.0.7. tétel miatt így a $P \otimes_K (\mathbf{D}_{dR,P}(V))^{G_k} \to \mathbf{D}_{dR,P}(V)$ leképezés egy izomorfizmus. Ebből következik is az első állítás, mivel

$$(\mathbf{D}_{dR,P}(V))^{G_k} = \mathbf{D}_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Ezen levezetés a félig-stabil tulajdonságra való átültetése által azonosan bizonyítható. □

4.2. Potenciálisan félig-stabil reprezentációk

Legyen B egy $\mathbb{Q}_p$-algebra, melyen hat a G_K és tegyük fel, hogy K tetszőleges véges bővítése felett B $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-reguláris legyen, itt B helyére bármelyik periódus gyűrű behelyettesíthető.

4.2.0.1. Definíció. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor V potenciálisan B-megengedettnek nevezzük, ha létezik egy olyan véges bővítése K-nak $\overline{K}$-n belül, melyre teljesül, hogy V B-megengedett $G_{K'}$ felett, ahol K' egy véges bővítése K-nak.

Ezt kifejezhetjük úgy is, hogy a következő leképezés egy izomorfizmus:

$$B \otimes_{B^{G_{K'}}} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K'}} \longrightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.$$

Továbbá ezzel ekvivalensen kifejezhető úgy is, hogy $dim_{B^{G_{K'}}}\left((B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K'}}\right) = dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$.

A definícióból továbbá látszik, hogy K-nak egymásba ágyazott véges bővítéseinek sorozatából ha az egyikre teljesül, hogy B-megengedett, akkor az összes többi olyanra is teljesül, amely tartalmazza K-t és ezen bővítést.

4.2.0.2. Állítás. *Legyen $B = \overline{K}, \mathbb{C}_K, B_{HT}, B_{dR}$, akkor a pontenciálisan megengedett és a megengedett megegyezik.*

Bizonyítás. Ha B valamelyik ezek közül, akkor tudjuk, hogy B egy $\overline{K}$-algebra és, hogy $B^{G_{K'}} = K'$, ahol K' egy véges bővítése K-nak.

Vegyünk egy V p-adikus reprezentációt, amely B potenciálisan megengedett, akkor létezik K-nak egy olyan véges bővítés, amelyre teljesül, hogy a felett B-megengedett.

Legyen $J = \mathrm{Gal}(K'/K)$ a Galois-csoport, d a dimenziója V-nek $\mathbb{Q}_p$ felett, és legyen $\Delta = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K'}}$ egy K'-vektortér, melynek d a dimenziója. Mivel K' véges bővítése K-nak, és J szemi-lineárisan hat Δ-n így teljesül, hogy $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \Delta^J$.

Hilbert 90. tétele miatt azonban V egy B-megengedett reprezentáció, mivel Δ triviális reprezentáció. □

4.2.0.3. Definíció. 1. Legyen K-nak egy véges bővítése K', akkor a következő definíciókat alkalmazhatjuk. Egy p-adikus reprezentációját G_K-nak K'-félig-stabilnak nevezzük ha félig-stabil, mint $G_{K'}$-nek egy p-adikus reprezentációja.

2. Egy p-adikus reprezentációja G_K-nak potenciálisan félig-stabil, ha létezik egy olyan véges bővítése K-nak, melyre K'-félig-stabil.

4.2.0.4. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, melyet kifejezhetünk a következő homomorfizmussal: $\rho : G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Tegyük fel, hogy $\rho(I_K)$ véges, akkor a következő két állítás teljesül, hogy*

1. *V potenciálisan kristályos vagy V potenciálisan félig-stabil, tehát a de Rham tulajdonság is igaz lesz.*

2. *A következő három állítás ekvivalens:*

   (a) *V félig-stabil,*

   (b) *V kristályos,*

   (c) *$\rho(I_K)$ triviális, tehát V nem-elágazó.*

Bizonyítás. Az első állítás következik a 4.1.0.6. állítás miatt, mivel feltehető, hogy a maradéktest algebrailag zárt, tehát $K = P$. A második állítást körbe bizonyítom. A (c)-ből következik rögtön a (b) állítás a 4.1.0.3. állítás miatt. A (a)-ból következik a (b), mivel a félig-stabil reprezentációk definíciója által kristályos is azon reprezentáció. Ez által már csak az (a)-ból (c) irány marad.

Legyen H a ρ homomorfizmus magja, akkor H egy normális részcsoportja I_K-nak, így $\overline{K}^H$ véges Galois bővítése K-nak. Vegyük V-nek a $\mathbf{D}_{st}$ általi képét:

$$\mathbf{D}_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \left(\left(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^H\right)^{G_K/H} = \left(B_{st}^H \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K/H} = (K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K/H} = K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{G_K/H},$$

tehát ha V félig-stabil, akkor az ekvivalens azzal, hogy $\dim\left(V^{G_K/H}\right) = \dim(V)$, amely továbbá ekvivalens azzal, hogy $V = V^{G_K/H}$, amely azt jelenti, hogy ρ hatása I_K-n triviális. Így beláttuk az a)-ból a c)-be esetet is. ☐

4.3. Alacsony dimenziós p-adikus reprezentációk

A következőkben külön klasszifikáljuk az 1 és 2 dimenziós megengedett p-adikus reprezentációkat, és a hozzájuk tartozó 1 és 2 dimenziós (φ, N)-modulusokat is.

Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus, melynek 1 a dimenziója K_0 felett, így $D := K_0 d$ valamely $d \in K$-ra. Ez által a φ leképezés a d elemen $\varphi(d) = \lambda d$ valamely $\lambda \in K_0^\times$-ra, továbbá a monodrómia nulla kell legyen, mivel N nilpotens, mint azt láttuk, tehát $t_N(D) = v_p(\lambda)$.

Ha K felett szeretnénk definiálni egy 1 dimenziós (φ, N)-modulust, akkor ezt megtehetjük úgy, hogy mint az előbb vett D esetén, akkor $D_K := D \otimes_{K_0} K$ egy K feletti 1 dimenziós (φ, N), melyre igaz, hogy létezik egy $i \in \mathbb{Z}$, hogy $\mathrm{Fil}^j(D_K) = D_K$ ha $j \leqslant i$ és különben meg 0, tehát $t_H(D_K) = i$. Ebből következik, hogy D_K akkor, és csak akkor megengedett, ha $v_p(\lambda) = i$. Azonban egy K feletti (φ, N)-modulus megadható a Frobenius leképezés hatása által is. Így a λ-hoz tartozó K feletti (φ, N)-modulus a következő lesz:

$$D_\lambda = \lambda K_0, \quad \varphi = \lambda\sigma, \quad N = 0, \quad \mathrm{Fil}^j(D_\lambda) = \begin{cases} D_\lambda, & \text{ha } j \leqslant v_p(\lambda), \\ 0, & \text{ha } j > v_p(\lambda), \end{cases}$$

ahol σ a Frobenius automorfizmus.

4.3.0.1. Tétel. *Ha D egy megengedett (φ, N)-modulus K felett, melynek dimenziója 1, akkor ennek kinézete D_λ valamely $\lambda \in K_0^\times$. Továbbá a következő két állítás teljesül:*

1. *$D_\lambda \cong D_{\lambda'}$ akkor, és csak akkor ha létezik egy olyan $u \in W^\times$, melyre teljesül, hogy $\lambda' = \lambda\frac{\sigma(u)}{u}$.*

Bizonyítás. Lássuk be először az odairányt. Legyen $D_\lambda := K_0 d$, és $\varphi(d) = \lambda d$, akkor ha $D_\lambda \cong D_{\lambda'}$, így $\lambda' = u\lambda$, ha $u \in K_0^\times$. Ez által akkor $\lambda' = \frac{\sigma(u)}{u}\lambda$.

Azonban ha azt tesszük fel, hogy $\lambda' = \lambda\frac{\sigma(u)}{u}$ valamely $u \in K_0^\times$-ra, akkor $\lambda' = u\lambda$-ból következik, hogy $D_\lambda \cong D_{\lambda'}$ izomorf. ☐

4.3.0.2. Definíció. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, melynek dimenziója 1, akkor V-re gondolhatunk, mint $\mathbb{Q}_p v$. Továbba a V reprezentációra gondolhatunk, mint egy $\eta : G_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ karakter, amely teljesíti, hogy $g(v) = \eta(g)v$, ahol $g \in G_K$ tetszőleges.

η-t B megengedettnek mondjuk, ha V B-megengedett.

4.3.0.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ egy folytonos homomorfizmus, akkor*

1. *η Hodge-Tate akkor, és csak akkor ha $\eta = \eta_0\chi^i$, ahol $i \in \mathbb{Z}$, és η_0 egy folytonos homomorfizmus, melyre $\eta_0(I_K)$ véges,*
2. *η de Rham akkor, és csak akkor ha η Hodge-Tate,*
3. *A következő három állítás ekvivalens:*
   (a) *η félig-stabil,*
   (b) *η kristályos,*
   (c) *létezik olyan $\eta_0 : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ leképezés, amely nem-elágazó, és létezik egy olyan $i \in \mathbb{Z}$, melyre teljesül, hogy $\eta = \eta_0\chi^i$*

Bizonyítás. A harmadik állítás következik a 4.2.0.4. állításból.

A Hodge-Tate tulajdonság következik a de Rham tulajdonságból, így η-ra is teljesülni fog, hogyha η de Rham, akkor Hodge-Tate. A másik irány belátásához vegyük V i. Tate-csavarását. Ha η Hodge-Tate, akkor $V(i)$ $\overline{P}$-megengedett, tehát $V(i)$ de Rham. Így ha vesszük a $(-i)$-vel való csavarását, akkor az is de Rham lesz, tehát $V(-i)(i)$ is de Rham, ami maga a V, tehát η de Rham.

Ha veszünk egy Hodge-Tate reprezentációt, akkor arra teljesülni fog, hogy létezik egy olyan i, melyre $(\mathbb{C}_K(-i)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \neq 0$, tehát Hodge-Tate tulajdonság ekvivalens azzal, hogy létezik egy $i \in \mathbb{Z}$, melyre $V(-i)$ $\mathbb{C}_K$-megengedett. A 3.1.1.31. következmény miatt ez ekvivalens azzal, hogy $\eta\chi^{-i}(I_K)$ véges, ahol χ a körosztási karakter, tehát ebből következik az első állítás. □

4.3.0.4. Tétel. *A $\mathbf{D}_{st}$ funktor egy bijekciót ad a G_K 1 dimenziós kristályos reprezentációi, és a megengedett, filtrált, 1 dimenziós K_0 feletti (φ, N)-modulusok között.*

Ezen tétel igaz, ha a félig-stabil tulajdonságra cserélnénk ki a kristályos tulajdonságot.

Bizonyítás. A 4.1.0.3. állítás és 4.3.0.3. állítás miatt következik a tétel. □

4.3.0.5. Állítás. *Ha $b \in B_{cris}$, mely teljesíti, hogy $\varphi(b) = \lambda b$ valamely $\lambda \in K_0$-ra, melyre igaz, hogy $v_p(\lambda) = r$. Ha ezen b-re teljesül, hogy $Fil^{r+1}(B_{dR})$-nek eleme, akkor $b = 0$.*

Bizonyítás. Legyen D egy 1 dimenziós, filtrált K_0 feletti (φ, N)-modulus, mely generátoreleme legyen e, tehát $D = K_0 e$. Akkor D-re teljesülni fog, hogy $\varphi(e) = \frac{1}{\lambda}e$, $N(e) = 0$ és $i \leqslant -r$, akkor $\mathrm{Fil}^i(D_K) = K$, ha $i > -r$, akkor $\mathrm{Fil}^i(D_K) = 0$. Így $t_N(D) = t_H(D) = -r$, és D megengedett, tehát $-r$. csavarása is az, melynek filtrálása triviális, tehát az előzőek miatt $\mathbf{V}_{st}(D)$ kristályos reprezentáció, mely 1 dimenziós, tehát $\mathbf{V}_{st}(D) = \mathbb{Q}_p(\epsilon \otimes e)$, ahol $\varphi(\epsilon) = \lambda\epsilon$, és $\epsilon \neq 0$. Ez által következik, hogy $\epsilon \in \mathrm{Fil}^r(B_{dR})$, de nem eleme $(r+1)$. filtrációnak. □

Az előző állítással befejeztük az 1 dimenziós B-reprezentációk és a (φ, N)-modulusok klasszifikációját, így térjünk át a 2 dimenziós esetre.

4.3.0.6. Tétel. *A következő hozzárendelés által definiált leképezés egy bijekció $(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}_p - \{0\})\times\mathbb{Q}_p)$-ből a 2 dimenziós, filtrált $\mathbb{Q}_p$ feletti (φ, N)-modulusok azon izmorfizmusainak osztályaiba, melyeknek a monodrómiája nem nulla. A hozzárendelés a következő: $(i, \lambda_1, \alpha) \mapsto D_{\{\lambda_1,\alpha\}}\{i\}$*

Bizonyítás. A két dimenziós megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok a következő alakban állnak elő: $D_{\{\lambda,\alpha\}} = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$, ahol e_1-re, és e_2-re teljesül, hogy $\varphi(e_1) = \lambda e_1$, $N(e_1) = 0$, és $\varphi(e_2) = p\lambda e_2$, $N(e_2) = e_1$. Továbbá a filtrációja a következő lesz:

$$\mathrm{Fil}^i\left(D_{\{\lambda,\alpha\}}\right) = \begin{cases} D_{\{\lambda,\alpha\}}, \text{ ha } i \leqslant 0, \\ \mathbb{Q}_p(e_2 + \alpha e_1), \text{ ha } 1 \leqslant i \leqslant 2v_p(\lambda) + 1, \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$$

Így látszódik, hogy $D_{\{\lambda,\alpha\}}$ akkor, és csak akkor izomorf egy másik $D_{\{\lambda',\alpha'\}}$ ha $\lambda = \lambda'$ és $\alpha = \alpha'$. Ez által a tételben leírt hozzárendelés tényleg bijekciót ad az izomorfizmusok osztályaival. $\square$

4.3.0.7. Tétel. *Legyen D olyan $\mathbb{Q}_p$ feletti (φ, N)-modulus, melyre teljesül, hogy megengedett, filtrált, 2 dimenziós, monodrómiája nulla, $Fil^0(D) = D$ és $Fil^1(D) \notin \{0, D\}$. Ha D nem két egy dimenziós megengedett (φ, N)-modulus direkt összege, akkor $D \cong D_{a,b}$ teljesül egy adott (a, b) párra vagy $D \cong D'_{\lambda_1,\lambda_2}$ egy adott (λ_1, λ_2) párra.*

Bizonyítás. A két dimenziós megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok, melyeknek van nem-triviális részobjektuma, két csoportba oszthatók az alapján, hogy φ-hez tartozó karakterisztikus polinom irreducibilis vagy sem.

Legyen $X^2 + aX + b$ a karakterisztikus polinom, ha irreducibilis, akkor (φ, N)-modulusra a következő fog teljesülni, hogy $D_{\{a,b\}} = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$, ahol e_1-re, és e_2-re igaz, hogy $\varphi(e_1) = e_2$, és $\varphi(e_2) = -be_1 - ae_2$. Továbbá a filtrációja a következő lesz:

$$\mathrm{Fil}^i\left(D_{\{a,b\}}\right) = \begin{cases} D_{\{a,b\}}, \text{ ha } i \leqslant 0, \\ \mathbb{Q}_p e_1, \text{ ha } 1 \leqslant i \leqslant v_p(b), \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$$

Ekkor $D_{\{a,b\}}$ megengedett, irreducibilis, filtrált (φ, N)-modulus.

Ha $X^2 + aX + b$ a karakterisztikus polinom reducibilis, tehát előáll, mint $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, ahol λ_1 a nagyobb értékelésű sajátérték, e_1 és e_2 a két sajátvektor. Így a (φ, N)-modulus a következő lesz, hogy $D_{\{a,b\}} = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$. Továbbá a filtrációja a következő lesz:

$$\mathrm{Fil}^i\left(D_{\{a,b\}}\right) = \begin{cases} D_{\{a,b\}}, \text{ ha } i \leqslant 0, \\ \mathbb{Q}_p(e_1 + e_2), \text{ ha } 1 \leqslant i \leqslant v_p(\lambda_1) + v_p(\lambda_2), \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$$

Látszik, hogy $D_{\{a,b\}}$ megengedett lesz. Azonban akkor, és csak akkor lesz irreducibilis, ha $v_p(\lambda_1) > 0$.

Így az előző tételbeli 2 dimenziós megengedett, filtrált (φ, N)-modulusokra teljesülő izomorfizmus miatt a tételben leírt hozzárendelés tényleg bijekciót ad az izomorfizmusok osztályaival. $\square$

4.4. (φ, N)-modulusok fundamentális komplexusa

Az alfejezetben bevezetjük a fundamentális komplexusa fogalmát, és a legfontosabb állításokat, amelyek a funtamentális komplexushoz tartoznak.

4.4.0.1. Definíció. Legyen D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus, és legyen $\mathbf{V}^0_{st}(D)$ és $\mathbf{V}^1_{st}(D)$ a követekező:

1. $\mathbf{V}^0_{st}(D) := \{b \in B_{st} \otimes_{K_0} D \mid N(b) = 0, \quad \varphi(b) = b\}$,
2. $\mathbf{V}^1_{st}(D) := B_{dR} \otimes_K D_K / \mathrm{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D_K)$.

Ahol $B_{dR} \otimes_K D_K$-en lévő 0. filtrálás a következő:

$$\mathrm{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D_K) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_K \mathrm{Fil}^{-i}(D_K).$$

Mivel $B_{st} \otimes_{K_0} D \subset B_{dR} \otimes_K D_K \twoheadrightarrow \mathbf{V}^1_{st}(D_K)$, így ez indukál egy természetes leképezést $\mathbf{V}^0_{st}(D) \to \mathbf{V}^1_{st}(D)$-be. Akkor a D-hez tartozó következő egzakt sorozatot nevezzük a D fundamentális komplexusának:

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}(D) \longrightarrow \mathbf{V}^0_{st}(D) \longrightarrow \mathbf{V}^1_{st}(D).$$

4.4.0.2. Állítás. *Legyen D, D', D'' filtrált (φ, N)-modulusok K felett, és legyen a következő egy rövid egzakt sorozat:*

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0,$$

akkor a következő két sorozat is egzakt lesz:

1.

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D') \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D) \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D'') \longrightarrow 0,$$

2.

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^1(D') \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^1(D) \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^1(D'') \longrightarrow 0,$$

Bizonyítás. Először lássuk be 0-ás esetet, amihez elég csak belátni, hogy

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}_{cris}^0(D') \longrightarrow \mathbf{V}_{cris}^0(D) \longrightarrow \mathbf{V}_{cris}^0(D'') \longrightarrow 0,$$

sorozat egzakt, mivel adhatunk egy bijekciót $\mathbf{V}_{st}^0(D)$-ból $\mathbf{V}_{cris}^0(D)$-be, ahol a hozzárendelés az lehet, hogy tetszőleges $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_n \mathbf{u}^n \in B_{st} \otimes_{K_0} D$-hez az x_0-t vesszük, amely egy jól-definiált bijekciót ad, ahol $x_n \in B_{cris} \otimes_{K_0} D$ és majdnem mindegyik nulla. Ez által elég csak a φ-izokristály struktúrát vizsgálni. Innentől két részre bontjuk a 0. eset befejezését, az alapján, hogy a maradéktest algebrailag zárt vagy sem.

Ha k algebrailag zárt, akkor a Dieudonné-Manin tétel miatt következik, hogy

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0,$$

ezen egzakt sorozat hasad, így $D \cong D' \oplus D''$, tehát $\mathbf{V}_{cris}^0(D) \cong \mathbf{V}_{cris}^0(D') \oplus \mathbf{V}_{cris}^0(D'')$. Így kristályosra a sorozat egzakt, tehát félig-stabilra is, tehát ebben az esetben teljesül az állítás.

Ha nem algebrailag zárt, akkor írjuk fel $\mathbf{V}_{cris}^0$-t a következőképpen:

$$\{y \in B_{cris} \otimes_{P_0} (P_0 \otimes_{K_0} D) \mid \varphi(y) = y\},$$

ahol $P_0 = \operatorname{Frac}\left(W(\overline{k})\right)$, így $P_0 \otimes_{K_0} D$ φ-izokristály P_0 felett, melynek $\overline{k}$ a maradékteste, tehát algebrailag zárt, amely esetet már az előbb beláttuk, tehát

$$0 \longrightarrow P_0 \otimes_{K_0} D' \longrightarrow P_0 \otimes_{K_0} D \longrightarrow P_0 \otimes_{K_0} D'' \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat hasad, tehát $P_0 \otimes_{K_0} D \cong (P_0 \otimes_{K_0} D') \oplus (P_0 \otimes_{K_0} D'')$, amiből következik, hogy $\mathbf{V}_{cris}^0(D) \cong \mathbf{V}_{cris}^0(D') \oplus \mathbf{V}_{cris}^0(D'')$, így beláttuk az állítás ezen részét.

Ez által már csak az 1-es eset maradt hátra. A

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0,$$

egzakt sorozatból következik, hogy B_{dR}-rel tenzorozva is egzakt marad a sorozat és továbbá teljesül, hogy

$$0 \longrightarrow \operatorname{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_K \operatorname{Fil}^{-i}(D') \longrightarrow \operatorname{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_K \operatorname{Fil}^{-i}(D) \longrightarrow \operatorname{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_K \operatorname{Fil}^{-i}(D'') \longrightarrow 0,$$

egzakt, így a következő kommutatív diagramban az alsó sor kívételével minden oszlop és sor egzakt, azonban ebből következik, hogy az alsó sor is egzakt a Kígyó lemma miatt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Fil^0(B_{dR} \otimes D') & \longrightarrow & Fil^0(B_{dR} \otimes D) & \longrightarrow & Fil^0(B_{dR} \otimes D'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B_{dR} \otimes D' & \longrightarrow & B_{dR} \otimes D & \longrightarrow & B_{dR} \otimes D'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{V}_{st}^1(D') & \longrightarrow & \mathbf{V}_{st}^1(D) & \longrightarrow & \mathbf{V}_{st}^1(D'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Így az 1-es esetet is beláttuk. ☐

4.4.0.3. Állítás. *Legyen V félig-stabil p-adikus reprezentáció és $D = \mathbf{D}_{st}(V)$, akkor a következő sorozat egzakt:*

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}(D) \longrightarrow \mathbf{V}^0_{st}(D) \longrightarrow \mathbf{V}^1_{st}(D) \longrightarrow 0.$$

Bizonyítás. $\mathbf{V}^0_{st}(D)$ definíciója miatt tudjuk, hogy $\mathbf{V}^0_{st}(D) = B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, és ez által $\mathbf{V}^1_{st}(D) = (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Ha használjuk továbbá a p-adikus Hodge elmélet fundamentális sorozatát, és azon sorozatot tenzorozzuk V-vel, ami tartja az egzaktságot, akkor megkapjuk, hogy a keresett sorozat egzakt. ☐

4.4.0.4. Állítás. *Legyen D, D', D'' megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok K felett és legyen a következő sorozat egzakt:*

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0.$$

Ha a következő kettő állítás igaz:

1. $dim_{K_0}(D') = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D'))$,
2. $dim_{K_0}(D'') = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D''))$,

akkor $dim_{K_0}(D) = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D))$ teljesül.

Bizonyítás. A feltételekben lévő egzakt sorozatot használva a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{V}_{st}(D') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}^0_{st}(D') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}^2_{st}(D') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{V}_{st}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}^0_{st}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}^1_{st}(D) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{V}_{st}(D'') \arrow[r] & \mathbf{V}^0_{st}(D'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}^1_{st}(D'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A 4.4.0.2. állítás és a 4.4.0.3. állítás miatt a sorok és oszlopok egzaktok lesznek, így a Kígyó lemma miatt a $\mathbf{V}_{st}(D) \to \mathbf{V}_{st}(D'')$ leképezés szürjektív, tehát $\dim_{K_0}(D) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D))$ teljesül. ☐

4.5. $\mathbb{Q}_{p^r}$ reprezentációk és (φ^r, N)-modulusok

4.5.0.1. Definíció. Legyen K egy tetszőleges test, G_K az abszolút Galois csoportja, akkor $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentációján egy olyan véges dimenziós $\mathbb{Q}_{p^r}$-vektortér, amelyen G_K hatás folytonos és fél-lineáris.

4.5.0.2. Észrevétel. *Legyen $r \in \mathbb{N}$. Egy $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció akkor de Rham, félig-stabil, kristályos, Hodge-Tate ha p-adikus reprezentációként de Rham, félig-stabil, kristályos, Hodge-Tate.*

Bizonyítás. A definíciókból látszódik, hogy ez tényleg teljesül. ☐

4.5.0.3. Definíció. Legyen V egy $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció és $0 \leqslant m < r$, akkor legyen

1. $\mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V) := (B_{st} \ {}_{\sigma^m} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V)^{G_K}$,

2. $\mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V) := (B_{dR} \ {}_{\sigma^m} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V)^{G_K}$.

Legyen továbbá $\mathbf{D}_{st,r} := \mathbf{D}_{st,r}^{(0)}(V)$ és $\mathbf{D}_{dR,r}(V) := \mathbf{D}_{dR,r}^{(0)}(V)$.

Ha V $r \cdot h$ dimenziós p-adikus reprezentáció, akkor V egy h dimenziós $\mathbb{Q}_{p^r}$.

4.5.0.4. Állítás. *Legyen $0 \leqslant m < r$, és ha $\varphi^j : \mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V) \to \mathbf{D}_{st,r}^{(\overline{m+j})}(V)$ leképezés egy bijekció. A de Rham esetben továbbá az is igaz tehát, hogy $1 \otimes \varphi^j : \mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V) \to \mathbf{D}_{dR,r}^{(\overline{m+j})}(V)$ leképezés egy bijekció. Továbbá*

$$dim_{K_0}\left(\mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V)\right) = dim_{K_0}\left(\mathbf{D}_{st,r}(V)\right) \leqslant dim_{\mathbb{Q}_{p^r}}(V),$$
$$dim_{K_0}\left(\mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V)\right) = dim_{K_0}\left(\mathbf{D}_{dR,r}(V)\right) \leqslant dim_{\mathbb{Q}_{p^r}}(V),$$

akkor

1. *V reprezentáció akkor, és csak akkor félig-stabil, ha $dim_{K_0}(\mathbf{D}_{st,r}(V)) = dim_{\mathbb{Q}_{p^r}}(V)$, és minden $m < r$-re teljesül, hogy $\mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V) = K \ {}_{\varphi^m} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st,r}(V)$,*

2. *V reprezentáció akkor, és csak akkor de Rham, ha $dim_{K_0}(\mathbf{D}_{dR,r}(V)) = dim_{\mathbb{Q}_{p^r}}(V)$.*

Bizonyítás. A $\mathbf{D}_{st,r}^{(m)}$ definíciója miatt tudjuk, hogy $\mathbf{D}_{st,r}^{(m)}$ egy K_0 vektortér, amely stabil a φ^r és N leképezésre is. A $\mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}$ definíciója miatt tudjuk, hogy $\mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}$ egy K vektortér, így a következő igaz a félig-stabil, és a de Rham esetre is, hogy

$$\mathbf{D}_{st}(V) = \bigoplus_{m=0}^{r-1} \mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V), \qquad \mathbf{D}_{dR}(V) = \bigoplus_{m=0}^{r-1} \mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V).$$

Így a $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{st}(V) \to \mathbf{D}_{cris}(V)$ injektív leképezés miatt teljesülnek az állítások. □

4.5.0.5. Definíció. Legyen Δ egy (φ^r, N)-modulus K felett, amely egy K_0-vektortér, amelyen van két operátor φ^r és N, amelyekre igaz, hogy N K_0-lineáris, φ^r σ^r-fél-lineáris és bijektív. A következő azonosság is igaz rájuk:

$$N(\varphi^r) = p^r \varphi^r(N).$$

Továbbá van rajta egy filtrált K-vektortér struktúra Δ-n, ahol $m < r$ esetén $\Delta_{K,m} := K \otimes_{K_0} \Delta_m = K \ {}_{\varphi^m} \otimes_{K_0} \Delta$, ahol $\Delta_m := K_0 \ {}_{\varphi^m} \otimes_{K_0} \Delta$.

4.5.0.6. Definíció. Legyen Δ filtrált (φ^r, N)-modulus K felett, akkor a hozzá tartozó filtrált (φ, N)-modulus K felett legyen a következő modulus:

$$D := \mathbb{Q}_p[\varphi] \otimes_{\mathbb{Q}_p[\varphi^r]} \Delta = \sum_{m=0}^{r-1} \Delta_m.$$

Továbbá Δ akkor, és csak akkor megengedett, ha D megengedett.

4.5.0.7. Állítás. *Legyen $\mathbf{MF}_K^{ad}(\varphi^r, N)$ a megengedett, filtrált (φ^r, N) modulusok K feletti kategóriája tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén, és legyen $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^r}}(G_K)$ a G_K abszolút Galois csoportnak a $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentációinak kategóriája, akkor a következő funktor:*

$$\mathbf{D}_{st,r} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^r}}(G_K) \longrightarrow \mathbf{MF}_K^{ad}(\varphi^r, N)$$

egzakt és teljesen hűséges.

Bizonyítás. Az állítás következik a 4.5.0.4. állításból, és $\mathbf{D}_{st}$ funktor egzaktságából és teljes hűségességéből, mivel tetszőleges V félig-stabil $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentációhoz tartozó $\mathbf{D}_{st,r}(V)$ egy filtrált (φ^r, N)-modulus. Ha az előző definíció szerint összegezzük $\mathbf{D}_{st,r}^{(m)}(V)$-ket, akkor egy hozzá tartozó filtrált (φ, N)-modulust kapunk, és mivel $\mathbf{D}_{st}$ egy egzakt hűséges funktor, így $\mathbf{D}_{st,r}$ is az. □

4.5.0.8. Definíció. Legyen Δ egy filtrált (φ^r, N)-modulus, akkor $\mathbf{V}_{st,r}(\Delta)$-t definiáljuk úgy, hogy

$$\mathbf{V}_{st,r}(\Delta) := (B_{st} \otimes \Delta)_{\varphi^r=1, N=0} \bigcap \mathrm{Fil}^0(K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes \Delta)).$$

$\mathbf{V}_{st,r}(\Delta)$ egy $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció, melyen G_K folytonosan hat, mivel G_K csoporthatás felcserélhető N leképezéssel és φ^r leképezéssel.

4.5.0.9. Állítás. *Ha V egy félig-stabil $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció, akkor*

$$\mathbf{V}_{st,r}(\mathbf{D}_{st,r}(V)) = V.$$

Bizonyítás. A félig-stabil reprezentációk és a megengedett, filtrált (φ, N)-modulusoknál definiált $\mathbf{D}_{st}$ és $\mathbf{V}_{st}$ tulajdonságának bizonyításával megegyezően bizonyítható ez is. □

4.5.0.10. Állítás.

1. *Legyen V egy de Rham $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció, és $\Delta_{K,m} = \mathbf{D}_{dR,r}^{(m)}(V)$. Ha $t_{H,m}(V) = t_H(\Delta_{K,m})$, akkor $t_H(V) = \sum_{m=0}^{r-1} t_{H,m}(V)$.*
2. *Legyen V_1 és V_2 de Rham $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentációk, melyek dimenziója h_1 és h_2. Ha $V := V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V_2$, akkor*

$$t_H(V) = t_H(V_1)h_2 + h_1 t_H(V_2).$$

3. *Ha $s = r \cdot k$ és V egy $\mathbb{Q}_{p^r}$-reprezentáció, akkor*

$$t_h(\mathbb{Q}_{p^s} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}} V) = k \cdot t_H(V).$$

Bizonyítás. A 3.2.3.6. állítással megegyezően ezen állítások is kijönnek a tenzorszorzat és a dimenzió közös tulajdonságának segítségével. A $\mathbb{Q}_{p^s}$-sel való tenzorszorzás ennek egy speciális esete, tehát rögtön az előtte lévő egyenletből kijön. □

4.5.0.11. Definíció. Legyen D egy filtrált (φ, N)-modulus K felett, és legyen $r \geqslant 1$ a legnagyobb olyan egész szám, amelyhez létezik egy olyan Δ filtrált (φ^r, N)-modulus K felett, amely D-hez tartozik, tehát $D = \Delta \otimes_{\mathbb{Q}_{p^r}[\varphi^r]} \mathbb{Q}_p[\varphi]$, akkor D-nek a redukált dimenzióján a következőt értjük:

$$\frac{\dim_{K_0} D}{r} = \dim_{K_0} \Delta.$$

4.5.0.12. Állítás. *Legyen $h \geqslant 1$ természetes szám, akkor a következő két állítás ekvivalens:*

1. *Legyen D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus K felett, melynek redukált dimenziója legfeljebb h és $t_H(D) = 0$. Továbbá teljesül rá, hogy $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{V}_{st}(D) = \dim_{K_0}(D)$.*
2. *Legyen D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus K felett, melynek redukált dimenziója legfeljebb h, akkor $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{V}_{st}(D) = \dim_{K_0}(D)$.*

Bizonyítás. A másodikból rögtön következik az első, így csak a másik irányt kell belátni. Legyen D dimenziója $d = rh$, ha már a redukált dimenziója h, így legyen továbbá Δ a hozzátartozó (φ^r, N)-modulus. A 4.4.0.4. állítás miatt feltehető, hogy D irreducibilis, tehát a monodrómiája azonosan nulla.

Ha veszünk egy x elemet D-ben, akkor D-nek $\left\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^{rh-1}(x)\right\}$ egy bázisát adja, és így

$$\left\{x, \varphi^r(x), \varphi^{2r}(x), \ldots, \varphi^{r(h-1)}(x)\right\}$$

egy bázisát adja Δ-nak. Továbbá $D(x)$-et generálja $\varphi^i(x)$ valamely i-re, tehát φ invariáns, így $D(x)$ megengedett. Mivel D előáll, mint ilyen $D(x)$-ek dirketösszege, így D is megengedett, mivel D irreducibilis, tehát egy $D(x)$ direktösszeadandóból áll.

A feladatunk innen az lesz, hogy találjuk egy olyan D-hez kapcsolódó megengedett, filtrált (φ, N)-modulust, melynek Hodge-száma 0, így tudjuk az első esetet alkalmazni rá. Legyen ezen (φ, N)-modulus a következő:

$$D' = D \otimes_{\varphi^r\text{-modulus}} D_{(rh)},$$

ahol $D_{(rh)} := \mathbf{D}_{st}\left(V_{(rh)}^a\right)$, ahol továbbá $a = t_H(D)$. Ez által D'-höz tartozó φ^{rh}-modulus a következő:

$$\Delta' = \Delta \otimes_{\mathbb{Q}_p[\varphi^r]} \Delta_{(rh)},$$

ahol $\Delta_{(rh)} = \mathbf{D}_{st,rh}\left(V_{(rh)}^a\right)$. Ha $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_h\}$ egy bázisa Δ-nak, és λ egy generátor $\Delta_{(rh)}$-nak, akkor $\{\varphi^m(\epsilon_1 \otimes \lambda), \varphi^m(\epsilon_2 \otimes \lambda), \ldots, \varphi^m(\epsilon_h \otimes \lambda)\}$ minden m-re, ahol $m \in \{0, 1, 2, \ldots, rh-1\}$, Δ'_m-nek egy bázisát adják.

A konstrukció miatt látszik, hogy D'-nek a Hodge-száma nulla, így elég csak belátni, hogy megengedett. Legyen $x \neq 0 \in D$-re D_x azon K_0-altere, melyet $\varphi^{rhi}(x)$ generál, ahol $i \in \mathbb{N}$, és így D'-nek legyen D'_x azon K_0-altere, melyet $\varphi^m(\delta \otimes \lambda)$ generál minden $\delta \in D_x$-re. Ezen definíciók által D'_x egy olyan minimális részobjektuma D'-nek, amely tartalmazza $x \otimes \lambda$-t, és tetszőleges D' részobjektumnak direktösszeadandója. A 4.5.0.10 állítás miatt, így D megengedettségéből következik D' megengedettsége, mivel $t_H(D'_x) = t_N(D'_x)$. A $t_N(D'_x)$ és $t_H(D'_x)$ egyenlő $\dim_{K_0}(D_x)t_H(D_{(rh)}) + h \cdot t_H(D_x)$-vel és $\dim_{K_0}(D_x)t_N(D_{(rh)}) + h \cdot t_N(D_x)$-vel. Azonban D megengedettsége miatt $t_N(D_{(rh)}) = t_H(D_{(rh)})$ és $t_N(D_x) = t_H(D_x)$.

Ez által bizonyítottuk, hogy megengedett; és Newton-száma 0 D'-nek, tehát az első állítás miatt $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D')) = \dim_{K_0}(D')$, így $V' = \mathbf{V}_{st}(D')$ egy félig-stabil $\mathbb{Q}_{p^{rh}}$-reprezentáció, tehát $V' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rh}}} V_{rh}^{-a}$ is félig-stabil, amelyhez tartozó (φ^{rh}, N)-modulus a $\Delta' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rh}}} \Delta^*_{(rh)}$. Ha vesszük $\mathbf{D}_{st}\left(\Delta' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rh}}} \Delta^*_{(rh)}\right)$-ot, akkor ennek D direktösszeadandója lesz, és mivel D' megengedett, így $\Delta' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rh}}} \Delta^*_{(rh)}$ is az, tehát $\mathbf{D}_{st}\left(\Delta' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^{rh}}} \Delta^*_{(rh)}\right)$ is az, tehát végül D is megengedett, tehát beláttuk az ekvivalencia másik irányát. $\square$

5. fejezet

Fontaine és Colmez tétele

A diplomamunkámat adó tételhez szükséges definíciók, állítások és tételek kimondásra kerültek. Most már képesek vagyunk kimondani és bizonyítani azon módon, ahogy először Fontaine és Colmez bizonyította az állítást. Ezen tételre a szakirodalomban röviden úgy utalnak, hogy gyengén megengedettségből következik a megengedettség. Ez által manapság már a gyengén megengedettséget csak megengedettségnek nevezik.

5.0.0.1. Tétel. *(Fontaine és Colmez tétele) Legyen D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus K felett, akkor létezik hozzá egy olyan V félig-stabil p-adikus Galois reprezentációja G_K-nak, amelyre teljesül, hogy $\mathbf{D}_{st}(V) \cong D$.*

Azonban ezen tétel csak egy segédletet adott, hogy képesek legyünk belátni, hogy a félig-stabil p-adikus Galois reprezentációk kategóriája és a megengedett, filtrált (φ, N)-modulusok kategóriája között van két funktor, amelyek egymás kvázi-inverzei.

5.0.0.2. Tétel.

1. *Legyen V egy félig-stabil p-adikus Galois reprezentációja G_K, akkor $\mathbf{D}_{st}(V)$ egy filtrált, megengedett (φ, N)-modulus K felett.*
2. *Legyen D egy filtrált, megengedett (φ, N)-modulus K felett, akkor $\mathbf{V}_{st}(D)$ egy félig-stabil p-adikus Galois reprezentációja G_K-nak.*
3. *A következő két funktor egymás kvázi-inverzei:*
   (a) $\mathbf{D}_{st} : \mathbf{Rep}^{st}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \longrightarrow \mathbf{MF}^{ad}_K(\varphi, N)$, *amely egy ekvivalenciát ad meg a két kategória között.*
   (b) $\mathbf{V}_{st} : \mathbf{MF}^{ad}_K(\varphi, N) \longrightarrow \mathbf{Rep}^{st}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$, *amely egy ekvivalenciát ad meg a két kategória között.*

Ha belátjuk Fontaine és Colmez tételt és a következő állítást, akkor abból következik az 5.0.0.2. tételünk.

5.0.0.3. Állítás. *Ha V egy félig-stabil p-adikus Galois reprezentációja G_K-nak, akkor $\mathbf{D}_{st}(V)$ egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus, továbbá V és $\mathbf{V}_{st}(\mathbf{D}_{st}(V))$ között egy természetes izomorfizmus adható meg.*

Bizonyítás. A bizonyítás két részből fog állni először megadjuk a természetes izomorfizmust majd belátjuk, hogy $D := \mathbf{D}_{st}(V)$ megengedett.

Legyen V egy h dimenziós félig-stabil p-adikus reprezentáció és $D = \mathbf{D}_{st}(V)$.

A természetes izomorfizmus konstrukciója:

Az tudjuk, hogy $V \subseteq \mathbf{V}_{st}(D)$. Így elég belátni tetszőleges $x \in \mathbf{V}_{st}(D)$ esetén, hogy $x \in V$. Legyen $x = \sum_{i=1}^{h} b_i \otimes v_i$, ahol $\{v_i\}_{i=0,\dots,h}$ egy bázisa V-nek és $b_i \in B_{st}$ minden i-re. $\mathbf{V}_{st}(D)$ definíciója miatt tudjuk, hogy $N(x) = 0$, tehát $N(b_i) = 0$ minden i-re, tehát $b_i \in B_{cris}$ minden i-re teljesül. Továbbá ha $\varphi(x) = x$ is igaz, akkor következik, hogy minden i-re $\varphi(b_i) = b_i$, tehát b_i-k B_e-nek elemei lesznek. Végül $\mathbf{V}_{st}(D)$ egyik tulajdonsága miatt, ha $x \in \mathrm{Fil}^0((B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \otimes_{B_{st}} B_{dR})$, akkor b_i-k B^+_{dR} elemei lesznek. Így a p-adikus Hodge elmélet fundamentális sorozata miatt $x \in V$ teljesül, mivel b_i-k $\mathbb{Q}_p$ elemei, amelyből kövektezik, hogy a másik irányú tartalmazás, így $V = \mathbf{V}_{st}(D)$.

$\mathbf{D}_{st}$ megengedett:

A megengedettség bizonyításához elég belátni, hogy D tetszőleges részobjektumára teljesül, hogy $t_H(D') \leqslant t_N(D')$, ahol D' egy részobjektuma. Ha D' egy dimenziós (φ, N)-modulus, akkor ez a 4.3.0.5. állítás miatt teljesül a feltétel. Ha D' n dimenziós, akkor fel lehet írni, mint n darab egy dimenziós azonos objektum külsőszorzataként, mivel a külsőszorzásra zárt a félig-stabil tulajdonság, így az egy dimenziós eset miatt teljesül az állítás. □

Így már csak az 5.0.0.1. tételt kell bizonyítani, hogy belássuk a kategóriák közötti ekvivalenciát. Az 5.0.0.1. tétel bizonyítása több lépésből fog állni.

Bizonyítás. (Fontaine és Colmez tételének bizonyítása) A tétel bizonyításához elég lesz belátni, hogy

$$h \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D)),$$

ahol h a D dimenziója, mivel a következő állítás által ezen egyenlőtlenség ekvivalens a következő két állítással:

1. $D \cong \mathbf{D}_{st}(\mathbf{V}_{st}(D))$, ahol $\mathbf{V}_{st}(D))$ félig-stabil p-adikus reprezentáció,

2. $h = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D))$.

5.0.0.4. Állítás. *Legyen D egy megengedett, filtrált h dimenziós (φ, N)-modulus K felett, akkor igaz, hogy*

1. $h \geqslant dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D))$,

2. $\mathbf{V}_{st}(D)$ félig-stabil reprezentáció,

3. $\mathbf{D}_{st}(\mathbf{V}_{st}(D)) \subset D$.

Ezen állítás bizonyításához egy lemmára van szükségünk.

5.0.0.5. Lemma. *Legyen F egy tetszőleges test, és legyen J az F-automorfizmusok csoportjának egy részcsoportja, majd E ezen J részcsoport általi fixteste ($E := F^J$). Legyen Δ egy véges dimenziós E-vektortér, és $\Delta_F := F \otimes_E \Delta$. Vegyük a J-nek a hatását Δ_F-n, amelyet úgy definiálunk, hogy minden $j \in J$-re $j(\lambda \otimes \delta) = j(\lambda) \otimes \delta$ tetszőleges $\lambda \in F$, és $\delta \in \Delta$ esetén.*

Legyen L egy altere Δ_F-nek akkor, és csak akkor létezik egy olyan Δ' altere Δ-nak, melyre teljesül, hogy $L = F \otimes_E \Delta'$ ha minden $g \in J$-re $g(L) = L$, tehát J-vel való hatásra nézve stabil.

Bizonyítás. (5.0.0.5. lemma bizonyítása) Az odairány egyértelmű így elég csak a visszairányt belátni, tehát tegyük fel, hogy L stabil J hatásra nézve, akkor a következő egzakt sorozat írható fel:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \Delta_F \longrightarrow \Delta_F/L \longrightarrow 0.$$

Ha vesszük ezen sorozatbeli elemek J-vel való hatás általi fixtesteit, akkor E-vektorterek egzakt sorozatát kapjuk:

$$0 \longrightarrow L^J \longrightarrow \Delta \longrightarrow (\Delta_F/L)^J.$$

A dimenzió tulajdonságok miatt $\dim_E(L^J) = \dim_F(L)$ teljesül, így ha $\Delta' = L^J$ választás tesszük, akkor a lemmában leírtaknak megfelelő E-vektorteret kapunk, amelyre igaz, hogy $L = F \otimes_E \Delta'$. □

Bizonyítás. (5.0.0.4. állítás bizonyítása) Legyen $V = \mathbf{V}_{st}(D)$, melyről tegyük fel, hogy nem nulla. Vegyük a következő felállást, hogy $\Delta = D$, $F = \mathbb{C}_{K_{st}} = \mathrm{Frac}(B_{st})$, $J = G_K$, $E = \mathbb{C}_{K_{st}}^{G_K} = K_0$ és $\Delta_F = \mathbb{C}_{K_{st}} \otimes_{K_0} D$, akkor legyen L egy olyan altere Δ_F-nek, amelyet V generál. Az előző lemma miatt létezik egy olyan D' K_0-altere D-nek, melyre teljesül, hogy $L = \mathbb{C}_{K_{st}} \otimes_{K_0} D'$, és mivel L stabil a monodrómiára nézve és a φ-re, így D' is stabil lesz.

Legyen $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$ egy bázisa L-nek $\mathbb{C}_{K_{st}}$ felett, és legyen $\{d_1, d_2, \dots, d_h\}$ egy bázisa D'-nek K_0 felett, amely D' definíciója miatt L-nek is bázisa. Továbbá V tetszőleges eleme felírható B_{st}-beli és D-beli elemekkel, így L báziselemei a következő alakban állnak elő: $v_i = \sum_{j=1}^{h} b_{i,j} d_j \in V$, mivel $V \subset B_{st} \otimes_{K_0} D$. Sőt L bázisa kifejezhető lesz egy $M_h(B_{st})$ mátrix által, mely legyen $B = ((b_{i,j}))_{(i,j)\in\{1,\dots,h\}\times\{1,\dots,h\}}$, $b_{i,j} \in B_{st}$. Ezen mátrix determinánsa legyen $b \in B_{st}$.

Vegyük a $d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_h$ elemet, akkor ez bázisa lesz $\bigwedge_{K_0}^h D'$-nek, mivel $B_{st} \otimes_{K_0} \bigwedge_{K_0}^h D' \subset B_{st} \otimes_{K_0} \bigwedge_{K_0}^h D$-nek, és teljesülni fog rá, hogy $v_0 = b d_0$, ahol $v_0 = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_h$, így B determinánsa nem nulla. A φ-vel való hatásra nézve d_0-ra teljesül, hogy $\varphi(d_0) = \lambda d_0$, így Newton-száma $\bigwedge_{K_0}^h D'$-nek $v_p(\lambda)$ lesz, amely pont a bázis elemszáma.

A 4.3.0.5. állítás miatt $\varphi(b) = \lambda^{-1} b$, így $b \in \mathrm{Fil}^{-s}(B_{dR})$, ahol $-s \leqslant -h$, így $d_0 = b^{-1} v_0 \in \mathrm{Fil}^s(B_{dR})$, ha $s \geqslant h$, ez által $\bigwedge_{K_0}^h D'$ megengedett, mivel D' megengedett, így Newton-számára és Hodge-számára teljesül $t_H \leqslant t_N$ irányú egyenlőtlenség, és az előzőek miatt meg igaz a másik irány. Továbbá, mivel egy dimenziós, megengedett, filtrált

(φ, N)-modulus, így tudjuk, hogy $\mathbf{V}_{st}\left(\bigwedge_1^h D'\right)$ kristályos egy dimenziós reprezentáció. Ez által előáll, mint $\mathbb{Q}_p v_0$ valamely $v_0 \in \mathbf{V}_{st}\left(\bigwedge_{K_0}^h D'\right)$-re.

Ha veszünk egy $v = \sum_{i=1}^h c_i v_i \in V$ elemet, ahol $c_i \in \mathbb{C}_{K_{st}}$, akkor

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_h = c_i v_0 \in \bigwedge_{\mathbb{Q}_p}^h V,$$

amelyre továbbá teljesül, hogy $c_i v_0 \in \mathbf{V}_{st}\left(\bigwedge_{K_0}^h D'\right) = \mathbb{Q}_p v_0$, tehát c_i minden i-re eleme $\mathbb{Q}_p$-nek. Ez által V félig-stabil és $\dim_{K_0}(D') \leqslant \dim_{K_0}(D)$, mivel V egy $\mathbb{Q}_p$-vektortér. □

Ezen állítás által elég belátni, hogyha D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus, akkor

$$\dim_{K_0}(D) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D)),$$

Mivel ezen állítás bizonyítása több lépésből áll, így külön állításként is megfogalmazom.

5.0.0.6. Állítás. *Legyen D egy megengedett, filtrált (φ, N)-modulus, akkor $dim_{K_0}(D) = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{V}_{st}(D))$.*

Bizonyítás. (5.0.0.6. állítás bizonyítása) Legyen a D-hez tartozó filtrált K-vektortér $D_K := K \otimes_{K_0} D$, melynek dimenziója d, és Hodge-poligonja a D-vel megegyező.

A bizonyítás Hodge-poligon bonyolultsága szerinti indukcióval fog történni. Ha triviális a Hodge-poligon, akkor a $V := (P_0 \otimes_{K_0} D)_{\varphi=1}$ p-adikus reprezentáció megfelelő lesz, mivel ezen V reprezentáció nem-elágazó, és ha megvizsgáljuk a $\mathbf{D}_{st}$ általi képét, akkor láthatjuk, hogy izomorf lesz D-vel, így V $\mathbb{Q}_p$ feletti dimenziója és D K_0 feletti dimenziója tényleg azonos.

Ez által feltehetjük, hogy a Hodge-poligon nem triviális. Ezen eset belátásához a 4.4.0.4. állítás szükséges, mivel a 4.4.0.4. állítás segítségünkre lesz abban, hogyha veszünk egy tetszőleges nem triviális Hodge-poligonnal rendelkező megengedett, filtrált (φ, N)-modulust, akkor képesek leszünk leredukálni a triviális esetre, és mivel a triviális esetben már láttuk, hogy igaz, így teljesül az állításunk és ezzel Fontaine és Colmez tétele is. A 4.4.0.4. állítás bizonyítását láttuk a fundamentális komplexus bevezetésénél. A 4.5.0.12. állítás által elég belátni arra az esetre, hogyha D egy megengedett, filtrált (φ^r, N)-modulushoz tartozó filtrált (φ, N)-modulus. Sőt mi több feltehető az is, hogy D Hodge-száma nulla.

Legyen Δ azon megengedett, filtrált (φ^r, N)-modulus K_0 felett, melynek dimenziója h. D legyen Δ-hoz tartozó filtrált (φ, N)-modulus, mely Hodge-száma 0. Az állítást dimenzió szerinti indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy minden (r', h') párra teljesül az állítás ha vagy r' tetszőleges és $h' < h$, így azt kell belátni, hogyha Δ dimenziója (r, h), akkor is igaz lesz az állítás.

Vegyük az összes olyan konvex poligont, amely a $(0,0)$-ból $(rh, 0)$-ba megy. A D Hodge-poligonja egy lesz ezek közül. Ha ezen poligon csak egy egyenesből áll, akkor tudjuk, hogy teljesül az állítás, mivel akkor $V := (P_0 \otimes_{K_0} D)_{\varphi=1}$ megfelelő választás volt. Továbbá a poligon komplexitása szerinti indukció miatt feltehetjük, hogy az összes olyan (r, h) párra is teljesül az állítás, ha a Hodge-poligonja szigorúan végig D Hodge-poligonja felett van. A 4.4.0.4. állítás miatt még az is feltehető, hogy D irreducibilis.

Legyen $V_1 = \mathbf{V}_{st}(D')$, $V_2 = \mathbf{V}_{st}(D)$, ahol D' azon (φ^r, N)-modulus, amire még teljesül az állítás, tehát V_1 így félig-stabil lesz, tehát $\mathbf{D}_{st}(V_1) = D'$. Ez által $B_{st} \otimes_{K_0} D = B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$, így $\mathbf{V}_{st}^0(D) = \mathbf{V}_{st}^0(D')$, amelyről meg tudjuk, hogy $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$-gyel egyenlő.

Tegyük fel, hogy $S = B_{dR} \otimes_K D_K = B_{dR} \otimes_K D'_K$, $\Lambda_1 = \mathrm{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D'_K)$ és $\Lambda_2 = \mathrm{Fil}^0(B_{dR} \otimes_K D_K)$, akkor a következő két sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D) \longrightarrow S/V_1$$
$$0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D) \longrightarrow S/V_2.$$

Továbbá az is igaz, hogy az első egy rövid egzakt sorozat lesz, tehát a végén a leképezés szürjektív, mivel V_1 félig-stabil és $\Lambda_1 \cong B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$, így a 4.4.0.3. állítást használva a következő rövid egzakt sorozatot kapjuk:

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \mathbf{V}_{st}^0(D) \longrightarrow S/V_1 = \mathbf{V}_{st}^1(D) \longrightarrow 0.$$

Azt tudjuk, hogy $U(-1) \subset B_e$ és Λ_2 egy olyan B_{dR}^+−részmodulusa $\Lambda_1(-1)$-nek, amelyre $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ és $(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1$ is egyszerű B_{dR}^+−modulus, tehát 3.2.3.15. állítás miatt a következő kommutatív diagram írható fel:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\rho) \arrow[r] \arrow[d, hook] & U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, hook] & \Lambda_1(-1)/\Lambda_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \arrow[r] & S/V_2,
\end{tikzcd}$$

ahol $\mathrm{Ker}(\rho) \subset V_2$, tehát ρ szürjektív. Ez által meg következik a 5.0.0.6. állítás bizonyítása, mivel $\mathrm{Ker}(\rho)$ dimenziója rh, így $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V_2) \geqslant rh$. □

A 5.0.0.6. állítás bizonyításával Fontaine és Colmez tételét is beláttuk és a 5.0.0.3. állítással együtt meg 5.0.0.2. tétel is következik. □

Irodalomjegyzék

[1] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields—the galois action*, Journal of Algebra, 15 (1970), pp. 417–428.

[2] L. Berger, *Equations differentielles p-adiques et (phi,n)-modules filtres*, 2004.

[3] P. Berthelot, L. Illusie, N. Katz, W. Messing, and P. Scholze, *Jean-marc fontaine (1944–2019)*, Notices of the American Mathematical Society, 67 (2020), p. 1.

[4] O. Brinon and B. Conrad, *Cmi summer school notes on p-adic Hodge Theory*, 2009. Elérhető: http://math.stanford.edu/ conrad/papers/notes.pdf.

[5] P. Colmez, *Espaces de banach de dimension finie*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 1 (2002), p. 331–439.

[6] P. Colmez and J. M. Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inventiones mathematicae, 140 (2000), pp. 1–43.

[7] R. Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 31 (1998), pp. 717–763.

[8] L. Fargues and J.-M. Fontaine, *Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2014, p. 17–104.

[9] J.-M. Fontaine, *un résumé de mes travaux (en anglais)*, year unknown. `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/notice18.pdf`.

[10] J.-M. Fontaine and Y. Ouyang, *Theory of p-adic Galois Representations*, 2022. Elérhető: Az Ouyang féle jegyzet:`http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/galoisrep.pdf` , A Fontaine féle jegyzet:`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf`.

[11] A. Genestier and V. Lafforgue, *Structures de Hodge-Pink pour les $\varphi/\mathfrak{S}$-modules de breuil et kisin*, Compositio Mathematica, 148 (2012), pp. 751–789.

[12] M. Greenberg and J. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2013.

[13] K. S. Kedlaya, *A p-adic local monodromy theorem*, Annals of Mathematics, 160 (2001), pp. 93–184.

[14] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[15] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2005.

[16] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1987.

[17] J. Plût, *Analytic p-adic banach spaces and the fundamental lemma of colmez and fontaine*, 2016.

[18] ——, *Slope filtration on banach-colmez spaces*, 2016.

[19] P. Schneider, *Galois Representations and (Phi, Gamma)-Modules*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2017.

[20] E. Witt, *Zyklische körper und algebren der charakteristik p vom grad pn. struktur diskret bewerteter perfekter körper mit vollkommenem restklassenkörper der charakteristik p.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 176 (1937), pp. 126–140.

NYILATKOZAT

Név: Anderlik Csaba

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikus Mesterszak

NEPTUN azonosító: NOK1EJ

Diplomamunka címe:
Fontaine és Colmez tétele

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.05.28.

Anderlik Csaba

a hallgató aláírása