Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szabó Balázs István

Irányított hipergráfok színezése

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Keszegh Balázs

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Keszegh Balázsnak a kiváló témavezetést, a rendszeres konzultációkat, amelyek során szakmai tudásával és észrevételeivel hozzájárult a szakdolgozat elkészüléséhez. Köszönöm a kutatómunka során nyújtott iránymutatást és segítséget az elmúlt két évben, mely kutatás eredményei adják ezen diplomamunka alapját.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A hipergráfok színezése egy érdekes és sokak által tanulmányozott terület. A hipergráfok jó k-színezése esetén a csúcsokat szeretnénk kiszínezni úgy, hogy ne keletkezzen egyszínű hiperél. Hipergráfok esetén már $k=2$ esetén NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e a csúcsoknak olyan k-színezése, amelyre nincs egyszínű hiperél [11]. Tehát érdekes és hasznos lehet olyan feltételek megadása, amelyek egy hipergráf jó 2-színezését garantálják. A hipergráfok színezésén belül egy széles körben kutatott terület a k-uniform hipergráfok színezése. Egy hipergráfot k-uniformnak nevezünk, ha minden hiperéle k méretű. Jelölje $m(k)$ azt a legkisebb egész számot, amelyre létezik k-uniform hipergráf, ami nem jól 2-színezhető. Erdős bebizonyította, hogy $2^{k-1}<m(k)$ és $m(k)<k^2 2^{k+1}$ [7],[8]. Az alsó becslésből azonnal adódik egy elégséges feltétel jó 2-színezhetőségre. Egy hipergráfot k-regulárisnak nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k, azaz minden csúcsot pontosan k hiperél tartalmaz. Henning és Yeo megmutatta, hogy minden $k \geq 4$ esetén minden k-uniform k-reguláris hipergráfnak létezik jó 2-színezése [10]. A $k=3$ esetben nem teljesül az állítás, mivel a Fano-sík által meghatározott 3-uniform 3-reguláris hipergráf, amelyben a hiperélek az egy egyenesen lévő pontoknak felelnek meg nem jól 2-színezhető. Egy hipergráf polikromatikus k-színezésekor azt szeretnénk, hogy minden hiperél mind a k színt tartalmazza. A polikromatikus színezhetőség témakörében sokáig egy nyitott kérdés volt az Erdős-Faber-Lovász sejtés, miszerint minden k-uniform lineáris hipergráf polikromatikusan k-színezhető. Az 1972-ben megfogalmazott sejtést nemrég igazolta Kang, Kelly, Kühn, Methuku és Osthus [6].

A jó 2-színezhetőségnek egy elégséges feltétele, ha egy hipergráfban nincs két hiperél, amelyek egy pontban metszik egymást (Lovász, [5]). Ennek az állításnak számos érdekes általánosítása van. Egy lehetséges általánosításnak tekinthető Keszegh és Pálvölgyi sejtése, ami irányított hipergráfok esetén fogalmaz meg elégséges feltételt 2-színezhetőségre. A sejtés szerint, ha egy irányított hipergráf minden hiperélének több talppontja van, mint fejpontja és nincs két hiperéle, amelyek egy pontban metszik egymást úgy, hogy ez a pont mindkét hiperélnek talppontja, akkor létezik a hipergráfnak jó 2-színezése. Irányított hipergráf alatt olyan hipergráfot értünk, amelyben minden hiperél csúcshalmaza két diszjunkt részre van osztva, az egyiket fejnek a másikat talpnak nevezzük. Ez alapján a fejben lévő csúcsokat fejpontoknak, a talpban lévő csúcsokat pedig talppontoknak nevezzük. Keszegh bebi-

zonyította, hogy a sejtés lineáris és 3-uniform hipergráfok esetén igaz [2].
A szakdolgozat második fejezetében bebizonyítjuk, hogy a sejtés abban a speciális esetben is teljesül, amikor minden hiperélnek pontosan egy fejpontja van. Ez az eset egyben a 3-uniform eset általánosítása.
Keszegh és Pálvölgyi sejtése 3-uniform esetben egy adott két élből álló irányított hipergráf elkerülésével is megfogalmazható. Egy irányított 3-uniform hipergráfot, amelyben minden hiperélnek egy fejpontja és két talppontja van $2 \rightarrow 1$ hipergráfnak nevezünk. Cameron olyan $2 \rightarrow 1$ hipergráfok extremális tulajdonságait vizsgálta, amelyek egy adott két élből álló irányított hipergráfot elkerülnek [1]. Ennek alapján a harmadik fejezetben ezen $2 \rightarrow 1$ hipergráfok kromatikus számát vizsgáljuk.
Végül a negyedik fejezetben pedig Erdős [4] cikke alapján bemutatjuk Lovász állításának egy másik lehetséges általánosítását, ami polikromatikus k-színezhetőségre ad elégséges feltételt.

1. fejezet

Előzmények és definíciók

Hipergráf alatt egy olyan (V, E) párost értünk, ahol V egy véges halmaz, E pedig V nemüres részhalmazainak egy családja. A V halmaz elemeit csúcsoknak vagy pontoknak, az E halmaz elemeit hiperéleknek vagy egyszerűen éleknek nevezzük. A hipergráfok csúcsszínezése során a csúcsokat szeretnénk kiszínezni, úgy hogy ne keletkezzen egyszínű hiperél.

1.1. Definíció. *Egy hipergráf csúcsszínezése jó k-színezés, ha legfeljebb k színt használ és minden hiperélnek létezik két különböző színű csúcsa. Egy hipergráf kromatikus száma az a legkisebb k egész szám, amire létezik a hipergráfnak jó k-színezése. Azt mondjuk, hogy egy hipergráf k színnel való csúcsszínezése polikromatikus k-színezés, ha minden hiperélben szerepel mind a k szín.*

A következő tétel egy elégséges feltételt ad hipergráfok jó 2-színezésére.

1.2. Tétel. *[5] Legyen H egy hipergráf és tegyük fel, hogy bármely két hiperélnek üres a metszete vagy legalább két elemű. Ekkor létezik a H hipergráfnak jó 2-színezése.*

Bizonyítás: Vegyük a H hipergráf csúcsainak egy tetszőleges 2-színezését és jelölje r az egyszínű hiperélek számát. Ha $r = 0$, akkor H egy jó 2-színezését kaptuk. Ha $r > 0$, akkor egy tetszőlegesen választott egyszínű hiperél egyik csúcsának a színét megváltoztatjuk. Mivel nincs két hiperél, amelyek egy pontban metszik egymást, így ezzel a változtatással nem keletkezhet egyszínű hiperél. Ugyanakkor a választott hiperél már két különböző színt tartalmaz, vagyis r csökken. Ezt ismételve elérhető, hogy minden hiperélnek legyen két különböző színű csúcsa. Tehát a H hipergráfnak létezik jó 2-színezése. □

Ennek a tételnek számos általánosítása létezik. Egy lehetséges általánosítás, ha nem minden élpár esetén követeljük meg, hogy a metszetük üres vagy legalább két elemű legyen. A következőkben egy ilyen általánosítással fogunk foglalkozni, ami használja az irányított hipergráfok definícióját.

1.3. Definíció. *Az irányított hipergráf egy olyan hipergráf, amelyben minden hiperélnek a csúcshalmaza két diszjunkt részre van osztva, az egyiket fejnek a másikat* *talpnak nevezzük. Ennek megfelelően a fejben lévő csúcsokat fejpontoknak, a talpban lévő csúcsokat pedig talppontnak nevezzük. Egy e hiperél esetén $h(e)$ jelöli a hiperél fejpontjainak halmazát és $t(e)$ a talppontjainak halmazát.*

Irányított hipergráfok esetén ha két hiperél egy v pontban metszi egymást, akkor három esetet különbözethetünk meg aszerint, hogy v mindkettőnek fejpontja, egyiknek fejpontja és a másiknak talppontja vagy mindkettőnek talppontja. Az 1.2 Tétel általánosítására ad lehetőséget, ha például csak azt az esetet tiltjuk meg, amikor két hiperél egy pontban metszi egymást és ez a pont mindkét élnek a talppontja.

1.4. Sejtés. *[2] Legyen H egy irányított hipergráf, amelyben minden hiperélnek több talppontja van, mint fejpontja, valamint tegyük fel, hogy ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor a v csúcs legalább az egyik hiperélnek a fejpontja. Ekkor létezik a H hipergráfnak jó 2-színezése.*

Ez a sejtés az 1.2 Tétel egy általánosításának tekinthető, mivel egy gyengébb feltételt fogalmaz meg hipergráfok 2-színezhetőségére, hiszen minden olyan hipergráf, amelyben nincs két egy pontban metsző hiperél teljesíti a sejtés feltételeit tetszőleges irányítás mellett. Megmutatható, hogy a sejtésben szereplő feltétel a talppontok számára nem csökkenthető, vagyis ha csak annyit követelnénk meg, hogy a hiperéleknek legalább annyi talppontjuk legyen, mint ahány fejpontjuk, akkor ez már nem elégséges feltétele a jó 2-színezhetőségnek. Megadhatóak olyan hipergráfok, amelyekben minden hiperélnek ugyanannyi fejpontja van, mint talppontja, de a kromatikus száma legalább három.

1.5. Állítás. *[2] Minden $k \geq 2$ egész szám esetén létezik $2k$-uniform irányított hipergráf, amelyben minden hiperélnek ugyanannyi fejpontja van, mint talppontja, ha két hiperél egy pontban metszi egymást, akkor az legalább az egyik hiperélnek a fejpontja és a hipergráf kromatikus száma legalább három.*

Bizonyítás: Legyen $k \geq 2$ rögzített és V egy $6k-3$ elemű csúcshalmaz, ami három egyenlő részre van osztva, V_1, V_2 és V_3-ra. Vegyük a következő $H = (V, E)$ irányított hipergráfot, amelyre minden hiperélnek k fejpontja és k talppontja van, ahol a hiperélek halmaza $E = \{e \subset V : |h(e) \cap V_1| = k, |t(e) \cap V_2| = k\} \cup \{e \subset V : |h(e) \cap V_2| = k, |t(e) \cap V_3| = k\} \cup \{e \subset V : |h(e) \cap V_3| = k, |t(e) \cap V_1| = k\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha két hiperél egy pontban metszi egymást, akkor az a pont egyik hiperélnek fejpontja a másiknak talppontja, vagyis kielégítik az állítás feltételeit.
Tegyük fel indirekt, hogy a megadott hipergráf kromatikus száma 2 és vegyük a csúcsoknak egy jó 2-színezését. Mivel V_i-nek $2k-1$ csúcsa van, így az egyik színű csúcsból több lesz, mint a másikból. A V_1, V_2 és V_3 halmazok közül pedig kiválasztható kettő, amelyekben ugyanazon színű csúcsból van több. Tehát feltehetjük, hogy V_i-ben és V_j-ben is van k piros csúcs. Ez a $2k$ darab csúcs egy egyszínű hiperélet

alkot, ami ellentmondás. Tehát a megadott $2k$-uniform hipergráf kromatikus száma legalább három.$\square$

Az 1.4 Sejtés 3-uniform hipergráfokra és lineáris hipergráfokra teljesül [2]. Először tekintsük a lineáris hipergráfok esetét. Egy hipergráfot lineárisnak nevezünk, ha bármely két hiperéle legfeljebb egy pontban metszi egymást.

1.6. Tétel. *[2] Legyen H egy irányított lineáris hipergráf, amelyben minden hiperélnek több talppontja van, mint fejpontja és tegyük fel, hogy ha $e_1, e_2 \in E(H)$, $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyik élnek a fejpontja. Ekkor a H hipergráfnak létezik jó 2-színezése.*

Bizonyítás: A bizonyítás csúcsszám szerinti indukcióval történik. Ha a csúcsok száma 2 vagy a hipergráfnak nincs éle, akkor az állítás könnyen ellenőrizhető. Legyen H egy irányított lineáris hipergráf n csúcson, amelyben ha két hiperél egy pontban metszi egymást, akkor ez a pont legalább az egyik hiperélnek a fejpontja és minden hiperélnek kevesebb fejpontja van, mint talppontja. Tegyük fel, hogy $n-1$ csúcs esetén már igazoltuk az állítást. Egy e hiperél esetén legyen h_e a fejpontjainak száma és t_e a talppontjainak száma. Egy $v \in V(H)$ csúcs esetén jelölje $d_h(v)$ azon hiperélek számát, amelyben v fejpont és $d_t(v)$ azon hiperélek számát, amelyben v talppont. Legyen $d(v) = |\{e \in E(H) : v \in e\}|$ a v csúcs fokszáma. Ekkor minden $v \in V(H)$ esetén $d(v) = d_h(v) + d_t(v)$. Ha van olyan v csúcs H-ban, amelynek a fokszáma nulla, akkor a v csúcsot tetszőlegesen kiszínezve és a $(V \setminus \{v\}, E(H))$ hipergráfra alkalmazva az indukciós feltevést kapunk egy olyan színezését a csúcsoknak, ami H-nak jó 2-színezése. Tehát feltehetjük, hogy minden csúcs fokszáma legalább egy. Ha létezik H-nak olyan v csúcsa, amelynek a fokszáma pontosan egy, akkor szintén készen vagyunk. Ha a v csúcsot és azt az egyetlen e_v hiperélet, aminek pontja v töröljük H-ból és az így kapott $H' = (V(H) \setminus \{v\}, E(H) \setminus \{e_v\})$ hipergráfra alkalmazzuk az indukciós feltevést, akkor egy olyan színezését kapjuk a $V \setminus \{v\}$ csúcshalmaznak, amelyben az e_v hiperél kivételével H minden hiperéle jól színezett. Ekkor a v csúcsot megfelelően kiszínezve a H hipergráf egy jó 2-színezését kapjuk. Tehát elegendő belátni, hogy a H hipergráfnak van olyan v csúcsa, amelyre $d(v) = 1$.

Állítás: $|E(H)| \leq \sum_{v \in V(H)} (d_t(v) - d_h(v))$
Mivel minden hiperélnek több talppontja van, mint fejpontja, így $t_e - h_e \geq 1$ minden $e \in E(H)$ esetén. Ebből következik, hogy $|E(H)| \leq \sum_{e \in E(H)} (t_e - h_e)$. Tekintsük a (v, e) párokat, ahol $e \in E(H)$, $v \in V(H)$ és v az e talppontja. Az ilyen (v, e) párok számát v és e szerint is megszámolhatjuk. Ha v szerint számoljuk össze a párok számát, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{v \in V(H)} d_t(v)$, ha pedig e szerint, akkor $\sum_{e \in E(H)} t_e$. Tehát $\sum_{v \in V(H)} d_t(v) = \sum_{e \in E(H)} t_e$. Hasonlóan igazolható, hogy $\sum_{v \in V(H)} d_h(v) = \sum_{e \in E(H)} h_e$. Tehát $|E(H)| \leq \sum_{e \in E(H)} (t_e - h_e) = \sum_{v \in V(H)} d_t(v) - \sum_{v \in V(H)} d_h(v) = \sum_{v \in V(H)} (d_t(v) - - d_h(v))$.

Állítás:$\sum_{v \in V(H)}(d_t(v) - d_h(v)) \leq \sum_{v \in V(H)}(2 - d(v))$
Belátjuk, hogy minden csúcs legfeljebb egy hiperélnek lehet a talppontja. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $v \in V(H)$, amelyre $d_t(v) \geq 2$. Ekkor létezik $e_1, e_2 \in E(H)$, amelyeknek v a talppontja. Mivel H lineáris, így azt is tudjuk, hogy $e_1 \cap e_2 = \{v\}$. Ez pedig ellentmondás hiszen e_1 és e_2 két olyan hiperél, amely egy pontban metszi egymást és ez a pont mindkét élnek a talppontja. Tehát $d_t(v) \leq 1$ minden $v \in V$ esetén. Ebből következik, hogy $d_h(v) = d(v) - d_t(v) \geq d(v) - 1$. Felhasználva, hogy $d_t(v) \leq 1$ és $d_h(v) \geq d(v) - 1$ azt kapjuk, hogy $\sum_{v \in V(H)}(d_t(v) - d_h(v)) \leq \sum_{v \in V(H)}[1 - - (d(v) - 1)] = \sum_{v \in V(H)}(2 - d(v))$.

Az előző két egyenlőtlenséget összevonva kapjuk, hogy $|E(H)| \leq \sum_{v \in V(H)}(2 - - d(v))$. Mivel feltettük, hogy minden csúcs fokszáma legalább egy és $2 - d(v) \leq 0$, ha $d(v) \geq 2$, így $1 \leq |E(H)| \leq \sum_{v \in V(H)}(2 - d(v)) \leq \sum_{v \in V(H), d(v)=1}(2 - d(v))$, ami éppen az 1-fokszámú csúcsok száma. Tehát létezik olyan csúcs H-ban, amelynek a fokszáma 1. $\square$

Az 1.4 Sejtés feltétele, miszerint minden hiperélnek több talppontja van, mint fejpontja, 3-uniform hipergráfok esetében azt jelenti, hogy minden hiperélnek legfeljebb egy fejpontja van. Az 1.4 Sejtés feltételének másik része azt követeli meg, hogy ha két hiperél egy pontban metszi egymást, akkor ez a csúcs legalább az egyik élnek a fejpontja. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy 3-uniform irányított hipergráfban az egyik hiperélnek nincs fejpontja és ekkor egy tetszőleges csúcsát fejpontra módosítjuk, akkor a hipergráf továbbra is teljesíti az 1.4 Sejtés feltételeit. Így ha a 1.4 Sejtést 3-uniform esetben szeretnénk igazolni, akkor feltehetjük, hogy minden hiperélnek pontosan egy fejpontja és két talppontja van.

1.7. Tétel. *[2] Legyen H egy 3-uniform irányított hipergráf, amelyben minden hiperélnek pontosan egy fejpontja van. Tegyük fel, hogy ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = = \{v\}$, akkor v legalább az egyik élnek a fejpontja. Ekkor létezik a H hipergrának jó 2-színezése.*

Ennél egy általánosabb esetet fogunk igazolni (2.1 Tétel), belátjuk, hogy az 1.4 Sejtés abban a speciális esetben is igaz, amikor csak annyit követelünk meg, hogy minden hiperélnek pontosan egy fejpontja legyen.

Azokat a 3-uniform irányított hipergráfokat, amelyekben minden hiperélnek pontosan egy fejpontja van, $2 \to 1$ hipergráfoknak nevezzük. Ennek egy hiperélét $ab \to c$ alakban írhatjuk, ahol a és b a hiperél két talppontja és c a fejpontja. Cameron adott két élből álló $2 \to 1$ hipergráfot elkerülő irányított hipergráfok extremális tulajdonságait vizsgálta.

1.8. Definíció. *Legyen F egy $2 \to 1$ hipergráf. Az F hipergráf esetén $ex(n, F)$ jelöli a lehetséges maximális élszámot egy olyan n csúcsú $2 \to 1$ hipergráfban, ami nem* *tartalmazza részhipergráfként az F hipergráfot. Hasonlóan $ex_o(n,F)$ jelöli azon n csúcsú, egyszerű $2 \to 1$ hipergráfok maximális élszámát, amelyek nem tartalmazzák részhipergráfként az F hipergráfot. Egy hipergráfot egyszerűnek nevezünk, ha egyik hiperél sem tartalmazza a másikat.*

Cameron az alábbi kételű $2 \to 1$ hipergráfokkal foglalkozott.

$$
\begin{aligned}
V(H_2) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(H_2) = \{ab \to c, ab \to d\} \\
V(I_1) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(I_1) = \{ab \to c, ad \to c\} \\
V(R_3) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(R_3) = \{ab \to c, bc \to d\} \\
V(E) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(E) = \{ab \to c, dc \to b\} \\
V(I_0) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(I_0) = \{ab \to e, cd \to e\} \\
V(H_1) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(H_1) = \{ab \to c, ad \to e\} \\
V(R_4) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(R_4) = \{ab \to c, cd \to e\}
\end{aligned}
$$

Az eredményeket az 1.1 táblázat foglalja össze [1].

F	$ex(n,F)$	$ex_o(n,F)$
H_2	$\binom{n}{2}$ $(n \geq 5)$	$\binom{n}{2}$ $(n \geq 5)$
I_1	$n\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ $(n \geq 4)$	$n\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ $(n \geq 4)$
R_3	$\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \frac{n-2}{2}$ $(n \geq 6)$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \frac{n-2}{2}$
E	$\binom{n}{3}+2$	$\binom{n}{3}$
I_0	$n(n-2)$ $(n \geq 5)$	$\begin{cases} n(n-3)+\frac{n}{3} & \text{ha } n \equiv 0 \ mod \ 3 \\ n(n-3)+\frac{n-4}{3} & \text{ha } n \equiv 1 \ mod \ 3 \quad (n \geq 9) \\ n(n-3)+\frac{n-5}{3} & \text{ha } n \equiv 2 \ mod \ 3 \end{cases}$
H_1	$\binom{n+1}{2}-3$ $(n \geq 8)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n-2)$ $(n \geq 6)$
R_4	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \binom{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}{2}$ $(n \geq 56)$	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \binom{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}{2}$ $(n \geq 29)$

1.1. táblázat.

Az 1.7 Tétel úgy is megfogalmazható, hogy ha adott egy $2 \to 1$ hipergráf, amely nem tartalmazza részhipergráfként a H_1 hipergráfot, akkor létezik jó 2-színezése. Ennek alapján olyan $2 \to 1$ hipergráfok kromatikus számát vizsgáltam, amelyek elkerülik a fenti kételű $2 \to 1$ hipergráfok valamelyikét. Az eredményeket az 1.2 táblázat tartalmazza, ahol $\chi(H)$ a H hipergráf kromatikus számát jelöli.

Az is érdekes kérdés, hogy mi történik, ha a vizsgált hipergráf egyszerre több kételű hipergráfot is elkerül. Először definiáljuk a [9] cikkben 3-uniform H hipergráfokra megadott színezést, amit nagyon jó színezésnek fogunk nevezni. Vegyük azt a G_H gráfot, amelynek csúcshalmaza $V(H)$ és élei azok az $u, v \in V(H)$ csúcspárok,

F	$\sup\{\chi(H):$	H elkerüli F-et$\}$
H_2	∞	(3.1 Állítás)
I_1	∞	(3.2 Állítás)
R_3	∞	(3.2 Állítás)
E	∞	(3.2 Állítás)
I_0	$3 \leq, \leq 4$	(3.3 Tétel)
H_1	2	(1.7 Tétel, [2])
R_4	3	(3.4 Tétel)

1.2. táblázat.

amelyekre létezik $e \in E(H)$ hiperél, hogy $\{u, v\} \subset e$. A H hipergráfnak létezik nagyon jó színezése, ha megadható a G_H hipergráfnak egy élszínezése a piros és kék színekkel és egy irányítása a piros éleknek úgy, hogy minden $e \in E(H)$ hiperél u, v, w csúcsainak egy megfelelő sorrendjére az uv és uw élek pirosak, a vw él kék a G_h gráfban és a két piros él irányítása $u \to v$ és $u \to w$. A [9] cikk egyik eredménye szerint, ha egy 3-uniform, n csúcsú hipergráfnak létezik az előbb definiált nagyon jó színezése, akkor a hiperéleinek száma legfeljebb $f(n)$, ahol $f(0) = 1$ és $f(n) = = \max_{k \in [n-1]} \binom{k}{2} (n-k) + f(n-k)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy H 3-uniform hipergráfnak pontosan akkor létezik nagyon jó színezése, ha megadható H-nak egy olyan $2 \to 1$ irányítása, hogy a kapott $2 \to 1$ hipergráf elkerüli az R_3 és E hipergráfokat. Tehát ha egy H $2 \to 1$ hipergráf n csúcson nem tartalmazza az R_3 és E hipergráfok egyikét sem részhipergráfként, akkor $|E(H)| \leq f(n)$.

A harmadik fejezetben belátjuk, hogy minden $k \geq 2$ esetén tudunk mutatni egy olyan hipergrátot, ami elkerüli az R_3 és az E hipergráfokat, sőt I_1-et is és a kromatikus száma legalább k. Továbbá igazoljuk, hogy ha egy $2 \to 1$ hipergráf elkerüli az I_0 és R_4 hipergráfokat, akkor a kromatikus száma 2.

2. fejezet

Nem uniform irányított hipergráfok

2.1. Az 1.4 Sejtés egy fejpontú hiperélek esetében igaz

Az előzőek alapján tudjuk, hogy az 1.4 Sejtés 3-uniform hipergráfokra teljesül. Belátjuk, hogy általánosabb esetben is igaz a sejtés, elegendő feltenni, hogy minden hiperélnek pontosan egy fejpontja van. A sejtés feltétele miszerint minden hiperélnek több talppontja van, mint fejpontja ebben az esetben azzal ekvivalens, hogy minden hiperélnek legalább két talppontja van.

2.1. Tétel. *Legyen H egy irányított hipergráf, amelyben minden hiperélnek legalább két talppontja és pontosan egy fejpontja van, valamint tegyük fel, hogy ha két hiperél egy pontban metszi egymást, akkor ez a pont legalább az egyiknek a fejpontja. Ekkor a H hipergráfnak létezik jó 2-színezése.*

Bizonyítás: Legyen V a H hipergráf csúcsainak halmaza és tegyük fel, hogy $|V|=n$. A következőkben egy e hiperél fejpontját jelölje $h(e)$, talppontjainak halmazát $t(e)$. Ha e_1 és e_2 két hiperél, amelyekre $e_1 \subseteq e_2$, akkor az e_2 hiperélet el is hagyhatjuk, hiszen az e_1 hiperél egy jó színezése már garantálja, hogy e_2 ne legyen egyszínű. Tehát feltehetjük, hogy a hipergráf egyszerű, vagyis egyik hiperél sem tartalmazza a másikat.
Vegyük a piros és kék színeket. Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. Válasszunk tetszőlegesen egy v_1 csúcsot. A v_1 csúcstól indulva sorban minden v_i $(i = 1,2,...,n)$ csúcsra végrehajtjuk a következő két lépést:
1. lépés: Megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan e hiperél, amely egyszínű kék, v_i az e hiperél talppontja, $t(e) \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_i\}$ és $h(e) \in V \setminus \{v_1, v_2, ..., v_i\}$. Ha létezik ilyen hiperél, akkor a v_i csúcsot átszínezzük pirosra és a $h(e)$ pontot választjuk $(i+1)$. csúcsnak, vagyis $v_{i+1} = h(e)$. Ha több ilyen hiperél is létezne, akkor tetszőlegesen választunk. Ha nem létezik ilyen hiperél, akkor megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan f hiperél amely egyszínű kék, v_i az f talppontja és $t(f) \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_i\}$. Ha igen, akkor

a v_i csúcsot pirosra színezzük és tetszőlegesen választunk egy $v_{i+1} \in V \setminus \{v_1, v_2, ..., v_i\}$ csúcsot, amennyiben $i \leq n-1$. Ha nem létezik ilyen hiperél, akkor $i \leq n-1$ esetén tetszőlegesen választunk egy $v_{i+1} \in V \setminus \{v_1, v_2, ..., v_i\}$ csúcsot és továbblépünk a v_{i+1} csúcs vizsgálatára.
2. lépés: Ha a v_i csúcsot pirosra színeztük, akkor megvizsgáljuk, hogy a v_i csúcs pirosra színezésével keletkezett-e egyszínű hiperél. Ha igen, akkor a v_{i-1} csúcsot kékre színezzük. Ezt követően a v_i csúcsot átvizsgáltnak tekintjük és továbblépünk a v_{i+1} csúcsra.
Megfigyelhető, hogy a csúcsoknak átvizsgálás után nem változhat meg az indexe, valamint egy v_j csúcs színe csak az átvizsgálása során válthat pirosra és csak a v_{j+1} csúcs vizsgálata során válthat kékre, vagyis minden csúcs legfeljebb két alkalommal válthat színt. A hiperéleket két csoportra oszthatjuk aszerint, hogy a legnagyobb indexű pontjuk talppont vagy fejpont. Legyen E_t azon hiperélek halmaza, amelyben a legnagyobb indexű pont talppont és legyen E_h azon hiperélek halmaza, amelyben az utolsó pont fejpont. Egy e hiperél legnagyobb indexű talppontját jelölje $t_{max}(e)$.

2.2. Állítás. *A színezési algoritmus során nem keletkezhet egyszínű piros hiperél, amelynek a legnagyobb indexű pontja talppont.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen g hiperél, vagyis g összes csúcsát pirosra színeztük és a legnagyobb indexű pontja talppont. Ekkor a g hiperél a $t_{max}(g)$ csúcs pirosra színezésével lett egyszínű piros. Mivel a $t_{max}(g)$ csúcsot pirosra színeztük, így van olyan f hiperél, ami ekkor egyszínű kék volt és $t_{max}(f) = t_{max}(g)$. Ebben az esetben g-nek és f-nek pontosan egy közös pontja van, hiszen f-nek a $t_{max}(f)$ csúcsának kivételével az összes csúcsa kék, g-nek pedig az összes csúcsa piros a $t_{max}(f)$ pirosra színezésekor, így f-nek és g-nek pontosan egy közös pontja van, $t_{max}(f)$, ami mindkettő hiperélnek talppontja. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az algoritmus alatt egyszer sem lehet, hogy egy hiperél, amelynek a legnagyobb indexű pontja talppont egyszínű piros legyen.□

2.3. Következmény. *A színezési algoritmus során ha keletkezik egyszínű piros hiperél, akkor annak a legnagyobb indexű pontja csak a hiperél fejpontja lehet.*

2.4. Állítás. *Ha egy g hiperél összes talppontja pirosra színeződik az algoritmus során és a legnagyobb indexű pontja a fejpontja, akkor g csúcsai egymást követő csúcsok.*

Bizonyítás: Jelölje t_g a g hiperél talppontjainak számát, a tétel feltételéből tudjuk, hogy $t_g \geq 2$. Belátjuk, hogy minden $k \leq t_g$ esetén a g hiperél $k+1$ darab legkisebb indexű pontja egymást követően helyezkedik el. Az állítást indukcióval bizonyítjuk. Elsőként tekintsük a $k = 1$ esetet. Mivel $g \in E_h$, így a g pontjai közül a fejpontját vizsgáltuk meg utoljára. Jelölje $t_j(g)$ a g hiperél j. legkisebb indexű talppontját. Mivel egy csúcs színe legfeljebb egyszer válthat kékről pirosra és g összes talppontja

piros színű lesz, így a $t_1(g)$ csúcsot a vizsgálata során pirosra színeztük. Ekkor létezik egy e_1 hiperél, amelyre $t_{max}(e_1) = t_1(g)$ és a $t_1(g)$ csúcs vizsgálata előtt e_1 egyszínű kék volt. Ha $h(e_1)$ kisebb indexű, mint $t_{max}(e_1)$, akkor e_1-nek és g-nek egyetlen közös pontja $t_1(g)$, ami mindkettőnek talppontja, ami pedig ellentmondás. Tehát $h(e_1)$ nagyobb indexű, mint $t_{max}(e_1)$. Ekkor az 1. lépésben szereplő feltétel miatt létezik olyan e_1' hiperél is, amelyre $t_{max}(e_1') = t_1(g)$, $h(e_1')$ a $t_{max}(e_1')$ csúcs nagyobb indexű szomszédja, valamint e_1' a $t_1(g)$ csúcs vizsgálata előtt egyszínű kék volt. Ebben az esetben $h(e_1')$ a g hiperélnek is csúcsa, mert különben e_1'-nek és g-nek az egyetlen közös csúcsa $t_1(g)$ lenne, amely mindkettőnek talppontja, ami ellentmondás lenne. Ezekből következik, hogy $t_2(g) = h(e_1')$, vagyis g két legkisebb indexű talppontja egymást követő csúcsok.
Legyen $j < t_g$ és tegyük fel, hogy $k = j$ esetén teljesül az állítás, vagyis a g hiperél $j+1$ darab legkisebb indexű pontja egymást követő csúcsok. Mivel $j < t_g$ és $g \in E_h$, így a g hiperél $(j+1)$. átvizsgált pontja a g talppontja. A g összes talppontja csak akkor lehet piros színű, ha a $t_{j+1}(g)$ csúcs pirosra színezésekor a g hiperél j darab legkisebb indexű pontja piros színű. A $t_{j+1}(g)$ csúcs pirosra színezésének feltétele, hogy létezik olyan e_{j+1} él, amelyre $t_{max}(e_{j+1}) = t_{j+1}(g)$ és a $t_{j+1}(g)$ csúcs vizsgálata előtt e_{j+1} egyszínű kék. Ha $h(e_{j+1})$ kisebb indexű, mint $t_{max}(e_{j+1})$, akkor e_{j+1} legnagyobb indexű pontja $t_{max}(e_{j+1})$. A $t_{j+1}(g) = t_{max}(e_{j+1})$ csúcs vizsgálata előtt a g összes $t_{j+1}(g)$-nél kisebb indexű pontja piros, valamint e_{j+1} összes pontja kék és $t_{j+1}(g)$-nél nem nagyobb indexű, amiből következik, hogy g-nek és e_{j+1}-nek egyetlen közös pontja $t_{j+1}(g)$. Ez a pont az e_{j+1} és a g hiperélnek is talppontja, ami ellentmondás. Tehát $h(e_{j+1})$ nagyobb indexű, mint $t_{max}(e_{j+1})$. Ezt és az algoritmus 1. lépésében leírtakat felhasználva kapjuk, hogy létezik olyan e_{j+1}' hiperél is, amelyre $t_{max}(e_{j+1}') = t_{j+1}(g)$, $h(e_{j+1}')$ a $t_{max}(e_{j+1}')$ csúcs nagyobb indexű szomszédja és a $t_{j+1}(g)$ csúcs átvizsgálása előtt e_{j+1}' egyszínű kék volt. Ha $h(e_{j+1}')$ nem pontja a g hiperélnek, akkor e_{j+1}' és g egyetlen közös pontja $t_{j+1}(g)$, hiszen a $t_{j+1}(g)$ csúcs vizsgálata előtt a g hiperél $t_{j+1}(g)$-nél kisebb indexű pontjai piros színűek, az e_{j+1}' hiperél $t_{j+1}(g)$-nél kisebb indexű pontjai pedig kék színűek és e_{j+1}' hiperélnek csak egy pontja van, ami $t_{j+1}(g)$-nél nagyobb indexű. Ekkor ellentmondásra jutunk, mivel $t_{j+1}(g)$ mindkét élnek talppontja. Tehát $h(e_{j+1}')$ pontja g-nek, ami $t_{j+1}(g)$-nek a nagyobb indexű szomszédja. Felhasználva az indukciós feltevést azt kapjuk, hogy a g hiperél $j+2$ legkisebb indexű pontja egymást követően helyezkedik el.
Tehát beláttuk, hogy minden $k \leq t_g$ esetén a g hiperél $k+1$ darab legkisebb indexű pontja egymást követően helyezkednek el. A $k = t_g$ esetet tekintve azt kapjuk, hogy a g csúcsai egymást követően helyezkednek el.□

Az eddigieket felhasználva könnyen igazolható a következő állítás.

2.5. Állítás. *Ha az algoritmus során keletkezik egyszínű piros hiperél, akkor annak a csúcsai egymást követő csúcsok.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az algoritmus során keletkezik egyszínű piros hiperél, jelölje ezt g. A 2.2 Állításból következik, hogy ekkor $g \in E_h$. Tehát g összes talppontja pirosra színeződik és a fejpontja a legnagyobb indexű csúcsa, vagyis alkalmazható a 2.4 Állítás, miszerint ebben az esetben g pontjai egymást követően helyezkednek el.□

Tegyük fel, hogy az algoritmus során a v_j csúcs pirosra színezésével az e_1 és e_2 hiperél is egyszínű piros lesz. A 2.2 Állításból tudjuk, hogy $e_1, e_2 \in E_h$. Ekkor $h(e_1) = h(e_2) = v_j$, valamint a 2.5 Állítás miatt e_1 és e_2 is egymást követő pontokból állnak. Ebből következik, hogy $e_1 \subseteq e_2$ vagy $e_2 \subseteq e_1$. Mivel feltettük, hogy a hipergráf egyszerű, így e_1 és e_2 ugyanazt a hiperélet jelöli.

2.6. Következmény. *Az algoritmus során egy v_j csúcs pirosra színezésével legfeljebb egy egyszínű piros hiperél keletkezhet.*

2.7. Állítás. *Az algoritmus végén nem lehet egyszínű piros hiperél.*

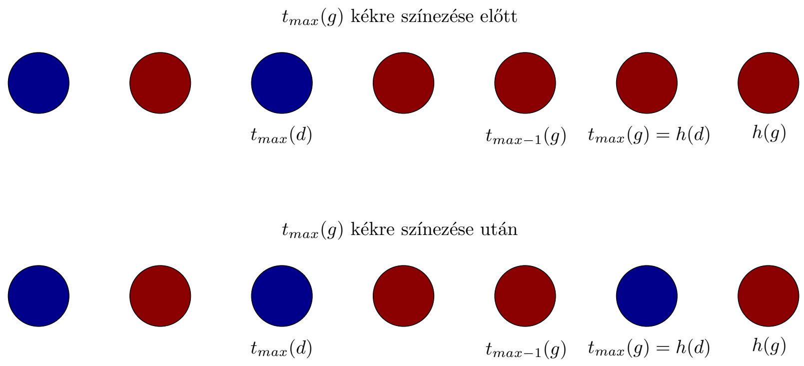
Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy a g hiperél egyszínű piros az algoritmus végén. A 2.2 Állításból tudjuk, hogy g utolsó pontja a fejpontja, valamint a 2.5 Állítás garantálja, hogy g csúcsai egymást követően helyezkednek el. A g hiperél csak a $h(g)$ csúcs pirosra színezésével lehet egyszínű. A 2.6 következmény szerint a $h(g)$ csúcs pirosra színezésével legfeljebb egy egyszínű piros hiperél keletkezhet, ami a g. A $h(g)$ csúcs vizsgálatakor a színezési algoritmus 2. lépése alapján a $h(g)$ kisebb indexű szomszédját kékre színeztük, ami a g hiperélnek is pontja, hiszen g pontjai egymást követő csúcsok és $g \in E_h$. Ezután $h(g)$ kisebb indexű szomszédjának, $t_{max}(g)$-nek nem változtatjuk meg a színét, vagyis az algoritmus végén kék színű lesz, ami ellentmond annak, hogy g egyszínű piros hiperél lesz a végén. Tehát az algoritmus befejeztével nem lesz egyszínű piros hiperél. □

2.8. Állítás. *Az algoritmus végén nem lehet egyszínű kék hiperél.*

Bizonyítás: Mivel az algoritmus 1. lépése miatt az eljárás során minden hiperélnek lesz piros pontja, így egyszínű kék hiperél csak a 2. lépés miatt keletkezhet, amikor egy v csúcs pirosra színezésével keletkezett egyszínű piros g hiperél miatt színezünk kékre egy csúcsot. A 2.6 következmény alapján tudjuk, hogy g egyértelmű és a 2.2 Állítás miatt $g \in E_h$, vagyis $h(g) = v$. Ugyanakkor a 2.5 Állítást felhasználva tudjuk, hogy g pontjai egymást követő csúcsok. Tehát a $g \in E_h$ hiperél miatt színezzük kékre a $h(g)$ csúcs kisebb indexű szomszédját, ami $t_{max}(g)$. Tegyük fel indirekt, hogy a $t_{max}(g)$ csúcs kékre színezésével keletkezik olyan egyszínű kék d hiperél, aminek egyetlen csúcsa sem lesz piros a továbbiakban, vagyis az algoritmus végéig egyszínű kék marad.

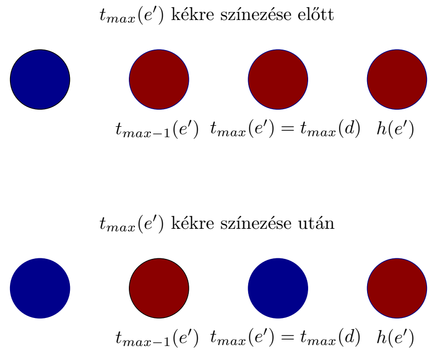
Ha $t_{max}(d)$ nagyobb indexű, mint $h(g)$, akkor a $h(g)$ csúcs vizsgálata után lesz a d-nek olyan csúcsa, amit pirosra színezünk, vagyis nem marad egyszínű kék az algoritmus végéig, hiszen ha a $t_{max}(d)$ csúcs vizsgálata előtt a d hiperél egyszínű kék, akkor a

$t_{max}(d)$ csúcsot pirosra kell színeznünk.
Tehát feltehetjük, hogy $t_{max}(d)$ kisebb indexű, mint a $h(g)$ csúcs. Ha $t_{max}(g)$ a d hiperélnek talppontja, akkor g-nek és d-nek pontosan egy közös pontja van $t_{max}(g)$, mivel a $t_{max}(g)$ csúcs kékre színezése után d-nek az összes pontja kék, g-nek pedig a $t_{max}(g)$ csúcs kivételével az összes pontja piros. Ekkor $t_{max}(g)$ egyetlen közös pontja a két hiperélnek és mindkettőnek talppontja is, ami ellentmondás. Tehát $t_{max}(g)$ a d hiperélnek a fejpontja. Ekkor $h(d)$ nagyobb indexű, mint $t_{max}(d)$ mivel $t_{max}(d)$ kisebb indexű, mint $h(g)$ és $h(d) = t_{max}(g)$ a $h(g)$ csúcsnak a kisebb indexű szomszédja. Felhasználva, hogy minden hiperélnek legalább két talppontja van jelölje $t_{max-1}(g)$ a g hiperélnek a második legnagyobb indexű talppontját. A $t_{max}(d)$ csúcs nem lehet $h(d)$ szomszédja, mivel $h(d)=t_{max}(g)$ kisebb indexű szomszédja $t_{max-1}(g)$, ami piros színű a $t_{max}(g)$ csúcs kékre színezésekor, ahogyan a 2.1 ábra is mutatja.



2.1. ábra.

Tudjuk, hogy a $h(d)=t_{max}(g)$ csúcs kékre színezésekor $t_{max}(d)$ kék színű. Ez csak úgy lehetséges, hogy vagy nem színeztük egyszer sem pirosra a $t_{max}(d)$ csúcsot, vagy pirosra színeztük, de visszaszíneztük kékre egy akkor egyszínű piros $e' \in E_h$ hiperél miatt, amelyre $t_{max}(e')=t_{max}(d)$. Ha egyszer sem színeztük pirosra a $t_{max}(d)$ csúcsot, akkor van a d hiperélnek egy $t_{max}(d)$-nél kisebb indexű pontja, ami a $t_{max}(d)$ csúcs vizsgálata előtt piros színű volt, ami biztos, hogy piros maradt, hiszen a $t_{max}(d)$ csúcs vizsgálatakor a 2. lépést átugrottuk, vagyis nem színeztünk kékre egyetlen csúcsot sem. Ez pedig ellentmond annak, hogy a $h(d)$ kékre színezésével d egyszínű kék lett. Tehát csak az a lehetőség marad, hogy a $t_{max}(d)$ csúcsot pirosra színeztük, majd visszaszíneztük kékre egy akkor egyszínű piros $e' \in E_h$ hiperél miatt az algoritmus 2. lépésében leírtak alapján, amit a 2.2 ábra szemléltet. Az előzőek alapján tudjuk, hogy $t_{max}(e')$ és $h(e')$ egymást követő csúcsok ebben a sorrendben és $t_{max}(e') = = t_{max}(d)$. Mivel $t_{max}(d)$ és $h(d)$ nem szomszédos, így $h(d) \neq h(e')$. A $t_{max}(e')$ csúcs kékre való színezésekor az e' hiperél $t_{max}(e')$-nél kisebb indexű pontjai piros színűek a d hiperél $t_{max}(d) = t_{max}(e')$-nél kisebb indexű pontjai pedig kék színűek, vagyis az e' és d hiperéleknek pontosan egy közös pontjuk van, ami mindkettőnek talppontja, ez pedig ellentmondás. Tehát a színezési algoritmus végén nem lehet egyszínű kék hiperél.□



2.2. ábra.

Ezzel beláttuk, hogy a kapott színezésben nincs egyszínű hiperél, vagyis H egy jó 2-színezését kaptuk.$\square$

2.2. Egy elégséges feltétel irányított hipergráfok 3-színezhetőségére

A következő tétel egy elégséges feltételt ad hipergráfok jó 3-színezhetőségére, ami egyben tekinthető a 3.4 Tétel általánosításának is. Már öt csúcson is megadható olyan irányított hipergráf, amely kielégíti a 2.9 Tétel feltételeit és kromatikus száma három, erre példa a 3.2 ábrán megadott R hipergráf.

2.9. Tétel. *Legyen H egy olyan irányított hipergráf, amelyben minden élnek van fejpontja és talppontja is. Tegyük fel, hogy ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor a v csúcs vagy mindkettőnek fejpontja, vagy mindkettőnek talppontja. Ekkor a H hipergráfnak létezik jó 3-színezése.*

Bizonyítás: Legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a H csúcsainak egy tetszőleges sorrendje. Egy $e \in \in E(H)$ hiperél esetén jelölje $h_{min}(e)$ az e hiperél legkisebb indexű fejpontját, $h_{max}(e)$ a legnagyobb indexű fejpontját, $t_{min}(e)$ a legkisebb indexű talppontját és $t_{max}(e)$ a legnagyobb indexű talppontját. A hiperéleket két csoportra oszthatjuk aszerint, hogy a legnagyobb indexű pontjuk fejpont vagy talppont. Jelölje E_h azokat a hiperéleket, amelyeknek a legnagyobb indexű pontjuk fejpont és E_t azokat a hiperéleket, amelyeknek a legnagyobb indexű pontjuk talppont. Vegyük a kék, piros és zöld színeket. Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. A színezési algoritmus a következő.
1. lépés: A legkisebb indexű csúcstól indulva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan egyszínű kék E_t-beli hiperél, amelynek a legnagyobb indexű pontja v_i. Ha nincs ilyen hiperél, akkor egyszerűen továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Ha létezik ilyen hiperél, akkor a v_i csúcsot pirosra színezzük és ezután lépünk tovább a v_{i+1} csúcsra.
2. lépés: A v_1 csúcstól indulva minden v_j csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan egyszínű kék $e \in E_h$ hiperél, amelyre $h_{max}(e) = v_j$. Ha nem, akkor továbblépünk a

v_{j+1} csúcsra. Ha igen, akkor a v_j csúcsot zöldre színezzük és ezután lépünk tovább a v_{j+1} csúcsra.
Az 1. lépés után minden E_t-beli hiperélnek lesz legalább egy piros pontja, valamint a 2. lépés után pedig minden E_h-beli hiperélnek lesz legalább egy zöld színű pontja. Ezekből következik, hogy a 2. lépés után nincs egyszínű kék hiperél. Belátjuk, hogy egyszínű piros és egyszínű zöld hiperél sem lehet a színezés végén.

2.10. Állítás. *Nincs egyszínű piros hiperél a színezés végén.*

Bizonyítás: Elegendő belátni, hogy az 1. lépés után nem keletkezik egyszínű piros hiperél, mivel a 2. lépésben már csak zöld színnel színezünk. Tegyük fel indirekt, hogy az 1. lépés után van egyszínű piros hiperél, jelöljük ezt az élet e-vel. Mivel a $h_{min}(e)$ csúcsot pirosra színeztük, így a $h_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor volt egy $f \in E_t$ hiperél, amely ekkor egyszínű kék volt és $t_{max}(f) = h_{min}(e)$. Mivel $f \in E_t$, így az f legnagyobb indexű pontja $t_{max}(f)$. A színezés végén e egyszínű piros, ami csak úgy lehetséges, hogy a $h_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor az e hiperél minden $h_{min}(e)$-nél kisebb indexű pontja már piros színű. Az f hiperél minden csúcsa kék színű a $h_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor, valamint f legnagyobb indexű pontja $h_{min}(e)$, mivel $f \in E_t$ és $t_{max}(f) = h_{min}(e)$. Ezekből következik, hogy e és f egyetlen közös pontja $h_{min}(e)$, ami az egyik hiperélnek fejpontja, a másik hiperélnek talppontja, ami ellentmondás. Tehát a színezés végén nem létezik egyszínű piros hiperél.□

2.11. Állítás. *A színezés végén nem lehet egyszínű zöld él.*

Bizonyítás: Elegendő belátni, hogy a 2. lépés során nem keletkezik egyszínű zöld hiperél. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egyszínű zöld hiperél a színezés végén, amit e-vel jelölünk. Mivel a $t_{min}(e)$ csúcsot zöldre színeztük a 2. lépés során, így a $t_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor volt egy $f \in E_h$ hiperél, amely egyszínű kék volt és legnagyobb indexű csúcsa, $h_{max}(f)$ megegyezik $t_{min}(e)$-vel. Az e hiperél csak úgy lehet egyszínű zöld a színezés végén, ha a $t_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor az e hiperél összes $t_{min}(e)$-nél kisebb indexű csúcsa zöld színű. Az f legnagyobb indexű pontja $t_{min}(e)$ és a $t_{min}(e)$ csúcs vizsgálatakor egyszínű kék volt. Ezekből következik, hogy az e és f éleknek egyetlen közös pontja $t_{min}(e)$, ami az e-nek talppontja, f-nek pedig fejpontja, ami ellentmondás. Tehát a színezés végén nem lehet egyszínű zöld hiperél.□

Beláttuk, hogy a megadott színezés végén nincs egyszínű hiperél, vagyis a H hipergráf egy jó 3-színezését kaptuk. □

3. fejezet

$2 \to 1$ hipergráfok színezése

A következőkben azon $2 \to 1$ hipergráfok kromatikus számára vonatkozó eredményeket tárgyaljuk, amelyek elkerülik a Cameron által vizsgált kétélű $2{\to}1$ hipergráfok valamelyikét.

3.1. H_2, I_1, R_3 és E hipergráfok

3.1. Állítás. *Minden $k \geq 2$ egész szám esetén létezik olyan $H = (V, E)$ $2{\to}1$ hipergráf, amely nem tartalmazza részhipergráfként H_2-t, azaz ha $e_1, e_2 \in E$ és $e_1 \cap e_2 = \{u, v\}$, akkor u vagy v legalább az egyik hiperélnek a fejpontja és H kromatikus száma legalább k.*

Bizonyítás: A bizonyítás teljes indukcióval történik. Ha $k = 2$, akkor teljesül az állítás, hiszen minden ilyen hipergráf megfelelő színezéséhez kell legalább 2 szín. Tegyük fel, hogy k-ra teljesül az állítás és legyenek A és B nem feltétlenül különböző $2 \to 1$ hipergráfok, amelyek kiszínezéséhez legalább k szín kell. Vegyük azt a H hipergráfot, amelyre $V(H) = V(A) \cup V(B) \cup \{x\}$ és $E(H) = E(A) \cup E(B) \cup \cup \{v_1 v_2 \to x : v_1 \in V(A), v_2 \in V(B)\}$. Először ellenőrizzük, hogy H nem tartalmazza részhipergráfként H_2-t. Tegyük fel indirekt, hogy létezik két különböző hiperél $e, f \in \in E(H)$, amelyre $e \cap f = \{u, v\}$ és $t(e) = t(f) = \{u, v\}$. Az indukciós feltevésből következik, hogy legalább az egyiknek x a fejpontja. Ekkor a másik hiperélnek is x a fejpontja, mert különben legfeljebb egy közös pontja lehetne e-nek és f-nek. Tehát mindkét hiperélnek x a fejpontja és a talppontjaik is megegyeznek, ami ellentmondás. A H hipergráf színezéséhez legalább $k+1$ színre szükség van, mivel ha csak k színt használunk, akkor felhasználva az indukciós feltevést A-ban és B-ben is mind a k szín előfordul, vagyis ha A-ból és B-ből is választunk egy, az x színével megegyező színű csúcsot, akkor ez a két csúcs és x egy egyszínű hiperélet alkotna. Tehát H nem tartalmazza részhipergráfként H_2-t és a kromatikus száma legalább $k+1$.□

Az I_1, R_3 és E hipergráfok esetén is megadhatóak olyan $2 \to 1$ hipergráfok, amelyek kromatikus száma legalább k és nem tartalmazzák részhipergráfként ezeket a hipergráfokat. Pontosabban olyan $2 \to 1$ hipergráf is megadható, amelynek a kromatikus száma legalább k és nem tartalmazza részhipergráfként az I_1, R_3 és E hipergráfok egyikét sem. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy $2 \to 1$ hipergráf pontosan akkor nem tartalmazza részhipergráfként az I_1, R_3 és E hipergráfok egyikét sem, ha bármely két hiperélére, amelyek pontosan két csúcsban metszik egymást ez a két csúcs mind a két hiperélnek a talppontjai.

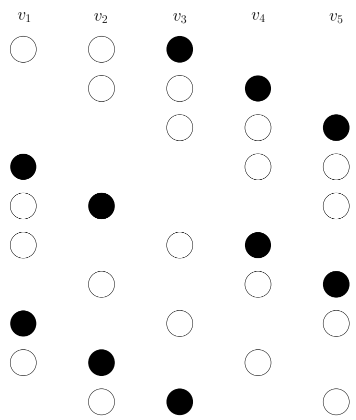
3.2. Állítás. *Legyen $k \geq 2$ egész szám. Ekkor létezik olyan H $2 \to 1$ hipergráf, amelynek a kromatikus száma legalább k, valamint nem tartalmazza az I_1, R_3 és E hipergráfok egyikét sem részhipergráfként, azaz ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{u, v\}$, akkor $t(e_1) = t(e_2) = \{u, v\}$.*

Bizonyítás: Az állítás bizonyítása teljes indukcióval történik. Ha $k = 2$, akkor az egy hiperélből álló $2 \to 1$ hipergráf megfelel a feltételeknek. Tegyük fel, hogy k-ra teljesül az állítás. Az indukciós feltevést felhasználva vegyünk két olyan azonos csúcsszámú $2 \to 1$ hipergráfot, amelyek nem tartalmazzák részhipergráfként az I_1, R_3 és E hipergráfok egyikét sem és a kromatikus számuk legalább k. Jelölje a két hipergráfot A és B, csúcshalmazaik $V(A) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ és $V(B) = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Legyen H az a $2 \to 1$ hipergráf, amelyre $V(H) = V(A) \cup V(B) \cup \{x_\sigma : \sigma \in S_n\}$ és $E(H) = E(A) \cup E(B) \cup \{a_i b_{\sigma(i)} \to x_\sigma : i \in \{1,2,...,n\}, \sigma \in S_n\}$, ahol S_n az $\{1,2,...,n\}$ összes permutációinak halmaza.
Legyen $e_1, e_2 \in E(H)$, amelyre $|e_1 \cap e_2| = 2$. Ha $e_1, e_2 \in E(A) \cup E(B)$, akkor a feltételből következik, hogy e_1 és e_2 két közös pontja mind a két hiperélnek talppontja. Ha $e_1 \in E(A) \cup E(B)$ és $e_2 \in E(H) \setminus (E(A) \cup E(B))$, akkor $|e_1 \cap e_2| \leq 1$, ami ellentmondás lenne. Tegyük fel, hogy $e_1, e_2 \in E(H) \setminus (E(A) \cup E(B))$. Ha $h(e_1) = h(e_2)$, akkor e_1 és e_2 egyetlen közös pontja a fejpontjuk lehet, ami ellentmond annak, hogy $|e_1 \cap e_2| = 2$. Tehát e_1 és e_2 fejpontja különböző, valamint $h(e_1), h(e_2) \in V(H) \setminus (V(A) \cup V(B))$, $t(e_1), t(e_2) \subseteq (V(A) \cup V(B))$, vagyis $t(e_1) = t(e_2)$. Ezekből következik, hogy H nem tartalmazza részhipergráfként az I_1, R_3 és E hipergráfok egyikét sem.
Belátjuk, hogy H kromatikus száma legalább $k+1$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik H-nak jó k-színezése és vegyünk egy ilyen színezést. Mivel A és B kromatikus száma is legalább k, így kiválasztható $V(A)$-ból és $V(B)$-ből is k darab csúcs, amelyek páronként különböző színűek, legyenek ezek a csúcsok $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k} \in V(A)$ és $b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_k} \in V(B)$, ahol feltehetjük, hogy a_{i_r} és b_{j_r} azonos színű minden $1 \leq r \leq k$ esetén. Legyen $\sigma \in S_n$ egy olyan permutáció, amelyre $\sigma(i_r) = j_r$ minden $1 \leq r \leq k$ esetén. Vegyük azt az $r \in \{1,2,...,k\}$ számot, amelyre az x_σ csúcs és az a_{i_r}, b_{j_r} csúcsok színe megegyezik. Ekkor $a_{i_r} b_{j_r} \to x_\sigma \in E(H)$ egyszínű hiperél, ami ellentmondás. Tehát H kromatikus száma legalább $k+1$. $\square$

3.2. I_0 és R_4 hipergráfok

Belátjuk, hogy az I_0 hipergráf elkerülése elégséges feltétele a jó 4-színezhetőségnek és léteznek olyan $2 \to 1$ hipergráfok, amelyek elkerülik I_0-t és a kromatikus számuk három, amelyre példa a következő I hipergráf. Az I hipergráfot a 3.1 ábra szemlélteti, ahol a fekete pontok a hiperél fejpontjai, a fehér pontok pedig a hiperél talppontjai.

$$\begin{aligned} V(I) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(I) &= \{v_1v_2 \to v_3, v_2v_3 \to v_4, v_3v_4 \to v_5, v_4v_5 \to v_1, v_1v_5 \to v_2, \\ &\quad v_1v_3 \to v_4, v_2v_4 \to v_5, v_3v_5 \to v_1, v_1v_4 \to v_2, v_2v_5 \to v_3\} \end{aligned}$$



3.1. ábra. I hipergráf

Könnyen ellenőrizhető, hogy I elkerüli az I_0 hipergráfot és a kromatikus száma három. Az I hipergráf öt csúcsát akárhogy színezzük két színnel a skatulyaelv miatt mindig lesz 3 azonos színű csúcs és mivel minden csúcshármas hiperélt alkot, így lesz egyszínű hiperél. Ugyanakkor három szín esetén elérhető, hogy ne legyen három azonos színű csúcs, ami I egy jó 3-színezését adja. Tehát I kromatikus száma három.

3.3. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf. Tegyük fel, hogy H nem tartalmazza részhipergráfként I_0-t, azaz ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyik hiperélnek a talppontja. Ekkor létezik a H hipergráfnak jó 4-színezése.*

Bizonyítás: Elegendő azt az esetet vizsgálnunk, amikor minden csúcshármasra legfeljebb egy hiperél illeszkedik. Egy adott u csúcs esetén jelölje $E_h(u)$ azon hiperélek halmazát, amelyeknek u a fejpontja.

Állítás: Minden $u \in V$ esetén pontosan az alábbiak egyike teljesül:
(a) $E_h(u)$ az üres halmaz.
(b) Létezik $v \in V \setminus \{u\}$, amelyre $v \in e$ minden $e \in E_h(u)$ esetén.
(c) $E_h(u) = \{vw \to u, wz \to u, vz \to u\}$ alkalmas $v, w, z \in V \setminus \{u\}$ csúcsokra.

Bizonyítás: Ha $|E_h(u)| \leq 1$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az állítás teljesül. Ha $|E_h(u)| = 2$, akkor a két hiperélnek van közös pontja az u-n kívül is, mert különben a két hiperélnek egyetlen közös pontja lenne, ami mindkettőnek a fejpontja, vagyis I_0-t alkotnának. Tehát $|E_h(u)| = 2$ esetén (b) teljesül.
Tegyük fel, hogy $|E_h(u)| \geq 3$ és legyen e_1, e_2, e_3 három olyan hiperél, amelyeknek u a fejpontja. Mivel $h(e_1) = h(e_2)$, így létezik egy $v \in V$ csúcs, amely mindkettőnek pontja. Hasonlóan e_2 és e_3 esetén is létezik egy $w \in V$ csúcs, amely mindkét hiperélnek pontja. Belátjuk, hogy ha v és w megegyezik, akkor (b) teljesül, ha pedig v és w különböző, akkor (c).
Tegyük fel, hogy v és w megegyezik. Ekkor v pontja az e_1, e_2 és e_3 hiperélek mindegyikének. Ha $|E_h(u)| = 3$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor (b) teljesül. Ha $|E_h(u)| \geq 4$, akkor vegyünk egy tetszőleges $e_4 \in E_h(u) \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ hiperélet. Mivel $h(e_4) = h(e_i)$ teljesül $i = 1{,}2{,}3$ esetén, így az e_4 hiperélnek az e_1, e_2 és e_3 hiperélek mindegyikével van az u-tól különböző közös pontja. Az e_1, e_2 és e_3 hiperéleknek az u-tól és v-től különböző harmadik pontjuk páronként különböző, vagyis $|(e_1 \cup e_2 \cup e_3) \setminus \{u, v\}| = 3$. Ebből következik, hogy e_4-nek csak úgy lehet u-tól különböző közös pontja az e_1, e_2 és e_3 hiperélek mindegyikével, ha $v \in e_4$. Ezzel beláttuk, hogy minden $e \in E_h(u)$ esetén $v \in e$.
Tegyük fel, hogy v és w különböző. Ekkor e_2 két talppontja v és w. Jelölje z az e_1 hiperél u-tól és v-től különböző harmadik pontját. Mivel $h(e_1) = h(e_3)$, így a két hiperélnek van egy u-tól különböző közös pontjuk. Az e_3-nak az egyik talppontja w. Ha $z = w$, akkor e_1 és e_2 megegyezik. Ha e_1 és e_3 u-tól különböző közös pontja z, akkor $\{e_1, e_2, e_3\} = \{vz \to u, vw \to u, wz \to u\}$. Ha $|E_h(u)| = 3$, akkor ezzel beláttuk, hogy (c) teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $|E_h(u)| \geq 4$ és legyen $f \in E_h(u) \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$. Mivel e_1, e_2, e_3 és f fejpontja is u, így az f hiperélnek az e_1, e_2 és e_3 hiperélek mindegyikével van u-tól különböző közös pontja. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha f a v, w és z csúcsok közül legalább kettőt tartalmaz, de ekkor f megegyezik az e_1, e_2 és e_3 hiperélek valamelyikével, ami ellentmondás. Tehát beláttuk, hogy ha v és w különböző, akkor a (c) eset teljesül. $\square$

Ha $E_h(u)$ az üreshalmaz, akkor vegyünk egy tetszőleges u-tól különböző v csúcsot és adjuk hozzá a hipergráfhoz a $wv \to u$ élet minden $w \in V \setminus \{u, v\}$ esetén. Ha u-ra a (b) eset teljesül, akkor létezik $v \in V$, amelyre $v \in e$ minden $E_h(u)$ esetén. Ekkor vegyük hozzá a hipergráfhoz az összes u fejpontú élet, amelynek az egyik talppontja v és még nem éle a hipergráfnak. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott hipergráf továbbra is elkerüli I_0-t, így ezekből következik a következő állítás.

Állítás: Feltehető, hogy minden $u \in V$ esetén pontosan az egyik teljesül:
(a) $E_h(u) = \{vw \to u, wz \to u, vz \to u\}$ alkalmas $v, w, z \in V \setminus \{u\}$ csúcsokra.
(b) $E_h(u) = \{vw \to u : w \in V \setminus \{u, v\}\}$ alkalmas $v \in V \setminus \{u\}$ esetén.

Folytatjuk a tétel bizonyítását. Jelölje V_a azokat az $u \in V$ csúcsokat, amelyre $E_h(u) = \{vw \to u, wz \to u, vz \to u\}$ alkalmas $v, w, z \in V \setminus \{u\}$ csúcsokra, valamint V_b azokat az u csúcsokat, amelyekre $E_h(u) = \{vw \to u : w \in V \setminus \{u, v\}\}$ alkalmas $v \in V$ esetén. Legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a V csúcshalmaz elemeinek egy tetszőleges sorrendje. Egy $e \in E(H)$ hiperél esetén legyen $h(e)$ az e fejpontja, $t_1(e)$ a kisebb indexű talppontja és $t_2(e)$ a nagyobb indexű talppontja. A hiperéleket három csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy a fejpontja és a talppontjaik milyen sorrendben követik egymást. Jelölje E_i azokat a hiperéleket, amelyeknek az i. legkisebb indexű pontja a fejpontja. Vegyük a kék, piros, zöld és sárga színeket. Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. A következőkben megadunk egy jó 4-színezést.
1. lépés: A legkisebb indexű csúcstól elindulva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan E_3-beli hiperél, amelynek v_i a fejpontja és egyszínű kék. Ha nincs ilyen hiperél, akkor egyszerűen továbblépünk a következő csúcsra. Ha igen, akkor a v_i csúcsot pirosra színezzük és továbblépünk a v_{i+1} csúcsra.
2. lépés: A legnagyobb indexű csúcstól elindulva visszafelé haladva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan E_1-beli hiperél, amelynek nincs zöld színű csúcsa. Ha nem létezik ilyen hiperél, akkor továbblépünk a v_{i-1} csúcsra. Ha létezik ilyen hiperél, akkor v_i csúcsot zöldre színezzük és továbblépünk a következő csúcsra.
3. lépés: A legkisebb indexű csúcstól elindulva minden v_i csúcs esetén megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan E_2-beli hiperél, amelynek v_i a fejpontja és minden pontja kék színű. Ha nem létezik, akkor továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Ha létezik ilyen hiperél, akkor a v_i csúcsot sárgára színezzük és továbblépünk a következő csúcsra.

Állítás: Az 1. lépés végén nincs egyszínű piros hiperél és nincs egyszínű kék E_3-beli hiperél.
Bizonyítás: Könnyen ellenőrizhető, hogy az 1. lépésben minden egyszínű kék E_3-beli hiperélnek legalább az egyik csúcsát pirosra színezzük, vagyis nem lehet egyszínű kék E_3-beli hiperél az 1. lépés végén. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egyszínű piros hiperél az 1. lépés végén, jelöljön e egy ilyen hiperélet. Mivel e egyszínű piros az 1. lépés végén, így a fejpontjának vizsgálatakor az e hiperél $h(e)$-nél kisebb indexű pontjai már piros színűek. A $h(e)$ csúcsot pirosra színeztük, így létezik egy $f \in E_3$ hiperél, aminek a fejpontja $h(e)$ és egyszínű kék volt a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor. Mivel f-nek nincs $h(e)$-nél nagyobb indexű pontja, valamint f összes pontja kék és e minden $h(e)$-nél kisebb indexű pontja piros a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor, így e és f egyetlen közös pontja $h(e)$, ami mindkét hiperélnek a fejpontja, ez pedig ellenmond annak, hogy H nem tartalmazza I_0-t részhipergráfként. Tehát nincs egyszínű piros hiperél az 1. lépés végén. $\square$

Állítás: Az 2. lépés végén nincs egyszínű piros és nincs egyszínű zöld hiperél, valamint nem lehet egy $E_1 \cup E_2$-beli hiperél egyszínű kék.

Bizonyítás: Könnyen ellenőrizhető, hogy egy $E_1 \cup E_2$-beli hiperél nem lehet egyszínű kék, mivel az 1. lépés végén minden E_3-beli hiperélnek lesz piros pontja, valamint a 2. lépésben minden E_1-beli hiperélnek legalább az egyik pontját zöldre színezzük. Tudjuk, hogy az 1. lépés végén nincs egyszínű piros hiperél és a 2. lépésben csak zöld színt használunk, így nem keletkezhet egyszínű piros hiperél. Elegendő belátni, hogy 2. lépés végén nincs egyszínű zöld hiperél. Tegyük fel indirekt, hogy a 2. lépés végén van egyszínű zöld hiperél és jelöljön e egy ilyen hiperélet. Az e hiperél egyszínű zöld a 2. lépés végén, ami csak úgy lehetséges, ha a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor az e hiperél összes $h(e)$-nél nagyobb indexű csúcsa már zöld színű. A $h(e)$ csúcsot zöldre színeztük, így létezik egy $f \in E_1$ hiperél, aminek a fejpontja $h(e)$ és f minden pontja zöldtől különböző színű volt a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor. Az f hiperélnek nincs $h(e)$-nél kisebb indexű csúcsa és minden csúcsa zöldtől különböző színű a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor, így az e és f hiperélnek egyetlen közös pontja $h(e)$, ami mindkét hiperélnek fejpontja, ez pedig ellentmondás. Tehát nincs egyszínű zöld hiperél a 2. lépés végén. □

Állítás: A 3. lépés végén nincs egyszínű hiperél.

Bizonyítás: Az előző állításból következik, hogy ha egy hiperél egyszínű a 3. lépés előtt, akkor az csak kék színű lehet és E_2-beli. A 3. lépés definíciójából adódik, hogy minden ilyen hiperélnek lesz sárga színű pontja. Tehát elegendő belátni, hogy a 3. lépés során nem keletkezik egyszínű sárga hiperél. Mivel csak kék színű csúcsokat színezünk sárgára és minden $E_1 \cap E_3$-beli hiperélnek van kéktől különböző színű csúcsa a 2. lépés végére, így nem keletkezhet egyszínű sárga $E_1 \cap E_3$-beli hiperél. Belátjuk, hogy E_2-beli hiperél sem lehet egyszínű sárga a színezés végén. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egyszínű sárga E_2-beli hiperél és legyen e egy ilyen hiperél. Az e hiperél csak úgy lehet egyszínű sárga a színezés végén, ha a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor $t_1(e)$ már sárga színű. Mivel a $h(e)$ csúcsot sárgára színeztük, így létezik egy $f \in E_2$ hiperél, amire $h(f) = h(e)$ és f összes pontja kék színű a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor. Mivel e és f fejpontja megegyezik, így van egy a $h(e)$ csúcstól különböző közös csúcsuk is, ami csak $t_2(e)$ lehet, mert $t_1(e)$ sárga, $t_1(f)$ kék színű a $h(e)$ csúcs vizsgálatakor. Tehát e és f nagyobb indexű talppontja megegyezik. Ekkor két esetet különböztetünk meg. Ha $h(e) \in V_a$, akkor $g = [t_1(f)t_1(e) \to h(e)] \in E(H)$. Tudjuk, hogy a $t_1(e)$ sárga, $t_1(f)$ és $h(e)$ kék színű a $h(e)$ csúcs vizsgálata előtt, amiből következik, hogy a 3. lépés előtt g egyszínű kék volt. A g két talppontja, $t_1(e)$ és $t_1(f)$ a g fejpontjánál, a $h(e)$ csúcsnál kisebb indexű, vagyis $g \in E_3$. Ezek alapján g egy E_3-beli hiperél, ami egyszínű kék a 3. lépés előtt, ez pedig ellentmondás. Feltehetjük, hogy $h(e) \in V_b$. Mivel v_n nem lehet E_2-beli hiperélnek a fejpontja, így v_n színe soha nem lesz sárga, amiből következik, hogy $t_2(e)$ egy v_n-től különböző csúcs. Ekkor $h(e) \in V_b$ miatt $g' = [t_2(e)v_n \to h(e)] \in E(H)$. A v_n csúcs nem lehet E_1-beli hiperélnek fejpontja, amiből

következik, hogy nem lehet zöld színű a 2. lépés végén. Tudjuk, hogy $t_2(f)$ és $h(e)$ is kék színű volt a 2. lépés végén. Ezek alapján g' egy olyan E_1-beli hiperél, amelynek nincs zöld színű csúcsa a 2. lépés végén, ami ellentmondás. Tehát nincs egyszínű sárga hiperél a színezés végén. □
Ezzel beláttuk, hogy a megadott színezés H egy jó 4-színezését adja.□

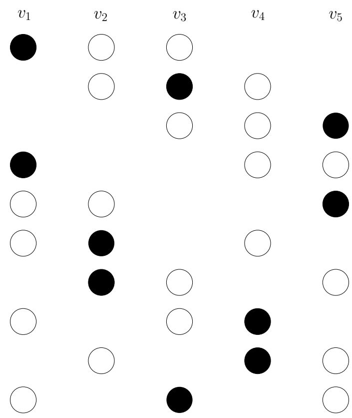
Az R_4 hipergráf elkerüléséről szóló 3.4 Tétel a 2.9 Tétel egy speciális esete 3-uniform hipergráfokra.

3.4. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf. Tegyük fel, hogy H nem tartalmazza részhipergráfként az R_4 hipergráfot, azaz ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor a v csúcs vagy mindkettőnek fejpontja, vagy mindkettőnek talppontja. Ekkor a H hipergráfnak létezik jó 3-színezése.*

A következő példa mutatja, hogy vannak olyan $2 \to 1$ hipergráfok, amelyek kielégítik a 3.4 Tétel feltételeit és a kromatikus számuk legalább három.

$$\begin{aligned} V(R) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(R) &= \{v_2v_3 \to v_1, v_2v_4 \to v_3, v_3v_4 \to v_5, v_4v_5 \to v_1, v_1v_2 \to v_5, \\ &\quad v_1v_4 \to v_2, v_3v_5 \to v_2, v_1v_3 \to v_4, v_2v_5 \to v_4, v_1v_5 \to v_3\} \end{aligned}$$

Az R hipergráfot a 3.2 ábra szemlélteti, ahol minden sor egy hiperélet jelöl, a fekete pontok a hiperél fejpontjai, valamint a fehér pontok a hiperél talppontjai. Könnyen



3.2. ábra. R hipergráf

ellenőrizhető, hogy R elkerüli az R_4 hipergráfot és a kromatikus száma három.

Az I_0 és R_4 hipergráfok külön-külön való kitiltása nem garantál 2-színezhetőséget, ugyanakkor ha mindkét hipergráfot elkerüljük, akkor az már elégséges feltétele a 2-színezhetőségnek.

3.5. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy H elkerüli I_0-t és R_4-et is, vagyis ha $e_1, e_2 \in E(H)$ és $e_1 \cap e_2 = \{v\}$, akkor v mindkét hiperélnek a talppontja. Ekkor a H hipergráfnak létezik jó 2-színezése.*

Bizonyítás: Vegyük a piros és kék színeket, valamint legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a H csúcsainak egy tetszőleges sorrendje. A következőkben egy e hiperél fejpontját jelölje $h(e)$, kisebb indexű talppontját $t_1(e)$, nagyobb indexű talppontját $t_2(e)$.
Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. A v_1 csúcstól indulva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan hiperél, amelynek a fejpontja v_i és a hiperél egyszínű kék. Ha nem létezik ilyen hiperél, akkor továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Ha létezik ilyen hiperél, akkor a v_i csúcsot átszínezzük pirosra és ezután lépünk tovább a v_{i+1} csúcsra. Vegyük észre, hogy az így kapott színezésben minden hiperélnek van piros csúcsa, vagyis egyik hiperél sem lehet egyszínű kék. Elegendő belátni, hogy nincs egyszínű piros hiperél. Tegyük fel indirekt, hogy létezik e hiperél, ami egyszínű piros a színezés végén. Mivel minden csúcs legfeljebb egyszer színeződik pirosra, az e hiperél csak úgy lehet egyszínű piros, hogy ha sorban minden csúcsát pirosra színezzük. Tehát az e hiperél legnagyobb indexű pontjának pirosra színezésekor a másik két csúcsa már piros színű. Jelölje v az e hiperél legnagyobb indexű pontját. Mivel a v csúcsot pirosra színeztük, így volt egy $f \in E(H)$ hiperél, amelyre $h(f) = v$ és f egyszínű kék volt a v csúcs vizsgálatakor. Ha v az e fejpontja, akkor e és f egyetlen közös pontja v, mivel a v csúcs vizsgálatakor az e hiperél másik két pontja piros színű, az f hiperél másik két pontja kék színű. Tehát az e és f hiperéleknek egyetlen közös pontja van, ami mindkét hiperélnek a fejpontja, ez pedig ellentmondás. Tegyük fel, hogy v az e talppontja. Ekkor szintén v az egyetlen közös pontjuk, ami az egyik hiperélnek talppontja, a másik hiperélnek pedig fejpontja, ami szintén ellentmondás. Tehát nincs egyszínű piros hiperél. Ezzel beláttuk, hogy a kapott színezés egy jó 2-színezése H-nak. $\square$

4. fejezet

Egy további általánosítás

Az 1.2 Tétel egy lehetséges általánosítása elégséges feltételt ad a polikromatikus m-színezhetőségre [4].

4.1. Tétel. *[4] Legyen $H_1 = (V, E_1)$ és $H_2 = (V, E_2)$ két hipergráf ugyanazon a véges V csúcshalmazon és tegyük fel, hogy minden $e_1 \in E_1$ és $e_2 \in E_2$ esetén e_1 és e_2 nem metszi egymást vagy legalább két közös pontjuk van. Ekkor létezik a csúcsoknak egy olyan színezése két színnel (piros és kék), amelyben minden $e_1 \in E_1$ hiperélnek van kék csúcsa és minden $e_2 \in E_2$ hiperélnek van piros csúcsa.*

Bizonyítás: Legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a V csúcshalmaz elemeinek egy tetszőleges sorrendje. Egy $e \in E_1 \cup E_2$ hiperél esetén jelölje $p_{min}(e)$ a hiperél legkisebb indexű pontját és $p_{max}(e)$ a legnagyobb indexű pontját. Színezzük kékre azokat a v csúcsokat, amelyekre létezik $e_1 \in E_1$ hiperél, hogy $p_{max}(e_1) = v$, a többi csúcsot pedig színezzük pirosra. Ekkor minden E_1-beli hiperél legnagyobb indexű pontja kék, vagyis minden E_1-beli hiperélnek van kék csúcsa. Belátjuk, hogy minden E_2-beli hiperélnek van piros csúcsa. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $e_2 \in E_2$ él, ami egyszínű kék. Mivel a $p_{min}(e_2)$ csúcs színe kék, így létezik egy $e_1 \in E_1$ hiperél, amelynek a legnagyobb indexű pontja $p_{min}(e_2)$. Ekkor $p_{max}(e_1) = p_{min}(e_2)$, vagyis az $e_1 \in E_1$ és az $e_2 \in E_2$ hiperélnek pontosan egy közös pontja van, ami ellentmondás. Tehát a kapott színezésben minden E_1-beli hiperélnek van kék csúcsa és minden E_2-beli hiperélnek van piros csúcsa. $\square$

A 4.1 Tétel egy általánosítása az 1.2 Tételnek, hiszen ha a 4.1 Tételben szereplő H_1 és H_2 hipergráfok ugyanazt a H hipergráfot jelölik, akkor pontosan az 1.2 Tételt kapjuk. A következő tétel a 4.1 Tétel egy általánosabb alakja, amely következményeként egy elégséges feltételt kapunk polikromatikus m-színezhetőségre.

4.2. Tétel. *[4] Legyenek $H_1, H_2, ..., H_m$ hipergráfok ugyanazon a V csúcshalmazon. Tegyük fel, hogy minden $k = 2, ..., m$ és minden $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_k}$ esetén $|e_{i_1} \cap e_{i_2} \cap ... \cap \cap e_{i_k}| \notin \{1, 2, ..., k-1\}$, ahol $e_{i_j} \in E(H_{i_j})$ minden $j \in \{1, ..., k\}$ esetén. Vegyünk m különböző színt, amelyeket jelöljön $c_1, ..., c_{m-1}$ és c_m. Ekkor létezik a csúcsoknak egy* *olyan színezése m színnel, hogy minden $k = 1,2,...,m$ esetén a H_k hipergráf minden hiperélének van c_k színű csúcsa.*

Bizonyítás: A bizonyítás m szerinti indukcióval történik. Az $m = 2$ esetben a 4.1 Tétel alapján teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy $m+1$-nél kevesebb hipergráf esetén teljesül az állítás és most tekintsük azt az esetet, amikor a hipergráfok száma $m+1$. Legyen $v_1, v_2, ..., v_n$ a V csúcshalmaz elemeinek egy tetszőleges sorrendje. Egy $e \in \bigcup_{i=1}^{m+1} E(H_i)$ hiperél esetén jelölje $p_{min}(e)$ a hiperél legkisebb indexű pontját és $p_{max}(e)$ a legnagyobb indexű pontját. Jelölje V_{m+1} azon csúcsok halmazát, amelyek valamely H_{m+1}-beli hiperélnek a legkisebb indexű pontjai, vagyis $V_{m+1} = \{p_{min}(e) : e \in \in E(H_{m+1})\}$. Legyen $V' = V \setminus V_{m+1}$ és vegyük a $H'_i = (V', E'_i)$ hipergráfokat minden $i = 1,2,...,m$ esetén, ahol $E'_i = \{e \setminus V_{m+1} : e \in E(H_i)\}$. Meggondolható, hogy $e \in \in \bigcup_{i=1}^{m} E(H_i)$ esetén $e' = e \setminus V_{m+1}$ nem lehet az üreshalmaz. Ha e' üres lenne, akkor $e \subset V_{m+1}$ és ekkor létezik $f \in E(H_{m+1})$ hiperél, amelyre $p_{max}(e) = p_{min}(f)$, amiből következik, hogy $|e \cap f| = 1$, ami pedig ellentmond a feltételnek a $k = 2$ esetben.
Belátjuk, hogy a $H'_1, H'_2, ..., H'_m$ hipergráfok a V' csúcshalmazon teljesítik a tétel feltételeit és így alkalmazható az indukciós feltevés. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $k \in \{2, ..., m\}$, $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1,2,...,m\}$ és léteznek $e'_{i_1}, e'_{i_2}, ..., e'_{i_k}$ hiperélek, amelyekre $1 \leq |e'_{i_1} \cap e'_{i_2} \cap ... \cap e'_{i_k}| \leq k-1$, ahol $e'_{i_j} \in E'_{i_j}$ minden $j = 1,2,...,k$ esetén. Legyenek $e_{i_1} \in E(H_{i_1}), e_{i_2} \in E(H_{i_2}), ..., e_{i_k} \in E(H_{i_k})$ azok az eredeti hiperélek, amelyekre $e'_{i_j} = = e_{i_j} \setminus V_{m+1}$. Legyen $X = \bigcap_{j=1}^{k} e_{i_j}$ és $X' = \bigcap_{j=1}^{k} e'_{i_j}$. Ha $X = X'$, akkor $1 \leq |X| \leq k-1$, vagyis az eredeti hipergráfokra sem teljesülnének a feltételek, ami ellentmondás. Tehát X' az X egy valódi részhalmaza. Legyen u az $X \setminus X'$ halmaz legnagyobb indexű pontja. Tudjuk, hogy $X' = \bigcap_{j=1}^{k} e'_{i_j} = \bigcap_{j=1}^{k} e_{i_j} \setminus V_{m+1} = \left(\bigcap_{j=1}^{k} e_{i_j}\right) \setminus V_{m+1} = X \setminus V_{m+1}$, amiből következik, hogy $u \in V_{m+1}$. Mivel $u \in V_{m+1}$, így létezik $e_{m+1} \in E(H_{m+1})$ hiperél, hogy $p_{min}(e_{m+1}) = u$. Az u csúcs az $X \setminus X'$ halmaz legnagyobb indexű pontja, valamint $p_{min}(e_{m+1})$ az e_{m+1} legkisebb indexű pontja, amiből következik, hogy $(X \setminus \setminus X') \cap e_{m+1} = \{u\}$. Tehát $|e_{m+1} \cap (X \setminus X')| = 1$ és $|e_{m+1} \cap X'| \leq |X'| \leq k-1$, amiből következik, hogy $1 \leq |e_{i_1} \cap e_{i_2} \cap ... \cap e_{i_k} \cap e_{m+1}| \leq k$, ez pedig ellentmondás.
Tehát a $H'_1, H'_2, ..., H'_m$ hipergráfokra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, miszerint a V' csúcshalmaz kiszínezhető a $c_1, c_2, ..., c_m$ színekkel úgy, hogy minden $i = 1, ..., m$ esetén a H'_i hipergráfnak minden hiperéle tartalmaz c_i színű csúcsot. Mivel minden $e \in E(H_i)$ hiperél esetén $e \setminus V'$ nemüres és tartalmaz c_i színű csúcsot, így elmondható, hogy a H_i hipergráfnak minden hiperéle tartalmaz c_i színű csúcsot, ahol $i=1, ..., m$. A V_{m+1} beli csúcsokat pedig kiszínezve a c_{m+1} színnel olyan színezést kapunk, amelyben a H_{m+1} hipergráf minden hiperéle tartalmaz c_{m+1} színű csúcsot. Ezzel $m+1$ hipergráf esetén is kaptunk egy megfelelő színezést. □

Amennyiben a 4.2 Tételben a $H_1, H_2, ..., H_m$ hipergráfok ugyanazt a H hipergráfot jelölik, akkor a tétel következményeként kapunk egy elégséges feltételt a polikromatikus m-színezésre.

4.3. Következmény. *Legyen H egy hipergráf és tegyük fel, hogy minden $k = 1, ..., m$ és minden $e_1, e_2, ..., e_k \in E(H)$ esetén az $e_1 \cap e_2 \cap ... \cap e_k$ metszet üres vagy legalább k elemű. Ekkor a H hipergráf polikromatikusan m-színezhető.*

Erdős azt sejtette, hogy a 4.2 Tétel következő erősebb változata is igaz.

4.4. Sejtés. *[4] Legyenek $H_1, H_2, ..., H_m$ hipergráfok ugyanazon a V csúcshalmazon. Tegyük fel, hogy minden $k = 2, ..., m$, $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1,2, ..., m\}$ és $e_{i_1} \in E(H_{i_1}), e_{i_2} \in$ $\in E(H_{i_2}), ..., e_{i_k} \in E(H_{i_k})$ esetén $|e_{i_1} \cap e_{i_2} \cap ... \cap e_{i_k}| \neq k-1$. Ekkor a V csúcshalmaz kiszínezhető a $c_1, c_2, ..., c_m$ színekkel, hogy minden $i = 1,2, ..., m$ esetén a H_i hipergráf minden hiperéle tartalmazzon c_i színű csúcsot.*

Irodalomjegyzék

[1] Alex Cameron. Extremal numbers for directed hypergraphs with two edges. Electron. J. Combin., 25(1): P1.56, 2018.

[2] Balázs Keszegh. Coloring directed hypergraphs. Discrete Math., 346 (9), 2023.

[3] Péter L. Erdős. Splitting property in infinite posets. Discrete Math., 163 (1–3) (1997), pp. 251-256

[4] Péter L. Erdős. Some generalizations of property B and the splitting property. volume 3, pages 53–59. 1999. Combinatorics and biology (Los Alamos, NM, 1998).

[5] László Lovász. Combinatorial Problems and Exercises AMS Chelsea Pub., Providence, RI (2007)

[6] Dong Yeap Kang, Tom Kelly, Daniela Kühn, Abhishek Methuku, Deryk Osthus. A proof of the Erdős-Faber-Lovász conjecture. 2021. arXiv:2101.04698

[7] P. Erdős, On a combinatorial problem, Nordisk Matematisk Tidskrift, 11 (1963), pp. 5–10, 40.

[8] P. Erdős, On a combinatorial problem. II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 15 (1964), pp. 445–447.

[9] Nina Kamčev, Shoham Letzter, Alexey Pokrovskiy. The Turán density of tight cycles in three-uniform hypergraphs. 2022. arXiv:2209.08134

[10] Michael A. Henning, Anders Yeo. 2-colorings in k-regular k-uniform hypergraphs. European Journal of Combinatorics, 34 (7), 2013.

[11] L. Lovász, Coverings and colorings of hypergraphs, Proc. 45th Southeastern Conf. Combinatories, Graph Theory, Computing, pages 3-12, 1973.