Rezolvabilitás

Diplomamunka

Székely Ákos

Témavezető: Soukup Lajos

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A felbonthatóság (rezolvabilitás) fogalma E.Hewitt [Hew43] dolgozatában jelent meg először, habár elképzelhető, hogy előtte is aktualitása volt annak a problémának, hogy mikor lehet egy topologikus térben két diszjunkt, sűrű halmazt megadni. Ebben a dolgozatban szerepel a terület egyik központi kérdése: adott, izolált pont nélküli topologikus térben legfeljebb hány diszjunkt, sűrű halmaz adható meg? Többen foglalkozni kezdtek a problémával, mint például W. Sierpiński, J. Ceder, T.Pearson, és sorra sikerült meghatározniuk egy-egy térosztály esetén ezt a számosságot. J. Ceder [Ced64] dolgozata a témakör egyik első, ilyen jellegű eredményeket tartalmazó munkája. Később, a [CP67] dolgozatban több olyan kérdés tevődött fel, mint például az, hogy ω-felbontható tér szükségképpen maximálisan felbontható-e? vagy, hogy maximálisan felbontható faktorral rendelkező szorzattér maximálisan felbontható-e?, melyek központivá váltak az elméleten belül. A velük való foglalkozás során egyre világosabbá vált, hogy az itt felmerülő problémák többsége halmazelméleti természetű és sok esetben csak konzisztenciaeredmények születtek.

Jelen dolgozat első felében egy válogatás található a rezolvabilitás témakörének klasszikus eredményeiből, melyek többségét (esetenként önálló megfontolásokon alapuló) bizonyítással közlünk, és továbbá bemutatásra kerül néhány olyan eredmény és fogalom az utóbbi két évtizedből, főleg Soukup Lajos, Juhász István és Szentmiklóssy Zoltán munkássága nyomán, melyek révén az elmélet több kérdésköre új lendületet kapott. A dolgozat második fele, egy, az újonnan megjelent [Lip24] dolgozat egyik kérédésének megválaszolásából (2.1.7), illetve a felbonthatóság és az úgynevezett pillangópontok vonatkozásában egy újszerű eredmény (2.2.2) ismertetéséből áll.

Köszönöm

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Soukup Lajosnak, nem csak a dolgozat elkészülése alatt nyújtott segítségéért, hanem mindazokért az emúlt években tett erőfeszítéseiért, melyekkel igyekezett hozzásegíteni megannyi halmazelméleti és halmazelméleti topológiai eredmény, módszer és szemlélet elsajátításához.

1. fejezet

1.1. Alapvető definíciók és észrevételek,néhány klasszikus tétel

1.1.1 Definíció. *Legyen* $(X, \mathscr{T})$ *egy topologikus tér,* $p \in X$ *tetszőleges pont. Az alábbiakban felidézzük néhány olyan számosságfüggvény definícióját, melyeket használni fogunk a dolgozat során:*

$$\begin{aligned}
d(X) &= \min\{|Y| : Y \subset X, \bar{Y} = X\},\\
\Delta(X) &= \min\{|U| : \mathrm{U} \in \mathscr{T}_X^+\},\\
w(X) &= \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \mathscr{T} \quad \text{bázis}\},\\
nw(X) &= \min\{|\mathscr{H}| : \mathscr{H} \subset \mathscr{P}(X) \quad \text{hálózat}\},\\
\pi w(X) &= \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \mathscr{T} \quad \pi-\text{bázis}\},\\
\chi(X,p) &= \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \mathscr{T}(p) \text{ bázis}\},\\
\chi(X) &= \sup\{\chi(X,p) : p \in X\},\\
t(X,p) &= \min\{\kappa : \forall A \subset X(p \in \overline{A} \to \exists D \in [A]^{\leq\kappa} : p \in \overline{D})\},\\
t(X) &= \sup\{t(X,p) : p \in X\},\\
\pi\chi(X,p) &= \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \mathscr{T}^+ \wedge \forall U \in \mathscr{T}_X(p)(\exists V \in \mathscr{B} : V \subset U)\},\\
\pi\chi(X) &= \sup\{\pi\chi(X,p) : p \in X\}.
\end{aligned}$$

1.1.2 Definíció. *Legyen* $(X, \mathscr{T})$ *egy topologikus tér és* $\kappa \geq 2$ *egy számosság. Az* X *teret* κ*-felbonthatónak mondjuk, ha léteznek* $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathscr{P}(X)$ *páronként diszjunkt, sűrű részhalmazok. Az* X *tér* κ*-felbonthatatlan, ha nem* κ*-felbontható. A 2-felbontható tereket röviden felbonthatóknak mondjuk. Ha* X $\Delta(X)$*-felbontható, akkor maximálisan felbonthatónak mondjuk.*

1.1.3 Definíció. *Egy $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér* OHI *(open hereditarily irresolvable), ha benne bármely nyílt altér felbonthatatlan.*

1.1.4 Megjegyzés.

(i) A felbonthatóság fogalmába beleérthetnénk, hogy a $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ rendszer uniója az egész tér legyen viszont könnyen látható, hogy egy térre egyidejűleg teljesül vagy nem teljesül az, hogy létezik benne κ db, páronként diszjunkt sűrű halmaz és az, hogy maga az X halmaz partícionálható κ db sűrű részre. Mivel a legtöbb gondolatmenet során sűrűek pároként diszjunkt rendszerét állítjuk elő, tekintet nélkül arra, hogy ezek lefedik-e az egész teret vagy sem, a felbonthatóság fogalmát a fenti alakban mondtuk ki.

(ii) Ha $x \in X$ izolált pont, akkor őt a tér bármely sűrű részhalmaza tartalmazza így ebben az esetben felbonthatóságról nem beszélhetünk. A továbbiakban feltesszük, hogy minden $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér zsufi, azaz nem tartalmaz izolált pontot, és hogy teljesíti a T_0 szétválasztási axiómát. Ezekből speciálisan következik, hogy $|X| \geq \omega$, ugyanis véges T_0 térben mindenképpen van izolált pont.

(iii) A maximális felbonthatóság elnevezés indokolt, ugyanis ha $U \in \mathscr{T}^+ : |U| = \Delta(X)$, akkor amennyiben $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ páronként diszjunkt, sűrű részhalmazok egy rendszere, úgy $\kappa \leq \sum\{|U \cap D_\alpha| : \alpha < \kappa\} \leq |U| = \Delta(X)$, vagyis $\Delta(X)$-nél több, páronként diszjunkt sűrű halmazból álló rendszer nem is adható meg az X térben.

1.1.5 Állítás. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér, $\kappa \geq 2$ egy számosság és $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ κ-felbontható alterek egy rendszere. Ekkor az $\bigcup \mathscr{A}$ és következésképpen az $\overline{\bigcup \mathscr{A}}$ altér is κ-felbontható.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ az alterek egy felsorolása továbbá $\forall \alpha < \lambda$ esetén legyen $A_\alpha = \bigcup\{D^\alpha_\beta : \beta < \kappa\}$ egy sűrű alterekre való partícionálása az A_α altérnek. Minden $\beta < \kappa$ esetén legyen

$$D_\beta = \bigcup\{D^\alpha_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma : \alpha < \lambda\}.$$

Ha $\alpha < \lambda, \beta < \kappa$ esetén bevezetjük a $C^\alpha_\beta = D^\alpha_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$ jelölést, akkor egyrészt $D_\beta = \bigcup\{C^\alpha_\beta : \alpha < \lambda\}$, másrészt rögzített $\beta < \kappa$ mellett a $\{C^\alpha_\beta : \alpha < \lambda\}$ halmazok, rögzített $\alpha < \lambda$ mellett a $\{C^\alpha_\beta : \beta < \kappa\}$ halmazok páronként diszjunktak amiből látható, hogy a $\{D_\beta : \beta < \kappa\}$ halmazok is páronként diszjunktak. Mivel $\bigcup\{C^\alpha_\beta : \beta < \kappa\} = A_\alpha \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$, következik, hogy $\bigcup\{D_\beta : \beta < \kappa\} = \bigcup \mathscr{A}$. Annak belátása maradt még hátra, hogy a $D_\beta \subset \bigcup \mathscr{A}$ alterek sűrűek. Legyen $U \subset X$ nyílt, melyre $U \cap \bigcup \mathscr{A} \neq \varnothing$ és legyen $\beta < \kappa$ tetszőleges. Legyen $\alpha < \lambda$ a legkisebb olyan rendszám, melyre $U \cap A_\alpha \neq \varnothing$. Ekkor $D^\alpha_\beta \cap (U \cap A_\alpha) \neq \varnothing$ és $U \cap \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma = \varnothing$ miatt ez a halmaz diszjunkt a $\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$ halmaztól, amiből $C^\alpha_\beta \cap U \neq \varnothing$ majd

$D_\beta \cap U \neq \emptyset$ következik. Tehát $\{D_\beta : \beta < \kappa\}$ páronként diszjunkt, sűrű alterekre való felbontása az $\bigcup \mathscr{A}$ altérnek. Ezek nyilván sűrűek $\overline{\bigcup \mathscr{A}}$-ban is, így a $\overline{\bigcup \mathscr{A}} \setminus \bigcup \mathscr{A}$ részt hozzávéve pl. D_0-hoz, kapjuk $\overline{\bigcup \mathscr{A}}$ egy felbontását. ∎

1.1.6 Következmény. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér, $\kappa \geq 2$ egy számosság. Ekkor az X térben van legbővebb zárt, κ-felbontható altér.*

Bizonyítás. Az $\mathscr{A} = \{A \subset X : A\ \kappa\text{-felbontható}\ \}$ altérrendszerre alkalmazva az előző állítást kapjuk, hogy $\overline{\bigcup \mathscr{A}}$ κ-felbontható és nyilvánvalóan ez a legbővebb. ∎

1.1.7 Megjegyzés. *Legyen φ egy topologikus terekre vonatkozó tulajdonság (pl. $\varphi(X) \equiv$ „X metrizálható" vagy „X megszámlálhatóan kompakt"). Ha φ öröklődik X „szép" altereire (pl.nyílt alterekre vagy nyílt alterek lezártjára), akkor a φ tulajdonságú terek felbonthatósági tulajdonságainak vizsgálatára sokszor alkalmazott a következő eljárás: ha minden φ tulajdonságú X tér tartalmaz pl. κ-felbontható alteret, akkor X-ben sűrűn vannak a κ-felbontható alterek és így az X által tartalmazott, legbővebb κ-felbontható, zárt altér nem lehet más mint maga X. Ennek illusztrálására az alábbiakban megnézzük néhány jól ismert tértípus felbonthatósági tulajdonságait.*

Hasznos észrevétel az alábbi egyszerű lemma:

1.1.8 Lemma. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér és tegyük fel, hogy $\pi w(X) \leq \Delta(X)$. Ekkor X maximálisan felbontható.*

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \Delta(X)$, $\lambda = \pi w(X)$, $\langle B_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ a tér egy π-bázisa valamint rögzítsük $\lambda \times \kappa$ egy $\langle \langle \xi_\alpha, \zeta_\alpha \rangle : \alpha < \kappa \rangle$ egy bijektív felsorolását. Transzfinit rekurzióval definiálunk egy $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ sorozatot. Ha $\alpha < \kappa$ és $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ adott, akkor legyen

$$x_\alpha \in B_{\xi_\alpha} \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

tetszőleges (a halmaz amiből választanunk kell nem üres, hiszen $|B_{\xi_\alpha}| \geq \kappa$). Ezután $\zeta < \kappa$-ra legyen $D_\zeta = \{x_\alpha : \zeta_\alpha = \zeta\}$. Minden $\xi < \lambda$-hoz $\exists! \alpha < \kappa : \langle \xi, \zeta \rangle = \langle \xi_\alpha, \zeta_\alpha \rangle$ és erre az α rendszámra $x_\alpha \in D_\zeta \cap B_\xi$, tehát D_ζ elmetszi a π-bázis minden elemét ami miatt sűrű. A $\{D_\zeta : \zeta < \kappa\}$ halmazok páronként diszjunktak, mivel bármely $\alpha < \kappa$ esetén x_α csak D_{ζ_α}-ban van benne a halmazok közül. Tehát az X tér κ-felbontható. ∎

1.1.9 Állítás. *Ha $(X, \mathscr{T})$ egy olyan topologikus tér, melyre $\pi\chi(X) \leq \Delta(X)$, akkor X maximálisan felbontható. Speciálisan bármely (X, d) metrikus tér maximálisan felbontható.*

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \Delta(X)$. Először jegyezzük meg, hogy ha $U \in \mathscr{T}^+$, akkor $\pi\chi(U) \leq \pi\chi(X) \leq \Delta(X) \leq \Delta(U)$, tehát a fenti megjegyzés értelmében elég belátni, hogy X tartalmaz κ-felbontható alteret. Legyen $U \in \mathscr{T}_X^+$ olyan, melyre $|U| = \kappa$. Ekkor $\forall V \subset U$ nyíltra $|V| = \kappa$, mivel X bármely nyílt részhalmaza $\geq \kappa$ számosságú. Mivel $\pi\chi(U) \leq \kappa$ ezért létezik $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}_U$ π-bázis, mely $\leq \kappa$ számosságú (U minden pontjában vehetünk egy $\leq \kappa$ számosságú lokális π-bázis és ezek uniója megfelel). Így az U nyílt altérre $\pi w(U) \leq \Delta(U) = \kappa$ teljesül tehát alkalmazható az 1.1.8 Lemma amiből kapjuk U κ-felbonthatóságát.

Ha (X, d) metrikus tér, akkor bármely $U \subset X$ nyílt altérre $|U| \geq \omega$ (megállapodásunk szerint a vizsgált tereink zsufik) és mivel $\chi(X) = \omega$, az általános tételből kapjuk, hogy X maximálisan felbontható. ■

A következő tételhez szükségünk lesz az alábbi lemmára.

1.1.10 Lemma. *Ha $(X, \mathscr{T})$ egy megszámlálhatóan kompakt, T_3 tér, akkor $\Delta(X) \geq 2^\omega$.*

Bizonyítás. Rekurzívan konstruálunk egy $\langle V_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ nyíltakból álló Cantor-sémát és egy $\langle x_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ kiválasztófüggvényt az alábbi tulajdonságokkal:
(i) $V_\varnothing = X$,
(ii)ha $s, t \in 2^{<\omega} : s \subsetneq t$ esetén $\overline{V_t} \subset V_s$ (az ágak mentén szigorúan csökkenő a séma),
(iii)ha $s, t \in 2^{<\omega} : |s| = |t|$, akkor $V_s \cap V_t = \varnothing$ (azonos szinten levők diszjunktak),
(iv)végül $\forall s \in 2^{<\omega}$-re $x_s \in V_s$.

Ha valamely $s \in 2^{<\omega}$ elemre $V_s \subset X$ adott nem üres, nyílt és ismerjük az

$$\{x_{s\restriction k} : k \leq \operatorname{Dom} s\}$$

sorozatot, akkor legyen $x_{s^\frown\langle 0\rangle}, x_{s^\frown\langle 1\rangle} \in V_s \setminus \{x_{s\restriction k} : k \leq \operatorname{Dom} s\}$ két különböző pont és legyen $x_{s^\frown\langle i\rangle} \in V_{s^\frown\langle i\rangle} \subset \overline{V_{s^\frown\langle i\rangle}} \subset V_s$ $(i = 0, 1)$ olyan nyíltak, melyekre $\overline{V_{s^\frown\langle 0\rangle}} \cap \overline{V_{s^\frown\langle 1\rangle}} = \varnothing$. Ha ekképpen folytatjuk a sémák definícióját, akkor világos, hogy az (i)-(iv) tulajdonságok, amennyiben az eddig definiált elemekre fennáltak, úgy továbbra is érvényben maradnak. Ha $f \in 2^\omega$, akkor az $A_f := \{x_{f\restriction n} : n < \omega\} \in [X]^\omega$ halmazra $A'_f \neq \varnothing$, másrészt $A'_f \subset Z_f = \bigcap\{\overline{V_{f\restriction n}} : n < \omega\}$. (iii) miatt $f, g \in 2^\omega, f \neq g$ esetén $Z_f \cap Z_g = \varnothing$. Így $\{Z_f : f \in 2^\omega\}$ páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai az X térnek amiből $|X| \geq 2^\omega$ következik. ■

1.1.11 Állítás. *Ha $(X, \mathscr{T})$ egy megszámlálhatóan kompakt, T_3 tér, akkor X ω_1-felbontható.*

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy ha $U \subset X$ nem üres, nyílt, akkor mivel X zsufi, $\overline{U}$ is egy zsufi, megszámlálhatóan kompakt, T_3 tér és a regularitás miatt X minden nyílt altere tartalmaz ilyen alteret. Így 1.1.5 miatt elég belátni, hogy X, vagyis egy megszámlálhatóan kompakt, T_3 tér tartalmaz ω_1-felbontható alteret.

Ennek igazolására transzfinit rekurzióval konstruálunk egy $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ X altereiből álló csökkenő sorozatot. Legyen $X_0 = X$. Ha $\alpha < \omega_1$ és $\langle X_\beta : \beta < \alpha \rangle$ adott már, akkor legyen

$$X_\alpha = \bigcup \{ A' : A \in [X_\beta]^\omega \}$$

amennyiben $\alpha = \beta + 1$, illetve legyen

$$X_\alpha = \bigcup \{ A' : A \in [X]^\omega : \forall \gamma < \alpha : |A \setminus X_\gamma| < \omega \}$$

ha α limesz. Indukcióval belátjuk, hogy a sorozat csökkenő, illetve, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re $X_\alpha \subset X$ sűrű. Tegyük fel, hogy $\alpha < \omega_1$ és a $\langle X_\beta : \beta < \alpha \rangle$ kezdőszeletről tudjuk már ezeket. Először ha α limesz, akkor $x \in X_\alpha$-hoz van $A \in [X]^\omega$, melyre $\forall \gamma < \alpha : |A \setminus X_\gamma| < \omega$ amiből $x \in (A \cap X_\gamma)'$ adódik, és így $x \in X_{\gamma+1}$ bármely $\gamma < \alpha$-ra. Ebből kapjuk, hogy $X_\alpha \subset X_\gamma$ minden $\gamma < \alpha$ esetén. Most belátjuk, hogy X_α sűrű. Ehhez legyen $U \subset X$ tetszőleges nyílt és legyen $V \subset X$ olyan nyílt, melyre $\overline{V} \subset U$. Legyen $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ szigorúan növekvő, kofinális sorozat α-ban és minden $n < \omega$ esetén, X_{γ_n} sűrűségét kihasználva, válasszunk egy $a_n \in V \cap X_{\gamma_n}$ pontot, melyekről ráadásul feltehetjük, hogy páronként különbözőek. Ekkor az $A := \{a_n : n < \omega\} \in [X]^\omega$ halmazra teljesül, hogy $A \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \subset X_{\gamma_n}$ és mivel X megszámlálhatóan kompakt, $A' \subset \overline{V}$ nem üres, így $X_\alpha \cap \overline{V} \neq \varnothing$. Tehát $X_\alpha \subset X$ sűrű.

Másodszor tegyük fel, hogy $\alpha = \beta + 1$ és válasszunk egy $x \in X_\alpha$ pontot. Ehhez legyen $A = \{y_n : n < \omega\} \in [X_\beta]^\omega$ melyre $x \in A'$. Amennyiben β limesz, úgy legyen $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ szigorúan növekvő, kofinális sorozat β-ban továbbá minden y_n elemhez legyen $A_n \in [X]^\omega$ olyan, melyre $\forall \gamma < \beta : |A_n \setminus X_\gamma| < \omega$ és $y_n \in A_n'$. Definiáljuk a következő halmazt

$$B := \bigcup \{ X_{\gamma_n} \cap A_n : n < \omega \} \in [X]^\omega.$$

Ekkor $n < \omega$ esetén $|B \setminus X_{\gamma_n}| \leq |\bigcup \{A_k \setminus X_{\gamma_n} : k < n\}| < \omega$ és könnyen látható, hogy $x \in B'$ amiből $x \in X_\beta$ adódik. Tehát limesz β esetén $X_{\beta+1} \subset X_\beta$. Ha β rákövetkező, vagyis ha $\beta = \gamma + 1$, akkor minden $n < \omega$-ra választhatunk olyan $A_n \in [X_\gamma]^\omega$ részt, melyre $y_n \in A_n'$. Ekkor nyilván az $A := \bigcup \{A_n : n < \omega\} \in [X_\gamma]^\omega$ halmazra fennáll, hogy $x \in A'$ vagyis ebben az esetben is végül $X_{\beta+1} \subset X_\beta$ adódik. Az X_β sűrűségét a következőképpen láthatjuk be: legyen $U \subset X$ tetszőleges nyílt és legyen $V \subset X$ olyan nyílt, melyre $\overline{V} \subset U$. Ekkor X_β X-beli sűrűsége miatt van $A \in [X_\beta \cap V]^\omega$ amelyre, X megszámlálható kompaktsága miatt $\varnothing \neq A' \subset \overline{V} \subset U$ teljesül és így $X_{\beta+1} \cap U \neq \varnothing$.

Ha minden $\alpha < \omega_1$ esetén $X_\alpha \setminus X_{\alpha+1} \subset X$ sűrű, akkor $\{X_\alpha \setminus X_{\alpha+1} : \alpha < \omega_1\}$ páronként diszjunkt sűrű alterekből álló, ω_1-es rendszer és így maga X ω_1-felbontható. Ha nem, akkor van $\alpha < \omega_1$ és $U \subset X$ nem üres, nyílt melyre $U \cap (X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}) = \varnothing$. Legyen $V \subset U$ olyan nem üres nyílt, melyre $\overline{V} \subset U$. Ekkor $X_\alpha \cap V = X_{\alpha+1} \cap V$ (és persze ez a metszet

V-nek sűrű része), amiből az következik, hogy minden $x \in X_\alpha \cap V$ elemhez választható egy $A_x \in [X_\alpha \cap V]^\omega$ ($x \in X_{\alpha+1} \cap V$ miatt) melyre $x \in A_x'$. Rekurzívan definiáljuk V részhalmazainak egy $\langle S_n : n < \omega \rangle$ sorozatát a következőképpen: legyen $S_0 := \{p\}$, ahol $p \in V$ tetszőleges, rögzített. Ha S_n adott már, akkor legyen

$$S_{n+1} := S_n \cup \bigcup \{A_x : x \in S_n\}.$$

Végül legyen $S = \bigcup \{S_n : n < \omega\}$. Ekkor $|S| = \omega$, S zsufi és így $\overline{S}$ egy zsufi, megszámlálhatóan kompakt, T_3 tér, melyre $d(\overline{S}) = \omega$. Ismert, hogy bármely Y T_3 tér esetén $\pi w(Y) \leq 2^{d(Y)}$, így $\pi w(\overline{S}) \leq 2^\omega$. Másrészt az előző lemma alapján $\Delta(\overline{S}) \geq 2^\omega$ amiből, a 1.1.8 Lemma felhasználásával adódik, hogy $\overline{S}$ 2^ω-felbontható. ■

Ezzel szemben kompakt terekre több is igaz:

1.1.12 Állítás. *Minden kompakt Hausdorff tér maximálisan felbontható.*

Bizonyítás. Legyen $(X, \mathscr{T})$ kompakt, T_2 tér és $\kappa = \Delta(X)$. Vegyük észre, hogy ha $U \subset X$ nem üres, nyílt, akkor $\overline{U}$ szintén egy zsufi, kompakt T_2 tér amelyre $\Delta(\overline{U}) \geq \Delta(X)$. Mivel a nyílt alterek lezártjai sűrűn vannak a térben, az 1.1.5 állítás miatt elég belátnunk, hogy X tartalmaz κ-felbontható alteret. Feltehető, hogy $|X| = \Delta(X) = \kappa$ (áttérhetünk egy olyan $V \subset X$ nyílt altér lezártjára, melyre $|\overline{V}| = \kappa$). De ekkor $nw(X) = \kappa$ és ismert, hogy kompakt, T_2 terekre a súly és a hálózatsúly megegyezik, tehát $w(X) = \kappa$ is fennáll. De ekkor mivel $\pi w(X) \leq w(X) = \kappa = \Delta(X)$, alkalmazható a 1.1.8 Lemma, amiből kapjuk a tér κ-felbonthatóságát. ■

Az alábbi tétel E.G.Pytkeevtől származik.

1.1.13 Állítás. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy olyan tér, melyre $t(X) < \Delta(X)$. Ekkor X maximálisan felbontható.*

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \Delta(X)$, $\lambda = t(X)$. Jegyezzük meg, hogy ha $U \in \mathscr{T}^+$ és $p \in U$ tetszőleges, akkor $t(X,p) = t(U,p)$ amiből kapjuk, hogy $t(U) \leq t(X)$ és mivel $\Delta(X) \leq \Delta(U)$, így $t(U) < \Delta(U)$ vagyis a tételben megadott tulajdoság öröklődik nyílt alterekre. Elég belátnunk tehát, hogy X tartalmaz κ-felbontható alteret.

A következő észrevétel kulcsfontosságú az alterünk konstrukciójában: ha $Y \in [X]^{<\kappa}$, akkor létezik $Z \subset X \setminus Y$, melyre $Y \subset \overline{Z}$ és $|Z| \leq \max\{\lambda, |Y|\}$, ugyanis: $|Y| < \kappa$ miatt $\text{int}(Y) = \varnothing$ amiből $Y \subset \overline{X \setminus Y}$ adódik. Így minden $y \in Y$ ponthoz választhatunk egy $A_y \in [X \setminus Y]^{\leq \lambda}$ halmazt melyre $y \in \overline{A_y}$. Ekkor $Z := \bigcup \{A_y : y \in Y\}$ megfelel a követelményeknek.

Legyen $\langle \langle \xi_\alpha, \zeta_\alpha \rangle : \alpha < \kappa \rangle$ $\kappa \times \kappa$ egy bijektív felsorolása. Legyen $p \in X$ rögzített. Transzfinit rekurzióval konstruálunk egy $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ X sorozatot, mely X páronként diszjunkt részhalmazaiból áll és melyre teljesül, hogy $A_0 = \{p\}$, bármely $\alpha < \kappa$ esetén $|A_\alpha| \le |\alpha| + \lambda$ valamint $\bigcup\{A_\beta : \beta < \alpha\} \subset \overline{A_\alpha}$. Tegyük fel, hogy $\alpha < \kappa$ és az $\langle A_\beta : \beta < \alpha\rangle$ sorozat teljesíti a megadott feltételeket. Ekkor $Y := \bigcup\{A_\beta : \beta < \alpha\} \in [X]^{|\alpha|+\lambda}$ így a fenti észrevételünk szerint választhatunk egy $A_\alpha \subset X \setminus Y$ halmazt, melyre $|A_\alpha| \le \max\{\lambda, |Y|\} = |\alpha| + \lambda$ és $Y \subset \overline{A_\alpha}$. Ezzel a sorozat konstrukcióját befejeztük. Ezután tetszőleges $\zeta < \kappa$-ra legyen $D_\zeta := \bigcup\{A_\alpha : \zeta_\alpha = \zeta\}$. Mivel az $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ halmazok páronként diszjunktak és adott $\alpha < \kappa$ esetén A_α csak a D_{ζ_α} halmaznak része, látható, hogy a $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ halmazok is páronként diszjunktak. Legyen $A := \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Ekkor minden $\zeta < \kappa$-ra $D_\zeta \subset A$ sűrű: ha $q \in A$ tetszőleges, akkor $\exists! \alpha < \kappa : q \in A_\alpha$. Mivel $|\{\beta : \zeta_\beta = \zeta\}| = \kappa$, van olyan $\beta > \alpha$, melyre $\zeta_\beta = \zeta$ és erre $A_\beta \subset D_\zeta$. De erre a β-ra $q \in \bigcup\{A_\gamma : \gamma < \beta\} \subset \overline{A_\beta}$ amiből $q \in \overline{D_\zeta}$ adódik. Mivel $q \in A$ tetszőleges volt, kaptuk, hogy D_ζ sűrű része A-nak. Tehát az $A \subset X$ altér κ-felbontható és éppen egy ilyen alér létezését kívántuk bizonyítani. ∎

Amit láttuk a kompakt, illetve megszámlálhatóan kompakt terek felbonthatóságával kapcsolatban már ZFC-ben is egészen általános eredményekkel rendelkezünk. Ezen térosztályoknál egy fokkal általánosabb az úgynevezett pszeudokompakt terek osztálya. Egy $(X, \mathscr{T})$ teret pszeudokompaktnak nevezünk, ha bármely $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos. Máig megválaszolatlan kérdés, hogy vajon bármely pszeudokompakt tér felbontható-e? Részleges pozitív eredmények azonban születtek. Ilyenek az alábbiak.

1.1.14 Tétel. (Jan van Mill, [vM16]) *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy $T_{3.5}$, ccc, pszeudokompakt tér. Ekkor X 2^ω-felbontható.*

A következő, A.Illanestől származó tétel azt mondja ki, hogy ha egy tér minden természetes n számra n-felbontható, akkor a tér ω-felbontható. Ez a felbonthatóságnak egy „kompaktság”-típusú tulajdonságát jelenti, aminek természetes általánosítása így hangzana: legyen X egy tér egy $\Delta(X) \ge \kappa \ge \omega$ egy számosság. Ha minden $\lambda < \kappa$ esetén X λ-felbontható, akkor X κ-felbontható. A [JSS06] dolgozat 4.5 számú tétele értelmében ilyen értelemben kompaktság nem teljesül, amennyiben κ rákövetkező számosság. Viszont itt, a szerzők említést tesznek egy korábban már ismert eredményről, mely szerint, ha $cf(\kappa) = \omega$ limeszszámosság, akkor a fenti értelemben vett kompaktság fennáll. A dolgozat 4.8-as számú tétele szerint, ha $\kappa > \omega$ elérhetetlen számosság, akkor ilyenfajta kompaktság általában nem tejesül. Az $\omega < cf(\kappa) < \kappa$ eset maradt megoldatlanul. Az alábbiakban ismertetjük A. Illanes tételének egy rövid bizonyítását.

1.1.15 Tétel. ([Ill96, Theorem 5]) Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér. Ekkor ha bármely $n \in \omega$ esetén X n-felbontható, akkor X ω-felbontható.

Bizonyítás. Mivel az X tér bármely nyílt altere is n-felbontható, minden $n \ge 2$ természetes szám esetén, ezért a 1.1.5 Lemma alapján, elég azt belátni, hogy X tartalmaz

ω-felbontható alteret. Tegyük fel, indirekt módon, hogy X nem tartalmaz ω-felbontható alteret és legyen $D \subset X$ egy tetszőleges sűrű altér. Belátjuk, hogy ekkor van $E \subset D$ sűrű altér, ami OHI. Ha $U \subset X$ nem üres nyílt, akkor ha lenne olyan $D' \subset U \cap D$ sűrű altér, melynek minden sűrű része felbontható, akkor az U altér ω-felbontható: ekkor maga D' felbontható D_0, D_1 sűrű alterekre, majd a $D_1 \subset U \cap D$ sűrű altér is felbontható D_{10}, D_{11} sűrű alterekre és így tovább. Így a feltevésünkből rekurzívan konstuálható lenne $\{D_i : i < \omega\}$ U-beli sűrűknek egy páronként diszjunkt sorozata. Ez viszont ellentmond indirekt feltevésünknek, tehát azt kapjuk, hogy bármely $U \subset X$ nem üres nyílthoz létezik $E_U \subset U \cap D$ sűrű, felbonthatatlan altér. Ha egy ilyen $E_U \subset U$ felbonthatatlan, sűrű altérben vesszük a benne levő legbővebb zárt, felbontható $Z \subset E_U$ alteret, akkor ha $V \subset U$ olyan melyre $V \cap E_U = E_U \setminus Z$, akkor a $V \cap E_U$ altér OHI. Tehát végül ide érkeztük: minden $U \subset X$ nem üres, nyílt altérnek van olyan $V \subset U$ nem üres, nyílt része, melyhez létezik $E_V \subset V \cap D$ sűrű, OHI altér. Legyen

$$\mathscr{V} := \{V \in \mathscr{T}^+ : \exists E_V \subset V \cap D : E_V \subset V sűrű, \mathrm{OHI}\}$$

és legyen $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ egy maximális celluláris rendszer. Mivel minden $U \subset X$ nem üres, nyílt halmaz tartalmaz $\mathscr{V}$-beli nyíltat, ezért $\bigcup \mathscr{W} \subset X$ sűrű. Minden $V \in \mathscr{W}$ nyílthoz válasszunk egy $E_V \subset V \cap D$ sűrű, OHI alteret. Ekkor az

$$E = \bigcup \{E_V : V \in \mathscr{W}\}$$

halmaz szintén sűrű X-ben és OHI: ha $U \subset X$ nem üres nyílt, és $E \cap U = D_1 \uplus D_2$ egy sűrű felbontás volna, akkor mivel $\bigcup \mathscr{W}$ sűrű, van $V \in \mathscr{W}$ melyre $U \cap V \neq \varnothing$. De ekkor $E_V \cap U = (E \cap U) \cap V = (D_1 \cap U \cap V) \uplus (D_2 \cap U \cap V)$ sűrű alterekre való felbontása lenne az $E_V \cap U$ altérnek, ami ellentmond annak, hogy E_V OHI.
Tehát találtunk a $D \subset X$ sűrű altérhez egy $E \subset D$ sűrű, OHI alteret. Azt állítjuk, hogy ekkor $X \setminus E$ minden $n \geq 2$ esetén n-felbontható. Ehhez legyen $U \subset X$ tetszőleges nyílt és legyen $X = \dot{\bigcup} \{D_i : i < n+1\}$ az X tér n+1 darab sűrű altérre való felbontása. Ekkor persze az E altérnek is kapjuk egy felbontását: $E = \dot{\bigcup} \{D_i \cap E : i < n+1\}$ viszont, mivel E OHI, ezért ezeknek tetszőleges E-beli nyíltba eső részeik közül legfeljebb egy lehet sűrű. Tehát az $E \cap D_0, \ldots, E \cap D_n$ közül legfeljebb egy lehet sűrű az $E \cap U$ altérben. Tegyük fel, hogy $E \cap D_0$ nem sűrű. Ekkor van $V_0 \subset U$ nyílt, hogy $E \cap D_0 \cap V_0 = \varnothing$. Hasonlóan folytathatjuk: az $E \cap V_0$ nyílt altérben az $E \cap D_1, \ldots, E \cap D_n$ alterek közül legfeljebb egy lehet sűrű. Tegyük fel, hogy $E \cap D_1$ nem sűrű. Ekkor találunk egy $V_1 \subset V_0$ nyíltat, melyre $E \cap D_1 \cap V_1 = \varnothing$. Véges sok lépésben eljutunk egy olyan $V \subset U$ nyílt halmazhoz, melyre $E \cap D_i \cap V = \varnothing$, bármely $i < n$ esetén. Ebből adódik, hogy $V \setminus E$ n-felbontható és mivel U tetszőleges volt, ezért minden X-beli nyílt tartalmaz ilyen nyílt alteret. Ezért ha a

$$\mathscr{V}_1 = \{V \in \mathscr{T}^+ : V \setminus E \quad n - felbontható\}$$

rendszernek választjuk egy $\mathscr{W}_1$ maximális celluláris rendszerét, akkor $\dot\bigcup\mathscr{W}_1 \subset X$ sűrű és $\dot\bigcup\mathscr{W}_1 \setminus E$ n-felbontható, mivel n-felbontható alterek (diszjunkt) uniója. Viszont $\dot\bigcup\mathscr{W}_1 \setminus E \subset X \setminus E$ sűrű, kapjuk, hogy $X \setminus E$ n-felbontható. Mivel E OHI és X felbontható, ezért E belseje üres és így $X \setminus E \subset X$ sűrű. Az indirekt feltevésünk szerint az $X_1 = X \setminus E$ sűrű altér sem tartalmaz ω-felbontható alteret és kaptuk, hogy minden $n \geq 2$-re n-felbontható, mint X. Így hasonlóan, létezik $E_1 \subset X_1$ sűrű, OHI altér, amely X-ben is sűrű, és $X_1 \setminus E_1$ minden n-re n-felbontható. Így rekurzívan konstruálható egy $\{E_n : n < \omega\}$ X-beli, páronként diszjunkt sűrű halmazokból álló sorozat, ami végülis mutatja, hogy X ω-felbontható. Tehát X mindenképpen tartalmaz ω-felbontható alteret és így, a fenti megjegyzésünk értelmében, ő maga is ω-felbontható. ■

1.2. Szorzatterek felbonthatósága, példa monoton normális, maximálisan felbontható térre

A témán belül egy külön fejezetet képez a szorzatterek felbonthatósági tulajdonságainak vizsgálata. Ezen belül két kérdésre térünk ki: szorzatok felbonthatósága és szorzatok maximális felbonthatósága. Ami az első kérdést illeti, felbonthatatlan szorzatok tekintetében csak a véges tényezősek érdekesek:

1.2.1 Állítás. ([JSS22, Proposition 2.1]) Ha $\langle X_i : i \in I\rangle$ topologikus tereknek egy végtelen rendszere, akkor a $\prod\{X_i : i \in I\}$ szorzattér a szorzattopológiával ellátva 2^ω-felbontható.

A [JSS22] dolgozatból kiderül, hogy mérhető számosság létezésével ekvikonzisztens felbonthatatlan kéttényezős szorzat létezése. Az alábbi állítás ennek az eredménynek pontos megfogalmazása.

1.2.2 Állítás. ([JSS22, Proposition 2.10]) Mérhető számosság létezése ekvikonzisztens olyan T_2, 0-dimenziós X tér létezésével, melynek bármely megszámlálható, felbonthatatlan térrel vett szorzata felbonthatatlan. Ez továbbá ekvikonzisztens két olyan tér létezésével, melyek szorzata felbonthatatlan.

A második kérdéskörrel kapcsolatban tekintsük azt az esetet, amikor egyik faktor maximálisan felbontható: legyen $\kappa \geq \omega$ egy számosság és legyen X egy κ számosságú, κ-felbontható topologikus tér. Ekkor természetese $\Delta(X) = |X| = \kappa$ teljesül. Vegyük továbbá egy Y teret, melyre $|Y| \leq \kappa^+$. Ekkor persze $\Delta(X \times Y) \leq \kappa^+$ és $X \times Y$ κ-felbontható: ha $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ egy partíciója az X térnek sűrű alterekre, akkor $\{D_\alpha \times Y : \alpha < \kappa\}$ egy κ számosságú partíciója az $X \times Y$ szorzatternek sűrű alterekre. Amennyiben $\Delta(Y) \leq \kappa$, úgy a szorzattérről ennél nagyobb felbonthatóságot nem is remélhetünk. Viszont ha $\Delta(Y) = |Y| = \kappa^+$, akkor meglepő módon a szorzat κ^+-felbontható:

1.2.3 Tétel. ([CP67, Theorem 4]) *Tegyük fel, hogy X egy κ számosságú, κ-felbontható topologikus tér. Ekkor bármely Y térre, melyre $\Delta(Y) = |Y| = \kappa^+$ fennáll, az $X \times Y$ szorzattér κ^+-felbontható.*

Bizonyítás. Mivel bármely $\alpha < \kappa^+$ rendszámra $|\alpha| \leq \kappa$ teljesül, választhatunk minden $\alpha < \kappa^+$-hoz egy $f_\alpha : \alpha \to \kappa$ injektív leképezést. Rögzítsünk egy ilyen $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ függvényrendszert (mely egyébként egy $\kappa^+ \times \kappa$ méretű Ulam-mátrix konstrukciójának is az alapja). Legyen továbbá $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ egy partíciója az X térnek sűrű alterekre és $Y = \{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ az Y tér elemeinek egy felsorolása. Most $\alpha < \kappa^+$ esetén legyen

$$E_\alpha := \bigcup \{D_{f_\beta(\alpha)} \times \{y_\beta\} : \alpha < \beta < \kappa^+\}.$$

Azt állítjuk, hogy az $\{E_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ alterek sűrűek és páronként diszjunktak. Ha $\alpha < \beta$, akkor $\gamma > \beta$ esetén $E_\alpha \cap (X \times \{y_\gamma\}) = D_{f_\gamma(\alpha)} \times \{y_\gamma\}$, $E_\beta \cap (X \times \{y_\gamma\}) = D_{f_\gamma(\beta)} \times \{y_\gamma\}$ melyek, $f_\gamma(\alpha) \neq f_\gamma(\beta)$, következésképen $D_{f_\gamma(\alpha)} \cap D_{f_\gamma(\beta)} = \emptyset$ miatt diszjunktak, vagyis $E_\alpha \cap E_\beta \cap (X \times \{y_\gamma\}) = \emptyset$. $\gamma \leq \beta$ esetén viszont $E_\beta \cap X \times \{y_\gamma\} = \emptyset$, amiből, tekintve, hogy $X \times Y = \bigcup \{X \times \{y_\alpha\} : \alpha < \kappa^+\}$, $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ adódik. Tehát a halmazaink páronként diszjunktak. Most belátjuk, hogy sűrűek az $X \times Y$ szorzattérben. Legyen $\alpha < \kappa^+$ tetszőleges és $U \subset X, V \subset Y$ nem üres nyíltak. $|V| = \kappa^+$ miatt a $\{\alpha : y_\alpha \in V\} \subset \kappa^+$ halmaz kofinális, így van $\beta > \alpha$ rendszám, melyre $y_\beta \in V$. Ekkor

$$E_\alpha \cap (U \times V) \supset (D_{f_\beta(\alpha)} \times \{y_\beta\}) \cap U \times V$$

ami $y_\beta \in V$ és $D_{f_\beta(\alpha)} \cap U \neq \emptyset$ miatt nem üres. Mivel U, V tetszőlegesek voltak, kapjuk, hogy E_α sűrű. ∎

Tehát az derült ki, hogy ha X egy κ számosságú, κ-felbontható tér, akkor bármely Y térrel, melyre $|Y| \leq \kappa^+$, vett szorzata maximálisan felbontható. A [CP67] dolgozat szerzői feltették a kérdést: vajon mindig teljesül-e, hogy egy maximálisan felbontható térnek bármely más (persze megállapodásunk szerint zsufi, T_0) térrel vett szorzata is maximálisan felbontható? Jelenleg a legtöbb, amit ezzel kapcsolatban tudunk, hogy a nemleges válasz ekvikonzisztens mérhető számosság létezésével. A következő egy ilyen jellegű eredmény.

1.2.4 Tétel. ([JSS22, Corollary 3.2]) *Ha konzisztens mérhető számosság létezése, akkor konzisztens, hogy létezik olyan $(X, \mathscr{T})$ T_2, 0-dimenziós tér, melyre $\omega_2 \leq |X| = \Delta(X) \leq 2^{\omega_1}$ és melynek bármely Y megszámlálható térrel vett szorzata ω_2-felbonthatatlan. Speciálisan, az $Y = \mathbb{Q}$ maxilálisan felbontható térrel vett $X \times Y$ szorzata nem maximálisan felbontható.*

Az, hogy olyan szorzat létezése, mely nem maximálisan felbontható viszont egyik faktora igen, maga után von-e valamely halmazelméleti többletfeltevést (legalább ekvikonzisztensen) vagy esetleg ZFC-ből is látható ilyen szorzat létezése megoldatlan.

Az alábbiakban ismertetünk egy konstrukciót melynek révén minden $n < \omega$ esetén kaphatunk $\Delta(X) = |X| = \omega_n$-es, monoton normális, maximálisan felbontható tereket. Az alábbiakra nézve válasszunk tetszőlegesen egy $1 \le n < \omega$ természetes számot és ezt rögzítsük. A tér alaphalmaza a $T = \omega_n^{<\omega}$ teljes, ω magas, ω_n-reguláris fa. Legyen $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\omega_n)$ egy uniform ultraszűrő (vagyis olyan, melyre $\forall U \in \mathscr{U} : |U| = \omega_n$). Ha $s \in T$ és $\alpha < \omega_n$, valamit ha $\mathrm{Dom}(s) = k$, akkor $s^\frown\langle\alpha\rangle$ jelöli az $s \cup \{(k, \alpha)\}$ sorozatot. Az $\mathscr{U}$ ultraszűrő segítségével definiálunk egy $\mathscr{T}_\mathscr{U}$ topológiát a T alaphalmazon:

$$\forall V \subset T(V \in \mathscr{T}_\mathscr{U} \leftrightarrow \forall s \in V(\{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in V\} \in \mathscr{U})).$$

Vagyis egy $V \subset T$ halmazt akkor tekintünk nyíltnak, ha minden elemének tartalmazza „ultra sok” közvetlen rákövetkezőjét. Egy tényleg egy topológia T-n: világos, hogy $\varnothing, T \in \mathscr{T}_\mathscr{U}$; ha $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}_\mathscr{U}$ és $s \in \mathscr{A}$, akkor van $A \in \mathscr{A}$, melyre $s \in A$ és így

$$\{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in \bigcup \mathscr{A}\} \supset \{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in A\} \in \mathscr{U}$$

amiből $\bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{T}_\mathscr{U}$ adódik. Végül ha $\mathscr{V} \in [\mathscr{T}_\mathscr{U}]^{<\omega}$ és $s \in \bigcap \mathscr{V}$, akkor

$$\{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in \bigcap \mathscr{V}\} = \bigcap_{V \in \mathscr{V}} \{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in V\} \in \mathscr{U}$$

mivel véges sok szűrőbeli halmaz metszete is eleme a szűrőnek. A $(T, \mathscr{T}_\mathscr{U})$ térre az alábbiakban a rövidebb $T_\mathscr{U}$ jelölést használjuk. A definícióból látható továbbá, hogy $|T_\mathscr{U}| = \Delta(T_\mathscr{U}) = \omega_n$.

1.2.5 Állítás. *A $T_\mathscr{U}$ tér T_2, monoton normális és ω-felbontható.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a $T_\mathscr{U}$ tér Hausdorff. Legyen $s, t \in T_\mathscr{U}$ két tetszőleges pont. Ha s és t nem összehasonlíthatók, akkor $(s \uparrow) \cap (t \uparrow) = \varnothing$ és ezek a halmazok nyíltak. Ha $s < t$, $\mathrm{Dom}\, s = n$, akkor legyen $U := \{r \uparrow : r \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T_\mathscr{U}) \cap s \uparrow \setminus t \downarrow\} \cup \{s\}$ és legyen $V := t \uparrow$. Ekkor $s \in U, t \in V$ és U, V diszjunkt nyíltak.

A $T_\mathscr{U}$ tér monoton normális: legyen $t \in T_\mathscr{U}$, $t \in V$ nyílt tetszőleges. Definiáljuk a $H_{(t,V)}$ halmazt a következőképpen:

$$H_{(t,V)} := \{s \in V : t \le s \wedge [t, s] \subset V\}.$$

Ekkor ha $(s, U), (t, V)$ két pontozott környezet, melyekre $s \notin V, t \notin U$, akkor $H_{(s,U)} \cap H_{(t,V)} = \varnothing$, különben ennek a metszetnek tetszőleges r elemére $[s, r] \subset U, [t, r] \subset V$

teljesülne, amiből egyrészt t és s összehasonlíthatósága, másrészt $t \in U$ vagy $s \in V$ adódna ami ellentmondás.

A $T_{\mathscr{U}}$ tér ω-felbontható: legyen $\omega = \dot{\bigcup}\{A_n : n < \omega\}$, ahol $A_n \in [\omega]^\omega$ egy partíció. Tetszőleges n-re definiáljuk a $D_n \subset T_{\mathscr{U}}$ halmazt így:

$$D_n := \bigcup\{\mathrm{Lev}_k(T_{\mathscr{U}}) : k \in A_n\}.$$

Ezek a halmazok $T_{\mathscr{U}}$ egy partícióját adják és mind sűrűk: ha $V \subset T_{\mathscr{U}}$ egy nem üres nyílt, akkor bármely $t \in V$ elemnek, V nyíltságából adódóan, van bármely magasabb szinten V-ben rákövetkezője és így $V \cap D_n \neq \varnothing$ minden $n < \omega$ esetén. ■

A $T_{\mathscr{U}}$ térre az iménti állításban foglaltaknál több is igaz: $T_{\mathscr{U}}$ maximálisan felbontható. Ennek belátásához előrebocsátunk egy segédlemmát.

1.2.6 Lemma. *Legyen $n \geq 1$ és $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\omega_n)$ tetszőleges uniform ultraszűrő. Ekkor bármely $1 \leq m \leq n$ esetén létezik $\{A_\alpha : \alpha < \omega_m\} \subset \mathscr{U}$ csökkenő sorozat, melyre $\bigcap\{A_\alpha : \alpha < \omega_m\} = \varnothing$.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy valahányszor adott egy $\omega_n = \{A_\alpha : \alpha < \omega_m\} \subset \mathscr{U}$ csökkenő sorozat üres metszettel, ahol $m \geq 1$, annyiszor található egy $\{B_\beta : \beta < \omega_{m-1}\} \subset \mathscr{U}$ ω_{m-1} hosszú, csökkenő sorozat szintén üres metszettel. Ebből már adódik a lemma: az $\{[\alpha, \omega_n) : \alpha < \omega_n\}$ végszeletekből álló felbontás mutatja, hogy létezik ilyen tulajdonságú, ω_n-es sorozat.(Itt kihasználtuk, hogy $\mathscr{U}$ uniform ultrafilter.) Ezután ha tekintjük a legkisebb olyan m számot, melyhez létezik ω_m hosszú csökkenő sorozat a kívánt tulajdonsággal, akkor szükségképpen $m = 0$ teljesül, mivel különben az alább bemutatott gondolatmenet segítségével ω_{m-1} hosszú csökkenő sorozata is adódna $\mathscr{U}$-beli halmazoknak, melyek metszete üres ami ellentmondana m minimalitásának.

Tegyük fel, hogy $m \geq 1$ és $\{A_\alpha : \alpha < \omega_m\} \subset \mathscr{U}$ csökkenő sorozat, melynek metszete üres. Definiáljuk az Y_α, $\alpha < \omega_m$ halmazokat a következőképpen:

$$Y_\alpha := (\bigcap A_\beta : \beta < \alpha) \setminus A_\alpha.$$

Látható, hogy $\omega_n = \dot{\bigcup}\{Y_\alpha : \alpha < \omega_m\}$. Definiálunk egy $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\omega_m)$ halmazrendszert a következőképpen:

$$\forall X \subset \omega_m : X \in \mathscr{F} \leftrightarrow \bigcup\{Y_\alpha : \alpha \in X\} \in \mathscr{U}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\mathscr{F}$ egy ultraszűrő ω_m-en, sőt, uniform ultraszűrő: ha $X \subset \alpha, \alpha < \omega_m$, akkor $\bigcup\{Y_\beta : \beta \in X\} \subset (\omega_m \setminus A_\alpha) \notin \mathscr{U}$, tehát $X \notin \mathscr{F}$, vagyis $\omega_m \setminus X \in \mathscr{F}$. Válasszunk minden $\alpha < \omega_m$ rendszámhoz egy $f_\alpha : \alpha \to \omega_{m-1}$ injektív leképezést. Legyenek $\alpha < \omega_m, \eta < \omega_{m-1}$ tetszőlegesek és definiáljuk az $E_{\alpha,\eta} := \{\beta > \alpha : f_\beta(\alpha) = \eta\}$ halmazokat, majd az $F_{\alpha,\eta} := \bigcup\{E_{\alpha,\delta} : \delta < \eta\}$ halmazokat. Ekkor persze $\omega_m \setminus \alpha+1 = \dot\bigcup\{E_{\alpha,\eta} : \eta < \omega_{m-1}\}$. Azt állítjuk, hogy létezik $\{B_\beta : \beta < \omega_{m-1}\} \subset \mathscr{F}$ csökkenő sorozat, melynek metszete üres. Ha találtunk ilyen sorozatot ω_m-en, akkor abból már ω_n-en is adódik hasonló sorozat az $\mathscr{U}$ ultraszűrőhöz: egyszerűen vegyük a

$$C_\alpha := \bigcup\{Y_\beta : \beta \in B_\alpha\} \in \mathscr{U}, \alpha < \omega_{m-1}$$

halmazokat, melyekről könnyen látni, hogy csökkenő sorozatot alkotnak és metszetük üres. A konstrukció során hasonlóan járunk el, mint a [KP71] dolgozat. Az első eset az, hogy van olyan $\alpha < \omega_m$, melyre minden $\eta < \omega_{m-1}$ esetén $F_{\alpha,\eta} \notin \mathscr{F}$, akkor, mint fentebb megjegyeztük, $\bigcup\{F_{\alpha,\eta} : \eta < \omega_{m-1}\} = \omega_m \setminus \alpha + 1$ és ez nem $\mathscr{F}$-beli halmazok növekvő rendszerének az uniója. Mivel $\mathscr{F}$ uniform, $[0,\alpha] \notin \mathscr{F}$, így a $\{\omega_m \setminus (F_{\alpha,\eta} \cup [0,\alpha]) : \eta < \omega_{m-1}\}$ sorozat megfelel.
A második esetben minden $\alpha < \omega_m$ esetén van olyan $\eta_\alpha < \omega_{m-1}$, melyre $F_{\alpha,\eta_\alpha} \in \mathscr{F}$. Mivel ω_m reguláris, kiválaszthatunk egy $\langle \alpha_\xi : \xi < \omega_m\rangle$ szigorúan növekvő, kofinális sorozatot melyhez létezik egy $\eta < \omega_{m-1}$, melyre $\forall \xi < \omega_m : \eta_{\alpha_\xi} = \eta$. Ha $I \in [\omega_m]^{\omega_{m-1}}$ tetszőleges, akkor szükségképpen $\bigcap\{F_{\alpha_\xi,\eta} : \xi \in I\} = \varnothing$, mivel különben, ha $\gamma < \omega_m$ ennek a metszetnek egy eleme, akkor minden $\xi \in I$ rendszámhoz létezik olyan $\delta_\xi < \eta$, melyre $\gamma \in E_{\alpha_\xi,\delta_\xi}$. Viszont ekkor, ω_{m-1} regularitását kihasználva, adódna egy $\delta < \eta$ és egy $I' \in [I]^{\omega_{m-1}}$, melyre $\forall \xi \in I' : \delta_\xi = \delta$ és emiatt, tetszőleges $\xi, \zeta \in I', \xi \neq \zeta$ esetén $\gamma \in E_{\alpha_\xi,\delta} \cap E_{\alpha_\zeta,\delta} = \varnothing$ ami ellentmondás. Ebből, az $I = \omega_{m-1}$ választással adódik, hogy $\forall I' \in [\omega_{m-1}]^{\omega_{m-1}} : \bigcap\{F_{\alpha_\xi,\eta} : \xi \in I'\} = \varnothing$. Minden $\alpha < \omega_{m-1}$-re legyen

$$B_\alpha := \bigcup\{F_{\alpha_\xi,\eta} : \alpha < \xi < \omega_{m-1}\}.$$

A $\{B_\alpha : \alpha < \omega_{m-1}\} \subset \mathscr{F}$ sorozat csökkenő és metszete üres, lévén, hogy $\bigcap\{F_{\alpha_\xi,\eta} : \xi \in I'\} = \varnothing$ alakú halmazok uniója, ahol $I' \in [\omega_{m-1}]^{\omega_{m-1}}$. ■

1.2.7 Állítás. *A $T_{\mathscr{U}}$ tér maximálisan felbontható.*

Bizonyítás. A bizonyítást két fő lépésre tagoljuk.

1. Először szeretnénk minden $s \in T_{\mathscr{U}}$ elemhez egy olyan $F_s \subset s\uparrow$ jólfundált (vagyis olyan, amely nem tartalmaz végtelen ágat) és s felett leszálló (azaz, $\forall t \in F_s : [s,t] \subset F_s$) részhalmazt konstruálni, melyre egyrészt

$$\forall t \in F_s\big((\forall \alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in F_s) \vee (\forall \alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \notin F_s)\big) \tag{$\star$}$$

teljesül, másrészt melyhez található olyan $F_s = \dot\bigcup\{F_{s,\alpha} : \alpha < \omega_n\}$ felbontás, melyre $\forall \alpha < \omega_n : s \in \overline{F_{s,\alpha}}$ teljesül. Tehát az ω_n-felbonthatóságnak egy „lokális” változatát szeretnénk először belátni. Az alábbiakban az olyan $A \subset s\uparrow$ s felett leszálló, jólfundált halmazokat, melyek rendelkeznek a $(\star)$ tulajdonsággal „s-hez illőnek” fogjuk nevezni.

Indukcióval fogjuk belátni $m < n$-re, hogy ha minden $s \in T_{\mathscr{U}}$ elemhez létezik olyan $F_s^m \subset s\uparrow$ s-hez illő halmaz, amely felbontható ω_m részre úgy, hogy ezen részek mindegyikének a lezártjában s benne legyen, akkor minden $s \in T_{\mathscr{U}}$ elemhez megadható olyan $F_s^{m+1} \subset s\uparrow$ s-hez illő halmaz, mely már ω_{m+1} részre bontható melyek lezártjaiban s benne van.

Az m = 0 esethez a 1.2.6 lemmának megfelelően találunk egy $\dot{\bigcup}\{A_k : k < \omega\} = \omega_n$ partíciót melyre $\forall k < \omega$ esetén $A_k \notin \mathscr{U}$. Legyen $s \in T_{\mathscr{U}}$ tetszőleges. Ha $\operatorname{Dom} s = k$, akkor $s\uparrow \cap \operatorname{Lev}_{k+1}(T_{\mathscr{U}}) = \dot{\bigcup}\{A_l(s) : l < \omega\}$, ahol $l < \omega$ esetén $A_l(s) = \{s^\frown\langle\alpha\rangle : \alpha \in A_l\}$. Definiáljuk az $F_s^0 \subset s\uparrow$ részhalmazt a következőképpen:

$$F_s^0 = \dot{\bigcup}\{t\uparrow \cap \operatorname{Lev}_{\le k+1+l}(T_{\mathscr{U}}) : l < \omega \wedge t \in A_l(s)\} \cup \{s\}.$$

Tehát az s elem tetszőleges $A_l(s)$-beli közvetlen rákövetkezőjének vesszük minden rákövetkezőjét egészen a $(k+1+l)$. szinttel bezárólag. Az így előálló F_s^0 halmazról könnyen látható, hogy s-hez illő és természetesen felbomlik ω részre a következő módon: $F_s^0 = \dot{\bigcup}\{F_{s,m}^0 : m < \omega\}$, ahol $m \ge 1$ esetén $F_{s,m}^0 = F_s^0 \cap \operatorname{Lev}_{k+1+m}(T_{\mathscr{U}})$ valamint $m = 0$-ra $F_{s,0}^0 = F_s^0 \cap \operatorname{Lev}_{k+1}(T_{\mathscr{U}}) \cup \{s\}$. Most ellenőrizzük, hogy minden $m < \omega$ esetén $s \in \overline{F_{s,m}^0}$. Válasszunk tetszőlegesen egy $m < \omega$ számot és egy $s \in V$ nyílt halmazt. Mivel $\bigcup_{k<m} A_k \notin \mathscr{U}$ és $\{\alpha < \omega_n : s^\frown\langle\alpha\rangle \in V\} \in \mathscr{U}$, ezért van olyan $\alpha < \omega_n$ melyre $\alpha \in \bigcup_{k\ge m} A_k$ és $t := s^\frown\langle\alpha\rangle \in V$ teljesülnek. De ekkor, a $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$ topológia definíciója alapján látható, hogy

$$\forall l \ge 0 : V \cap (t\uparrow \cap \operatorname{Lev}_{k+1+l}(T_{\mathscr{U}})) \neq \varnothing$$

amiből $V \cap F_{s,m} \neq \varnothing$ adódik, hiszen $t\uparrow \operatorname{Lev}_{k+1+m}(T_{\mathscr{U}}) \subset F_{s,m}^0$. Tehát $s \in \overline{F_{s,m}^0}$.

Most következik az indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $0 \le m < n$ és minden $s \in T_{\mathscr{U}}$ elemhez létezik olyan $F_s^m \subset s\uparrow$ s-hez illő halmaz, amely felbontható ω_m részre úgy, hogy ezen részek mindegyikének a lezártjában s benne legyen. Mindegyik F_s^m halmazhoz válasszunk egy ilyen tulajdonságú $\{F_{s,\alpha}^m : \alpha < \omega_m\}$ partíciót. Rögzítsünk továbbá egy, a 1.2.6 lemma szerint létező, $\{A_\alpha^{m+1} : \alpha < \omega_{m+1}\}$ partícióját ω_n-nek, melyre $\forall\alpha < \omega_{m+1}$ esetén $A_{\le\alpha}^{m+1} := \bigcup\{A_\beta^{m+1} : \beta < \alpha\} \notin \mathscr{U}$. (A lemma által garantált csökkenő sorozat elemeinek vegyük a komplementereit majd ezt a növekvő, nem ultrafilterbeli halmazokból álló sorozatot a szokásos módon diszjunktáljuk.) Legyen $s \in T_{\mathscr{U}}$ tetszőleges elem és rögzítsünk minden $\alpha < \omega_{m+1}$ rendszámhoz egy $f_\alpha : \alpha \to \omega_m$ injektív leképezést. Az F_s^{m+1} halmazt így definiáljuk:

$$F_s^{m+1} := \dot{\bigcup}\{F_{s^\frown\langle\alpha\rangle}^m : \alpha \in \omega_n\} \cup \{s\}.$$

Az F_s^{m+1} halmazról könnyen látható, hogy s-hez illő, mivel s minden közvetlen rákövetkezője „fölé” egy hozzá illő halmazt helyeztünk el. Most elkészítjük F_s^{m+1} kívánt felbontását. Legyen $\alpha < \omega_{m+1}$ tetszőleges és legyen

$$F_{s,\alpha}^{m+1} := \dot{\bigcup}\{F_{t,f_\beta(\alpha)}^m : \alpha < \beta < \omega_{m+1} \wedge (\exists \eta \in A_\beta^{m+1} : t = s^\frown\langle\eta\rangle)\}.$$

Ha $\alpha < \beta < \gamma < \omega_{m+1}$, akkor mivel f_γ injektív és az $\{F_{s^\frown\langle\eta\rangle,\delta}^m : \delta < \omega_m\}$ halmazok páronként diszjunktak, minden $\eta \in A_\gamma^{m+1}$ esetén, adódik, hogy $F_{s^\frown\langle\eta\rangle,f_\gamma(\alpha)}^m \cap F_{s^\frown\langle\eta\rangle,f_\gamma(\beta)}^m = \varnothing, \eta \in A_\gamma^{m+1}$, amiből $F_{s,\alpha}^{m+1} \cap F_{s,\beta}^{m+1} = \varnothing$ következik. Végül legyen $\alpha < \omega_{m+1}$ tetszőleges és $s \in V$ nyílt. Belátjuk, hogy $V \cap F_{s,\alpha}^{m+1} \neq \varnothing$ amiből $s \in \overline{F_{s,\alpha}^{m+1}}$ adódik végül. Mivel $\{\beta < \omega_n : s^\frown\langle\beta\rangle \in V\} \in \mathscr{U}$ és $\bigcup\{A_\beta^{m+1} : \beta > \alpha\} \in \mathscr{U}$, ezért van $\beta > \alpha$ és van $\eta \in A_\beta^{m+1}$, melyre $t := s^\frown\langle\eta\rangle \in V$. De ekkor $t \in \overline{F_{t,f_\beta(\alpha)}^m}$ és $F_{t,f_\beta(\alpha)}^m \subset F_{s,\alpha}^{m+1}$ miatt $V \cap F_{s,\alpha}^{m+1} \neq \varnothing$. A konstrukció alapján az $F_{s,\alpha}^{m+1}(\alpha < \omega_{m+1})$ részek nem merítik ki teljesen az F_s^{m+1} halmazt de természetesen a kimaradó rész hozzávehető például az $F_{s,0}^{m+1}$ halmazhoz és így már tényleg egy partíciót kapunk.

2. Végül igazoljuk, hogy $T_\mathscr{U}$ ω_n-, vagyis maximálisan felbontható. Az eddigiek alapján minden $s \in T_\mathscr{U}$ elemhez válasszunk egy $F_s \subset s\uparrow$, s-hez illő halmazt $F_s = \dot{\bigcup}\{F_{s,\alpha} : \alpha < \omega_n\}$ partícióval. Rekurzívan definiáljuk $T_\mathscr{U}$ részhalmazainak egy $\{S_m : m < \omega\}$ sorozatát: $S_0 := \{t \in T_\mathscr{U} : t \ \ minimális\}$ majd ha $m < \omega$ és bármely $k < m$-re S_k már adott, akkor legyen

$$S_m := \{t \in T_\mathscr{U} \setminus \bigcup\{F_t : t \in S_k, k < m\} : t \ \ minimális\}.$$

Legyen $S := \dot{\bigcup}\{S_m : m < \omega\}$. Ekkor m-re vonatkozó indukcióval látható, hogy $\forall m < \omega :$ $\mathrm{Lev}_{\leq m}(T_\mathscr{U}) \subset \dot{\bigcup}\{F_t : t \in S_k, k \leq m\}$ amiből $T_\mathscr{U} = \dot{\bigcup}\{F_t : t \in S\}$ adódik. Mindegyik $\alpha < \omega_n$ rendszámra definiáljuk a D_α halmazt a következőképpen:

$$D_\alpha := \{F_{t,\alpha} : t \in S\}.$$

Ekkor világos, hogy $T_\mathscr{U} = \dot{\bigcup}\{D_\alpha : \alpha < \omega_n\}$ és ezek a halmazok sűrűek: ha $V \subset T_\mathscr{U}$ nem üres, nyílt, akkor létezik $m < \omega$ melyre $V \cap S_m \neq \varnothing$ (ezt így láthatjuk be: legyen m minimális, melyre $V \cap \dot{\bigcup}\{F_t : t \in S_k, k \leq m\} \neq \varnothing$ és legyen t ennek egy tetszőleges eleme. V nyíltsága miatt van V-ben haladó, t-ből induló végtelen maximális lánc és ez a lánc F_s jólfundáltsága miatt valahol kilép az F_s halmazból és ez az elem, $\dot{\bigcup}\{F_t : t \in S_k, k \leq m\}$ leszállósága miatt S_{m+1}-ben van) és ennek a metszetnek tetszőleges t elemére fennáll, hogy $V \cap D_\alpha \supset V \cap F_{t,\alpha} \neq \varnothing$, mivel $t \in \overline{F_{t,\alpha}}$. ■

A fenti terek maximális felbonthatósága lényegesen kihasználta azt az állítást, hogy ω_n felett egyetlen uniform ultraszűrő sem leszállóan ω_m-teljes, bármely $m \leq n$ esetén. (Ez lényegében azt jelenti, amit a 1.2.6 lemma kimond.) ω_ω felett már, szuperkompakat számosság létezését feltételezve ugyan, lehet mutatni olyan $\mathscr{U}$ uniform ultraszűrőt mely leszállóan ω_1-teljes. Ennek segítségével definiálva az ω magas, ω_ω-reguláris fán a fenti módon topológiát, belátható, hogy ez a tér öröklődően ω_2-felbonthatatlan, amivel, tekintve, hogy $|T_{\mathscr{U}}| = \Delta(T_{\mathscr{U}}) = \omega_\omega$, messze nem maximálisan felbontható. A részletek és további hivatkozások megtalálhatóak a [JSS08] dolgozatban.

1.3. Szubmaximális és $\mathscr{D}$-forszolt terek

1.3.1 Definíció. *Egy $(X, \mathscr{T})$ topologikus teret szubmaximálisnak nevezünk, ha minden $D \subset X$ sűrű része nyílt.*

Fontos észrevétel az alábbi: egy $(X, \mathscr{T})$ tér pontosan akkor OHI, ha benne bármely valahol sűrű halmaz belseje nem üres. Ha X OHI és $S \subset X$ olyan, mely sűrű mondjuk az $U \subset X$ nyíltban, akkor $S \cap U$ belseje nem üres, mivel U felbonthatatlan. Fordítva világos, hogy egyetlen nyílt altérben sem létezhet két diszjunkt sűrű halmaz. Ebből az OHI tulajdonság azon jellemzése is adódik, mely szerint egy tér pontosan akkor OHI, ha benne minden sűrű halmaz tartalmaz nyílt sűrűt.

1.3.2 Állítás. *Legyen X egy tér. Ekkor X pontosan akkor szubmaximális, ha* OHI és benne bármely sehol sem sűrű halmaz zárt diszkrét.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy X szubmaximális. Ha $U \subset X$ nyílt és $D \subset U$ sűrű, akkor $D \cup (X \setminus U) \subset X$ sűrű, tehát feltevésünk szerint nyílt, és így az U halmazba eső része, vagyis D szintén nyílt. Tehát $U \setminus D \subset U$ nem sűrű. Mivel bármely üres belsejű (speciálisan sehol sem sűrű) halmaz komplementere sűrű, így kapjuk, hogy ezek a halmazok mind zártak.
Fordítva, tegyük fel, hogy X OHI és minden sehol sem sűrű része zárt diszkrét. Legyen $D \subset X$ sűrű. Ekkor minden $U \subset X$ nyíltra $D \cap U \subset U$ sűrű és így U felbonthatatlansága miatt a belseje nem üres. Ebből adódik, hogy D tartalmaz sűrű, nyílt halmazt. Viszont ekkor a komplementere sehol sem sűrű és így, mivel ez zárt, D nyílt. ∎

Szubmaximális tereket kaphatunk például topológiafinomítás révén. Erről szól a következő állítás.

1.3.3 Állítás. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy T_2 tér. Ekkor létezik $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$ szubmaximális topológia.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\kappa = |X|$ és legyen $\langle S_\alpha : \alpha < 2^\kappa \rangle$ X részhalmazainak egy 2^κ-abundáns felsorolása. Transzfinit rekurzióval konstruálunk $\langle \mathscr{T}_\alpha : \alpha < 2^\kappa \rangle$ X feletti, zsufi topológiáknak egy növő láncát a $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}$ topológiából kiindulva. Tegyük fel, hogy $\alpha < 2^\kappa$ és $\langle \mathscr{T}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ adott már. Legyen $\mathscr{T}' = \sup\{\mathscr{T}_\beta : \beta < \alpha\}$. Ez szintén egy zsufi topológia. Ha S_α valahol sűrű az $(X, \mathscr{T}')$ térben, akkor van olyan $\gamma < \alpha$ és $U \in \mathscr{T}_\gamma$, melyben sűrű $\mathscr{T}'$ szerint. Mivel ez egy zsufi, T_2 topológia, az $U \cap S_\alpha$ altérnek nincs izolált pontja. Így, ha S_α-val finomítjuk a topológiát, vagyis ha tekintjük a

$$\mathscr{T}_\alpha = \{U \cup (V \cap S_\alpha) : U, V \in \mathscr{T}'\}$$

$\mathscr{T}'$ és $\{S_\alpha\}$ által generált topológiát, akkor ez szintén zsufi és eszerint már az $S_\alpha \subset X$ részhalmaz belseje nem üres. Ha az $S_\alpha \subset X$ altér sehol sem sűrű, akkor $X \setminus S_\alpha$ $\mathscr{T}'$-sűrű, és vele finomítva a topológiát kapunk egy $\mathscr{T}_\alpha$ zsufi topológiát, amely szerint S_α zárt.
Végül legyen $\mathscr{T}' = \sup\{\mathscr{T}_\alpha : \alpha < 2^\kappa\}$. Ez egy $\mathscr{T}$-nál finomabb zsufi topológia. Ha eszerint most egy $S \subset X$ valahol sűrű, akkor van olyan $\alpha < 2^\kappa$ és $U \in \mathscr{T}_\alpha$ melyre S sűrű az U altérben. De ekkor, ha $\beta > \alpha$ olyan, hogy $S = S_\beta$, akkor a konstukció β. lépésében bekerült egy $V \in \mathscr{T}_\beta$ halmaz a nyíltak közé, melyet S tartalmaz. Emiatt S belseje $\mathscr{T}'$ szerint nem üres. Ha $S \subset X$ sehol sem sűrű, akkor ha $S = S_\beta$, valamely $\beta < 2^\kappa$-ra, akkor a konstrukció β. lépésében S nem lehetett valahol sűrű egy $\mathscr{T}'$-nél durvább topológia szerint, mert akkor $\mathscr{T}_\beta$-ban lenne olyan nyílt amit S tartalmaz. Így csak az a lehetőség maradt, hogy abban a lépésben a $X \setminus S$ halmazzal finomítottuk a topológiát tehát S zárt lett. Tehát az $(X, \mathscr{T}')$ tér OHI és benne minden sehol sem sűrű halmaz zárt diszkrét amiből, egy korábbi megjegyzés alapján, következik, hogy szubmaximális. ■

Látható tehát, hogy T_2 szubmaximális teret konstruálni viszonylag egyszerű. T_3 vagy esetleg $T_{3.5}$, szubmaximális teret mutatni már jóval nehezebb. A [JSS06] dolgozatban egy olyan általánosítása található az OHI tulajdonságnak, név szerint a $\mathscr{D}$-forszoltság fogalma, és hozzá egy eljárás, melynek segítségével ilyen terek konstruálhatók, mely révén nemcsak „szép" szubmaximális tereket (Cantor kockákba sűrű altérként beágyazottakat) tudtak konstruálni a szerzők, hanem több, addig megoldatlan problémát sikerült tisztázniuk ezek segítségével. Az alábbiakban röviden ismertetjük a $\mathscr{D}$-forszoltság fogalmát és ismertető jelleggel közlünk néhány eredményt a [JSS06] dolgozatból.
Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér és $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ sűrű halmazoknak egy nem üres rendszere. Ha $\mathscr{V} \subset \mathscr{T}^+$ egy maximális celluláris rendszer és minden $V \in \mathscr{V}$ nyílthoz ki van jelölve egy $D_V \in \mathscr{D}$ sűrű halmaz, akkor a

$$\bigcup\{V \cap D_V : V \in \mathscr{V}\}$$

halmazt $\mathscr{D}$-mozaiknak nevezzük. Minden $\mathscr{D}$-mozaik sűrű.

1.3.4 Definíció. *Az X teret, melyen $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ sűrű halmazoknak egy kijelölt rendszere, $\mathscr{D}$-forszoltnak nevezzük, ha minden $S \subset X$ sűrű halmaz tartalmaz $\mathscr{D}$-mozaikot.*

Tehát a $\mathscr{D}$-forszoltság tehát azt jelenti, hogy a térben pontosan a $\mathscr{D}$ elemei és azon további hamazok sűrűk, melyek a $\mathscr{D}$-beliek sűrű mivoltának feltételezés okán sűrűk kell, hogy legyenek. A $\mathscr{D} = \{X\}$ választással, az alfejezet elején tett megjegyzéseink alapján világos, hogy X $\mathscr{D}$-forszoltsága pontosan azt jelenti, hogy ő OHI. Tehát, utalva a 1.3.2 állításra, X szubmaximális pontosan akkor, ha $\{X\}$-forszolt és benne bármely sehol sem sűrű halmaz zárt diszkrét.

1.3.5 Állítás. ([JSS06, Theorem 4.1]) Bármely $\kappa \geq \omega$ számosság esetén létezik $X \subset 2^{2^\kappa}$ sűrű, szubmaximális altér, melyre $|X| = \Delta(X) = \kappa$.

A követekző tétel J.Ceder és T.Pearson egy régi kérdésére ad választ: Igaz-e, hogy ha egy X tér ω-felbontható, akkor szükségképpen maximálisan is felbontható? Ellenpéldák már korábban is születtek, de azok vagy nem ZFC-beli példák voltak, vagy csak legfeljebb a T_1 szétválaszási axiómával rendelkeztek. A következő tétel T_2, 0-dimenziós teret ad ZFC-ben.

1.3.6 Állítás. ([JSS06, Theorem 4.5]) Legyen $\mu < \kappa$ két végtelen számosság. Ekkor létezik olyan $X \subset 2^{2^\kappa}$ sűrű altér, melyre $|X| = \Delta(X) = \kappa$ és mely előáll μ darab, diszjunkt, szubmaximális, sűrű altér uniójaként de nem μ^+-felbontható. Speciálisan nem maximálisan felbontható.

Végül, a következő tétel, melynek eredményéről az első fejezet 1.1.15 tétele előtt már említést tettünk, arról szól, hogy ha $\kappa > \omega$ egy elérhetetlen számosság, akkor nem feltétlenül teljesül tetszőleges X térre, hogy amennyiben bármely $\lambda < \kappa$ esetén λ-felbontható, akkor κ-felbontható is.

1.3.7 Állítás. ([JSS06, Theorem 4.8]) Legyenek λ, κ számosságok, melyekre $\omega < cf(\lambda) = \lambda \leq \kappa$ teljesül. Ekkor létezik olyan $X \subset 2^{2^\kappa}$ sűrű altér, melyre $|X| = \Delta(X) = \kappa$ és mely minden $\mu < \lambda$ esetén öröklődően μ-felbontható, viszont nem λ-felbontható.

2. fejezet

2.1. Lokális rezolvabilitás, DT, ODT

A [Lip18] dolgozatban találjuk a felbonthatóságnak az alábbi, természetesen adódó lokális változatát:

2.1.1 Definíció. *Legyen X egy tér és $x \in X$ egy nem izolált pont, valamint κ egy számosság. Az X teret az x pontban lokálisan κ-felbonthatónak mondjuk, ha léteznek $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathscr{P}(X \setminus \{x\})$ nem üres, páronként diszjunkt halmazok úgy, hogy $x \in \overline{A_\alpha}$ teljesül, minden $\alpha < \kappa$ esetén.*

A dolgozat fő eredménye, hogy minden zsufi, $T_{3.5}$, pszeudokompakt tér lokálisan felbontható. Ezzel szemben, mint már korábban említettük, ezen terek felbonthatósága máig megoldatlan. A következőkben ismertetünk két további fogalmat melyek segítségével a felbonthatóság, illetve lokális változata közti viszony világosabbá válik.

2.1.2 Definíció. *Legyen X egy topologikus tér. Azt mondjuk, hogy az X tér rendelkezik a* DT (disjoint tightness) tulajdonsággal az $x \in X$ pontban, ha bármely $A \subset X$ részhalmazra, melyre $x \in A'$, léteznek $A_0, A_1 \subset A$ diszjunkt részek, melyekre $x \in A_0' \cap A_1'$. Az X térre röviden azt mondjuk, hogy DT, ha minden pontjában DT tulajdonságú.

A [Lip18, Proposition 1] értelmében, ha egy X tér rendelkezik a DT tulajdonsággal egy $x \in X$ pontban, akkor az x pontban ω-felbontható. Tehát minden zsufi, DT tér lokálisan ω-felbontható.

2.1.3 Definíció. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér. Azt mondjuk, hogy az X tér rendelkezik az* ODT (open disjoint tightness) tulajdonsággal az $x \in X$ pontban, ha bármely $U \in \mathscr{T}$ nyíltra, melyre $x \in U'$, léteznek $U_0, U_1 \subset U$ diszjunkt nyíltak, melyekre $x \in U_0' \cap U_1'$. Az X térre röviden azt mondjuk, hogy ODT, ha minden pontjában ODT tulajdonságú.

Nem nehéz néhány feltételt adni, melyek együtt garantálják a DT, illetve ODT tulajdonságokat. A következő állítás ilyen jellegű.

2.1.4 Állítás. *Legyen* $(X, \mathscr{T})$ *egy tér. Ha* X T_1 *és* $\chi(X) = \omega$*, akkor az* X *tér* DT tulajdonságú. Ha ezenfelül X reguláris, akkor ODT tulajdonságú is. Speciálisan minden metrikus tér DT és ODT tulajdonságú.

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ és tegyük fel, hogy $A \subset X$ olyan, melyre $x \in A'$. Legyen $\langle V_n : n \in \omega \rangle$ az x pont egy fogyó környezetbázisa. Mivel bármely $n \in \omega$ esetén $|A \cap (V_n \setminus \{x\})| = \omega$, rekurzívan deiniálhatunk egy olyan $\{x_n : n \in \omega\}$ sorozatot melyre bármely $n \in \omega$ esetén $x_{2n}, x_{2n+1} \in A \cap (U_n \setminus \{x\} \setminus \{x_k : k < 2n\})$ két különböző elem. Ekkor az $A_0 := \{x_{2k} : k < \omega\}, A_1 := \{x_{2k+1} : k < \omega\}$ diszjunkt halmazokra fennáll, hogy $x \in A_0' \cap A_1'$.

Ha X reguláris, akkor hasonlóképpen járhatunk el; pontsorozat helyett x-hez kovergáló nyíltak egy sorozatát definiáljuk: ha $\{(W_k^0, W_k^1) : k < m\}$ U nem üres, páronként diszjunkt nyílt részeinek párjai és $\{n_k : k < m\}$ szigorúan növő indexsorozat, melyre $\forall k < m$: $\overline{W_k^0}, \overline{W_k^1} \subset U \cap (V_{n_k} \setminus \{x\})$ fennáll, akkor legyen $n_m > n_{m-1}$ olyan, melyre

$$V_{n_m} \cap (\bigcup\{\overline{W_k^0} : k < m\} \cup \bigcup\{\overline{W_k^1} : k < m\}) = \varnothing.$$

A regularitást kihasználva ezután válasszunk olyan W_m^0, W_m^1 nem üres, diszjunkt lezárttal rendelkező nyílt halmazokat, melyekre $\overline{W_m^0}, \overline{W_m^1} \subset U \cap (U_{n_m} \setminus \{x\})$. Ekkor az $U_0 := \bigcup\{W_k^0 : k < \omega\}, U_1 := \bigcup\{W_k^1 : k < \omega\}$ U-nak diszjunkt nyílt részei és $x \in U_0' \cap U_1'$.
■

Nem nehéz belátni, hogy a DT, illetve ODT tulajdonságok ekvivalensek szubmaximális terek esetén. A [Lip24] dolgozat egyik eredménye szerint, ha X egy T_2, M_1 tér, melyre $c(X^\omega) = \omega$, akkor bármely $\kappa \geq \omega$ esetén X^κ ODT. Ezt kombinálva [JSS06] 4.1-es tételével kapja a szerző, hogy minden $\kappa \geq \omega$ esetén létezik $|X| = \Delta(X) = \kappa$ tér, mely $T_{3.5}$, szubmaximális és ODT. Egy ilyen tér lokálisan ω-felbontható, viszont a szubmaximalitás miatt öröklődően felbonthatatlan.

Ami a DT és ODT tulajdonságok viszonyát illeti, ismert volt korábban (ld. [Lip24] 6. rész), hogy létezik $|X| = \omega$, T_3 tér mely ODT de nem DT. A szerző a dolgozat végén felteszi a kérdést, hogy létezik-e olyan X tér mely DT de nem ODT tulajdonságú? Az alábbiakban, L.Soukup ötlete alapján, ismertetünk egy konstrukciót, amely a $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{cent}}$ feltevés mellett garantál egy X megszámlálható, zsufi, T_2, 0-dimenziós teret, mely DT de nem ODT tulajdonságú.

2.1.5 Megjegyzés. *Az alábbiakra nézve pontosítunk néhány fogalmat és jelölést.*

(i) *A* $\mathbb{Q}$ *halmazt a szokásos Euklideszi topológiával ellátva tekintjük melyet* $\mathcal{E}$ *jelöl.*

(ii) *Ha* X *egy tér, akkor* $\operatorname{Clop}(X)$ *jelöli a tér nyílt-zárt részhalmazainak összességét. A szokásos* $\cap, \cup, \setminus$ *halmazműveletekkel ellátva ez egy halmazalgebra.*

(iii) *Egy* $\mathscr{A} \neq \varnothing$ *halmazrendszert rácsnak mondunk, ha* $\forall A \in \mathscr{A} : A \neq \varnothing$ *valamint bármely* $A, B \in \mathscr{A}$ *esetén van* $C \in \mathscr{A}$ *melyre* $C \subset A \cap B$*. Egy* $\mathscr{A}$ *halmazrendszer finomabb egy* $\mathscr{B}$ *halmazredszernél, ha bármely* $B \in \mathscr{B}$ *halmazhoz van* $A \in \mathscr{A}$ *melyre* $A \subset B$*.*

2.1.6 Lemma. ($\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{cent}}$) *Tegyük fel, hogy* $\mathscr{B} \subset \operatorname{Clop}(\mathbb{Q})$ *felülről nem korlátos nyílt-zártakból álló rács melyre* $|\mathscr{B}| < 2^\omega$*, valamint* $S \subset \mathbb{Q}$ *olyan, melyre bármely* $B \in \mathscr{B}$ *esetén* $B \setminus \overline{S}$ *nem korlátos. Ekkor létezik olyan* $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}' \subset \operatorname{Clop}(\mathbb{Q})$ *felülről nem korlátos halmazokból álló rács, melyre* $|\mathscr{B}'| \leq |\mathscr{B}'| + \omega$ *és* $\exists B \in \mathscr{B}' : B \cap \overline{S} = \varnothing$*.*

Bizonyítás. Ha $I \subset \mathbb{R}$ irracionális végpontú intervallum, akkor $I \cap \mathbb{Q} \in \operatorname{Clop}(\mathbb{Q})$ és ezek a $\mathbb{Q}$ tér egy bázisát alkotják. Legyen $\mathscr{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ irracionális végpontú intervallumok egy sorozata melyre $\{I_n \cap \mathbb{Q} : n < \omega\}$ a $\mathbb{Q}$ tér egy bázisa, valamint legyen $\mathscr{B}_1 := \{B \setminus \overline{S} : B \in \mathscr{B}\}$. Az alábbiakban definiálunk egy $(\mathbb{P}, \leq)$ részbenrendezett halmazt. Legyen

$$\mathbb{P} := \{(s, \mathscr{A}) \in \mathscr{I}^{<\omega} \times [\mathscr{B}_1]^{<\omega} : \forall i, j \in \operatorname{Dom}(s) : (i < j \to \max s(i) < \min s(j))\},$$

$(s, \mathscr{A}), (t, \mathscr{B}) \in \mathbb{P}$ esetén

$$(s, \mathscr{A}) \leq (t, \mathscr{B}) \leftrightarrow t \subset s \wedge \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \wedge \forall i \in \operatorname{Dom}(s) \setminus \operatorname{Dom}(t) : s(i) \cap \mathbb{Q} \subset \bigcap \mathscr{B}.$$

Ekkor a $\leq$ reláció reflexív és antiszimmetrikus, valamint a tranzitivitása is könnyen igazolható. Jegyezzük meg, hogy ha $(s, \mathscr{A}), (s, \mathscr{B}) \in \mathbb{P}$ két elem, melyek első komponense megegyezik, akkor ők kompatibilisek és az $(s, \mathscr{A} \cup \mathscr{B})$ elem egy közös kiterjesztésük. Mivel a $\mathbb{P}$ elemeinek első komponensei megszámlálható sok félék lehetnek, a megjegyzés felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbb{P}$ ccc. Most megadunk $\mathbb{P}$-beli sűrű halmazokat, melyekre alkalmazni fogjuk a Martin axiómát.

Ha $B \in \mathscr{B}$, akkor legyen

$$D_B := \{(s, \mathscr{A}) \in \mathbb{P} : B \setminus \overline{S} \in \mathscr{A}\}.$$

A D_B halmazok sűrűk hiszen tetszőleges $(s, \mathscr{A}) \in \mathbb{P}$ elemre $(s, \mathscr{A} \cup \{B \setminus \overline{S}\}) \leq (s, \mathscr{A})$ és az első elem D_B-beli. Ezután ha $n < \omega$, akkor legyen

$$D_n := \{(s, \mathscr{A}) \in \mathbb{P} : \exists i \in \operatorname{Dom} s) : s(i) \subset (n, +\infty)\}.$$

Minden $n < \omega$ esetén a D_n halmaz sűrű $\mathbb{P}$-ben: ha $(s, \mathscr{A}) \in \mathbb{P}$, akkor $\bigcap \mathscr{A} \subset \mathbb{Q}$ felülről nem korlátos (hiszen mivel $\bigcap \mathscr{A} = \bigcap \mathscr{C} \setminus \overline{S}$, ahol $\mathscr{C} \in [\mathscr{B}]^{<\omega}$, és mivel $\mathscr{B}$ rács, ezért létezik

$B \in \mathscr{B}$, melyre $B \subset \bigcap \mathscr{C}$ amiből $B \setminus \overline{S} \subset \bigcap \mathscr{A}$ adódik és itt az első halmaz felülről nem korlátos), nyílt ezért $(N, +\infty) \cap \bigcap \mathscr{A} \neq \varnothing$, ahol $N = \max(\{\max s(i) : i \in \mathrm{Dom}\,(s)\} \cup \{n\})$. Választhatunk tehát egy olyan $I \in \mathscr{I}$ intervallumot, melyre $I \cap \mathbb{Q} \subset (N, +\infty) \cap \bigcap \mathscr{A}$ és ennek felhasználásával értelmezzük a $(t, \mathscr{A}) \in \mathbb{P}$ elemet, ahol $t = s \cup \{(\mathrm{Dom}\,(s), I)\}$. Ekkor $(t, \mathscr{A}) \in D_n$ és $(t, \mathscr{A}) \leq (s, \mathscr{A})$. Így a D_n halmazok is sűrűk.

Adódik tehát, a Martin axióma alkalmazásával a $\{D_B : B \in \mathscr{B}\} \cup \{D_n : n < \omega\}$ sűrű halmazokra és a $(\mathbb{P}, \leq)$ részbenrendezett halmazra, egy $G \subset \mathbb{P}$ generikus filter. Legyen $f := \bigcup\{s : (s, \mathscr{A}) \in G\}$. A G filterbeli elemek páronkénti kompatibilitása miatt f egy függvény és $\mathrm{Dom}\,(f) = \omega$: $(s, \mathscr{A}) \in \mathbb{P}$ esetén $\mathrm{Dom}\,(s) \subset \omega$ kezdőszelet és $\mathrm{Dom}\,(f) = \bigcup\{\mathrm{Dom}\,(s) : (s, \mathscr{A}) \in G\}$ ami miatt $\mathrm{Dom}\, f \subset \omega$ is kezdőszelet. Véges nem lehet, mivel abban az esetben $f = s$ állna, valamely $(s, \mathscr{A}) \in G$ elemre viszont ekkor bármely $N > \max\{\max s(i) : i \in \mathrm{Dom}\,(s)\}$ esetén $G \cap D_N = \varnothing$ ami ellentmond G választásának. Így $|\mathrm{Dom}\,(f)| = \omega$ amiből végül $\mathrm{Dom}\,(f) = \omega$ adódik. Tehát f irracionális végpontú, „egymás után következő” intervallumoknak egy nem korlátos sorozata. Legyen $n < \omega$ esetén $W_n := \bigcup\{f(m) \cap \mathbb{Q} : n \leq m\}$. Ekkor $W_n \in \mathrm{Clop}\,\mathbb{Q}$ és nem korlátos. Bármely $B \in \mathscr{B}$ esetén van $(s, \mathscr{A}) \in G \cap D_B$, melyre $B \setminus \overline{S} \in \mathscr{A}$ ezért ha $m \geq n = \mathrm{Dom}\,(s)$, akkor $f(m) \subset B \setminus \overline{S}$ így $W_n \subset B \setminus \overline{S}$. Ebből egyrész kapjuk, hogy $\mathscr{B}' := \mathscr{B} \cup \{W_n : n < \omega\} \subset \mathrm{Clop}\,(\mathbb{Q})$ rács, másrészt, hogy $\exists B \in \mathscr{B}'$ melyre $B \cap \overline{S} = \varnothing$.

Végül jegyezzük meg, hogy fentebb nem használtuk ki a Martin axiómát teljes általánosságában hanem csak a gyengébb $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{cent}}$ változatát, mivel

$$\mathbb{P} = \bigcup\{A_s : s \in \mathscr{I}^{<\omega} : \forall i, j \in \mathrm{Dom}\,(s) : (i < j \to \max s(i) < \min s(j))\},$$

ahol $A_s = \{(t, \mathscr{A}) \in \mathbb{P} t = s\}$. Egy korábbi megjegyzésünk alapján láthatjuk, hogy A_s minden véges részének van közös kiterjesztése (méghozzá A_s-beli), mivel ezen elemek első komponensei megegyeznek. Ez a felbontás mutatja, hogy a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz σ-centrált. ■

2.1.7 Állítás. ($\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{cent}}$) *Létezik $(X, \mathscr{T})$ megszámlálható, zsufi, 0 dimenziós, T_2 tér, mely DT de nem ODT tulajdonságú.*

Bizonyítás. Az X tér alaphalmaza $\mathbb{Q} \cup \{p\}$, ahol $p \notin \mathbb{Q}$ tetszőleges. Legyen $\mathscr{B} \subset \mathrm{Clop}\,(\mathbb{Q})$ egy felülről nem korlátos nyílt-zártakból álló rács amely finomabb az $\{(n\sqrt{2}, +\infty) : n < \omega\}$ halmazrendszernél. Ezzel értelmezzük az X halmazon a $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ topológiát a következőképpen: legyen $\mathbb{Q}$ X-nek nyílt altere valamint legyen $\{B \cup \{p\} : B \in \mathscr{B}\}$ a p pontnak egy környezetbázisa. (Ez úgy értendő, hogy tetszőleges $A \subset X$ halmazt akkor tekintünk nyíltnak, ha minden $x \in A \cap \mathbb{Q}$ pontnak tartalmazza egy Euklideszi környezetét, illetve $p \in A$ esetén tartalmazza a $\mathscr{B}$ rács valamely elemét. Könnyen megállapítható, hogy így valóban topológiát kapunk.) A $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ topológia T_2, zsufi és 0 dimenziós: $\mathbb{Q}$-nak létezik az Euklideszi topológia szerint korlátos nyílt-zártakból álló bázisa és ezek $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ szerint is nyílt-zártak (a korlátosság garantálja, hogy az X-beli komplementereik is zártak) valamint a $\{B \cup \{p\} : B \in \mathscr{B}\}$ p-beli környezetbázis elemei is nyílt-zártak. Az X teret $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{B}})$ alakban kívánjuk megadni, alkalmas $\mathscr{B}$ megválasztásával. Mivel $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ metrikus, 2.1.4 alapján rendelkezik mind a DT, mind az ODT tulajdonságokkal és mivel ez az X tér egy nyílt altere, a DT és ODT tulajdonságok X-ben is fennálnak valahányszor egy $\mathbb{Q}$-beli ponthoz torlódunk. Tehát egy $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{B}})$ alakú térben a DT (ODT) tulajdonság teljesülése azon múlik, hogy valahányszor $S \subset \mathbb{Q}$ olyan (nyílt), melyre $p \in \overline{S}$, találhatók-e diszjunkt $S_0, S_1 \subset S$ (nyíltak) melyekre $p \in \overline{S_0} \cap \overline{S_1}$.

Legyen $\langle S_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$ a $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ elemeinek egy felsorolása. Transzfinit rekurzióval konstruálunk rácsoknak egy $\langle \mathscr{B}_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$ sorozatát a következő tulajdonságokkal:

(i) $\forall \alpha < 2^\omega : \mathscr{B}_\alpha \subset \mathrm{Clop}(\mathbb{Q})$ felülről nem korlátos nyílt-zártakból álló rács, melyre $|\mathscr{B}_\alpha| \le |\alpha| + \omega$

(ii) $\forall \alpha < \beta < 2^\omega : \mathscr{B}_\alpha \subset \mathscr{B}_\beta$

(iii) $\mathscr{B}_0 := \{(n\sqrt{2}, +\infty) : n \ge 1\} \subset \mathrm{Clop}(\mathbb{Q})$

Tegyük fel, hogy $\alpha < 2^\omega$ és a $\langle \mathscr{B}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ sorozat rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. Ha $\alpha = \gamma + 1$ rákövetkező, akkor két esetet különböztetünk meg:

Első eset: $\exists B \in \mathscr{B}_\gamma$ melyre $B \setminus \overline{S_\alpha}^{\mathcal{E}}$ korlátos. Ekkor legyen $\mathscr{B}_\alpha = \mathscr{B}_\gamma$.

Második eset: $\forall B \in \mathscr{B}_\gamma$ esetén $B \setminus \overline{S_\alpha}^{\mathcal{E}}$ nem korlátos. Ekkor a 2.1.6 lemmát alkalmazva a $\mathscr{B}_\gamma$ rácsra valamint az S_α halmazra, kapunk egy $\mathscr{B}_\gamma \subset \mathscr{B}_\alpha \subset \mathrm{Clop}(\mathbb{Q})$ felülről nem korlátos, nyílt-zártakból álló rácsot, melyre $|\mathscr{B}_\alpha| \le |\mathscr{B}_\gamma| + \omega \le |\alpha| + \omega$ és melynek létezik olyan $B \in \mathscr{B}_\alpha$ eleme, melyre $B \cap \overline{S_\alpha}^{\mathcal{E}} = \varnothing$. Világos, hogy mindkét eset olyan folytatását adja a sorozatnak, mely teljesíti az (i) – (iii) feltételeket.

Ha α limesz, akkor legyen $\mathscr{B}' := \bigcup\{\mathscr{B}_\beta : \beta < \alpha\}$ ami szintén egy nemkorlátos nyílt-zártakból álló rács és ezzel, valamint az S_α halmazzal járjunk el úgy, mint az $\alpha = \gamma + 1$ rákövetkező esetben a $\mathscr{B}_\gamma$ rács helyett $\mathscr{B}'$-t tekintve. Mivel

$$|\mathscr{B}'| \le \sum\{|\beta| + \omega : \beta < \alpha\} \le |\alpha| + \omega,$$

az így kapott $\mathscr{B}_\alpha$ rács megfelelő folytatása a sorozatnak. Végül legyen

$$\mathscr{B} := \bigcup\{B_\alpha : \alpha < 2^\omega\}.$$

Amint láttuk, az $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{B}})$ tér zsufi, T_2 és 0 dimenziós valamint a DT tulajdonság fennáll valahányszor egy $\mathbb{Q}$-beli ponthoz torlódunk. Most belátjuk, hogy a p pontban is teljesül.

Ehhez legyen $S \subset \mathbb{Q}$ tetszőleges, melyre $p \in \overline{S}^{\mathscr{T}_{\mathscr{B}}}$. Létezik $\alpha < 2^{\omega}$, melyre $S = S_{\alpha}$. Ekkor a konstrukció α. lépésében nem lehettünk a második esetben, hiszen akkor bekerült volna egy $B \in \mathscr{B}_{\alpha} \subset \mathscr{B}$ halmaz a p környezetbázisába, melyre $B \cap \overline{S}^{\mathcal{E}} = \varnothing$ ami ellentmond annak, hogy S torlódik a p ponthoz. Viszont így, hogy az első eset volt érvényes, van $B \in \mathscr{B}_{\alpha} \subset \mathscr{B}$ melyre $B \setminus \overline{S}^{\mathcal{E}}$ korlátos amiből, ha $n < \omega$ elég nagy adódik, hogy $B \cap (n\sqrt{2}, +\infty) \subset \overline{S}^{\mathcal{E}}$. Ez azt jelenti, hogy S sűrű a $B \cap (n\sqrt{2}, +\infty)$ nyílt-zárt halmazban így $S \cap B \cap (n\sqrt{2}, +\infty)$ felbomlik két diszjunkt $S_0, S_1 \subset S$ sűrű altér uniójára (Mivel ez a metszet egy zsufi metrikus tér, tehát felbontható.). Viszont ekkor bármely $C \in \mathscr{B}$ esetén a $C \cap B \cap (n\sqrt{2}, +\infty) \subset B \cap (n\sqrt{2}, +\infty)$ nyílt alteret mindketten elmetszik. Ebből következik, hogy $\forall C \in \mathscr{B} : S_0 \cap C, S_1 \cap C \neq \varnothing$ vagyis $p \in \overline{S_0} \cap \overline{S_1}$. Tehát az X tér DT tulajdonságú.

Végül belátjuk, hogy nem X ODT. Azt igazoljuk, hogy nem létezik két diszjunkt, nem üres $U_0, U_1 \subset \mathbb{Q}$ $\mathcal{E}$-nyílt halmaz, melyekre $p \in \overline{U_0} \cap \overline{U_1}$ teljesülne. Ha mégis U_0, U_1 két ilyen nyílt volna, akkor egyrészt $\exists \alpha, \beta < 2^{\omega} : U_0 = S_{\alpha}, U_1 = S_{\beta}$, másrészt $p \in \overline{U_0}$ miatt a konstrukció α. lépésében az első eset érvényes, vagyis van $B_0 \in \mathscr{B}_{\alpha} \subset \mathscr{B}$ melyre $B_0 \setminus \overline{U_0}^{\mathcal{E}}$ korlátos. Hasonló okból, létezik $B_1 \in \mathscr{B}_{\beta} \subset \mathscr{B}$ melyre $B_1 \setminus \overline{U_1}^{\mathcal{E}}$ korlátos. Ekkor, ha $n < \omega$ elég nagy, akkor $B_0 \cap (n\sqrt{2}, +\infty) \subset \overline{U_0}^{\mathcal{E}}$ és $B_1 \cap (n\sqrt{2}, +\infty) \subset \overline{U_1}^{\mathcal{E}}$ amiből az adódik, hogy a $B_0 \cap B_1 \cap (n\sqrt{2}, +\infty)$ nemkorlátos nyíltból az U_0, U_1 sűrű részeket metszenek ki. Így viszont $U_0 \cap U_1 \cap B_0 \cap B_1 \cap (n\sqrt{2}, +\infty) \neq \varnothing$ ami elletmond a $U_0 \cap U_1 = \varnothing$ feltevésnek. ∎

2.2. Pillangó pontok és felbonthatóság

Tekintsük a következő problémát: legyen $(X, \mathscr{T})$ egy zsufi, „szép” tér és tegyük fel, hogy adott egy $\mathscr{A} : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ halmazrendszer kijelölés, melyre $\forall x \in X$ esetén

$$x \in \bigcap \{\overline{A} : A \in \mathscr{A}(x)\}$$

teljesül. Lehetséges-e olyan $\mathscr{T}'$ finomítását megadni a $\mathscr{T}$ topológiának, mely szintén zsufi és „szép”, valamint felbonthatatlan és továbbra is fennáll bármely $x \in X$ esetén, hogy az $\mathscr{A}(x)$ rendszerbeli halmazok lezártjaiban (értelem szerűen az új $\mathscr{T}'$ topológia szerint) benne van az x pont? Nem nehéz olyan példát találni, ahol ilyen topológiafinomítás nem megvalósítható: legyen $(X, \mathscr{T}) = (\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ valamint $X = D \dot{\bigcup} E$ két sűrűre való felbontása a térnek valamint legyen $D = \dot{\bigcup} \{A_n : n < \omega\}, E = \dot{\bigcup} \{B_n : n < \omega\}$ a D illetve E alterek egy-egy további partíciója sűrű alterek uniójára. Legyen $D = \{x_n : n < \omega\}, E = \{y_n : n < \omega\}$ D illetve E egy felsorolása. Definiáljuk az $\mathscr{A}(x)$ rendszereket a következő módon: legyen

$\mathscr{A}(x_n) = \{B_n\}, \mathscr{A}(y_n) = \{A_n\}$ minden $n < \omega$ esetén. Ekkor ha $\mathscr{T} \supset \mathcal{E}$ olyan zsufi finomítás, mely szerint a D, E halmazok nem mindketten sűrűk, akkor létezik például egy $U \in \mathscr{T}$ melyre $U \subset D$. De ekkor bármely $x_n \in U$ pontnak U olyan $\mathscr{T}$-környezete mely nem metszi az $\mathscr{A}(x_n)$-beli halmazt.

Ezért valamilyen korlátozást kell tenni a tér pontjaihoz rendelt $\mathscr{A}(x)$ halmazrendszerekre. Az alábbi fogalom segítségével specializáljuk a fenti problémát.

2.2.1 Definíció. *Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér és $n \in \omega, n \geq 1$ tetszőleges. Egy $x \in X$ pontot n-pillangó pontnak nevezünk, ha léteznek $\{U_k : k < n\}$ diszjunkt, nyílt halmazok, melyekre $x \in \bigcap\{\overline{U_k} : k < n\}$ teljesül.*

Ezen új fogalom felhasznlálásával a fenti probléma a következő alakot ölti: lehetséges-e úgy finomítani egy X tér topológiáját, hogy végül egy felbonthatatlan teret kapjuk és ha egy $x \in X$ pont kezdetben mondjuk n-pillangó pont volt, akkor a finomítás után is az legyen? Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az $(X, \mathscr{T}) = (\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ térből kiindulva ez lehetséges, sőt, ennél több is garantálható: előre rögzíthető, hogy a finomabb topológia szerint melyik pont pontosan hány-pillangó pont legyen. A konstrukció előtt teszünk néhány megjegyzést topológiafinomításokkal kapcsolatosan.

Legyen $(X, \mathscr{T})$ egy tér és $S \subset X$ tetszőleges. A legszűkebb $\mathscr{T}$-t tartalmazó topológia, mely szerint az S halmaz nyílt-zárt a következő halmazokból áll:

$$\mathscr{T}^S = \{U_1 \cup (U_2 \cap S) \cup (U_3 \setminus S) : U_1, U_2, U_3 \in \mathscr{T}\}.$$

Ebből rögtön látható, hogy $\mathscr{T}^S$ pontosan akkor zsufi, ha sem S-nek, sem $X \setminus S$-nek nincs izolált pontja. Továbbá, ha $\mathscr{T}$ 0-dimenziós, akkor $\mathscr{T}^S$ is és sem a tér súlya, sem a pontbeli karakterek nem változnak. Az alábbi állításban két speciális esetben fogjuk használni ezt a finomítást: először amikor S és $X \setminus S$ sűrű halmazok, másodszor mikor S egy olyan nyílt halmaz lezártja, melynek egyetlen torlódási pontja van. Az első esetben a régi nyílt halmazok lezártja nem változik: ha $U \in \mathscr{T}$, akkor persze $\overline{U}^{\mathscr{T}^S} \subset \overline{U}^{\mathscr{T}}$ mindig fennáll, de ha most $x \in \overline{U}^{\mathscr{T}}$ és mondjuk $x \in S$, akkor bármely $x \in V$ $\mathscr{T}$-nyíltra $(V \cap S) \cap U = (V \cap U) \cap S$ ami nem üres, mivel egy nem üres nyíltnak egy sűrűvel való metszete. Az $x \in X \setminus S$ eset hasonló. Ebből adódik, hogy $x \in \overline{U}^{\mathscr{T}^S}$. A második esetre vonatkozólag, tegyük fel hogy $U \in \mathscr{T}$ olyan, hogy $\overline{U} \setminus U = \{p\}$, alkalmas $p \in X$ pontra. Ekkor az $S = \overline{U}$ halmaznak nincs izolált pontja tehát $\mathscr{T}^S$ zsufi és 0-dimenziós, amennyiben $\mathscr{T}$ is. Ha $q \in X \setminus \{p\}$, akkor q az U vagy az $X \setminus S$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazok egyikéből való, amelyeken a topológia nem változott, és így van olyan környezetbázisa a $\mathscr{T}^S$ topológia szerint, mely $\mathscr{T}$-nyílt halmaozkból áll. Ebből adódik, hogy a p-n kívüli pontokhoz való torlódás az új topológia szerint ekvivalens a hozzájuk való, régi topológia szerinti torlódással.

2.2.2 Állítás. (CH) *Legyen $f : \mathbb{Q} \to \omega \setminus 1$ egy tetszőleges függvény. Létezik olyan zsufi, 0-dimenziós, T_2, felbonthatatlan $\mathscr{T} \supset \mathcal{E}$ topológia az $X = \mathbb{Q}$ alaphalmazon, melyre bármely $x \in X$ esetén x $f(x)$-pillangó de nem $(f(x)+1)$-pillangó pont.*

Bizonyítás. Rögzítsünk minden $x \in X$ ponthoz egy $\mathscr{V}(x) \in [\mathcal{E}^+]^{f(x)}$ páronként diszjunkt nyíltakból álló rendszert, melyre $x \in \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}(x)\}$ teljesül. Ilyen halmazrendszert például így találhatunk: legyen $\{U_n : n < \omega\}$ egy környezetbázis az x pontban melyre $\forall n < \omega : \overline{U_{n+1}} \subset U_n$ teljesül. Ha $\omega = \dot{\bigcup}\{A_k : k < f(x)\}$, ahol $A_k \in [\omega]^\omega$, akkor a $V_k := \bigcup\{U_n \setminus \overline{U_{n+1}} : n \in A_k\}$ halmazokból álló $\mathscr{V}(x) = \{V_k : k < f(x)\}$ rendszer megfelel. Transzfinit rekurzióval ω_1 lépésben fogjuk az $\mathcal{E}$ topológiát finomítani úgy, hogy végül a kívánt tulajdonságoknak eleget tevő teret kapjunk. Ehhez legyen $\langle T_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ a

$$\{(D,E) \in \mathscr{P}(X)^2 : X = D \cup E\} \bigcup$$
$$\{(x,\mathscr{W}) : x \in X, \mathscr{W} \in [\mathscr{P}(X)]^{(f(x)+1)} : \forall W_1, W_2 \in \mathscr{W} : W_1 \cap W_2 = \varnothing\}$$

halmaznak egy ω_1-abundáns felsorolása. Ez a felsorolás az „elvégzendő feladatok" listája, tehát egy $T_\alpha = (D,E)$ alakú feladat egy potenciális sűrű partíciót jelöl melyet az adott lépésben szeretnénk a topológia finomításával elrontani, egy $T_\alpha = (x,\mathscr{W})$ alakú feladat pedig egy potenciális nyílt $(f(x)+1)$-est jelöl, mely tanusítja, hogy x $(f(x)+1)$-pillangó pont és ennek megfelelően kell majd az adott lépésben a topológia finomításával ezt elrontani. Mindemellett úgy szeretnénk majd finomításokat elvégezni, hogy a fentebb kijelölt $\mathscr{V}(x)$ rendszerek a végén is tanusítsák, hogy x $f(x)$-pillangó pont.

Tegyük fel, hogy $\alpha < \omega_1$ és a $\langle \mathscr{T}_\beta : \beta < \alpha\rangle$ növő topológiasorozat adott, melyben $\mathscr{T}_0 = \mathcal{E}$ és melyben minden tag zsufi, 0-dimenziós, M_1 topológia, valamint

$$\forall x \in X : x \in \bigcap\{\overline{V}^{\mathscr{T}_\beta} : V \in \mathscr{V}(x)\}$$

teljesül minden $\beta < \alpha$ esetén. Ha α limesz, akkor legyen $\mathscr{T}' = \sup\{\mathscr{T}_\beta : \beta < \alpha\}$, különben legyen $\mathscr{T}' = \mathscr{T}_\beta$, ha $\alpha = \beta + 1$. Nem nehéz látni, hogy $\mathscr{T}'$ is rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, melyeket a sorozat tagjairól feltettünk. CH-nak itt van jelentősége: mivel csak megszámlálható sok M_1 topológia szuprémumát képezzük, M_1 topológiát kapunk. A végső topológiánk ugyan nem lesz M_1 viszont lentebb látható lesz, hogy a konstrukció során lényegesen kihasználjuk, hogy vannak megszámlálható környezetbázisok.

Első eset: az α indexű feltétel $T_\alpha = (D,E)$ alakú. Ha a D, E halmazok nem mindketten sűrűk $\mathscr{T}'$ szerint, akkor legyen $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}'$. Ha a D, E halmazok sűrűk $\mathscr{T}'$ szerint, akkor legyen $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}'^D$. Mivel D, E a $\mathscr{T}'$ zsufi, T_2 topológia szerint sűrűk így egyiknek sincs izolált pontja és emiatt a topológiafinomításokra vonatkozó fentebbi megjegyzéseink alapján $\mathscr{T}_\alpha$ szintén egy zsufi, 0-dimenziós, M_1 topológia mely szerint a $\mathscr{T}'$-nyíltak lezártjai ugyan azok, mint $\mathscr{T}'$ szerint. Ebből adódik, hogy bármely $x \in X$ esetén $x \in \bigcap\{\overline{V}^{\mathscr{T}_\alpha} : V \in \mathscr{V}(x)\}$.

Második eset: $T_\alpha = (x, \mathscr{W})$, valamely $x \in X$ pontra és $\mathscr{W} \in [\mathscr{P}(X)]^{(f(x)+1)}$ páronként diszjunkt halmazokból álló rendszerre. Amennyiben a $\mathscr{W}$ elemei nem mind $\mathscr{T}'$-nyíltak vagy $x \notin \bigcap\{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$, úgy legyen $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}'$. Ellenkező esetben viszont a $\mathscr{W}$ rendszer tanusítja, hogy x $(f(x)+1)$-pillangó pont $\mathscr{T}'$ szerint. Vizsgáljuk meg hogyan viszonyul a $\mathscr{W}$ rendszer a $\mathscr{V}(x)$ rendszerhez. Ha bármely $W \in \mathscr{W}$ halmazhoz létezne olyan $V_W \in \mathscr{V}(x)$, melyre $x \notin \overline{V_W \setminus \overline{W}}$, akkor mivel $|\mathscr{W}| > |\mathscr{V}(x)|$, van $W_1, W_2 \in \mathscr{W}$ melyekre $V_{W_1} = V_{W_2} = V$. Legyen $x \in G \in \mathscr{T}'$ olyan, melyre $G \cap (V \setminus \overline{W_i}) = \varnothing, i = 1, 2$. Ekkor viszont $G \cap V \subset \overline{W_1} \cap \overline{W_2}$, ami lehetetlen, mivel W_1, W_2 diszjunkt, nyílt halmazok így a lezártjaik metszete megegyezik a határaik metszetével ami sehol sem sűrű. Ebből tehát az adódik, hogy van $W \in \mathscr{W}$, melyre bármely $V \in \mathscr{V}(x)$ esetén $x \in \overline{V \setminus \overline{W}}$. Minden $V \in \mathscr{V}(x)$-hez legyen $H_V \subset V \setminus \overline{W}$ egy olyan nyílt, melyre $\overline{H_V} \setminus H_V = \{x\}$. Ilyen nyíltat például a következőképpen kaphatunk: legyen $\{U_n : n < \omega\}$ egy $\mathscr{T}'$ szerinti, nyílt-zártakból álló, fogyó környezetbázis az x pontban. Ekkor az

$$I = \{n < \omega : (U_n \setminus U_{n+1}) \cap (V \setminus \overline{W}) \neq \varnothing\}$$

indexek halmaza, $x \in \overline{V \setminus \overline{W}}$ miatt végtelen, így ha minden $n \in I$ indexhez veszünk egy $C_n \subset (U_n \setminus U_{n+1}) \cap (V \setminus \overline{W})$ nyílt-zártat majd vesszük ezek unióját, akkor ez H_V-nek megfelel. Ezután vegyük a $H = \bigcup\{H_V : V \in \mathscr{V}(x)\}$ nyíltat. Erre fennáll, hogy $\overline{H} \setminus H = \{x\}$. Legyen $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}'^{\overline{H}}$. A fenti megjegyzéseink értelmében ez egy zsufi, 0-dimenziós, M_1 topológia és bármely $y \in X \setminus \{x\}$ esetén $y \in \bigcap\{\overline{V}^{\mathscr{T}_\alpha} : V \in \mathscr{V}(y)\}$. A konstrukció alapján ez az x pontban is teljesül: tetszőleges $x \in U \in \mathscr{T}'$ esetén $U \cap \overline{H} \cap V \supset U \cap H_V \neq \varnothing$ tetszőleges $V \in \mathscr{V}(x)$-re, így x minden $\mathscr{T}_\alpha$ szerinti környezete elmetszi az összes $V \in \mathscr{V}(x)$ halmazt. Másfelől, H megválasztása folytán, van $W \in \mathscr{W}$ melyre $H \cap W = \varnothing$ de mivel $f(x) + 1 \geq 2$ és feltevésünk szerint $x \in \bigcap\{\overline{W}^{\mathscr{T}'} : W \in \mathscr{W}\}$, ezért $x \notin W$ amiből $(H \cup \{x\}) \cap W = \varnothing$ adódik, viszont előbbi egy $\mathscr{T}_\alpha$ környezete az x pontnak tehát $x \notin \overline{W}^{\mathscr{T}_\alpha}$.

Végül legyen $\mathscr{T} = \sup\{\mathscr{T}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. A $\mathscr{T}$ topológiának $\bigcup\{\mathscr{T}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ egy bázisa viszont mivel $|X| = \omega$ így ez megegyezik magával $\mathscr{T}$-val: ha $U \in \mathscr{T}$ és $U = \{x_n : n < \omega\}$ az elemeinek egy felsorolása, akkor ha minden $n < \omega$ esetén választunk egy $x_n \in U_n \in \mathscr{T}_{\alpha_n}$ nyíltat, alkalmas $\alpha_n < \omega_1$ redszámra, úgy, hogy $U_n \subset U$ teljesüljön, akkor $U = \bigcup\{U_n : n < \omega\}$ és ez utóbbi halmaz már eleme bármely $\mathscr{T}_\beta$ topológiának, melyre $\beta > \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. Az $(X, \mathscr{T})$ tér zsufi, 0-dimenziós, T_2 és minden $x \in X$ pontra $x \in \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}(x)\}$ mivel ezek a $\langle \mathscr{T}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ sorozat minden elemére teljesültek. Tehát bármely $x \in X$ pont $f(x)$-pillangó pont. Ez a tér felbonthatatlan: ha $X = D \dot{\bigcup} E$ egy partíció, akkor van

$\alpha < \omega_1$, melyre $T_\alpha = (D, E)$ és a konstrukció alapján van $U \in \mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}$, mely vagy D-nek vagy E-nek része tehát nem lehetnek mindketten sűrűk.

Legyen $x \in X$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $W \in [\mathscr{T}]^{(f(x)+1)}$ egy nem üres nyíltakból álló celluláris rendszer, melyre $x \in \bigcap\{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$. Van olyan $\beta < \omega_1$ melyre $\mathscr{W} \subset \mathscr{T}_\beta$. Mivel a $\langle T_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ a feladatoknak egy ω_1-abundáns felsorolása volt, ezért van olyan $\gamma > \beta$, melyre $T_\gamma = (x, \mathscr{W})$. A konstrukció γ. lépésében így $\mathscr{W}$ nyíltak egy $(f(x) + 1)$ elemű celluláris rendszere melynek mindegyik eleme tartalmazza az x pontot lezártjában az adott lépésben definiált $\mathscr{T}'$ segédtopológia szerint, hiszen ez durvább, mint $\mathscr{T}$. Így viszont a konstrukció γ. lépésében bekerült egy olyan $x \in U \in \mathscr{T}_\gamma$ halmaz a nyíltjaink közé, mely diszjunkt valamely $\mathscr{W}$-beli halmaztól. Ez ellentmond feltevésünknek tehát a $\mathscr{W}$ rendszer nem tanusíthatja, hogy x $(f(x) + 1)$-pillangó pont. ■

Irodalomjegyzék

[Ced64] Jack Ceder. On maximally resolvable spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 1964.

[CP67] Jack Ceder and Terrance Pearson. On products of maximally resolvable spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 22, 1967.

[Hew43] Edwin Hewitt. A problem of set-theoretic topology. 1943.

[Ill96] Alejandro Illanes. Finite and ω-resolvability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1996.

[JSS06] István Juhász, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. D-forced spaces: A new approach to resolvability. *Topology and its Applications*, 2006.

[JSS08] István Juhász, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. Resolvability and monotone normality. *Israel Journal of Mathematics*, 2008.

[JSS22] István Juhász, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. On resolvability of products. *arXiv preprint arXiv:2205.14896*, 2022.

[KP71] Kenneth Kunen and Karel Prikry. On descendingly incomplete ultrafilters. *The journal of symbolic logic*, 1971.

[Lip18] AE Lipin. Resolvability of pseudocompact spaces at a point. In *International conference in honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu, Ekaterinburg, Russia*, pages 223–228, 2018.

[Lip24] Anton Lipin. On resolvability and tightness in uncountable spaces. *arXiv preprint arXiv:2402.11213*, 2024.

[vM16] Jan van Mill. Every crowded pseudocompact ccc space is resolvable. *Topology and its Applications*, 213, 2016.