

Komplex függvénytan feladatok

Szakdolgozat

Szerző: Horgas Marcell

Témavezető: Sigray István

Matematika BSc, matematikus szakirány



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék mindenk előtt köszönetet mondani Sigray Istvánnak, aki témavezetőmként rengeteg segítséget nyújtott nekem, és számos hasznos tanáccsal látott el szakdolgozatom megírása során.

Szeretném továbbá megszönni Kós Gézának -aki a komplex függvénytan tárgy gyakorlatait tartotta- hogy a tanórai segítség mellett heti rendszerességgel tartott nekem fogadóórákat a komplex függvénytan érdekesebb és nehezebb feladatai megoldásával kapcsolatban.

Végül szeretnék köszönetet mondani Szőke Róbertnek, a komplex függvénytan tárgy előadójának is, aki mindig élvezetesen, ugyanakkor részletekbe menően átfogó precizitással tartotta számunkra előadásait, aki szintén hozzájárult ahhoz, hogy a matematika ezen ága felé forduljon érdeklődésem.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	3
2. A komplex számok algebrai és geometriai alkalmazásai	3
2.1. Klasszikus algebrai és geometriai alkalmazások	3
2.2. A Riemann-féle szögömb; lineáris törtfüggvények	10
2.3. A Bolyai-(hiperbolikus)geometria Poincaré-féle modellje	20
3. Komplex integrálok	25
3.1. Az exponenciális és trigonometrikus függvények és inverzeik . . .	25
3.2. Cauchy tételei és Reziduum-tétel	27
4. Összegzés	36

NYILATKOZAT

Név: HORGAS MARCELL

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA BSC

NEPTUN azonosító: 063XKB

Szakdolgozat címe: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN FELADATOK

A szakdolgozat szerzőjeként felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2025.01.01.



a hallgató aláírása

1. Bevezető

Ezen szakdolgozat első részében a komplex számok klasszikus algebrai és geometriai alkalmazásairól esik szó.

Az első alfejezetben a komplex számok rövid bevezetése és a legfontosabb komplex számokkal kapcsolatos algebrai fogalmak ismertetése után klasszikus algebrai és geometriai alkalmazások kerülnek tárgyalásra feladatok megoldása formájában, mint a Cardano-képlet levezetése, vagy a szabályos öt- és tizenhétszög szerkesztése. Az ezt követő alfejezetben a Riemann-féle számgömb illetve a sztereografikus vetítés ismertetésére kerül sor -olyan fogalmak részletesebb tárgyalásával, amelyek szorosan kapcsolódnak a gömbi geometriához- majd alkalmazására fontosabb és érdekesebb feladatmegoldások formájában. Az első rész utolsó alfejezete pedig a Bolyai-féle hiperbolikus geometriának egy komplex modelljéről szól, annak távolságfogalmának levezetéséről.

A második részben már a komplex függvényeken van a hangsúly, a feladatokban elsősorban integrálok szerepelnek a komplex függvénytan hozzájuk kapcsolódó tételeinek alkalmazásaként.

2. A komplex számok algebrai és geometriai alkalmazásai

2.1. Klasszikus algebrai és geometriai alkalmazások

2.1. Definíció. Nevezzük el a $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ halmazt a komplex számok testének.

2.2. Megjegyzés. A sík pontjait a komplex számoknak feleltettük meg; a sík pontjai, azaz a komplex sík pontjai közötti $x + iy \mapsto (x, y)$ megfeleltetés egy bijekció.

2.3. Definíció. A $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex szám $|z|$ abszolút értékét a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ formulával értelmezzük, amíg a $\bar{z}$ -vel jelölt konjugáltját a $\bar{z} = x - iy$ formula segítségével.

2.4. Megjegyzés. A $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex szám $\bar{z}$ konjugáltja megfelel a valós-tengelyre vett tükröképének.

2.5. Definíció. $z = x + iy$ nem-nulla tetszőleges komplex szám esetén, ha r és φ jelöli az (x, y) pont polárkoordinátáit, ahol $r = |z| > 0$, akkor $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, amelyből adódik, hogy $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, amit a z komplex szám trigonometrikus alakjának nevezünk. A φ szöveget a z komplex szám (fő)argumentumának hívjuk, és $\arg z$ -vel jelöljük.

2.6. Megjegyzés. Egy komplex szám trigonometrikus alakjában, ha φ argumentum helyett $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ -t írunk, akkor a komplex szám ugyanaz marad.

2.7. Állítás. 1. Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ tetszőleges nem-nulla komplex számok. Ekkor

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

2. (Moivre-formula) Trigonometrikus alakban adott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex számot pedig a következőképpen hatványozunk.

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. (Az n -edik gyök kiszámítása)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

2.8. Jelölés. Nyílt körlemez alatt a kör belsejét, azaz a $|z - z_0| < r$ halmazt értjük. Ennek jele: $B(z_0, r)$, vagy $B_r(z_0)$.

2.9. Definíció. A $z = x + iy$ tetszőleges komplex szám esetén e^z -t a következőképpen értelmezzük.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

2.10. Feladat. Legyen $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Ekkor $\varepsilon^5 = 1$, vagyis ε egy ötödik egységgyök.

1. Számoljuk ki $z + w$ -t és zw -t, ahol $z = \varepsilon + \varepsilon^4$, $w = \varepsilon^2 + \varepsilon^3$!
2. A fentieket felhasználva szerkesszünk szabályos 5 -szöget!
3. Szerkesszünk szabályos 17-szöget is!

Megoldás.

1. A mértani sorból adódik, hogy

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1,$$

mivel

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = \frac{\varepsilon^5 - 1}{\varepsilon - 1} = 0.$$

Továbbá a feladat alapján

$$z = \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \quad w = \varepsilon + \varepsilon^4.$$

Ekkor felhasználva, hogy $\varepsilon^5 = 1$, $\varepsilon^6 = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$, $\varepsilon^7 = 1 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^2$ látható, hogy

$$z + w = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon + \varepsilon^4 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1 =$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \cdot (\varepsilon + \varepsilon^4) = z \cdot w.$$

2. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint

$$(\lambda - z) \cdot (\lambda - w) = 0$$

$$\lambda^2 - (z + w)\lambda + z \cdot w = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Ekkor ennek gyökei $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel a $w = \varepsilon + \varepsilon^4$ esetén a valós része mind a két tagnak pozitív, így $w > 0$, azaz a pozitív gyök, és mivel $z = \varepsilon^2 + \varepsilon^3$ esetében mind a két tag valós része negatív, így $z < 0$ a negatív gyök, azaz

$$z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad w = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

ε -t magát is ki lehet számolni, mivel

$$w = \varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}, \quad \varepsilon \cdot \varepsilon^4 = \varepsilon^5 = 1,$$

ezért a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján ε egy

$$(\delta - \varepsilon) + (\delta - \varepsilon^4) = 0$$

$$\delta^2 - (\varepsilon + \varepsilon^4) \cdot \delta + \varepsilon \cdot \varepsilon^4 = 0$$

$$\delta^2 - w \cdot \delta + 1 = 0,$$

azaz

$$\delta^2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \delta + 1 = 0$$

másodfokú egyenletnek a megoldása. Tehát gyökös kifejezés, és a gyökös kifejezés szerkeszthető, minthogy ha egy szám megszerkeszthető, akkor a négyzetgyöke is megszerkeszthető, így csakugyan szerkeszthető szabályos 5-szög.

3. **A szabályos 17-szög szerkesztése:** Ebben az esetben

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}.$$

Legyen

$$a_1 := \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{32} + \varepsilon^{64} + \varepsilon^{128}.$$

Ekkor felhasználva, hogy $\varepsilon^{17} = 1$ adódik, hogy

$$\varepsilon^{32} = \varepsilon^{17+15} = \varepsilon^{17} \cdot \varepsilon^{15} = 1 \cdot \varepsilon^{15},$$

$$\varepsilon^{64} = \varepsilon^{51+13} = \varepsilon^{3 \cdot 17} \cdot \varepsilon^{13} = \varepsilon^{13},$$

$$\varepsilon^{128} = \varepsilon^{7 \cdot 17+9} = \varepsilon^9,$$

azaz

$$a_1 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{13} + \varepsilon^9.$$

Legyen továbbá

$$a_2 := \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{24} + \varepsilon^{48} + \varepsilon^{96} + \varepsilon^{192} + \varepsilon^{384}.$$

Ekkor

$$a_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{10}.$$

Valamint

$$a_1 + a_2 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} = -1;$$

$$a_1 \cdot a_2 =$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^8 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{11} + \\ & \varepsilon^5 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^9 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{13} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \\ & \varepsilon^7 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^1 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^9 + \varepsilon^{14} + \\ & \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^5 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^1 + \\ & \varepsilon^2 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{10} + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \\ & \varepsilon^1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^9 + \varepsilon^3 + \varepsilon^8 + \\ & \varepsilon^{16} + \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^7 + \varepsilon^1 + \varepsilon^6 + \\ & \varepsilon^{12} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^4 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^6 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^2 = \end{aligned}$$

$$4 \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16}) = 4 \cdot (a_1 + a_2) = 4 \cdot (-1) = -4.$$

Így már kiszámítható a_1 és a_2 , mivel megvan a kettő szorzata és összege, ezért az előzőekhez hasonlóan egy másodfokú egyenlet adódik a gyökök és együttthatókra vonatkozó formula alapján. Tehát

$$(a - a_1) \cdot (a - a_2) = 0$$

$$a^2 - (a_1 + a_2)a + a_1 \cdot a_2 = 0$$

$$a^2 + a - 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Közvetlen számolás alapján, a $\Re \varepsilon^k = \cos \frac{2\pi k}{17}$ alkalmazva a $\cos$ -ok összeadásával $a_1 > 0$ és $a_2 < 0$.

A korábbiakhoz hasonlóan legyen ezek után

$$b_1 = \varepsilon^1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{13}, \quad b_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^9$$

$$b_3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^5, \quad b_4 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{10}.$$

Ekkor

$$b_1 + b_2 = a_1;$$

$$b_1 \cdot b_2 =$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{10} + \\
& \varepsilon^6 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{13} + \\
& \varepsilon^1 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^8 + \\
& \varepsilon^{15} + \varepsilon^4 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^5 = \\
& \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{16} = (a_1 + a_2) = -1.
\end{aligned}$$

Előbbihez hasonlóan

$$\begin{aligned}
& b_3 + b_4 = a_2; \\
& b_3 \cdot b_4 = \\
& \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{13} + \\
& \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \\
& \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^7 + \\
& \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} = \\
& \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{16} = (b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) = -1.
\end{aligned}$$

Tehát, az összeg és szorzat ismeretében így már b_1 -re és b_2 -re, illetve b_3 -ra és b_4 -re is van egy-egy egyenletünk. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések miatt a

$$\begin{aligned}
(b - b_1) \cdot (b - b_2) &= 0 \\
b^2 - (b_1 + b_2)b + b_1 \cdot b_2 &= 0 \\
b^2 - a_1b - 1 &= 0
\end{aligned}$$

egyenletnek a két gyöke b_1 és b_2 , a

$$b^2 - a_2b - 1 = 0$$

egyenletnek pedig b_3 és b_4 . Tehát

$$b_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4}}{2}, \quad b_{3,4} = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4}}{2}.$$

(Mind a kettő valós, mivel felírásában a konjugáltak is szerepelnek. Ismét eldöntjük, a két valós szám közül melyik a pozitív, melyik a negatív, és ennek alapján melyik lesz a b_1 és melyik lesz a b_2 , illetve a b_3 és b_4 .) Tehát közvetlen számolással

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2.04948\dots, \quad b_2 = -0.48792\dots, \\
b_3 &= 0.34415\dots, \quad b_4 = -2.90570\dots,
\end{aligned}$$

azaz tudjuk, hogy $b_1, b_3 > 0$, $b_2, b_4 < 0$. Ez után a b_i , $i = 1, 2, 3, 4$ -ket tovább bontva legyen

$$c_1 = \varepsilon + \varepsilon^{16}, \quad c_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{13},$$

$$\begin{aligned}c_3 &= \varepsilon^2 + \varepsilon^{15}, & c_4 &= \varepsilon^8 + \varepsilon^9, \\c_5 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^{14}, & c_6 &= \varepsilon^{12} + \varepsilon^5, \\c_7 &= \varepsilon^6 + \varepsilon^{11}, & c_8 &= \varepsilon^7 + \varepsilon^{10}.\end{aligned}$$

Ekkor tehát

$$c_1 + c_2 = b_1, \quad c_3 + c_4 = b_2, \quad c_5 + c_6 = b_3, \quad c_7 + c_8 = b_4,$$

és

$$\begin{aligned}c_1 \cdot c_2 &= \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{12} = b_3, \\c_3 \cdot c_4 &= \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 = b_4, \\c_5 \cdot c_6 &= \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^2 = b_2, \\c_7 \cdot c_8 &= \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^1 + \varepsilon^4 = b_1.\end{aligned}$$

Így a következő másodfokú egyenleteket kapjuk, amelyeknek gyökei rendre $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ és c_7, c_8 .

$$\begin{aligned}(c - c_1) \cdot (c - c_2) &= 0 \\c^2 - (c_1 + c_2)c + c_1 \cdot c_2 &= 0 \\c^2 - b_1 \cdot c + b_3 &= 0 \\c^2 - b_2 \cdot c + b_4 &= 0 \\c^2 - b_3 \cdot c + b_2 &= 0 \\c^2 - b_4 \cdot c + b_1 &= 0\end{aligned}$$

Ekkor van egy olyan másodfokú egyenletünk, mégpedig a $c^2 - b_1 \cdot c + b_3 = 0$ egyenlet, amelynek c_1 és c_2 a két gyöke, azaz az egyik gyök $\varepsilon + \varepsilon^{16}$, a másik pedig $\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}$. Előbbiekhez hasonló módon ez két valós szám lesz, amiből a nagyobbik valós szám a c_1 , a kisebbik pedig a c_2 . Tehát

$$c_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_3}}{2}.$$

Így a többi három egyenletre nincs is szükségünk. De mivel $c_1 = \varepsilon + \varepsilon^{16}$, így ebből és az $\varepsilon \cdot \varepsilon^{16} = 1$ azonosságból adódik, valamint a gyökök és együtthatók közötti összefüggés felhasználásával, hogy ε egy

$$\begin{aligned}(\delta - \varepsilon) \cdot (\delta - \varepsilon^{16}) &= 0 \\\delta^2 - (\varepsilon + \varepsilon^{16}) \cdot \delta + \varepsilon \cdot \varepsilon^{16} &= 0 \\\delta^2 - \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_3}}{2} + 1 &= 0\end{aligned}$$

másodfokú egyenletnek a megoldása. Ezért gyökös kifejezés, és minthogy a gyökös kifejezés szerkeszthető, mivel ha egy szám megszerkeszthető, akkor a négyzetgyöke is megszerkeszthető, így csakugyan szerkeszthető szabályos 17-szög is a szabályos 5-szöghöz hasonlóan.

2.11. Feladat. Legyen $\varepsilon := \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Legyen továbbá $a, b \in \mathbb{C}$. Legyen $u := a + b$, $v := \varepsilon a + \varepsilon^2 b$, $w := \varepsilon^2 a + \varepsilon b$.

Számítsuk ki u, v, w elemi szimmetrikus polinomjait $(u + v + w, uv + uw + vw, uvw)$!

Ennek segítségével oldjuk meg a $z^3 + \alpha z + \beta = 0$ egyenletet (Cardano-képlet)!

Megoldás. Az elemi polinomok $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ esetén

$$u = a + b, \quad v = \varepsilon a + \varepsilon^2 b, \quad w = \varepsilon^2 a + \varepsilon b.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u + v + w &= a(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + b(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = a \cdot (1 - 1) + b \cdot (1 - 1) = 0, \\ uv + uw + vw &= a^2(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3) + b^2(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3) + ab \cdot 3(\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= a^2 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 + 3ab \cdot (-1) = -3ab. \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} uvw &= a^3(\varepsilon^3) + b^3(\varepsilon^3) + a^2b(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) + ab^2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) = \\ &= a(\varepsilon^3) + b(\varepsilon^3) + a^2b(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + ab^2(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = \\ &= a^3 \cdot 1 + b^3 \cdot 1 + a^2b \cdot 0 + ab^2 \cdot 0 = a^3 + b^3. \end{aligned}$$

Az általános harmadfokú egyenlet a következő alakra hozható lineáris helyettesítéssel (binomiális tétel)

$$z^3 + \alpha z + \beta = 0.$$

Ekkor, ha az egyenlet megoldásai u, v, w , akkor fennállnak a következők.

$$\alpha = zv + uw + vw = -3ab,$$

(Mivel a gyökök összege z^2 együtthatójának a (-1) -szerese az együttható formula miatt.)

$$\beta = -uvw = -(a^3 + b^3)$$

Így adódik, hogy

$$ab = \frac{-\alpha}{3}, \quad a^3 + b^3 = -\beta.$$

Ebből pedig

$$\begin{aligned} a^3 \cdot b^3 &= \frac{-\alpha^3}{-27} \\ \lambda^2 + \beta\lambda - \frac{\alpha^3}{27} &= 0. \end{aligned}$$

Ennek pedig két gyöke van, a^3 és b^3 . Itt b -t a szorzatból számítjuk ki.

Így már az α és β ismeretében a és b meghatározhatóak, amik segítségével kiszámolhatóak az egyenlet $u = a + b$, $v = \varepsilon a + \varepsilon^2 b$, $w = \varepsilon^2 a + \varepsilon b$ megoldásai, azaz megkapjuk a Cardano-képletet.

Ha például a

$$z^3 - z = 0$$

egyenlet megoldásait akarjuk a fenti módszerrel kiszámolni, akkor megfelelő esetet választva

$$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}i, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}i,$$

és a három megoldás egyszerű számolással

$$u = 0, \quad v = 1, \quad w = -1.$$

Bár a számolás egyszerű volt, mégis a ránézésre látható három gyök mindegyikének a kiszámolásához ki kellett lépni a valós számok köréből.

Általánosabban, ha a harmadfokú polinomnak három valós gyöke van, akkor a Casus irreducibilis esetet kapjuk, amelynél a Cardano-képlet alkalmazásánál paradox módon a polinom bármelyik gyökének kiszámolásához ki kell lépni a valós számok halmazából.

Ezt könnyen láthatjuk, hiszen ha a és b valós, akkor v és w egymás konjugáltjai, tehát, ha v valós volna, akkor $w = v$.

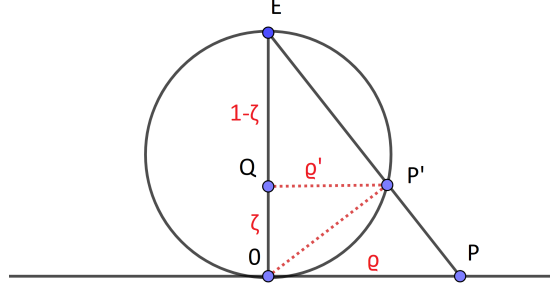
2.2. A Riemann-féle számgömb; lineáris törtfüggvények

Felhasznált Irodalom:[2] (A (2.15) állítás bizonyítása)

A komplex számsíkot célszerű egy végtelenben lévő ideális ponttal kibővíteni, vagy más kifejezéssel élve kompaktifikálni. Ezt a lezárt síkot $\overline{\mathbb{C}}$ (függvénytani síkot) azután azonosíthatjuk az egységgömb felületével, amelyet Riemann-gömbnek nevezünk, az úgynevezett sztereografikus vetítéssel. Tehát komplex számok esetén egy végtelenünk lesz, melyet a következőkben a gömb északi pólusának feleltetünk meg.

2.12. Definíció. (Szttereografikus vetítés, standard változat) Helyezzük a komplex síkra a gömböt (egységgömböt) úgy, hogy az érintkezési pont -azaz immár a déli pólus- a 0-ba, vagyis a komplex sík origójába essék. Ekkor az északi pólusból -ami az ideális ponttunknak felel meg- kiinduló sugarak révén a sík pontjait kölcsönösen egyértelműen feleltetjük meg az északi pólustól különböző gömbi pontoknak, amelyek az egyes pontokból az északi pólushoz húzott sugarak és a gömbhéj metszéspontjai. A ∞ környezeteit a gömbi képen úgy értelmezzük, mint azon pontok halmazait, amelyek a ∞ északi pólus valamely környezetébe esnek, azaz amelyek a komplex síkon a 0 pont körüli valamekkora sugarú körön kívül helyezkednek el.

2.13. Megjegyzés. Néha a vetítést szokás úgy elvégezni, hogy a gömb déli pólusát nem a komplex sík origójára helyezzük, hanem a komplex síkot a gömb egyenlítőjén vezetjük át, hogy az északi és déli pólust összekötő szakasz felénél,



2. ábra. Sztereografikus vetítés

Bizonyítás. Az 1. állítás közvetlenül adódik. A 2. belátásához legyen a sík két egyenesének találkozási pontja P , a gömbön ennek megfelelő pont pedig P' . Ekkor az egyeneseknek megfelelő képkörök a gömbön P' -ben, valamint az E északi pólusban metszik egymást, és mind a két helyen nyilván ugyanakkora szögben. Viszont az E -beli érintők párhuzamosak lesznek az adott síkbeli egyenesekkel, minthogy a gömb E -beli érintősíkja párhuzamos a komplex síkkal. Ebből pedig következik, hogy az egyenesek által bezárt szög P -ben meg kell, hogy egyezzen a képkörök E -ben bezárt szögével, azaz a P' -nél lévő szögükkel is.

Végül a 3. rész analitikus eszközökkel való igazolása a következő. Először fölveszünk a térképen egy ξ, η, ζ derékszögű koordinátarendszert, amelynek ξ - és η -tengelye a síkbeli x - és y -tengelynek felel meg, úgy hogy a gömb déli pólusát a 0-ba, azaz az origóba helyezzük, a ζ -tengely pedig a gömb E északi sarkán halad át. Legyen P egy 0-tól és ∞ -tól különböző tetszőleges pont a ξ - η -síkon, azaz a komplex síkon. Ezt kössük össze a 0-val, azaz a D déli pólussal, valamint az E északi pólussal. Így egy $P0E$ derékszögű háromszöget kapunk, amelynek síkjában tekintjük gömbünk egy metszetét. (2. ábra) Vegyünk az egyszerűbb számolás végett olyan gömböt, amelyre $0E$ -szakasz hossza 1. Az $0P$ -szakasz hosszát jelöljük ϱ -val. Legyen P' a gömbre rávetített pont, azaz a PE szakasz és a gömbfelszín metszéspontja. Húzzunk a metszetsíkunkban P' -ből egy $0P$ -szakasszal párhuzamos egyenest, amelynek a ζ -tengellyel, azaz a $0E$ -szakasszal való metszéspontját jelölje Q . Ekkor egy a $P0E$ -hez hasonló, kisebb derékszögű PQE háromszöget kapunk. Legyen végül $P'Q$ -szakasz hossza ϱ' , $0Q$ -szakasz hossza ζ , QE -szakasz hossza pedig $1 - \zeta$.

Mivel $0QP'\triangle \sim P0E\triangle$, ezért $\zeta : \varrho' = \varrho : 1$, amiből $\zeta = \varrho \cdot \varrho'$. Hasonlóan, mivel $QP'E\triangle \sim 0PE\triangle$, ezért $(1 - \zeta) : \varrho' = 1 : \varrho$, amiből $1 - \zeta = \frac{\varrho'}{\varrho}$. Ezekből

összeadással adódik, hogy

$$1 = \zeta + (1 - \zeta) = \varrho \cdot \varrho' + \frac{\varrho'}{\varrho} = \varrho' \left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right) = \varrho' \left(\frac{\varrho^2 + 1}{\varrho} \right),$$

tehát

$$\varrho' = \frac{\varrho}{1 + \varrho^2}, \quad \zeta = \varrho\varrho' = \varrho \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} = \frac{\varrho^2}{1 + \varrho^2}.$$

Mivel a Pitagorasz-tétel alapján a derékszögű xy -koordinátarendszerben $\varrho^2 = x^2 + y^2$, és a P pont koordinátái

$$\xi = \frac{\varrho'}{\varrho}x, \quad \eta = \frac{\varrho'}{\varrho}y,$$

így a P pont (x, y) koordinátái és a P' pont (ξ, η, ζ) koordinátái a következőek.

$$\xi = \frac{\varrho'}{\varrho}x = \frac{\frac{\varrho}{1+\varrho^2}}{\varrho}x = \frac{1}{1+\varrho^2}x = \frac{1}{1+x^2+y^2}x = \frac{x}{1+x^2+y^2};$$

$$\eta = \frac{\varrho'}{\varrho}y = \frac{y}{1+x^2+y^2};$$

$$\zeta = \frac{\varrho^2}{1+\varrho^2} = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

Ebből pedig

$$x = \frac{\frac{x}{1+x^2+y^2}}{\frac{1}{1+x^2+y^2}} = \frac{\frac{x}{1+x^2+y^2}}{\frac{(1+x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}} = \frac{\frac{x}{1+x^2+y^2}}{1 - \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} = \frac{\xi}{1-\zeta};$$

$$y = \frac{\frac{y}{1+x^2+y^2}}{\frac{1}{1+x^2+y^2}} = \frac{\frac{y}{1+x^2+y^2}}{1 - \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} = \frac{\eta}{1-\zeta};$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}{\frac{1}{1+x^2+y^2}} = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Használjuk föl, hogy a sík egy körének vagy egyenesének az egyenlete a következő alakú.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

ahol $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, és egyenesről $A = 0$ esetén, körről pedig $A \neq 0$ esetén beszélünk. Így behelyettesítve az utóbbi egyenletbe az $x^2 + y^2$ -re, x -re és y -ra vonatkozó korábbi összefüggéseinket, kapjuk hogy

$$A \left(\frac{\zeta}{1-\zeta} \right) + B \left(\frac{\xi}{1-\zeta} \right) + C \left(\frac{\eta}{1-\zeta} \right) + D = 0,$$

azaz

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0$$

Ez a lineáris egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy a képpontok koordinátái egy síkban vannak, de a gömbnek és egy síknak a közös pontjai kört alkotnak, így a képpontok körökön fekszenek.

2.16. Feladat. Mik a gömb átellenes pontjainak a képei a komplex síkon?

Megoldás. Azon sztereografikus vetítést tekintjük, amely során a gömb egyenlítője fekszik a komplex síkon. Pontosán azok a z és z' pontok lesznek átellenes pontok képei, amelyekre $z\bar{z}' = -1$ áll fenn.

Ennek belátásához először is levetítjük az $u(x, y, u)$ koordinátájú gömbön lévő pontot a komplex síkra, legyen a vetülete z . Legyen továbbá az u pont és az átellenes $-u$ azaz a $(-x, -y, -u)$ koordinátájú pont közötti szakasznak a komplex síkkal való dőféspontja z' . Tehát a pontjaink egy síkban fekszenek (3. ábra). Ekkor, ha az u pontnál a gömbön átvezetünk egy a komplex síkkal párhuzamos síkot, és az u és $-u$ pontok közötti szakasszal való metszetét u_0 -al jelöljük, akkor keletkezik két hasonló háromszög, mégpedig uEu_0 és zEz' . Legyen az uu_0 szakasz hossza x , ami tehát az zEu_0 háromszög alapja, amely háromszögnek a magassága $1 - u$. A zEz' nagyobbik háromszög -amelynek magassága $1 - u$ alapjának hossza pedig legyen x^* . Ekkor

$$\frac{x^*}{x} = \frac{1}{1 - u}, \quad \frac{y^*}{y} = \frac{1}{1 - u},$$

ahol y és y^* a magasságaikat jelöli. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$(x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{1 - u}.$$

A vetületek

$$z = \frac{1}{1 - u}(x + iy), \quad z' = \frac{1}{1 + u}(-x - iy).$$

Mivel

$$\bar{z}' = \frac{1}{1 + u}(-x + iy),$$

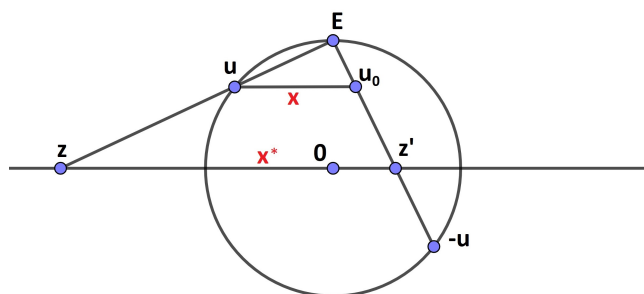
ezért az $u^2 - 1 = -x^2 - y^2$ felhasználásával adódik, hogy

$$z \cdot \bar{z}' = \frac{1}{(1 - u)^2}(-x^2 - y^2) = -1,$$

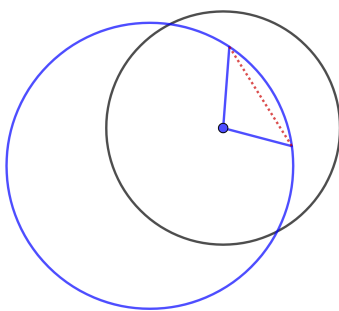
ahogy azt állítottuk.

2.17. Feladat. Mik a gömb főkörének képei a sztereografikus vetítés szerint?

Megoldás. Az előbbi feladat alapján a z és z' pont ösképei pontosan akkor átellenesek a Riemann-gömbön, ha $z \cdot \bar{z}' = -1$. Az egységkör egyrészt megfelelő, amely az egyenlítőnek a képe. Másrészt minden egyenlítőn kívüli további főkör az egyenlítőt két átellenes pontban metszi, mivel egy főkör a gömbfelületnek egy olyan síkkal való metszete, amely átmegy a gömb középpontján, az ilyen főkörök az egyenlítőt pedig két egyenlő részre vágják. Továbbá ez visszafelé is igaz, azaz ha egy kör az egyenlítőt két átellenes pontban metszi, akkor annak főkörnek kell lennie. Így ezen körök képei szintén megfelelőek, amelyek az egységkört két átellenes pontban metsző körök vagy egyenesek lesznek. És az egyenlítő képén, azaz az egységkörtől kívül csakis ezek a megfelelőek.



3. ábra. Sztereografikus vetítés



4. ábra. Gömbi háromszög; sztereografikus vetítés

2.18. Megjegyzés. A gömbi háromszögek szögeinek összege nagyobb, mint π . (A 4. ábrán egy olyan háromszöget veszünk, amelynek egyik csúcsa az origó.)

A gömbfelület geometriájának a leírásához a törtlineáris függvényeket használhatjuk.

2.19. Definíció. Lineáris törtfüggvénynek vagy törtlineáris függvénynek, illetve Möbiusz-transzformációnak nevezzük a következő alakú függvényeket

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, és $ad - bc \neq 0$. Továbbá

$$L(\infty) = \frac{a}{c}, \quad L\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

tehát a lineáris törtfüggvények bijekciót adnak a Riemann-gömbre.

2.20. Megjegyzés. Tekintsük a nem-nulla determinánsú $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixokat.

Legyen $h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = L$ hozzárendelés, ahol $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ekkor h egy csoporthomomorfizmus, ahol a mátrixoknál a szorzás, a lineáris törtek között a kompozíció a csoportművelet.

2.21. Definíció. Négy páronként különböző tetszés szerinti (akár a ∞) komplex számnak, azaz z_1, z_2, z_3, z_4 pontnak, a komplex síkon a kettősviszonyát a valós esethez hasonlóan a következőképpen értelmezzük.

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \quad (2)$$

(Tehát a kettősviszony maga is komplex szám. Ha valamelyik tag végtelen, akkor azon tag nincs értelmezve. Ez esetben ezen tagokat elhagyjuk, helyükre 1-t írunk, amit egyébként úgy is megkapunk, ha az adott taggal a végtelenhez konvergálnánk.)

2.22. Tétel. (*Invariancia-tétel*) Nem konstans $l(z)$ lineáris törtfüggvény

1. kettősviszonytartó;
2. kör- vagy egyenes vonalat kör- vagy egyenes vonalra képez;
3. ha a z_1 és z_2 pontok szimmetrikusak a K körre (vagy egyenesre), akkor az $l(z_1)$ és $l(z_2)$ pontok is szimmetrikusak az $l(K)$ alakzatra, ahol egyenes esetén a szimmetria a tükrözés, kör esetén pedig az inverzió.

2.23. Tétel. A lineáris törtfüggvények a szöget és a forgatási irányt megtartják, azaz konformis leképezések, kört körbe vagy egyenesbe, egyenest egyenesbe vagy körbe visznek át.

Megjegyezzük, egyrészt, hogy a szögtartás egy általánosabb komplex függvénytan elvből következik, másrészt azt, hogy a Riemann-gömb irányítás és szögtartó diffeomorfizmusai (azaz olyan bijekciók, amelyek maguk és inverze is differenciálható) pontosan a lineáris törtfüggvények.

2.24. Alkalmazás. Az egységgörlemez önmagára képző lineáris törtek a

$$\varepsilon \cdot \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad |z_0| < 1, \quad |\varepsilon| = 1$$

alakú leképezések. Ezekre fenáll, hogy

$$z_0 \mapsto 0$$

$$\frac{1}{\overline{z_0}} \mapsto \infty,$$

ugyanis az egységgörvonalra nézve a 0 és ∞ a szimmetrikus pontpárok, minthogy a z_0 és $\frac{1}{\overline{z_0}}$ is szintúgy azok.

2.25. Feladat. Mik felelnek meg a gömb irányítástartó egybevágósági transzformációinak?

Megoldás. Az irányítástartó egybevágósági transzformációk mind lineáris törtfüggvények. Az egybevágósági transzformációhoz tartozó lineáris törtfüggvényeket pedig a következőképpen határozhatjuk meg.

Átellenes pontpároknak a képei és ősképei is átellenes pontpárok. Ezek egymással való szorzata előbbi feladatmegoldás alapján tehát -1 . A 0 és a ∞ átellenes pontpár, ezek z_0 és $-\frac{1}{\overline{z_0}}$ képe szintúgy egy átellenes pontpárt alkot. Az ilyen lineáris törtfüggvények alakja pedig a következő.

$$L(z) = a \cdot \frac{z - z_0}{z + \frac{1}{\overline{z_0}}} = a\overline{z_0} \cdot \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} + 1}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad a \neq 0$$

Ekkor

$$L(1) = a\overline{z_0} \frac{1 - z_0}{\overline{z_0} + 1}, \quad L(-1) = a\overline{z_0} \frac{-1 - z_0}{-\overline{z_0} + 1}.$$

Ekkor, minthogy 1 és -1 átellenes, ezért az $L(1)$ és $L(-1)$ is átellenesek, így $L(1) \cdot L(-1) = -1$. Tehát

$$-1 = L(1) \cdot \overline{L(-1)} = |a|^2 |z_0|^2 \frac{-1 + |z_0|^2 + \overline{z_0} - z_0}{1 - |z_0|^2 + z_0 - \overline{z_0}} = -|a|^2 \cdot |z_0|^2.$$

Ez pedig azzal ekvivalens, hogy

$$1 = |a|^2 |z_0|^2, \quad \text{azaz } |a| = \frac{1}{|z_0|}.$$

Tehát

$$L(z) = \varepsilon \cdot \frac{1}{|z_0|} \overline{z_0} \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} + 1}, \quad \text{ahol } |\varepsilon| = 1.$$

Diszkusszió: A $z_0 = 0$ esetben

$$L(z) = \varepsilon \cdot z,$$

$z_0 = \infty$ esetén pedig

$$L(z) = \frac{\varepsilon}{z}.$$

Hátra van még annak vizsgálata, hogy ezen leképezések ténylegesen egybevágósági transzformációk. Ez pedig azért teljesül, mivel akárhogyan is tekintünk egy átellenes pontpárt, akkor ezen pontpár egyik tagja a gömb elforgatásával az északi pólusba vihető, miközben a másik a déli pólusba megy. (Ez után még a gömb elforgatható egy tengely szerint, tehát kell hogy legyen egy leképezés, amelyben szerepel egy ε -nal való szorzás, és ez az egyetlen egy ilyen, azaz ilyen leképezés egyértelműen létezik.)

2.26. Feladat. Legyen P és Q az egységsugarú gömbfelület két pontja. Legyen ezek sztereografikus transzformáció szerinti képe z_0 és w_0 , ahol a komplex sík a gömb egyenlítőjére illeszkedik. Hogyan számoljuk ki P és Q távolságát z_0 és w_0 ismeretében?

Megoldás. Legyen r a z_0 -nak megfelelő pont a komplex síkon. A 0-nak és r -nek a távolságát szeretnénk kiszámítani. Legyen r -ből a gömbre sztereografikusan vetített pont r' (5. ábra). Először a Dr' ív hosszát szeretnénk kiszámolni, amelynek gömbi szöge, azaz a hozzá tartozó körív hossza legyen β . Legyen az r -nél lévő vetítőegyenest és a komplex sík által bezárt szög α , amely a $0rE$ derékszögű háromszög egyik szöge. Viszont $r'DE$ szintén egy derékszögű háromszög, amely az előbbihez hasonló, és a D -nél található szöge szintén α . Ekkor, mivel a $0Dr'$ háromszög egyenlő szárú, a másik szögszáránál lévő szög -azaz r' csúcsánál lévő- szintén α . Ezért a körív hosszúsága

$$\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \arctg \frac{1}{r},$$

amely általánosságban

$$\pi - 2 \arctg \frac{1}{|z|},$$

ha a 0 és z inverz képeinek a távolságát tekintjük. Az általános esetben z_0, w_0 pontok esetén, ha $z_0 \neq 0 \vee \infty$,

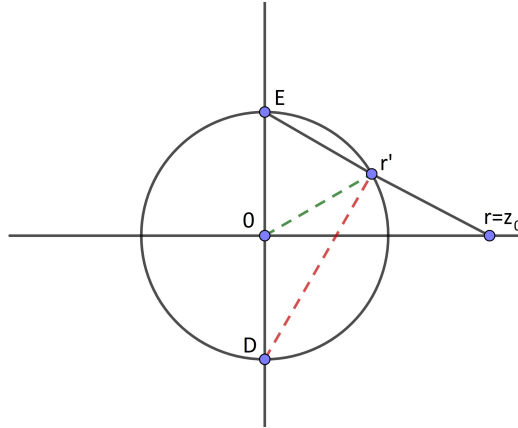
$$L(z) = \frac{1}{|z_0|} \overline{z_0} \frac{z - z_0}{z \overline{z_0} + 1},$$

ha z_0 és w_0 nem ellentétes pontpárok,

$$L(w_0) = \frac{1}{|z_0|} \overline{z_0} \frac{w_0 - z_0}{w_0 \overline{z_0} + 1}.$$

Ebből

$$|L(w_0)| = \frac{|w_0 - z_0|}{|w_0 \overline{z_0} + 1|},$$



5. ábra. Szeteografikus vetítés

tehát a z_0 és w_0 gömbi távolsága annyi, mint $L(z_0)$ és $L(w_0)$ távolsága (mivel a traszformáció egybevágósági), amely

$$\pi - 2 \arctg \frac{|w_0 \overline{z_0} + 1|}{|w_0 - z_0|}.$$

Ha $w_0 = z_0$, akkor pedig az érték 0.

2.3. A Bolyai-(hiperbolikus)geometria Poincaré-féle modellje

Felhasznált Irodalom:[2]

2.27. Modell. (A Bolyai-geometria Poincaré-féle modellje) Ezen modellben

1. a komplex számsík egységgörének a belseje játsza a hiperbolikus sík szerepét, amelyben az egységgört merőlegesen metsző köröknek az egységgör belsejébe eső ívei játszá a hiperbolikus sík egyeneseseinek a szerepét;
2. az egységgör belsejének pontjai egyben a hiperbolikus sík pontjai, így az egységgörvonal pontjait nem számítjuk hozzá a hiperbolikus síkhoz;
3. a végtelen távoli egyenes szerepét pedig maga az egységgörvonal játsza, és ez utóbbit szokás a hiperbolikus sík horizontjának nevezni. (Egy hiperbolikus egyenes a modellünkben két pontban metszi az egységgörvonalat, és ezen metszeteket hívják horizontpontoknak.)

2.28. Állítás. *Egy k kör pontosan akkor metszi merőlegesen az egységgörvonalat, ha a k körnek az egységgörre vonatkozó inverziója szerinti képe önmaga.*

Bizonyítás. Közvetlenül adódik a körre vonatkozó inverzió szögtartó voltából.

2.29. Állítás. *Abból a feltételből, hogy a k kör tartalmaz egy nem összeeső z , $\frac{1}{\bar{z}}$ inverz pontpárt következik, hogy a k egységgörre való inverziós képe önmaga lesz.*

Bizonyítás. Az állítás feltételének teljesülése esetén k szükségképpen metszi az egységgört két különböző Z és Z' pontban. Ezen pontok pedig az inverziónál önmagukba mennek át, a z pont pedig $\frac{1}{\bar{z}}$ -be. Ezen pontok, viszont az eredeti körön helyezkednek el, és mivel egy kört már egyértelműen meghatároz három pontja, így a kör inverz képe az eredeti körrel esik egybe.

2.30. Állítás. *Tetszőleges két hiperbolikus ponthoz egyértelműen létezik egy hiperbolikus egyenes, amely e két ponton keresztül halad.*

Bizonyítás. Legyen a két pont z_1 és z_2 . Ekkor a $\{z_1, z_2, \frac{1}{\bar{z}_1}\}$ ponthármas által egyértelműen meghatározott kör lesz az egyetlen olyan kör, amely a z_1, z_2 pontokon áthalad merőlegesen metszve az egységgört. Ennek a körnek pedig az egységgörbe eső íve lesz a keresett hiperbolikus egyenes.

2.31. Állítás. *Bármely ponthoz és horizontponthoz pontosan egy olyan hiperbolikus egyenes létezik, amely áthalad az adott ponton, és amelynek az adott horizontpont az egyik horizontpontja.*

Bizonyítás. Legyen az adott hiperbolikus pont z , az adott horizontpontot pedig jelölje Z . Ekkor a $\{z, Z, \frac{1}{\bar{z}}\}$ ponthármas egyértelműen meghatároz egy kört, amelynek a megfelelő íve éppen a keresett egyenes.

Ebből már következik a következő tétel.

2.32. Tétel. *(A modell nem euklideszi (hiperbolikus) tulajdonsága) Ha e egy hiperbolikus egyenes és z egy rajta kívül fekvő hiperbolikus pont, akkor létezik két olyan különböző z ponton áthaladó f_1 és f_2 hiperbolikus egyenes, amelyek nem metszik az e egyenest, viszont van e -vel közös horizontpontjuk.*

2.33. Megjegyzés. Az előbbi jelölésekkel az f_1 és f_2 hiperbolikus egyenesek által z -nél alkotott két csúcsszögtér közül az egyikben haladó minden hiperbolikus egyenes metszi e egyenest, a másik síkban haladók közül pedig egyik sem metszi.

Ahhoz, hogy a hiperbolikus síkon az egybevágóság fogalmát értelmezhessük, szükséges megállapodnunk abban, hogy mit tekintünk a hiperbolikus sík önmagára való kongruencia-leképezésének, azaz mozgásának.

2.34. Állítás. *Ahogy az (2.24) alkalmazásban láttuk, az irányítástartó*

$$w = \varepsilon \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|\varepsilon| = 1, |z_0| < 1) \quad (3)$$

leképezések, és ezeknek konjugáltjai, azaz a nem irányítástartó

$$w = \bar{\varepsilon} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}} \quad (|\varepsilon| < 1, |z_0| < 1) \quad (4)$$

leképezések is az egységkör belsejét önmagára képezik le. Továbbá, mivel szögtartóak, így az egységkörre merőleges köröket ugyancsak az egységkörre merőleges körökre képezik, tehát ezen leképezések a hiperbolikus síkot önmagára képezik le úgy, hogy a horizontot is önmagára képezik le, hiperbolikus egyenest hiperbolikus egyenesbe visznek.

2.35. Állítás. *Az összes előbbi (3) alakú illetve (4) alakú, lineáris illetve konjugált lineáris leképezések együtt csoportot alkotnak, amelyben az egységelem alatt a $w = z$ leképezést értjük.*

2.36. Definíció. A bővebb transzformációcsoportot nevezzük modellünkben a hiperbolikus sík mozgáscsoportjának.

Megjegyezzük továbbá, hogy az ilyen értelemben egymással egybevágó hiperbolikus egyenes szakaszok euklideszi értelemben természetesen nem lesznek egybevágók, viszont be tudunk vezetni a hiperbolikus szakaszokra olyan mértéket, amely változatlan lesz a hiperbolikus mozgásokkal szemben, ahogy azt a következőkben láthatjuk.

Olyan mennyiséget keresünk a hiperbolikus szakaszokra, amely változatlan marad a hiperbolikus mozgásokkal szemben. Tekintsük ehhez a $\bar{z}_1 z_2$ hiperbolikus egyenes szakaszt, és rendeljük hozzá ehhez próba képpen a

$$\partial(z_1, z_2) = (Z', Z, z_1, z_2)$$

kettősviszony értéket, ahol Z és Z' a $z_1 z_2$ hiperbolikus egyenes két horizontpontja a Z, z_1, z_2, Z' sorrendben. Ez a kettősviszony pedig valós szám lesz, mivel a négy pont egy körön van, továbbá a sorrendre tett előbbi megkötésből az is következik, hogy $\partial(z_1, z_2) \geq 1$, és egyenlőség csak $z_1 = z_2$ esetben áll fenn. Minthogy a hiperbolikus mozgásokat törtlineáris függvények és azok komplex konjugáltjai értelmezik, amelyek pedig valós kettősviszonyú négy pontot mindig ugyanakkora valós kettősviszonyú négy pontba viszik át, így a $\partial(z_1, z_2)$ mennyiség a hiperbolikus mozgásokkal szemben valóban változatlan marad. De ekkor ugyanígy változatlan marad a

$$\varrho(z_1, z_2) = k \cdot \ln(Z', Z, z_1, z_2) \quad (5)$$

mennyiség is, ahol $k > 0$ egy tetszés választott, de azután rögzített valós szám. A továbbiakban k értékét 1-nek választjuk. Ekkor $\varrho(z_1, z_2) \geq 0$, és $\varrho(z_1, z_2) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $z_1 = z_2$.

A ϱ mennyiségnek megvan az additív tulajdonsága is, azaz ha z_1, z_2, z_3 ugyanannak a hiperbolikus egyenesnek három pontja a következő sorrendben

$$Z, z_1, z_2, z_3, Z',$$

akkor

$$\varrho(z_1, z_3) = \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3).$$

Ebből azonban adódik, hogy a kettősviszonyokra teljesül a

$$(Z', Z, z_1, z_3) = (Z', Z, z_1, z_2) \cdot (Z', Z, z_2, z_3)$$

azonosság. Valóban,

$$\frac{z_1 - Z'}{z_1 - Z} : \frac{z_3 - Z'}{z_3 - Z} = \left(\frac{z_1 - Z'}{z_1 - Z} : \frac{z_2 - Z'}{z_2 - Z} \right) \cdot \left(\frac{z_2 - Z'}{z_2 - Z} : \frac{z_3 - Z'}{z_3 - Z} \right).$$

Tehát összefoglalva.

2.37. Állítás. *(A távolság tulajdonságai)*

1. $\varrho(w, 0) = \ln \frac{1+|w|}{1-|w|} \geq 0$
2. $\varrho(z_1, z_2) \geq 0$
3. $\varrho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
4. Ha z_1, z_2, z_3 egy hiperbolikus egyenesen vannak ebben a sorrendben, akkor $\varrho(z_1, z_3) = \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3)$.
5. $\varrho(z_1, z_2) = \varrho(z_2, z_1)$
6. z_1, z_2, z_3 -ra $\varrho(z_1, z_3) \leq \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3)$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Bizonyítás.

1. Ezt beláthatjuk a $w = r$ helyettesítéssel, vagy tekintjük a $z' = -1, 0, r, 1 = z$ pontok kettősvizonyát az egységkörnél, amely éppen

$$(-1, 1, r, 0) = \frac{r+1}{r-1} : \frac{0+1}{0-1} = \frac{r+1}{1-r}.$$

2. Ez egyszerű következménye az 1.-nek a $z_2 = 0$ választással, mivel föl lehet azt tenni, hogy az egyik pont 0. (Ebből pedig $\partial(z_1, z_2) \geq 1$ is adódik.)
3. Ismét föl lehet tenni, hogy az egyik pont a 0, és $z_2 = 0$ választással triviálisan adódik 1.-ből.
4. A bizonyítandó egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$(Z', Z, z_1, z_2) = (Z', Z, z_1, z_2) \cdot (Z', Z, z_2, z_3).$$

A kettősvizonyokat kiírva a következő alakhoz jutunk,

$$\frac{z_1 - Z'}{z_1 - Z} : \frac{z_3 - Z'}{z_3 - Z} = \left(\frac{z_1 - Z'}{z_1 - Z} : \frac{z_2 - Z'}{z_2 - Z} \right) \cdot \left(\frac{z_2 - Z'}{z_2 - Z} : \frac{z_3 - Z'}{z_3 - Z} \right),$$

amely képlet mindig igaz általánosságban is, ha pl. Z', Z helyett a, b számokat írunk. (Itt fölhasználtuk azt, hogy z_1, z_2, z_3 egy (hiperbolikus) egyenesen fekszenek, mert emiatt lesznek ugyanezek a Z -k és a Z' -k, illetve a sorrend is fontos volt, mivel, ha nem ebben a sorrendben volnának, az esetben más lenne a kettősvizony.) Tehát valóban igaz, ha három pont megfelelő sorrendben egyazon (hiperbolikus) egyenesen van, akkor a távolságok összeadódnak.

5. Triviális.
6. Tehát ha $z_1, z_2, z_3 \in C_1(0)$, akkor

$$\varrho(z_1, z_3) \leq \varrho(z_1, z_2) + \varrho(z_2, z_3).$$

Feltesszük, hogy $z_2 = 0$, $z_1 = r$, mivel egybevágósági transzformációval ez elérhető. Legyen $z_3 = R \cdot (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Tehát a

$$\varrho(z_1, z_3) \leq \varrho(z_1, 0) + \varrho(z_3, 0)$$

egyenlőtlenséget kell belátnunk. Az egyenlőtlenség jobb oldala a korábbiak alapján

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} + \ln \frac{1 + |z_3|}{1 - |z_3|} &= \ln \frac{1 + r}{1 - r} + \ln \frac{1 + |z_3|}{1 - |z_3|} = \\ &= \ln \frac{1 + r}{1 - r} + \ln \frac{1 + R}{1 - R}. \end{aligned}$$

A $\varrho(z_1, z_3)$ értékének a maximumát szeretnénk meghatározni. Mivel

$$\varrho(z_1, z_3) = \varrho(r, z_3),$$

kérdés, hogy $\varrho(r, z_3)$ mikor lesz maximális? Legyen

$$L(z) = \frac{z - r}{1 - rz}, \quad r \rightarrow 0.$$

Mivel ekkor

$$\varrho(r, z_3) = \varrho(L(r), L(z_3)) = \varrho(0, L(z_3)) = \ln \frac{|L(z_3)| + 1}{1 - |L(z_3)|},$$

ezért $\varrho(z_1, z_3)$ értéke akkor lesz maximális, ha $|L(z_3)|$ maximális, azaz $|L(z_3)|^2$ maximalitását fogjuk vizsgálni.

Most már R -et rögzítve meghatározható a $\max |L(z_3)|$ és a $\min |L(z_3)|$ differenciálósos szélsőértékvizsgálattal. Tehát ekkor

$$|L(z_3)|^2 = \frac{R^2 + r^2 - 2rR \cos \vartheta}{1 + r^2 R^2 - 2rR \cos \vartheta},$$

és ennek deriváltja a törtfüggvény differenciálási szabályának megfelelően,

$$\begin{aligned} \frac{2r \sin \vartheta (1 + r^2 R^2 - 2rR \cos \vartheta) - 2r \sin \vartheta (R^2 + r^2 - 2rR \cos \vartheta)}{(1 + r^2 R^2 - 2rR \cos \vartheta)^2} = \\ \frac{2r \sin \vartheta (1 + r^2 R^2 - R^2 + r^2)}{(1 + r^2 R^2 - 2rR \cos \vartheta)^2}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

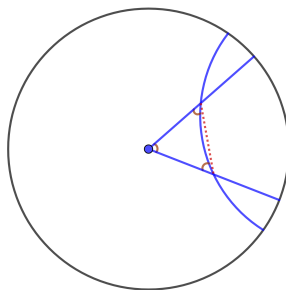
Ennélfogva (a kezdő és végpontban, azaz a 0-ban és 2π -ben felvett értéket is figyelembe véve) a két extrémális hely (minthogy a függvény ϑ -ban folytonos, ezért létezik maximuma és minimuma), ahol a derivált 0 értéket vesz föl

$$\vartheta = 0 \text{ azaz } z_3 = R, \quad \vartheta = \pi \text{ azaz } z_3 = -R.$$

Ezen két esetben a három pont egy euklideszi egyenesen van, de csak a $\vartheta = \pi$ esetén megfelelő a sorrend, így ekkor $z_3 = -R$ esetén maximális az érték. Tehát megkaptuk, hogy

$$\varrho(r, R) \leq \varrho(r, z_3) \leq \varrho(r, -R),$$

amiből második egyenlőtlenség használataival, visszahelyettesítéssel következik a háromszög egyenlőtlenség, továbbá egyenlőség pontosan akkor áll, ha $z_3 = -R$, azaz a három pont a $(-R, 0, r)$ sorrendben egy euklideszi egyenesre esik.



6. ábra. Hiperbolikus geometria modell

Mindezek alapján jogos, hogy a $\varrho(z_1, z_2)$ mennyiséget tekintsük a $\overline{z_1 z_2}$ hiperbolikus egyenes szakasz hosszúságának.

2.38. Megjegyzés. Ami a szögeket illeti, ott a helyzet jóval egyszerűbb, ugyanis két hiperbolikus egyenes szöge úgy számolható ki, hogy a nekik megfelelő körök vagy egyenesek szögét tekintjük az adott pontban, amelyet az euklideszi esettel egyező módon mérünk. Azaz ez egyenesek esetén a bezárt szög, körök esetén pedig a pontban húzott érintők által bezárt szög lesz. (A 6. ábra mutatja, hogy hiperbolikus geometriában egy háromszög szögeinek összege kisebb, mint π ; ismét föl lehet tenni, hogy az egyik csúcs az origó.)

3. Komplex integrálok

3.1. Definíció. (Holomorf függvény) A teljes komplex számsíkon komplex értelemben differenciálható függvényeket holomorf függvényeknek nevezzük.

3.2. Tétel. (Jordan) *A síkon minden egyszerű zárt görbe képének komplementere két nem üres összefüggő nyílt halmaz, amelyek közül az egyik korlátos, a másik pedig nem-korlátos.*

3.3. Jelölés. Egy γ egyszerű zárt (azaz Jordan) görbe belsejét int γ -val, külsejét pedig ext γ -val szokás jelölni.

3.1. Az exponenciális és trigonometrikus függvények és inverzeik

3.4. Definíció.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3.5. Definíció. Komplex (exponenciális alapú) logaritmusnak nevezzük a

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg z$$

kifejezést, ahol $\ln$ a valós exponenciális alapú logaritmus.

3.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $\cos z$ és $\sin z$ komplex függvények minden értéket fölvesznek.

Megoldás.

$$\begin{aligned} w = \cos z &\Rightarrow \sin^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - w^2 \Rightarrow \\ w + \sqrt{w^2 - 1} &= w + \sqrt{(-1)(1 - w^2)} = w + i\sqrt{1 - w^2} = \cos z + i\sqrt{1 - \cos^2 z} = \\ &= \cos z + i\sqrt{\sin^2 z} = \cos z + i \sin z = e^{iz} \end{aligned}$$

Ezért

$$z = \log(e^z) = \log(e^{\frac{1}{i}iz}) = \log(e^{iz})^{\frac{1}{i}} = \frac{1}{i} \log(e^{iz}) = \frac{1}{i} \log(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Így a $w = \cos z$ inverz függvényét kaptuk, amely minden w -re értelmezve van, minthogy $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$. Azaz valójában többet kaptunk, mint a feladat kérte, mivel az inverzét is meghatároztuk.

$w = \sin z$ esetén pedig hasonlóan kapjuk, hogy

$$z = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i} \log(w - \sqrt{w^2 - 1}).$$

Ezáltal a $w = \sin z$ inverz függvényét is meghatároztuk.

3.7. Feladat. Oldjuk meg a következő komplex függvényekről szóló egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^i = i$$

Megoldás. Írjuk át z^i -t az exponenciális és logaritmus függvény egymás utáni alkalmazásával.

$$z^i = e^{\log z^i} = e^{i \log z}$$

Ebből pedig, mivel

$$e^{i \log z} = i,$$

és

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ezért adódik, hogy

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{i(\ln |z| + i \arg z)} = e^{-\arg z + i \ln |z|} = e^{-\arg z} \cdot e^{i \ln |z|}.$$

Következésképpen

$$\arg z = 2k\pi, \quad \ln |z| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

azaz

$$z = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2. Cauchy tételei és Reziduum-tétel

3.8. Tétel. (Cauchy-féle alaptétel) Legyen $f(z)$ a T egyszeresen összefüggő tartományon holomorf komplex függvény, és legyen γ a T belsejében egy (nem feltétlenül egyszerű) zárt, rektifikálható folytonos görbe. Ekkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

3.9. Tétel. (Cauchy-féle alaptétel II. változat) Legyen γ egyszerű zárt görbe $\mathbb{C}$ -n, legyen f holomorf függvény γ -n és int γ -n. Ekkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ennek általánosítása.

3.10. Tétel. (Általános Cauchy-féle alaptétel) Legyen γ_0 pozitív irányítású egyszerű zárt görbe $\mathbb{C}$ -ben, legyenek $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ egymást nem metsző pozitív irányítású egyszerű zárt görbék, amelyekre $\text{int } \gamma_i \cap \text{int } \gamma_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$. Legyen továbbá f holomorf függvény γ -n és int $\gamma_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$ -n. Ekkor

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Igaz a Cauchy-féle alaptétel következő általánosítása is.

3.11. Tétel. Legyen $f(z)$ holomorf függvény a T tartományon. Ekkor minden olyan pozitív értelemben befutott, egyszerű zárt γ görbére, amely T -ben fekszik belsejével együtt, és amely az a pontot a belsejében tartalmazza, arra fennáll a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

összefüggés, amelyet Cauchy-féle integrálformulának nevezünk.

3.12. Következmény. Az előbbi Cauchy-féle integrálformula szerint, amennyiben a γ egyszerű zárt görbe és belseje a függvény holomorfitási tartományában van, akkor a függvénynek a γ görbén felvett értékei már egyértelműen meghatározzák a függvény értékeit a γ belsejének minden pontjában.

3.13. Feladat. Lássuk be a következő függvény $r > 1$ sugarú, origó középpontú K_r körön való integráljáról szóló alábbi egyenlőtlenséget

$$\left| \int_{K_r} \frac{\log(z^2)}{z^2} \right| < 4\pi \left(\frac{\pi + \ln r}{r} \right),$$

majd ennek segítségével a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{K_r} \frac{\log(z^2)}{z^2} dz = 0$$

összefüggést!

Megoldás. Először lássuk be, hogy minden $z \neq 0$ -ra

$$|\log(z)| \leq |\ln|z|| + \pi.$$

Ennek igazolása: Mivel $|\log(z)| = \ln|z| + i \arg(z)$, ha $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, ezért

$$|\log(z)| = |\ln|z| + i \arg(z)| \leq |\ln|z|| + |i \arg(z)| \leq |\ln|z|| + \pi.$$

Így

$$|\log(z^2)| \leq |\ln|z^2|| + \pi = 2 \ln r + \pi.$$

Ennélfogva

$$\left| \int_{K_r} \frac{\log(z^2)}{z^2} dz \right| \leq 2\pi r \left(\frac{\pi + 2 \ln r}{r^2} \right) = 4\pi \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \ln r}{r} \right) < 4\pi \left(\frac{\pi + \ln r}{r} \right),$$

amiből pedig a L'Hospital-szabály alkalmazásával adódik, hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi \left(\frac{\pi + \ln r}{r} \right) = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0.$$

Tehát kapjuk, hogy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{K_r} \frac{\log(z^2)}{z^2} dz = 0.$$

3.14. Feladat. Számítsuk ki a következő integrálok értékeit!

1. $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz$
2. $\int_{|z|=1} |z-a|^{-2} |dz|, \quad |a| \neq 1$

Megoldás.

1. Ha $m, n \geq 0$, akkor $z^n (1-z)^m$ egész függvény, így a Cauchy-tétel miatt ekkor $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz = 0$.

Abban az esetben, ha $m < 0$ és $n \geq 0$,

$$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz = \mathbf{1}_{|m| < n} \frac{2\pi i}{(|m|-2)!(n-|m|)!} = \mathbf{1}_{|m|-1 < n} 2\pi i |m| \binom{n}{|m|}.$$

Az $n < 0$ és $m \geq 0$ eset hasonlóan adódik n és m cseréjével és $\pm$ -ra írással.

Végül, ha $n, m < 0$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz &= \\ 2\pi i \left(\frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial^{(n-1)} z} ((1-z)^m) + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial^{(m-1)} z} ((z)^n) \right) &= \\ 2\pi i \left(\binom{|m|+|n|-2}{|n|-1} - \binom{|m|+|n|-2}{|n|-1} \right) &= 0. \end{aligned}$$

2. Ha $z = \varrho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, amely pontosan azt jelenti, hogy $\gamma := \{z : |z| = \varrho\}$, akkor $dz = i\varrho e^{it} dt$. Ennélfogva

$$|dz| = |\gamma'(t)|dt = |\varrho^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))|dt = \varrho \frac{1}{ie^{it}} dz = -\varrho iz^{-1}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{\varrho(\cos(t) + i\sin(t))} = \varrho(\cos(t) - i\sin(t)) \\ &= \varrho(\cos(-t) + i\sin(-t)) = \varrho e^{-it} = z^{-1}.\end{aligned}$$

Ekkor, ha $a \in \text{int}(T) : \partial T = \gamma$, akkor

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z-a|^2} |dz| = \int_{\gamma} \frac{-i}{(z-a)(\overline{z-a})z} dz - \int_{\gamma} \frac{-i}{(z-a)(1-\bar{a}z)} dz.$$

A Cauchy-formulából adódik, hogy $f(\xi) = \frac{-i}{(1-\xi\bar{a})}$ esetén

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z-a|^2} |dz| = 2\pi i f(a) = \frac{2\pi}{1-|a|^2}.$$

Ha pedig $a \notin \text{int}(T)$, akkor $\bar{a}^{-1} \in \text{int}(T)$, és ekkor

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z-a|^2} |dz| = \int_{\gamma} \frac{-i}{(z-a)(1-\bar{a}z)} dz = \int_{\gamma} \frac{i\bar{a}^{-1}}{(z-a)(z-\bar{a}^{-1})} dz.$$

És, ha $g(\xi) = \frac{i\bar{a}^{-1}}{(\xi-\bar{a}^{-1})}$, akkor szintén a Cauchy-formulából

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z-a|^2} |dz| = 2\pi i g(\bar{a}^{-1}) = \frac{2\pi}{|a|^2 - 1}.$$

3.15. Definíció. Legyen a az $f(z)$ -nek izolált szingularitási helye. Az a pontosított környezetében konvergens

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

Laurent-sorban szereplő c_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény a -hoz tartozó reziduumának nevezzük és $\text{Res}(a)$ -val, illetve $\text{Res}(f(z); a)$ -val, vagy $\text{Res}_{f(a)}(a)$ -val jelöljük.

3.16. Tétel. (Reziduum) Legyen az $f(z)$ függvény holomorf a γ egyszerű zárt görbén és belsejében a véges sok $a_1, a_2, \dots, a_p$ szinguláris pontok kivételével. Ekkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(a_1) + \text{Res}(a_2) + \cdots + \text{Res}(a_p)).$$

3.17. Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x + 2} dx$$

integrál értékét!

Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x + 2} dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + 2} dx = \\ \int_0^{2\pi} \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 1 + 4e^{ix}} dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} \frac{2}{e^{2ix} + 4e^{ix} + 1} ie^{ix} dx.\end{aligned}$$

Az $\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) ie^{ix} dx$ polárkoordinátás helyettesítést fölhasználva az integrál értéke tovább egyenlő

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{1}{i} \frac{2}{z^2 + 4z + 1} dz &= 2\pi \operatorname{Res} \left(f; \frac{1}{i} \frac{2}{z^2 + 4z + 1} \right) = \\ 2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{2}{z^2 + 4z + 1}; -2 + \sqrt{3} \right) &= 2\pi \frac{2}{2z + 4} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = 2\pi \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

mivel a nevezőben szereplő $z^2 + 4z + 1$ másodfokú egyenlet megoldásai, azaz

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

közül csak a $|-2 + \sqrt{3}| < 1$, így csak ott kellett tekintenünk a reziduumot.

3.18. Feladat. Számítsuk ki a következő értéket!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{7^n}$$

Megoldás. A reziduum-tétel miatt

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{n+1}} dz,$$

amiből pedig adódik, hogy

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz,$$

ahol egyébiránt tetszőleges 0 körüli kört vehettünk volna integrációs útnak. Ezt felhasználva a példa kérdésében szereplő összegre a következő formula adódik.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{7^n} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{7^n (z)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{(7z)^n} \cdot \frac{1}{z} dz$$

Az egységkörvonalon érvényes a $\left| \frac{(1+z)^2}{7z} \right| \leq \frac{4}{7}$ becslés, amiből látható, hogy a sorozat konvergenciája egyenletes, és felcserélve az összeget és az integrált, majd a reziduum-tétel alkalmazásával adódik, hogy az érték tovább egyenlő

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \left(\frac{(1+z)^2}{7z} \right)^n \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+z)^2}{7z} \right)^n \frac{1}{z} dz =$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(1+z)^2}{7z}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} 7 \cdot \frac{1}{7z - (1+z)^2} dz = \\
\frac{7}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{-z^2 + 5z - 1} dz &= 7 \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 5z - 1}; \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right) = \\
7 \frac{1}{-2z + 5} \Big|_{z=\frac{5-\sqrt{21}}{2}} &= 7 \frac{1}{\sqrt{21}}.
\end{aligned}$$

3.19. Feladat. Legyen γ az a kulcslyuk-görbe, amelyet a 0 középpontú r és a szintén 0 középpontú $R > r$ körök pozitív valós-tengely menti egybetevésével kapunk, azaz elhagyunk mindkét körvonaból a valós-tengely körül egy kis ε részt, majd a valós tengellyel párhuzamos, fölötte illetve alatta haladó két szakasszal egy egyszerű zárt görbévé kötjük egybe a kapott két-két végpont mentén (7. ábra).

Számítsuk ki az

$$\int_{\gamma} \frac{\log^2 z}{(z^2 + a^2)^2} dz$$

integrál értékét, ha $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, és $a > 0$ valós, a γ pedig legyen a R nagykör szerinti pozitív irányítású!

Megoldás. Először bontsuk föl az integrált négy integrál összegére a két kör és a két egyenes szakasz szerint.

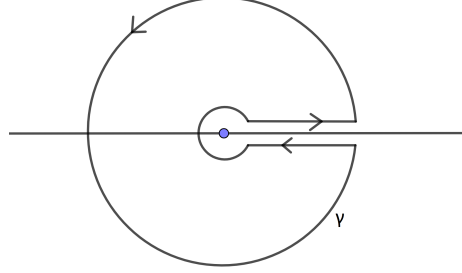
$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma} \frac{\log^2 z}{(z^2 + a^2)^2} dz = \\
&\int_r^R \frac{\log^2 x}{(x^2 + a^2)^2} dx + i \int_0^{2\pi} \frac{(\log(R \cdot e^{ti}))^2}{(R^2 \cdot e^{2ti} + a^2)^2} R e^{ti} dt + \\
&\int_R^r \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(x^2 + a^2)^2} dx + i \int_{2\pi}^0 \frac{(\log(r \cdot e^{ti}) + 2\pi i)^2}{(r^2 \cdot e^{2ti} + a^2)^2} r e^{ti} dt
\end{aligned}$$

Ezt követően megbecsüljük a második és a negyedik integrál abszolút értékét felülről.

$$\begin{aligned}
\left| i \int_0^{2\pi} \frac{(\log(R \cdot e^{ti}))^2}{(R^2 \cdot e^{2ti} + a^2)^2} R e^{ti} dt \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{\log(R + ti)^2}{(R^2 \cdot e^{2ti} + a^2)^2} R e^{ti} dt \right| \leq \\
&\int_0^{2\pi} \frac{R |\log R + ti|^2}{|R^2 \cdot e^{2ti} + a^2|^2} dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{R |\log R + ti|^2}{(R^2 - a^2)^2} dt \leq \\
&\int_0^{2\pi} \frac{R (\log R + 2\pi)^2}{(R^2 - a^2)^2} dt = \frac{2\pi R (\log R + 2\pi)^2}{(R^2 - a^2)^2}
\end{aligned}$$

A kapott felső korlát pedig 0-hoz tart $R \rightarrow \infty$ esetén. Ehhez hasonló módon a negyedik integrál tagra is érvényes a következő

$$\left| i \int_{2\pi}^0 \frac{(\log(r \cdot e^{ti}) + 2\pi i)^2}{(r^2 \cdot e^{2ti} + a^2)^2} r e^{ti} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\log r| + |t + 2\pi|)^2}{(a^2 - r^2)^2}$$



7. ábra. Kulcslyuk-görbe

felső becslés, amelynek értéke szintén 0-hoz konvergál $r \rightarrow 0$ esetén. Így a négytagú összegünk két tagúvá redukálódik, amely két tagra a reziduum-tételt alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\log^2 z}{(z^2 + a^2)^2} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(z^2 + a^2)^2}; ia \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(z^2 + a^2)^2}; -ia \right) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left(\frac{\log z}{z + ia} \right)^2 + \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{d}{dz} \left(\frac{\log z}{(z^2 + a^2)^2} \right)^2 \right) = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi \ln a \right) - \\ &= 2\pi i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi i \ln a \right). \end{aligned}$$

Ekkor tehát $r \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ esetén nyerjük a következő két összefüggést az előbbieket alapján a megmaradó két integrálos tagra.

$$\begin{aligned} &\left[\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{(x^2 + a^2)^2} dx - \int_0^\infty \frac{\ln x - 2\pi i}{(x^2 + a^2)^2} dx \right] = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi \ln a \right) - \\ &= 2\pi i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi i \ln a \right); \\ &\left[-2i \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + a^2)^2} dx + 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx \right] = \\ &= i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi \ln a \right) - \end{aligned}$$

$$i \cdot \frac{i}{4a^3} \left(2 \ln a - \ln^2 a + \frac{a\pi^2}{4} + 3\pi i - 3\pi i \ln a \right)$$

Végül a valós és képzetes részek összehasonlításával adódik, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4a^3} (1 - \ln a), \quad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3},$$

tehát az integrál csakugyan abszolút konvergens.

3.20. Feladat. Számítsuk ki a következő integrál értékét!

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

Megoldás. Legyen $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}$. Számítsuk ki kerületi integrálként a $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ úton, ahol $\gamma_1 = [-R, R]$ a valós tengelyen, $\gamma_2 = R + 2\pi i$, $\gamma_3 = [R + 2\pi i, -R]$, és $\gamma_4 = [-R + 2\pi i, -R]$. Ekkor a T tartományon, amelyet a γ görbe határol, az $f(z)$ függvénynek egyetlen pólusa létezik, mégpedig a $z = \pi i$ az $e^{i\pi} + 1 = 0$, az Euler-féle azonosság miatt. Ezért

$$\text{Res}(f, i\pi) = \left. \frac{e^{\alpha z}}{\frac{\partial}{\partial z}(1 + e^z)} \right|_{z=i\pi} = -e^{\alpha i\pi}.$$

Így a reziduum-tétel alapján adódik, hogy

$$\int_\gamma f = -2\pi i e^{\alpha i\pi}.$$

Továbbá

$$\left| \int_{\gamma_2} f \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+it)}}{1 + e^{R+it}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\alpha(R+it)}}{1 + e^{R+it}} \right| dt \leq \int_1^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} dt.$$

Így, mivel $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} = 0$, ezért $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f = 0$. Továbbá, mivel

$$\left| \int_{\gamma_4} f \right| = \left| - \int_0^{2\pi} \frac{i e^{\alpha(-R+it)}}{1 + e^{-R+it}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{e^R - 1} dt,$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} f$ szintén 0, minthogy a határértéket véve az egyenlet jobb oldala csakúgy, mint γ_2 esetén 0-hoz tart.

Most tekintsük a γ_3 -at. Ekkor

$$- \int_{\gamma_3} f = \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha(t+2\pi i)}}{1 + e^t} = e^{\alpha 2\pi i} \int_{\gamma_1} f.$$

Ekkor $R \rightarrow \infty$ esetén

$$(1 - e^{\alpha 2\pi i}) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} = -2\pi i e^{\alpha i\pi}.$$

Így rendezve adódik, hogy

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin(\alpha x)}.$$

3.21. Feladat. Határozzuk meg a következő integrál értékét!

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx$$

Megoldás. Tekintsük az $f(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2}$ függvényt, amelynek holomorfitási tartományát a $[-1, 1]$ szakasz, valamint a $\pm i$ pontok elhagyásával kapunk a komplex síkból.

Ekkor a négyzetgyök miatt (amely kétértékű függvény), ha a -1 vagy 1 körül egyszer megyünk körbe, akkor -1 -szeresre változik, viszont, ha a $[-1, 1]$ szakasz körül megyünk egyszer körbe, akkor kétszer változik -1 -szeresre, azaz a függvény csakugyan holomorf a megadott tartományon.

Továbbá, ha $x \in [-1, 1]$, akkor

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(x + iy) = - \lim_{y \rightarrow 0^-} f(x + iy),$$

azaz a $[-1, 1]$ intervallum esetén fentről és lentől tartva hozzá a két határérték egymásnak -1 -szerese, és fentről tartva kapjuk a $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ integrálni kívánt függvényt.

Legyen $r > 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} f(z)dz &= \int_{|z|=r} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} dz = \\ &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} dz + \int_{|z-i|=\varepsilon} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} dz + \int_{|z+i|=\varepsilon} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} dz, \end{aligned}$$

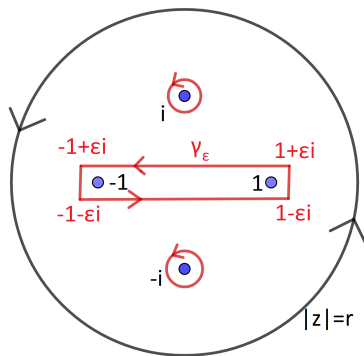
ahol γ_ε egy olyan ε magasságú téglalap (8. ábra), amely a $[-1, 1]$ szakaszt körülveszi, és amelyet szintén pozitív irányítás szerint fogunk venni (mivel az általános Cauchy-féle alaptétel miatt az r -sugarú körön vett integrál megegyezik a $\pm i$ körüli ε -sugarú körökön vett integrálok és a γ_ε -on vett integrál összegével).

Legyen $f(0) = \frac{1}{2}$ a jobb oldal felől. Ekkor $\varepsilon \rightarrow 0^+$ esetén a reziduum-tétel használatával (a $\pm i$ szingularitások körüli integrál a reziduum) és az $1+x^2 = (x+i)(x-i)$ azonosság miatt adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} f(z)dz &= 2\pi i (\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; -i)) - \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^{-1} (-f(x))dx = \\ &= 2\pi i (\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; -i)) - 2 \int_{-1}^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

Majd, ha $r \rightarrow \infty$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|z|=r} f(z)dz &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-r^2 e^{i2\vartheta}}}{1+r^2 e^{i\vartheta}} i r e^{i\vartheta} d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1-r^2 e^{i2\vartheta}}}{1+r^2 e^{i\vartheta}} i r e^{i\vartheta} \right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{r^2} - e^{i2\vartheta}}}{\frac{1}{r^2} + e^{i\vartheta}} i e^{i\vartheta} \right) d\vartheta = \end{aligned}$$



8. ábra. Integrálási görbék

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{-e^{2i\vartheta}}}{e^{2i\vartheta}} i e^{i\vartheta} d\vartheta = \int_0^{2\pi} 1 d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi.$$

Ekkor a reziduumok

$$2\pi i (\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; -i)) = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2i} + \frac{\sqrt{2}}{2i} \right) = 2\pi\sqrt{2}.$$

Tehát összefoglalva

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (2\pi\sqrt{2} - 2\pi) = \pi(\sqrt{2} - 1).$$

4. Összegzés

Az első fejezetekben a komplex számokkal kapcsolatos alapvető fogalmak tárgyalása után igyekeztem képet adni arról, hogy komplex számok segítségével viszonylag könnyen igazolhatóak algebrailag olyan problémák, mint a szabályos ötszög szerkesztése, valamint a Cardano-képlet levezetése elemi szimmetrikus polinomok segítségével. Majd annak megismerésével foglalkoztam, hogy miért is olyan lényeges a Riemann-féle számgömbre való sztereografikus vetítés a komplex függvénytanban, milyen geometriai állítások mondhatók ki ehhez kapcsolódóan, és ezzel összhangban a törtlineáris függvények is bemutatásra kerültek. Utóbbiak pedig már átvezettek a Bolyai-féle hiperbolikus geometria komplex Poincaré-féle modelljéhez, amelynek érdekes tulajdonságaiba csupán egy betekintésre volt itt lehetőségem, mindenekeelőtt a távolságfogaloma levezetésével. Majd a második részben néhány komplex függvényekkel kapcsolatos alapfogalom, valamint a későbbiek szempontjából lényeges, nevezetesebb tétel kimondása után igyekeztem bemutatni utóbbiak használatát, amelyek segítségével nehezebb integrálok is viszonylag könnyen kiszámíthatóak, illetve ezzel párhuzamosan betekinteni abba, hogy a komplex integrálás, mint a komplex függvénytan egy alapvető része és eszköze milyen hasznossággal bír.

Hivatkozások

- [1] LACZKOVICH MIKLÓS-T. SÓS VERA: *Valós Analízis I.-II.*, Typotex
- [2] SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Komplex Függvénytan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 7-12, 19-22, 38-43, 63-64, 99
- [3] KÓS GÉZA: *KFT Jegyzet*, 48-63, 133
- [4] DR. PACH ZS. PÁLNÉ: *Komplex Függvénytan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 11-18,
- [5] HALÁSZ GÁBOR: *Bevezető komplex függvénytan*, 2. javított kiadás, ELTE, 2002
- [6] PETRUSKA GYÖRGY: *Komplex Függvénytan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998, 53-63, 138
- [7] FEHÉR LÁSZLÓ, KÓS GÉZA, TÓTH ÁRPÁD: *Analízis Feladatgyűjtemény II*, Typotex 2014
- [8] HANKA LÁSZLÓ - ZALAY MIKLÓS: *Komplex Függvénytan Példatár*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 2003
- [9] GÁSPÁR CSABA: *Numerikus analízis 2*
- [10] NAKHLÉ H. ASMAR LOUKAS GRAFAKOS: *Complex Analysis with Applications*, Springer
- [11] JIRI BOUCHALA AND ONDREJ BOUCHALA: *Complex Analysis Exercises With Solution*
- [12] N. ASMAR AND L. GRAFAKOS: *Solutions to Selected Exercises in Complex Analysis with Applications*
- [13] JONATHAN MOSTOVOY UNIVERSITY OF TORONTO: *Complex Analysis: Interesting Problems*
- [14] ENDRE PAP: *Complex Analysis through Examples and Exercises*, SPRINGER-SCIENCE+BUSINESS MEDIA, B.V, 191-205
- [15] JUAN CARLOS PONCE CAMPUZANO: *Complex Analysis Problems with solutions*
- [16] <https://www.vaia.com/en-us/textbooks/math/complex-variables-with-applications-0-edition/chapter-2/problem-8-consider-two-antipodal-points-x-y-u-and-x-y-u-on-t/feedback-form>