
Lineáris algebrai módszerek a kombinatorikában

Szakdolgozat

Miszler Levente

Matematika alapszak - matematikai elemző szakirány

Témavezető

Dr. Ágoston István



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Ágoston Istvánnak, amiért megismertette velem ezt a témát, valamint a szakdolgozatom írása során nyújtott rendszeres konzultációkért, segítségnyújtásért. Emellett szeretnék köszönetet mondani családomnak, barátaimnak, amiért végig támogattak az egyetemi éveim alatt.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A két alapfeladat	5
2.1. Páratlanváros	5
2.2. Párosváros	6
3. Gyakorlati példák a témakörben	8
3.1. Színes Páratlanváros	8
3.2. Nem teljes Párosváros	10
3.3. Mod-p város	11
3.4. Erős Párosváros	13
3.5. Mod-6 város	14
4. Fordított városok és 3 halmaz metszete	17
4.1. Fordított Páratlanváros	17
4.2. Fordított Párosváros	19
4.3. Három különböző halmaz metszete	21
5. Gráfos megközelítés	30
5.1. Vu tétele	30

1. Bevezetés

Páratlanvárosnak 32 lakosa van, akik imádnak klubokat alapítani. Kezdetben egy klub alapításának mindössze annyi feltétele volt, hogy 2 klub tagjai teljesen nem egyezhettek meg. Mivel az így lehetségesen létrejövő klubok száma túl magas volt (2^{32}), ezért új szabályokat kellett bevezetni. Az egyik szabály szerint egy klubnak csak páratlan számú tagja lehet, másrészt bármely két klubba páros számú közös tag tartozhat. Az új szabályok után a létrehozható klubok száma drasztikusan lecsökkent, így már csak legfeljebb 32 darabot lehetett alapítani. Ha viszont a feltételeken egy apró változtatást teszünk, miszerint minden klubnak páratlan helyett páros számú tagja lehet, akkor ez a szám ismét megnő 2^{16} -ra. Elsőre meglepő lehet, de a fenti állítások bizonyítására a legfőbb eszközeink lineáris algebrai módszerek lesznek. A Páratlanváros-Párosváros témakörnek különböző feltételek bevezetése mellett rengeteg változata ismert, a bizonyításaik során pedig többféle lineáris algebrai eszközt használhatunk fel. A szakdolgozat célja ezen módszerek bemutatása a témakörhöz tartozó problémák ismertetése során.

2. A két alapfeladat

A fejezet során a bevezetésben tárgyalt Páratlanváros, valamint Párosváros problémákat vizsgáljuk, és bizonyítjuk be.

2.1. Páratlanváros

2.1.1. Tétel. *[Páratlanváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j|$ páratlan, és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ páros, ha $i \neq j$. Ekkor $\max m = n$.*

Bizonyítás:

a) $m = n$ létezik:

Először lássuk be, hogy $m = n$ elérhető. Ha minden $\mathbf{A}_i$ halmaz elemszáma 1, és a halmazok különbözőek, akkor bármely $\mathbf{A}_i$ halmaz páratlan elemszámú, valamint bármely $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$, $i \neq j$, páros elemszámú (hiszen nincs közös elemük), és így a részhalmazok száma megegyezik n -nel.

Amennyiben n egy páros szám, szintén jó példa, ha minden $\mathbf{A}_i$ halmaz $n-1$ elemszámú, hiszen ekkor bármely $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$, $i \neq j$, elemszáma $n-2$ lesz, ami páros, azaz teljesíti a feltételeket, és mivel minden halmazból pontosan egy elem marad ki, így a részhalmazok elemszáma páratlan és itt is n darab halmazunk lehet.

b) Most lássuk be, hogy $m \leq n$:

Tekintsük az $\mathbf{A}_i$ halmazokhoz tartozó $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorokat (karakterisztikus vektor alatt itt egy olyan n dimenziós bináris sorvektort értünk, amelyben az i . koordináta 1-es, ha az i . tag benne van a halmazban, és 0 ha nincsen). Azt kell belátnunk hogy az $\mathbf{A}_i$ halmazokhoz tartozó $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{F}_2$ feletti $\mathbb{F}_2^n$ vektortérben, hiszen ekkor legfeljebb n darab $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorunk lenne, mivel $\dim \mathbb{F}_2^n = n$.

Vegyük észre hogy az $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T$ mátrixszorzat akkor lesz 1, ha az $\mathbf{A}_i$, valamint $\mathbf{A}_j$ halmazoknak páratlan darabszámú közös eleme van, és 0 hogyha páros darabszámú. A kezdeti feltételek miatt ez akkor lesz 0, ha $i \neq j$, és 1, ha $i = j$.

Most nézzük a $\delta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ lineáris kombinációt. Azt kell belátnunk, hogy ez csak akkor lehet igaz, ha $\delta_1 \dots \delta_n = \mathbf{0}$ (Itt $\mathbf{0}$ alatt az n dimenziós nullvektort értjük).

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $\mathbf{a}_i^T$ vektorral. Mivel $\mathbf{a}_j \mathbf{a}_i^T = 0$, ha $i \neq j$, és 1, ha $i = j$, ezért az egyenletünkben az $\mathbf{a}_j \mathbf{a}_i^T$ tagok kiesnek, és csupán $\delta_i = 0$ fog maradni minden i -re.

Ezzel beláttuk, hogy a karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett, azaz legfeljebb n darab van belőlük, tehát maximum n darab halmazunk lehet a feltételek mellett. $\square$

A tétel bizonyításához az alábbi lineáris algebrai fogalmakat használtuk fel:

1. **Karakterisztikus vektorok**
2. **Lineáris függetlenség, lineáris kombináció**
3. **Dimenziók**
4. **Mátrixszorzat**

2.2. Párosváros

2.2.1. Tétel. [Párosváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j|$ páros, és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ páros, ha $i \neq j$. Ekkor $\max m = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Bizonyítás:

a) Itt is kezdjük annak belátásával, hogy $m = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ halmaz megadható:

Rendezzük párba az elemeket, így lesz $\lfloor n/2 \rfloor$ darab kételemű diszjunkt halmazunk (amennyiben n páratlan, egy elem nyilván kimarad). Tekintsük a párokból képezhető összes lehetséges részhalmazt, (amelyekben a párok mindegyikére vonatkozik, hogy a pár mindkét tagja szerepel, vagy egyik sem): Ezek elemszáma nyilván páros lesz, hiszen minden halmazban a párok elemei együtt szerepelnek. A metszetek ugyanezen okból kifolyólag szintén csak páros elemszámúak lehetnek, $\lfloor n/2 \rfloor$ darab elemből pedig legfeljebb $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ darab halmaz készíthető.

b) Most lássuk be, hogy valóban ez a maximum:

A Páratlanváros tételhez hasonlóan itt is vegyük az $\mathbf{A}_i$ halmazokhoz tartozó $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorokat, és nézzük ezek skaláris szorzatát, az $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T$ mátrixszorzatot. Ezek az $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorok merőlegesek egymásra $\mathbb{F}_2^n$ -ben, hiszen a skaláris szorzatban páros darabszámú 1-est kell összedani, azaz $\forall \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ karakterisztikus vektorok skaláris

szorzata 0 lesz. Jelöljük U -val az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ karakterisztikus alterek által generált alteret, azaz azon vektorok halmazát, amelyek felírhatóak $\delta_1 \mathbf{a}_1 + \delta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n$ alakban (a számolások továbbra is $\mathbf{F}_2$ felett történnek). Vizsgáljuk meg az U ortogonális kiegészítő alterét, az $U^\perp$ -t, azaz azon vektorokat $\mathbf{F}_2^n$ -ben, amelyek U minden elemére merőlegesek, tehát skaláris szorzatuk 0 lesz. Mivel U elemei merőlegesek egymásra, ezért $U \subseteq U^\perp$. Végül a bizonyítás befejezéséhez használjuk fel az alábbi tételt (melyet most nem bizonyítunk):

2.2.2. Tétel. *Ha adott a $V = \mathbb{F}_2^n$ vektortér a szokásos skaláris szorzattal, és abban egy U altér, akkor U dimenziójának, valamint U ortogonális kiegészítő altere dimenziójának összege megegyezik a vektortér dimenziójával, ami n . Azaz*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

.

De mivel $U \subseteq U^\perp$, ezért $\dim U \leq \dim U^\perp$, tehát $\dim U \leq \lfloor \frac{\dim V}{2} \rfloor$.

Mivel jelen esetben V az $\mathbf{F}_2^n$ -nek felel meg, ezért a dimenziója n , tehát $\dim U \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ezen tulajdonságok mellett U -ban legfeljebb $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ darab karakterisztikus vektor lehet, amivel beláttuk az állítást. $\square$

E tétel bizonyítása már egy fokkal bonyolultabb volt a Páratlanváros tételhez képest. Bár sok szempontból hasonló megközelítést használunk mindkét esetben, de itt már fel kellett használunk az alterek fogalmát, valamint az altér és annak ortogonális kiegészítő alterének dimenziójára vonatkozó összefüggést.

3. Gyakorlati példák a témakörben

A szakdolgozat ezen részében különböző változatait vizsgáljuk a Páratlanváros valamint párosváros feladatoknak, bizonyos feltételek bevezetése mellett. Látni fogjuk, hogy több új lineáris algebrai módszer is előkerül a bizonyításaink során. Ezen fejezet 2 főbb forrása Babai László és Frankl Péter Linear Algebra Methods in Combinatorics [1], valamint Freud Róbert Lineáris Algebra [2] könyve lesz.

3.1. Színes Páratlanváros

3.1.1. Tétel. [Színes Páratlanváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_m$ valamint $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre minden $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_i|$ páratlan $\forall i$ -re és $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_j|$ páros $\forall i \neq j$ -re. Ekkor $\max m = n$.

Bizonyítás:

Hasonlóan oldjuk meg, mint az eredeti Páratlanváros tétel bizonyítását.

a) Először belátjuk $m = n$ létezését:

Legyen minden $\mathbf{K}_i$ és $\mathbf{P}_j$ halmaz elemszáma 1, és az azonos indexű halmazokhoz ugyanazon az elemek tartozzanak. Könnyen látható, hogy ekkor $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_j| = 0 \quad \forall i \neq j$ -re, valamint $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_i| = 1 \quad \forall i$ -re, azaz épp teljesülnek a felételek, és legfeljebb kétszer n darab egyelemű halmazt hozunk létre.

b) m valóban legfeljebb n lehet:

Vezessük be a $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{P}_j$ halmazokhoz a $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{p}_j$ karakterisztikus vektorokat. Lássuk be a $\mathbf{k}_i$ vektorok lineáris függetlenségét az $\mathbb{F}_2$ feletti $\mathbb{F}_2^n$ vektortérben (A $\mathbf{p}_i$ vektorok függetlensége nyilván ugyanígy belátható, ha felcseréljük a $\mathbf{p}_i$ és a $\mathbf{k}_i$ szerepét). Innentől a bizonyítás lényegében megegyezik a Páratlanváros tétel bizonyításával: Könnyen látható, hogy a $\mathbf{k}_i \mathbf{p}_j^T$ akkor lesz 0, ha $i \neq j$, és 1, ha $i = j$.

A $\delta_1 \mathbf{k}_1 + \dots + \delta_m \mathbf{k}_m = \mathbf{0}$ lineáris kombináció mindkét oldalát most egy tetszőleges $\mathbf{p}_i^T$ vektorral szorozzuk be. Mivel $\mathbf{k}_i \mathbf{p}_i^T = 1$, és $\mathbf{k}_i \mathbf{p}_j^T = 0$ minden $i \neq j$ esetén, ezért $\delta_i = 0$ marad a beszorzás után minden i -re. Tehát a karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett, és mivel $\dim \mathbb{F}_2^n = n$, ezért legfeljebb n darab van belőlük, amivel beláttuk az állítást. $\square$

Ez a bizonyítás nagyon hasonlított az eredeti Páratlanvároséhoz, lényegében ugyanazt a módszert használta fel. A feladat b) változatában kicsit szigorítunk a feltételeken, és

emiatt a megoldási módszerünkön is változtatunk egy keveset.

3.1.2. Tétel. [Színes Páratlanváros b:] Ha az előző tételben a $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_j|$ párosságát $\forall i \neq j$ -ről $\forall i \leq j$ -re cseréljük, és a többi feltételt megtartjuk, akkor a maximum nem változik.

Bizonyítás:

A bizonyításhoz most egy másféle megközelítést használunk, de lényegében nagyon hasonló a korábbiakhoz. Legyen A a $\mathbf{k}_i$ karakterisztikus vektorokból képzett mátrix, B pedig a $\mathbf{p}_j$ karakterisztikus vektorokból képzett mátrix. Azaz A egy olyan $m \times n$ -es mátrix, ahol az i . sorban a $\mathbf{k}_i$ karakterisztikus vektor szerepel, B -nél pedig az j . sorban a $\mathbf{p}_j$ karakterisztikus vektor. Tekintsük a $C = A \cdot B^T$ transzponált metszetmátrixot (C -t $\mathbb{F}_2$ test felett értelmezzük). A feltételeknek megfelelően C főátlójába csupa 1-esek fognak kerülni, hiszen az azonos indexű halmazok metszete páratlan. A főátló feletti elemekről tudjuk, hogy csupa 0-sok, hiszen ezek tulajdonképpen a $|\mathbf{K}_i \cap \mathbf{P}_j|$ elemszámai, ahol $i < j$. Egyedül a főátló alatti elemekről nem tudunk semmit, ott lehetnek 0-sok, és 1-esek is, erre most nem mondanak semmit a feltételeink.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy C egy $m \times m$ -es alsóháromszög-mátrix, és a rangja megegyezik sorainak számával, ami jelen esetben m . Viszont köztudott, hogy 2 mátrix szorzatának rangja soha sem lehet nagyobb, mint az eredeti 2 mátrix rangjának minimuma. Jelen esetben $\text{rang}(C) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$.

Mivel A -nak és B -nek is n oszlopa van, ezért $\min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)) \leq n$, tehát $m \leq n$, ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Megjegyzés: Ezzel a mátrixok rangjára vonatkozó módszerrel ugyanúgy bizonyíthatnánk az eredeti Páratlanváros feladatot is. A mátrixok rangjára vonatkozó összefüggések gyakori eszközök lehetnek lineáris algebrai bizonyítások során.

3.2. Nem teljes Párosváros

Tegyük fel hogy adva van egy halmazrendszerünk, amely teljesíti a Párosváros feltételeket, de a halmazszámunk nem maximális. Felmerülhet az alábbi kérdés: Tudunk-e a halmazrendszerhez még új halmazokat hozzáadni a feltételek teljesülése mellett? A válasz igen, ezt a következő bizonyításunk során belátjuk

3.2.1. Tétel. *[Nem teljes Párosváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és legyenek $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$*

$\mathbf{X}$ -nek olyan különböző részhalmazai, amelyek mindegyikére $|\mathbf{A}_j|$ páros, és bármely két különböző részhalmaz esetén $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ páros, ha $i \neq j$. Ha $m < 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, akkor létezik olyan $\mathbf{A}_k$, amely nem szerepel az $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ között, és ha hozzáadjuk, akkor a feltételek továbbra is teljesülnek.

Bizonyítás: Tekintsük az $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorok által generált U alteret. A feltételek alapján most is $U \subseteq U^\perp$. A Párosváros tétel bizonyításánál felhasználtuk, hogy $\dim U + \dim U^\perp = n$. Azt kell belátnunk, hogy ha a halmazrendszerünk nem bővíthető, akkor $\dim U = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ugyanis az könnyen látható, hogy U elemei hozzávehetők a kiválasztott halmazokhoz. Tételezzük fel, hogy $\dim U \leq \frac{n-2}{2}$ (Itt elhagyhatjuk az egészrészt, nem befolyásol semmit). Ekkor $\dim U^\perp \geq \frac{n+2}{2} \geq \dim U + 2$. Ahhoz, hogy belássuk, hogy U nem maximális, találunk kell egy olyan v vektort, amelyre $v \in U^\perp$ és $v \notin U$, és v -t hozzáadva U -hoz a feltételek továbbra is teljesülnek, azaz $v \in U$ minden vektorára merőleges, és v merőleges önmagára is. Tekintsük az U egy bázisát, és egészítsük ki $U^\perp$ -nek egy bázisává. Mivel $\dim U^\perp \geq \dim U + 2$, ezért biztosan lesz 2 vektor ebben a bázisban, amelyek nem elemei U bázisának, jelöljük ezeket p -vel és q -val. p -re és q -ra nyilván teljesül, hogy merőlegesek U minden elemére, és amennyiben valamelyik vektor hossza $\mathbb{F}_2$ felett 0 lenne, akkor ez épp megfelelne a keresett v vektornak. Amennyiben viszont ez egyik vektorra sem teljesül, akkor tekintsük a $v = p + q$ vektort. Ez nyilván merőleges lesz U minden elemére és v merőleges lesz önmagára is, hiszen $v \cdot v = (p + q) \cdot (p + q) = p \cdot p + 2(p \cdot q) + q \cdot q = 1 + 0 + 1 = 0$ lesz az $\mathbb{F}_2$ test felett

Tehát $\dim U = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, azaz ha a Párosváros tétel feltételei teljesülnek, és a halmazok száma kevesebb, mint $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, akkor mindig létezik egy olyan halmaz, amelyet hozzáadva a feltételek továbbra is igazak maradnak. $\square$

Megjegyzés: Páratlanváros esetén már nem igaz az állítás, sőt $\forall t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$ számra igaz lesz, hogy létezik $n - 2t$ olyan halmaz, amelyek kielégítik a feltételeket, és nem egészíthetők ki további halmazokkal. Erre a lehetséges konstrukció: Vegyünk k darab különböző egyelemű halmazt, ahol k paritása éppen ellenkező n paritásával, és egy olyan halmazt, ahová az összes elem bekerül, amelyek nem tagjai az egyelemű halmazoknak. Ekkor ha szeretnénk egy újabb halmazt hozzáadni: Ezen halmazba nem kerülhet olyan elem, ami tagja egy egyelemű halmaznak, hiszen ekkor a két halmaz metszete egyelemű lenne, ami páratlan, azaz megszegezné a metszet párosságára vonatkozó feltételt. Azaz csupán az utolsó $n - k$ elemű halmazból választhatunk, viszont ha ebből páratlan számú elemet választunk, akkor megint a metszetre vonatkozó feltétel nem teljesül, ha pedig páros számú elemet választunk, akkor a halmaz paritásra vonatkozó feltétel nem fog teljesülni. Így a kiválasztott halmazok száma $k + 1$ lesz, ahol k minden $0 \leq k \leq n$ értéket felvehet azzal a feltétellel, hogy k paritása különbözik n -étől. Így $k + 1$ lehetséges értékei pont megegyeznek $n - 2t$ lehetséges értékeivel, ezzel beláttuk az ezen megjegyzésre vonatkozó állítást.

3.3. Mod-p város

3.3.1. Tétel. *[Mod-p város] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j| \bmod p \neq 0$, és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| \bmod p = 0$, ha $i \neq j$. Ekkor ha p prímszám, akkor $\max m = n$.*

Bizonyítás: Vegyük észre, ha $p = 2$ akkor épp az eredeti Páratlanváros tételt kapjuk. Szerencsére ha $p \neq 2$, de prímszám, akkor a bizonyítás is ugyanúgy működik, mint az eredeti Páratlanváros tételben. Az egyenlőség ismét a csupa 1-elemű halmazokkal belátható, pontosan ugyanúgy, mint a Páratlanváros verziónál.

$m \leq n$ belátásához itt is tekintsük az $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorokat, csak most $\mathbb{F}_2$ helyett az $\mathbb{F}_p$ feletti $\mathbb{F}_p^n$ vektortérben (Ezek a karakterisztikus vektorok nyilván továbbra is csupa 0-ból és 1-ből álló vektorok lesznek). Innentől a bizonyításunk ténylegesen megegyezik az eredeti Páratlanváros tétel bizonyításával, a különbség mindössze annyi, hogy $\mathbb{F}_2$ helyett $\mathbb{F}_p$ felett nézzük, valamint ha a $\delta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ lineáris kombinációt egy tetszőleges $\mathbf{a}_i$ vektorral szorozzuk be, akkor $\delta_i \cdot k = 0$, ahol $0 \leq k < p$ és $k \in \mathbb{Z}$, de ekkor δ_i továbbra is 0 lesz.

□

Fontos azonban megjegyezni, hogy ezt csak amiatt tudjuk megtenni, mivel p egy prímszám, és emiatt $\mathbb{Z}_p$ egy test. Amennyiben p nem prím, $\mathbb{Z}_p$ egy gyűrű, és ekkor az egész gondolatmenetünk már nem működik, mivel gyűrűk felett nem beszélünk vektorterekről, és ezek dimenzióiról. Adódhat a kérdés, hogy nem prismszámokra akkor mennyi lehet a maximum? Erre általánosabban már nehezebb pontos választ adnunk, viszont prímhatványokra még sikerül, igaz kissé másféle módszert kell alkalmaznunk.

3.3.2. Tétel. *[Mod p^k város] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j| \pmod{p^k} \neq 0$, és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| \pmod{p^k} = 0$, ha $i \neq j$. Ekkor ha p^k prímszám hatványa, akkor $\max m = n$.*

Bizonyítás: Az egyenlőség létezése nyilván itt is belátható az egyelemű halmazokkal. Viszont mivel p^k nem prímszám, ezért $\mathbb{Z}_{p^k}$ gyűrű, így a fent levezetett indoklás miatt az eredeti bizonyításunk nem lesz igaz, más módszerhez kell folyamodnunk. Oldjuk meg a feladatot általánosabban: $\mathbb{Z}_{p^k}$ helyett $\mathbb{Q}$ felett, azaz az $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ halmazokhoz tartozó $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{Q}^n$. A feltételek miatt továbbra is teljesül, hogy $\forall i \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^T \not\equiv 0 \pmod{p^k}$, valamint $\forall i \neq j \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^T \equiv 0 \pmod{p^k}$. Ahhoz, hogy ezen $\mathbf{a}_i$ vektorok lineáris függetlenségét belássuk, ismét tekintsük a $\delta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ lineáris kombinációt a $\mathbb{Q}^n$ feletti vektortérben. Indirekten tegyük fel, hogy létezik egy ilyen nem csupa 0 racionális együtthatókkal rendelkező lineáris kombináció. Első lépésként szorozzuk be az összes együtthatót az együtthatók nevezőinek legkisebb közös többszörösével. Ekkor a lineáris kombináció változatlan marad, viszont minden együtthatónk egy egész szám lesz. Ezután osszuk le az együtthatók legnagyobb közös osztójával. Így elérjük, hogy az együtthatók relatív prímek legyenek (fontos megjegyezni, hogy itt nem szükséges, hogy bármely 2 együttható relatív prím legyen egymással, hanem az összesre kell hogy igaz legyen). Most szorozzuk be az így kapott $\delta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ lineáris kombinációt egy tetszőleges $\mathbf{a}_i^T$ vektorral. Ekkor $\delta_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_i^T + \dots + \delta_n \mathbf{a}_n \mathbf{a}_i^T = 0$, ahol a feltételek miatt $\forall i \neq j \quad \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j \equiv 0 \pmod{p^k}$. Viszont ekkor $\delta_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^T \equiv 0 \pmod{p^k}$ is igaz lesz, és mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^T \not\equiv 0 \pmod{p^k}$ ezért ez csak úgy lehetséges, ha $\delta_i \equiv p \pmod{p^k}$ és $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \equiv p \pmod{p^k}$. Viszont mivel ezt tetszőleges $\mathbf{a}_i^T$ -al beszorozhatjuk, ezért bármely δ_i -re igaz lesz, hogy $\delta_i \equiv p \pmod{p^k}$. Viszont ekkor ellentmondásra jutunk, ugyanis ezen δ_i -knek relatív prímeknek kellene lenniük, jelen esetben viszont nem azok, hiszen a legnagyobb közös osztójuk legalább p . Azaz nem létezik ilyen csupa nem 0 együtthatókból álló

lineáris kombináció, az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{Q}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz legfeljebb n darab karakterisztikus vektorunk létezik, tehát legfeljebb n darab halmazunk van a feltételek mellett. $\square$

Meggondolható, hogy egy hasonló gondolatmenet működhet, akár a mod- p város, vagy akár a sima Páratlanváros esetén is, ha valami oknál fogva $\mathbb{Z}_p$ helyett $\mathbb{Q}$ felett szeretnénk bizonyítani a feladatot.

3.4. Erős Párosváros

3.4.1. Tétel. [Erős Párosváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ páros, ha $i \neq j$, viszont $|\mathbf{A}_j|$ lehet páros és páratlan is. Ekkor $\max m = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + \varepsilon$. ahol $\varepsilon = 0$, ha n páros, és $\varepsilon = 1$, ha n páratlan.

Ez a tétel egy erősebb verziója az eredeti Párosváros tételnek, hiszen míg ott a halmazok paritására adott volt egy feltétel, ezt ebben az esetben elhagytuk. A tételt először E. R. Berlekamp látta be 1969-ben, majd J. E. Graver 1975-ben.

Bizonyítás:

a) Lássuk be, hogy a maximum elérhető:

Amennyiben n páros, nagyon egyszerű dolgunk van, a Párosváros-tétel bizonyításánál használt módszer, miszerint az elemeket párba állítjuk, és vesszük a párokból képzett összes lehetséges részhalmazt, nyilván itt is ugyanazt az eredményt adja. Páratlan n esetén már 1-gyel megnő a korlát, itt is ugyanúgy vegyünk a párokból képzett összes lehetséges részhalmazt, és ezek mellé vegyünk azt a halmazt, amely az összes elemet tartalmazza. Mivel ezen kívül az összes halmaz páros elemszámú volt, ezért nyilván a metszetek is páros elemszámúak lesznek, így a feltételek teljesülnek.

b) Most lássuk be, hogy $m \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + \varepsilon$:

Válasszuk külön a páros elemszámú, valamint a páratlan elemszámú részhalmazokat. A párosakat jelöljük $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ -val, a páratlanokat pedig $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_l$ -el (ekkor ugye $k + l = m$), az ezekhez tartozó karakterisztikus vektorokat pedig $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ -val, valamint $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$ -el. Ekkor $\mathbb{F}_2$ test felett ezek a vektorok páronként merőlegesek egymásra, valamint a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ vektorok önmagukra is merőlegesek lesznek a feltételek teljesülése esetén. Jelöljük a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$, valamint a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$ vektorok által generált altereket U_b -vel és V_c -vel (b és c az alterek dimenziója). Vegyük észre, hogy a $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_l$ halmazok

megfelelnek a Páratlanváros feltételeinek, így annak a tételnek bizonyításából következik, hogy a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$ karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett, ezért $l = c$. Emellett tudjuk, hogy $k \leq 2^b$, szóval $m = k + l \leq c + 2^b$. Tekintsük az $U_b \cap V_c$ -t. Ezek azon vektorok, melyek felírhatóak $\mathbb{F}_2$ felett $\delta_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \delta_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, valamint $\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \dots + \alpha_l \mathbf{c}_l = \mathbf{0}$ alakban. Szorozzuk be az első lineáris kombináció mindkét oldalát egy tetszőleges $\mathbf{b}_i$ vektorral, a másodikét egy tetszőleges $\mathbf{c}_j$ vektorral. A feltételek teljesülése miatt ebből következik, hogy $\alpha_i = 0 \quad \forall i$ -re, majd ebből, hogy $\delta_j = 0 \quad \forall j$ -re, azaz $U_b \cap V_c = \mathbf{0}$. Ennek fontos következménye, hogy $\dim(\langle U_b, V_c \rangle) = \dim(U_b) + \dim(V_c) = b + c$. Emellett azt is tudjuk, hogy $\langle U_b, V_c \rangle$ minden eleme merőleges U_b -re $\mathbb{F}_2$ felett, (hiszen bármely két különböző halmaznak páros számú közös eleme van, valamint a páros elemszámú halmazoknak nyilván önmagukkal vett metszete is páros elemszámú lesz) tehát $\langle U_b, V_c \rangle \subseteq U_b^\perp$.

Mivel $\dim(U_b) + \dim(U_b^\perp) = n$, ezért $\dim(U_b^\perp) = n - b$, tehát $\dim(\langle U_b, V_c \rangle) \leq n - b$. Viszont $\dim(\langle U_b, V_c \rangle) = b + c$, tehát $b + c \leq n - b$, amiből következik, hogy

$$b \leq \left\lfloor \frac{n - c}{2} \right\rfloor$$

Emellett

$$m = k + l \leq c + 2^b \leq c + 2^{\lfloor \frac{n-c}{2} \rfloor}$$

Vegyük észre, hogy ez az összeg akkor lesz a legnagyobb, ha c az n paritásától függően 0-t vagy 1-et vesz fel, ezért a $c + 2^{\lfloor \frac{n-c}{2} \rfloor}$ felülről becsülhető $2^{\lfloor n/2 \rfloor} + \varepsilon$ -nal, ahol $\varepsilon = 0$, ha n páros, és $\varepsilon = 1$, ha n páratlan. Ezzel beláttuk az eredeti állítást. $\square$

A bizonyítás során ismét több lineáris algebrai eszköz előkerült, a legfontosabb ezúttal az alterek dimenzióira vonatkozó összefüggések voltak.

3.5. Mod-6 város

3.5.1. Tétel. [Szegedy Márió Mod 6 város] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző részhalmazok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j| \bmod 6 \neq 0$, és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| \bmod 6 = 0$, ha $i \neq j$. Ekkor ha $n \neq 3$, akkor $m \leq 2n - 2 \log_2 n$.

Bizonyítás:

a) $n \leq 6$ esetén:

Ekkor n értékeit 1-től 6-ig nézve $[2n - 2 \log_2 n]$ értékei 2, 2, 2, 4, 5, 6 lehetnek. Mivel

egy halmazban legfeljebb n elemünk lehet, ezért jelen esetben az $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| \bmod 6 = 0$ összefüggés azt eredményezi, hogy semelyik két halmaznak nem lehet közös eleme. Ez viszont azt jelenti, hogy így minden esetben maximum n darab halmazunk lehet, ami az $n = 3$ kivételével minden esetben teljesül. $n = 3$ esetén pedig az egyelemű halmazok példája mutatja, hogy a tétel becslése valóban nem jó, külön kell kezelnünk ezt az esetet.

b) $n \geq 7$ esetén:

Ismét válasszuk külön a páros és páratlan elemszámú részhalmazokat. Alkalmazzuk újra az előző tétel bizonyításában vett jelölést, a párosakat jelöljük $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ -val, a páratlanokat pedig $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_l$ -l, ($k+l = m$), az ezekhez tartozó karakterisztikus vektorokat pedig $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ -val valamint $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$ -el. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_l$ halmazok itt is megfelelnek a Páratlanváros feltételeknek, hiszen páratlan elemszámúak, valamint bármely két halmaz metszete osztható lesz 6-tal, azaz páros elemszámú. Ennek következménye, hogy legfeljebb n darab létezik belőlük. A $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ halmazokról tudjuk, hogy páros elemszámúak, valamint nem oszthatóak 6-tal, azaz $|\mathbf{B}_i| \bmod 6 = 2$ vagy $|\mathbf{B}_i| \bmod 6 = 4$. Ez éppen ekvivalens azzal, hogy ha $\mathbf{B}_i \bmod 3 = 1$ vagy $\mathbf{B}_i \bmod 3 = 2$. Vegyük észre, hogy ekkor $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ halmazok teljesítik a "Mod-3 város" feltételeit, tehát legfeljebb n darab van belőlük. Jelöljük a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$, valamint a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$ vektorok által generált altereket U_b -vel és V_c -vel (b és c az alterek dimenziója). Az előző feladatban használt módszerrel itt is beláthatjuk, hogy $U_b \cap V_c = \mathbf{0}$, amiből következik, hogy $\dim(\langle U_b, V_c \rangle) = \dim(U_b) + \dim(V_c) = b + c$.

$\langle U_b, V_c \rangle$ minden eleme ismét merőleges lesz U_b minden elemére $\mathbb{F}_2$ felett (hiszen itt most a merőlegesség szempontjából lényegtelen, hogy a metszeteknek 2-vel vagy 6-al kell oszthatónak lennie), ezért $\langle U_b, V_c \rangle \subseteq U_b^\perp$. Az előző feladathoz hasonlóan itt is belátható, hogy $b + c \leq n - b$, tehát $2b + c \leq n$. Tudjuk emellett, hogy $c = l$, így $l = c \leq n - 2b$, és mivel $k \leq 2^b$, ezért $l \leq n - 2 \log_2 k$. Mindkét oldalhoz k -t hozzáadva: $m \leq k + n - 2 \log_2 k$. Ha $k \geq 1$, akkor azt kell belátnunk, hogy $k - 2 \log_2 k \leq n - 2 \log_2 n$, hiszen ha ez igaz, akkor $m \leq 2n - 2 \log_2 n$. Mivel $k \leq n$, ezért azt kell belátnunk, hogy $x - 2 \log_2 x$ egy monoton növekvő függvény, ha $x \geq 7$. Ha ezt lederiváljuk az $1 - \frac{2}{x \ln(2)}$ -t kapunk, ami valóban pozitív lesz $x \geq 7$ esetén, tehát ekkor szigorúan monoton nő. Ezzel azt az esetet láttuk be, ha $k \geq 7$, ha $k \leq 6$, akkor a bizonyítás a) részéhez hasonlóan a konkrét értékeket kiszámolva megkapjuk, hogy ez minden esetben valóban

kevesebb lesz, mint $7 - 2 \log_2 7$. Amennyiben pedig $k = 0$, (azaz nincs páros elemszámú részhalmaz) akkor egy páratlanváros feladatot kell megoldanunk, tehát $m \leq n$, ami igaz lesz, ha $m \leq 2n - 2 \log_2 n$ is teljesül, mivel itt $n \geq 7$. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

4. Fordított városok és 3 halmaz metszete

Ebben a fejezetben először belátjuk a Fordított Páratlanváros, valamint a Fordított Párosváros tételeket, melyekben a metszetekre, és halmaz paritására vonatkozó feltételeket felcseréljük. A fejezet második része Griffin Johnston és Jason O'Neill "A few new odd-town and eventown problems" [3] cikkének egy részét dolgozza fel, melyben a halmaz számosságának és két különböző halmaz metszetének paritása mellett 3 különböző halmaz metszetének paritását is vizsgálja, és az ezekből képzett 8 különböző esetre ad eredményt.

4.1. Fordított Páratlanváros

4.1.1. Tétel. *[Fordított Páratlanváros] Legyen $|X| = n$, és $A_1, \dots, A_m$ olyan különböző részhalmazok X -ben, amelyekre mindegyik $|A_j|$ páros és $|A_i \cap A_j|$ páratlan, ha $i \neq j$. Ekkor $m \leq n$, ha n páratlan, $m \leq n - 1$, ha n páros, és a becslések élesek.*

Bizonyítás:

a) Először lássuk be, hogy a maximumok elérhetőek

Ehhez két esetet kell vizsgálnunk. Amennyiben n páratlan, akkor az eredeti Páratlanváros tételhez hasonlóan járunk el: Vegyük az összes $n - 1$ elemű részhalmazt, itt bármely kettő metszete $n - 2$ közös elemet tartalmaz. Mivel n páratlan volt, ezért a feltételek teljesülnek, és $n - 1$ elemű részhalmazokból nyilván n darab létezik. Amennyiben n páros: Válasszunk ki egy tetszőleges elemet, ezt rakjuk be az összes halmazba, és mellé minden halmazba tegyünk még egy másik elemet. Így minden halmaz elemszáma 2, a metszetek elemszáma bármely két különböző részhalmaz esetén 1 lesz, azaz valóban $n - 1$ darab halmazt tudunk legfeljebb létrehozni.

b) Páratlan n esetén a maximum

Vezessük be az alábbi jelölést: Legyen B_i halmaz az A_i halmaz komplementere, azaz az összes azon elem, mely nem szerepel A_i -ben. Mivel $|A_i|$ páros, és $|B_i| = n - |A_i|$ ahol n páratlan, ezért $|B_i|$ páratlan lesz.

Most vizsgáljuk $|B_i \cap B_j|$ -t.

$$|B_i \cap B_j| = |(X \setminus A_i) \cap (X \setminus A_j)| = |X \setminus (A_i \cup A_j)|$$

$$= |\mathbf{X}| - |\mathbf{A}_i| - |\mathbf{A}_j| + |\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$$

Tudjuk, hogy $|\mathbf{X}| = n$, ami páratlan, $|\mathbf{A}_i|$, $|\mathbf{A}_j|$ párosak, $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ pedig páratlan lesz a feltételek miatt. Ezen adatok alapján $|\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j|$ páros lesz.

Nézzük, mire jöttünk rá eddig:

1. $|\mathbf{B}_i|$ páratlan $\forall i$ -re.
2. $|\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j|$ páros $\forall i \neq j$ -re.

Vegyük észre, hogy ezen feltételek már szerepeltek korábban, az eredeti Páratlanváros feladatban pont ezen feltételek alapján kellett maximalizálnunk a halmazok számosságát. Ott beláttuk, hogy maximum n ilyen halmaz adható meg, azaz jelen esetben legfeljebb n darab $\mathbf{B}_i$ halmaz létezik. De mivel $\mathbf{B}_i$ épp az $\mathbf{A}_i$ halmaz komplementere, ezért nyilván $\mathbf{A}_i$ -ből is legfeljebb n darab választható ki.

c) Páros n esetén a maximum

Itt sajnos az előző módszer nem működik, más megoldást kell keresnünk. Lássuk be, hogy nem tudunk n darab halmazt megadni, azaz a maximum valóban $n - 1$ lesz.

Indirekten tegyük fel, hogy létezik n darab ilyen halmaz. Ekkor legyen A az

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

incidenciamátrix $\mathbb{F}_2^{n \times n}$ -ben, ahol $\mathbf{a}_i$ -k a karakterisztikus vektorok.

Vizsgáljuk az $M = A \cdot A^T$ metszetmátrixot. Itt m_{ij} az i . valamint a j . halmaz közös elemeinek számát adja meg mod 2. Könnyen látható, hogy M főátlójában csupa 0 szerepel, és minden más mezőben 1-es, hiszen a halmazok páros elemszámúak de a metszetek páratlanok.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nézzük meg, mi lehet az M mátrix determinánása, próbáljuk meg belátni, hogy ez nem lehet 0. Először is adjuk hozzá az összes sort az elsőhöz. Ekkor a determináns változatlan marad, az első sorba csupa $n - 1$ kerülne, de mivel a számolásaink $\mathbb{F}_2$ felett történnek, és n -ről tudjuk hogy páros, ezért itt $n - 1$ páratlan, azaz az első sor csupa 1-es lesz.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Itt T egy felsőháromszög mátrix, tehát a determinánása 1.

Tudjuk, hogy $\det(M) = \det(T) = 1 \neq 0$.

Most nézzük meg az eredeti A mátrix determinánsát. Ha itt hozzáadjuk az összes sort az elsőhöz, akkor a determináns nem változik, és ekkor az első sor i . mezőjében éppen az A_i halmaz számossága szerepelne mod 2 (hiszen $\mathbb{F}_2^n$ felett nézzük). Viszont mivel minden halmaz páros elemszámú, ezért az első sor csupa 0 lesz, azaz $\det(A)=0$

Viszont ez a determinánsok szorzástétele alapján:

$$1 = \det(M) = \det(A) \cdot \det(A^T) = 0 \cdot 0$$

Így ellentmondásra jutottunk, nem létezik n darab ilyen halmaz. □

A bizonyításunk során ismét előkerült egy lineáris algebrában igen gyakran használt módszer: A determinánsok szorzástétele egyike a legismertebb lineáris algebrai eszközöknek, és igen gyakran lehet segítségünkre, erre ez a bizonyítás egy kiváló példa volt.

4.2. Fordított Párosváros

4.2.1. Tétel. [Homomorfizmustétel] Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizmus, akkor $\text{Im}(\varphi) \cong G/\text{Ker}(\varphi)$.

Ezt a tételt most nem bizonyítjuk, viszont fontos szerepet fog játszani a következő tételünk bizonyítása során.

4.2.2. Tétel. [Fordított Párosváros] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ olyan különböző

részhalmozok $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j|$ páratlan és $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ páratlan, ha $i \neq j$. Ekkor amennyiben n páros, $m \leq 2^{\frac{n-2}{2}}$, páratlan n esetén pedig $m \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Bizonyítás: a) Először lássuk be, hogy ezek a becslések valóban élesek: Állítsuk párba az elemeket, páros n esetén vegyünk $\frac{n-2}{2}$ darab párt, páratlan n esetén pedig $\frac{n-1}{2}$ darabot. Képezzük az ezekből a párokból képezhető összes lehetséges halmazt, és mindegyikhez vegyük hozzá azt az elemet, amely egyik párban sincs benne (páros n esetén nyilván 2 ilyen is lesz, tetszőlegesen válasszuk ki az egyiket). Az így képzett halmazok mindegyike páratlan elemszámú lesz, hiszen csupa párok alkotják, valamint egy extra elem. A metszeteik szintén páratlanok, mivel bármely 2 pár metszete egymással páros lesz, valamint az egy extra elem mindegyik metszetben szerepelni fog. Emellett $\frac{n-2}{2}$ illetve $\frac{n-1}{2}$ elemből képezhető lehetséges halmazok maximális száma éppen $2^{\frac{n-2}{2}}$ valamint $2^{\frac{n-1}{2}}$ lesz, azaz minden feltétel teljesül.

b) Lássuk be, hogy ezek valóban felső becslések lesznek. A szokásos módon tekintsük az $\mathbf{A}_i$ halmazokhoz tartozó $\mathbf{a}_i$ karakterisztikus vektorokat, ezen $\mathbf{a}_i$ vektorok halmazát jelöljük A -val (nyilván $A \subseteq \mathbb{F}_2^n$). Jelöljük W -vel az A -beli vektorok által generált altér. Tekintsük a következő leképezést $\varphi : W \rightarrow \mathbb{F}_2$, ahol $w \mapsto w \cdot w$. Könnyen látható, hogy $\varphi : W \rightarrow \mathbb{F}_2$ egy szürjektív homomorfizmus lesz, emiatt a homomorfizmustétel következményeként $\text{Im}(\varphi) \cong W/\text{Ker}(\varphi)$. De $\text{Im}(\varphi)$ jelen esetben a kételemű test, tehát $|\text{Ker}(\varphi)| = \frac{1}{2}|W|$. Mivel jelen esetben $\text{Ker}(\varphi)$ -ben csak olyan vektorok szerepelnek, amelyekben páros darabszámú 1-es van (hiszen az önmagával vett skaláris szorzata 0 $\mathbb{F}_2$ felett), az A karakterisztikus vektorok halmazában pedig csupa olyanok, amelyekben páratlan sok van, ezért $\text{Ker}\varphi \cap A = \emptyset$. Magyarán A elemei csak a $W \setminus \text{Ker}\varphi$ elemei között szerepelnek, és mivel $W \setminus \text{Ker}\varphi = \frac{1}{2}|W|$ ezért $|A| \leq \frac{1}{2}|W|$.

Tekintsük az A -nak egy maximális olyan részhalmozát, amelyben szereplő $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek.

Most tekintsük a $B = \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_k\}$ halmazt. Azt szeretnénk belátni, hogy ez a B halmaz egy lineárisan független részhalmozza $W^\perp$ -nek. Az könnyen belátható hogy B ténylegesen részhalmozza $W^\perp$ -nek: B bármely elemét egy tetszőleges $\mathbf{a} \in A$ elemmel beszorozva $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_i) = 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$, és mivel W az A -beli vektorok által generált altér, ezért $w \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_i) \equiv 0 \pmod{2}$ $w \in W$, tehát $B \subseteq W^\perp$.

A lineáris függetlenség belátásához tekintsük a $\sum_{i=2}^k \lambda_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_i) = 0$ lineáris kom-

binációt. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_i$ tagokat kibontva:

$$0 = \sum_{i=2}^k \lambda_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_i) = \left(\sum_{i=2}^k \lambda_i \right) \mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_i \mathbf{a}_i$$

De mivel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan független elemei A -nak, ezért lineárisan független elemei W -nek is, ennek következményében $\lambda_i = 0 \quad \forall i$ -re, magyarul az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_i$ vektorok tényleg lineárisan függetlenek lesznek. Tehát $B \subseteq W^\perp$ lineárisan független, és ennek fontos következményeként $\dim(W^\perp) \geq k-1$. Emellett tudjuk hogy $\dim(W) = k$, és $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$, ennek következményében

$$n = \dim(W) + \dim(W^\perp) \geq 2k - 1$$

azaz

$$\dim(W) = k \leq \frac{n+1}{2}$$

Amennyiben n páros, k nyilván legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet. Magyarán amennyiben n páratlan W -nek legfeljebb $2^{\frac{n+1}{2}}$ eleme lehet, és ha n páros, akkor legfeljebb $2^{\frac{n}{2}}$. Viszont korábban beláttuk, hogy $|A| \leq \frac{1}{2}|W|$, ezért a páratlan esetben $|A| \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$, a páros esetben pedig $|A| \leq 2^{\frac{n-2}{2}}$ amivel beláttuk az állítást. $\square$

Ezen bizonyításunk során többféle lineáris algebrai eszköz is előkerült, a korábbiakhoz képest a legnagyobb újdonságot a homomorfizmustétel alkalmazása jelenthette. A következőekben áttérünk egy olyan témakörre, ahol a Páratlanváros-Párosváros tételeknek, valamint ezek fordított verzióinak vesszük egy még szigorúbb változatát, az eddigi bizonyításainkra erősen támaszkodni fogunk.

4.3. Három különböző halmaz metszete

Eddigi problémáink során a halmazok elemszámára, valamint bármely két halmaz metszetére voltak feltételeink. Adódhat a kérdés, mi történik akkor, ha nem csak két halmaz metszetét vizsgáljuk, hanem több halmaznak egymással vett metszetére is van valamilyen megszorításunk. Ehhez vezessük be az alábbi jelölést: Legyen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{F}_2^k$, ahol α_i azt jelöli, hogy $\forall i$ darab különböző halmaz egymással vett metszete α_i elemszámú lesz (mod 2), és az ezekből képezhető maximális számosságú halmazrendszer méretét jelöljük $f_\alpha(n)$ -nel. Ezt a jelölést használva az eredeti Páratlanváros

feltételek $\alpha = (1, 0)$, esetén teljesülnek, az eredeti Párosváros pedig $\alpha = (0, 0)$ esetén. A fordított Páratlanváros valamint Párosvárosok szintén felírhatóak ezzel a jelöléssel, előbbi $\alpha = (0, 1)$, utóbbi $\alpha = (1, 1)$ esetén. A következő részben a cél az összes $\alpha \in \mathbb{F}_2^3$ eset vizsgálata lesz. Ez összesen 8 eset, ahol alapvetően az alábbi feladatokat kell megoldanunk: Adva van a fentebb említett 4 probléma, és ezek mellé hozzáadjuk azt a feltételt, hogy bármely 3 különböző halmaz metszete vagy páros, vagy páratlan lesz, ehhez keressük a maximális számosságú halmazrendszereket. Nyilván ha csak az első két indexét néznénk α -nak, akkor már azt a feladatot megoldottuk korábban, és az arra vonatkozó felső becslésnél biztosan nem lehet nagyobb az egy új feltétel bevezetésével kapott feladat eredménye.

Az így kapott eredményeink a következők lesznek:

Esetszám	α	$f_\alpha(n)$
1.	(1,0,0)	n
2.	(0,0,0)	$2^{\lfloor n/2 \rfloor}$
3.	(1,1,1)	$2^{\frac{n-2}{2}}$, ha n páros; $2^{\frac{n-1}{2}}$, ha n páratlan
4.	(0,1,0)	n , ha n páratlan; $n - 1$, ha n páros
5.	(0,1,1)	$n - 1$
6.	(1,0,1)	$n - 1$, ha n páratlan; n , ha n páros
7.	(1,1,0)	$\frac{n}{2}$, ha $n = 4k$; $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ha $n = 4k + 1$; $\frac{n}{2} + 1$, ha $n = 4k + 2$; $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, ha $n = 4k + 3$
8.	(0,0,1)	$\frac{n}{2}$, ha $n = 4k$; $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ha $n = 4k + 1$; $\frac{n}{2} - 1$, ha $n = 4k + 2$; $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, ha $n = 4k + 3$

Mielőtt a konkrét eseteket néznénk, először bizonyítsuk be az alábbi lemmát:

4.3.1. Lemma (Trace lemma). *Legyen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{F}_2^k$ és $\beta = (\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{t+r}) \in \mathbb{F}_2^r$, ahol $t + r \leq k$, $f_\alpha(n) > k$, és $\alpha_{t+1} \neq \alpha_{t+2}$. Ekkor*

$$f_\alpha(n) \leq f_\beta(n) + t.$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, amely teljesíti az α -metsző feltételeket mod 2, és a mérete $f_\alpha(n)$. Legyenek $F_1, \dots, F_t$ különböző halmazok $\mathcal{F}$ -ben, és $T = F_1 \cap \dots \cap F_t$. Tekintsük azt a halmazrendszert, amelyet úgy képzünk, hogy a maradék $\mathcal{F}$ -beli halmazoknak vesszük külön-külön a metszetüket T -vel. Formálisan leírva: $\mathcal{F}_T = \{F \cap T : F \in \mathcal{F} \setminus \{F_1, \dots, F_t\}\}$ Ekkor ez az $\mathcal{F}_T$ egy β -metsző halmazrendszer. Vegyük észre, hogy ha $A, B \in \mathcal{F} \setminus \{F_1, \dots, F_t\}$, és $A \neq B$, valamint $A \cap T = B \cap T$

teljesül, akkor $A \cap B \cap T = (A \cap T) \cap (B \cap T) = A \cap T$. Ez viszont nem lehetséges az $\alpha_{t+1} \neq \alpha_{t+2}$ feltétel miatt. Tehát nem létezik olyan különböző A, B ahol $A \cap T = B \cap T$ teljesülne, magyarul az így létrejövő $\mathcal{F}_T$ -beli halmazok mind különbözőek. Ebből viszont az következik, hogy $|\mathcal{F}_T| = |\mathcal{F}| - t$. Ebből, valamint a tényből hogy $t + r \leq k$ következik, hogy $f_\alpha(n) \leq f_\beta(n) + t$, amivel beláttuk az állítást. $\square$

Megjegyzés: Itt valójában egy erősebb becslést kaphatunk: $f_\beta(n)$ helyett írhatnánk $f_\beta(r)$ -et is, ahol r a T elemszáma, hiszen a $\mathcal{F}_T$ halmazrendszer T -nek a részhalmazzaiból áll. A későbbiekben erre vagy más, hasonló gondolatmenetre fogunk hivatkozni. Most térjünk át a konkrét esetekre:

1. eset: $\alpha = (1, 0, 0)$ probléma

Ez nyilván teljesíti az $\alpha = (1, 0)$ problémát, azaz az eredeti Páratlanvárost, ahol maximum n darab halmazt tudtunk létrehozni. Ott a csupa egyelemű egymástól különböző halmazok jó konstrukciót alkottak. Ez itt is megfelelő lesz, hiszen bármely 3 metszete továbbra is 0 marad. Emiatt a maximum itt is n .

2. eset: $\alpha = (0, 0, 0)$ probléma

Itt most az $\alpha = (0, 0)$ probléma teljesül, ami az eredeti Párosváros feladat. Ott a maximum $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ volt, amelyet az elemek párbaállításával értünk el. Könnyen látható, hogy ez a "párbaállítós" konstrukció itt is megfelelő, hiszen bármely 3 halmaz metszetei szintén párok lesznek, aminek következtében a feltételek teljesülnek, a maximum itt is $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

3. eset: $\alpha = (1, 1, 1)$ probléma

Az $\alpha = (1, 1)$ probléma itt is igaz, ami nekünk a fordított Párosváros volt. Ott páros n esetén $2^{\frac{n-2}{2}}$ volt a maximum, páratlan esetben pedig $2^{\frac{n-1}{2}}$. Az abban a feladatban szereplő konstrukció, miszerint kiválasztunk egy elemet és a többit párbaállítjuk egymással és ezekből képezzük az összes lehetséges halmazt, itt is megfelelő lesz, hiszen bármely 3 különböző halmaz metszete csupa párokból + egy elemből fog állni. Így a maximum itt is páros n esetén $2^{\frac{n-2}{2}}$, páratlan n esetén $2^{\frac{n-1}{2}}$.

4. eset: $\alpha = (0, 1, 0)$ probléma

Itt az $\alpha = (0, 1)$ probléma teljesül, ami a fordított Páratlanváros feladat. Ott páratlan n esetén a halmazok maximális száma n volt, páros n esetén pedig $n - 1$. Páratlan n esetén az ott használt konstrukció itt is jól működik: Vegyük az összes $n - 1$ elemű részhalmazt, ott bármely két különböző halmaz metszete $n - 2$ elemű, bármely 3

különböző metszete pedig $n - 3$ elemű lesz, ezek éppen teljesítik a feltételeket. Páros n esetén az ott használt konstrukció viszont már nem felel meg, szerencsére azonban így is létezik jó megoldás: Tekintsünk egy tetszőleges $n - 1$ elemű részhalmazt, és ennek vegyük az összes $n - 2$ elemű lehetséges részhalmazát. Ezekből nyilván $n - 1$ darab van, bármely két különböző metszete $n - 3$ elemű, valamint bármely 3 különböző metszete $n - 4$ elemű lesz. és mivel n páros ezért a feltételek teljesülnek.

5. eset: $\alpha = (0, 1, 1)$ probléma

Az első eset, amikor változik az eredmény az eredetihez képest! Míg a fordított Páratlanvárosnál páratlan n -re n volt a maximum, és páros n -re $n - 1$, itt most minden esetben $n - 1$ lesz. Ehhez egy jó konstrukció, ha vesszük az összes kételemű halmazt, úgy hogy az első elemét rögzítjük. Ekkor nyilván bármely 2, valamint bármely 3 halmaz metszete 1 lesz, és $n - 1$ darab lesz belőlük.

Annak belátása hogy nem lehet több ennél: Legyen $\mathcal{F}$ egy ilyen halmazrendszer, ami teljesíti a feltételeket, és legyen F_0 egy tetszőleges halmaz $\mathcal{F}$ -ben, a komplementerét jelöljük F_0^c -vel. Tekintsük ekkor azt az $\mathcal{A}$ halmazrendszert, aminek a halmazai az összes $\mathcal{F}$ -beli halmaz (kivéve F_0) metszete F_0^c -vel. Formálisan: $\mathcal{A} = \{F \cap F_0^c : F \in \mathcal{F} \setminus \{F_0\}\}$ Vegyük észre, hogy ez az $\mathcal{A}$ halmazrendszer épp teljesíti a Páratlanváros feltételeit, mivel

$$|F \cap F_0^c| = |F| - |F \cap F_0| = \text{páros} - \text{páratlan} = \text{páratlan}$$

$$|(F \cap F_0^c) \cap (F' \cap F_0^c)| = |F_0^c \cap F \cap F'| = |F \cap F'| - |F \cap F' \cap F_0| = \text{páratlan} - \text{páratlan} = \text{páros}$$

Viszont amellet, hogy teljesíti a Páratlanváros feltételeit, egyik halmaza sem tartalmaz F_0 -beli elemet, azaz legfeljebb annyi halmazt tartalmazhat, ahány eleme van $|F_0^c|$ -nek. Tehát $|\mathcal{A}| \leq |F_0^c|$. Emellett tudjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem tartalmaz egyelemű halmazokat (hiszen páros elemszámúaknak kell lenniük), ezért $|\mathcal{F}| - 1 = |\mathcal{A}| \leq |F_0^c| \leq n - 2$, azaz $|\mathcal{F}| \leq n - 1$ amivel beláttuk az állítást.

6. eset: $\alpha = (1, 0, 1)$ probléma

Itt is változik az eredmény az eredeti Páratlanváros tételhez kapcsolódóan, míg ott minden esetben legfeljebb n darab halmaz volt képezhető, itt most ez páratlan n -ek esetén lecsökken $n - 1$ -re, párosak esetén továbbra is n marad. Páros n esetén jó konstrukció, ha vesszük az összes lehetséges $n - 1$ elemű halmazt, ezekből n darab van, és ekkor ugye bármely 2 metszete $n - 2$ elemszámú, bármely 3 metszete pedig

$n - 3$ elemszámú, azaz a feltételek teljesülnek. Páratlan n esetén hasonlóan járunk el, ekkor kiválasztunk $n - 1$ elemet, és ezeknek vesszük az összes lehetséges $n - 2$ elemű részhalmazait, könnyen látható, hogy ekkor valóban $n - 1$ darab halmazunk lesz és a feltételek is igazak maradnak. Most lássuk be, hogy páratlan n esetén valóban ez a maximum: Itt is tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ halmazrendszer teljesíti a feltételeket. Mivel itt most n páratlan, ezért $\mathcal{F}$ -nek nem lehetnek $n - 1$ elemű halmazai, (nyilván n eleműek sem, hiszen ekkor az egész halmazrendszernek csak 1 eleme lehetne) ezért minden $\mathcal{F}$ -beli halmaz legfeljebb $n - 2$ elemszámú. Tekintsük az alábbi halmazrendszert: vegyünk egy $m \leq n - 2$ elemszámú halmazt, és ennek vegyük metszetét az összes többi $\mathcal{F}$ -beli halmazzal. Vegyük észre hogy a Trace lemmát alkalmazva (ezt megtehetjük mivel az $\alpha = (1, 0, 1)$ teljesíti a lemma feltételeit) ez egy β -metsző halmazrendszer lenne, ahol $\beta = (0, 1)$, azaz a Fordított Páratlanváros. A Trace lemmából tudjuk, hogy $f_\alpha(n) \leq f_\beta(n) + t$, és erősebb esetben $f_\alpha(n) \leq f_\beta(m) + t$, ahol jelen esetben $m \leq n - 2$, és $t = 1$. A Fordított Páratlanváros esetben legfeljebb annyi halmazunk lehet amennyi eleme van az alaphalmaznak. Ez jelenleg $f_\beta(m) \leq m \leq n - 2$, azaz visszahelyettesítve az egyenlőtlenségbe $f_\alpha(n) \leq n - 2 + 1 = n - 1$ -et kapunk, ami az eredeti állítás.

7. eset: $\alpha = (1, 1, 0)$ probléma

Itt már jelentős változás van az eredményben a fordított Párosváros tételhez képest. A maximumok különböző értékeket vesznek fel attól függően, hogy 4-gyel osztva mennyi maradékot adnak: Ha $n = 4k$ alakú, akkor $\frac{n}{2}$, $n = 4k + 1$ esetén $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $n = 4k + 2$ esetben $\frac{n}{2} + 1$, $n = 4k + 3$ -nál pedig $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. A konstrukcióinkat is 4 esetre bontjuk, n 4-gyel való osztási maradéka alapján. Először $n = 4k + 2$ -re látjuk be, és ezt utána általánosítjuk a másik 3 esetre. Osszuk 2 részre a halmazainkat, az első részbe kerüljenek az indexek 1-től $2k + 1$ -ig, a másodikba $2k + 2$ -től $4k + 2$ -ig. Ekkor ugye az első rész minden eleme megfeleltethető a második rész egy elemének (pl. ha az indexeik különbsége éppen $2k + 1$.) Az első kiválasztott halmazunk álljon a második rész összes eleméből. A többi halmazunkat pedig készítsük el úgy, hogy vesszük az első részből az összes elemet kivéve egyet, és ehhez még hozzávesszük a kimaradt elemnek második részbeli párját. Ekkor minden halmaz $2k + 1$ elemű, ez a feltétel teljesül. A metszetek vagy 1 eleműek (ha az első halmaznak vesszük a metszetét egy tetszőlegessel), vagy $2k - 1$ eleműek (minden más esetben), ez a feltétel is jó lesz. Ha 3 halmaz metszetét nézzük: amennyiben tartalmazzák az első halmazt, akkor a metszetük 0 lesz, amennyiben nem,

akkor a metszetük $n - 2$, így minden feltétel teljesül. Ha n nem $4k + 2$ alakú, akkor pedig ugyanezt a konstrukciót alkalmazzuk, csak még lesz néhány elem az alaphalmazban, amelyek nem elemei a halmazrendszer egyik halazának sem. Speciálisan: $n = 4k$ esetben az elemeket 2 darab $2k - 1$ -es részre osztjuk, 2 elem kimarad. $n = 4k + 1$ esetben ugyanez, csak 3 marad ki, $n = 4k + 3$ esetben pedig az eredeti módon az elemeket 2 darab $2k + 1$ -es részre osztjuk, és itt még 1 darab kimaradó elemünk lesz. Könnyen kiszámolható, hogy az így kapott halmazoknak a számosságai valóban megegyeznek a fent leírt eredményekkel. Most lássuk be, hogy valóban legfeljebb ennyi képezhető. Ehhez először lássuk be az alábbi 2 lemmát.

4.3.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, amely kielégíti az $(1, 1, 0)$ -feltételeket modulo 2, és tekintsünk egy tetszőleges $F_i \in \mathcal{F}$ elemet. Ekkor $|\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i|$.*

Bizonyítás: Tekintsük azt a halmazrendszert, ami az F_i halmaznak a többi $\mathcal{F}$ -beli halmazzal vett metszetei alkotnak: $\mathcal{F}_i = \{F_j \cap F_i : j \neq i\}$. Vegyük észre, hogy ezeknek a halmazoknak teljesíteniük kell az $(1, 0)$ feltételeket, ami ugye az eredeti Páratlanváros volt, tehát legfeljebb $|F_i|$ darabszámú eleme lehet a halmazrendszernek, amiből következik a lemma állítása. Ennek gyakorlati következménye hogy a halmazrendszerünk nem állhat "túl kicsi" halmazokból. $\square$

4.3.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, amely kielégíti az $(1, 1, 0)$ -feltételeket modulo 2, és tekintsünk egy tetszőleges $F_i \in \mathcal{F}$ elemet. Ekkor $|\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i^c|$.*

Bizonyítás: Hasonlóan járunk el, mint az előző lemma bizonyítása során. Vegyük azt a halmazrendszert, amit az F_i^c halmaznak a többi $\mathcal{F}$ -beli halmazzal vett metszetei alkotnak: $\mathcal{F}_i = \{F_j \cap F_i^c : j \neq i\}$. Most azt próbáljuk meg belátni, hogy ezen halmazok az $(1, 0)$, azaz a fordított Páratlanváros feltételeket teljesítik. Először vegyük észre, hogy $|F_j \cap F_i^c|$ valóban páros, hiszen $|F_j \cap F_i^c| = |F_j| - |F_j \cap F_i|$, ami 2 páratlan szám különbsége. Emellett az is észrevehető, hogy

$$|F_j \cap F_i^c \cap F_k \cap F_i^c| = |F_j \cap F_k \cap F_i^c| = |F_j \cap F_k| - |F_j \cap F_k \cap F_i|$$

ahol egy páratlan számból egy párosat vonunk ki, tehát ez valóban páratlan lesz, azaz $\mathcal{F}_i$ -re teljesülnek a fordított Páratlanváros feltételek, ebből pedig következik a lemma

állítás. Itt pont az ellenkező esetet néztük az előző lemmához képest: A halmazrendszerünk nem lehetnek "túl nagy" halmazokból álló. $\square$

Most adjuk össze a két lemma eredményét:

$$(|\mathcal{F}| - 1) + (|\mathcal{F}| - 1) \leq |F_i| + |F_i^c| = n$$

aminek következményeként

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{n}{2} + 1$$

Fontos, hogy ezzel csak azt az esetet láttuk be, amikor $n = 4k + 2$, a többi esetben még javítanunk kell az eredményen. $n = 4k + 3$ esetben vegyük észre, hogy F_i -nek és F_i^C minimumának a mérete legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ lehet, és így az előző két lemmát felhasználva megkapjuk, hogy $|\mathcal{F}| - 1 \leq \frac{n-1}{2}$ ami megegyezik az eredeti állítással. $n = 4k$ esetben F_i és F_i^C is páratlan elemszámú, de $\frac{n}{2}$ páros lesz, azaz $|F_i|$ és $|F_i^C|$ minimumának értéke legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$, aminek következtében $|\mathcal{F}| - 1 \leq \frac{n}{2} - 1$, amivel a kívánt eredményt kapjuk. Végül $n = 4k + 1$ esetén $|F_i^C|$ páros lesz minden i -re, ezért a 4.3.4. Lemma eredménye is változik, $|\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i^c|$ helyett $|\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i^c| - 1$ is igaz lesz. Ebből következik, hogy ha van egy halmazunk, amelyre $|F_i| \geq 2k + 1$, akkor $|\mathcal{F}| - 1 \leq 2k - 1$. Emellett ha létezik olyan halmazunk, ahol $|F_i| \leq 2k - 1$, akkor $|\mathcal{F}| - 1 \leq 2k - 1$. Még egy további opció lenne lehetséges ami az előző két feltételt nem teljesíti, ha minden halmaz $n = 2k$ elemszámú lenne, de ez nem lehetséges mivel itt a halmazink páratlan elemszámúak, ezzel beláttuk az állítást.

8. eset: $\alpha = (0, 0, 1)$ probléma

Itt is a modulo 4 osztási maradékok alapján írjuk fel a maximumokat. $n = 4k$ esetén legfeljebb $\frac{n}{2}$, $n = 4k + 1$ esetén $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $n = 4k + 2$ esetén $\frac{n}{2} - 1$, $n = 4k + 3$ esetben pedig $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ a maximum. A konstrukciónk nagyon hasonló az előző feladatban látotthoz. Itt most tekintsük először a $4k + 3$ esetet, majd ezt általánosítsuk. Osszuk fel ismét az elemeket 2 részre, az elsőbe kerüljön az első $2k + 1$ elem, a másodikba a maradék $2k + 2$ elem. Ekkor az első rész összes eleme megfeleltethető a második rész egy elemének, és a második rész utolsó eleme nem lesz semelyik első részbeli elemmel megfeleltetve. Nézzük a konkrét halmazrendszerünket: az első halmazunkat alkossa a második rész összes eleme ($2k+2$ elemű). A többi halmazunk pedig úgy készül, hogy az első rész összes elemét vesszük, és egy elemet belőle kicserélünk a második részbéli párjára, va-

lamint hozzávesszük a második részbeli utolsó elemet (amelynek nincs párja). Ekkor minden halmaz $2k + 2$ elemszámú lesz, szóval az első feltétel teljesül. Az első halmazunk páronkénti metszetei a többi halmazzal mind 2 eleműek, ha pedig vesszük bármely 2 másik halmaz egymással vett metszetét, az $2k - 1 + 1 = 2k$ elemű lesz, szóval a metszetekre vonatkozó feltétel is igaz. Végül, ha bármely 3 halmaz metszetét vizsgáljuk: Amennyiben ezek között szerepel az első, akkor a közös elem mindössze a legutolsó lesz, tehát a metszet elemszáma 1. A többi esetben az utolsó elem mellett $2k + 1 - 3$ közös elem is lesz, szóval a metszet $2k - 1$ elemű lesz, ezért itt is teljesül a páratlanságra vonatkozó feltétel. Ha $n = 4k$, $4k + 1$, vagy $4k + 2$ alakú, akkor ugyanezt a konstrukciót alkalmazzuk, csak $4k + 3$ helyett $4k - 1$ elemre, és a maradék 1, 2, vagy 3 elemet kihagyjuk, egyik halmazba se kerülnek bele. Könnyen látható, hogy ekkor valóban a fent említett eredményeket kapjuk. Mielőtt belátnánk, hogy legfeljebb ennyi lehetséges, lássuk be az alábbi lemmát:

4.3.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, amely kielégíti a $(0, 0, 1)$ -feltételeket modulo 2, és tekintsünk egy tetszőleges $F_i \in \mathcal{F}$ elemet. Ekkor*

$$(1) \quad |\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i| - 1,$$

$$(2) \quad |\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i^c| \quad (\text{ha } n \text{ páratlan}),$$

$$(3) \quad |\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i^c| - 1 \quad (\text{ha } n \text{ páros}).$$

A lemma három állításának bizonyítása lényegében megegyezik az előző részben ismerttetett lemmák bizonyításaival. Ismét tekintsük az $\mathcal{F}_i = \{F_j \cap F_i : j \neq i\}$ halmazrendszert, ezek most a $(0, 1)$ azaz a Fordított Páratlanváros feltételeket teljesítik, ennek köszönhetően $|\mathcal{F}| - 1 \leq |F_i| - 1$. Ugyanezzel a módszerrel belátható $|F_i^c|$ -re is, csak ekkor külön kell még vizsgálnunk a páros és páratlan eseteket.

Most térjünk át az eredeti állításunk bizonyítására: Ehhez ha $n = 4k$, $n = 4k + 1$, vagy $n = 4k + 2$ alakú, akkor tudjuk hogy $|F_i|$ valamint $|F_i^c|$ minimuma legfeljebb $2k$ lehet, ($n = 4k + 2$ esetben azért nem $2k + 1$, mert párosnak kell lennie) amiből következik, hogy $|\mathcal{F}| - 1 \leq 2k - 1$, ami épp ekvivalens a fenti állításainkkal. $n = 4k + 3$ esetben pedig az $|F_i| \leq 2k$, valamint az $|F_i^c| \leq 2k + 1$ állítások egyike biztosan teljesül. Ekkor a lemma második állításából következik, hogy $|\mathcal{F}| - 1 \leq 2k + 1$, azaz $|\mathcal{F}| \leq 2k + 2$, ami

megegyezik az eredeti állításunkkal.

5. Gráfos megközelítés

Ezen fejezetben Van H. Vu Extremal set systems with weakly restricted intersections [4] cikkének egy tételét bizonyítjuk. A tétel során amellettt hogy érdekes lineáris algebrai eszközöket használunk, egy eddigiektől különböző megközelítés is előkerül: a halmazrendszereket gráfokként ábrázoljuk.

5.1. Vu tétele

5.1.1. Tétel. [Caro, Wei] [Legyen G egy n csúcsú gráf, amelynek fokszámainak jelöljük $d_1, d_2, \dots, d_n$ -el. Jelöljük $\alpha(G)$ -vel a G gráf legnagyobb független csúcshalmazának számosságát, azaz azon maximális számosságú csúcshalmazét, ahol semelyik 2 csúcs nincs éllel összekötve. Ekkor:

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}$$

[5]

Ezt a tételt most nem bizonyítjuk, viszont fontos szerepet játszik a következő tételünk bizonyításában.

Emlékezzünk vissza az eredeti Páratlanváros tételünkre. A feltételek szerint ott mindegyik halmaz páratlan elemszámú, valamint bármely 2 halmaz metszete páros elemszámú volt. Adódhat a kérdés, mi történik, ha egy kicsit gyengítünk a feltételeken, jelen esetben a metszetekre vonatkozóan: engedjük meg, hogy bármely halmaznak legfeljebb s darab páratlan elemszámú metszete legyen más halmazokkal. Ehhez vezessük be az alábbi jelölést: Legyen m_s az így képezhető halmazok maximális száma.

5.1.2. Tétel. [Vu] Legyen $|\mathbf{X}| = n$, és $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ maximális számú olyan különböző részhalmaz $\mathbf{X}$ -ben, amelyekre mindegyik $|\mathbf{A}_j|$ páratlan, és $\forall i$ -re legfeljebb $s - 1$ darab $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j|$ lesz páratlan, ha $i \neq j$. Ekkor, amennyiben az alábbi két feltétel teljesül:

$$\lceil \log_2 s \rceil \leq \left(\frac{n}{4} \right) - 1 \tag{1}$$

$$\text{Ha } \{\log_2 s\} \neq 0, \text{ akkor } \{\log_2 s\} \geq \log_2 \left(1 + \frac{8}{n} \right) \tag{2}$$

akkor $m_{s-1} = m = s(n - 2 \lceil \log_2 s \rceil)$

Megjegyzés: Itt most $\{\log_2 s\}$ $\log_2 s$ törtrészét jelöli.

Bizonyítás: Jelöljük az $\mathbf{A}_i$ halmazokhoz tartozó karakterisztikus vektorokat $\mathbf{a}_i$ -vel a szokásos módon. Definiáljunk egy egyszerű G gráfot, ahol G -nek m csúcsa van, és az i és j csúcs között pontosan akkor megy él, ha $|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| \equiv 1 \pmod{2}$, azaz $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = 1$ (a számolások nyilván itt is $\mathbb{F}_2$ felett történnek). Jelen feladatunkban m_{s-1} -re akarunk belátni egy eredményt, ezért észrevehető, hogy a gráf fokszámai minden j csúcsra legfeljebb $s - 1$ -ek (hiszen a feltétel szerint pontosan akkor megy él i és j csúcs között, ha ezek metszete páratlan, és ilyenből $\forall i$ -re legfeljebb $s - 1$ darab létezik). Azaz $\forall i$ -re $d_i < s$. Tekintsünk egy legnagyobb (azaz maximális elemszámú) G -beli független ponthalmazt, ezt jelöljük D -vel ahol $|D| = \alpha$. Most alkalmazzuk a Caro, Wei tételt:

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i + 1}$$

Jelen esetben tudjuk, hogy $d_i + 1$ legfeljebb s lehet, ezért $\frac{1}{d_i + 1} \geq \frac{1}{s}$, tehát

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i + 1} \geq m \cdot \frac{1}{s} = \frac{m}{s}$$

Most vizsgáljuk D elemeit. Vezessük be $\forall i \in D$ -re a T_i halmazokat, amelyek i -t tartalmazzák, és az összes olyan G -beli elemet, amelynek egyetlen szomszédja szerepel D -ben, és ez az i (nyilván ekkor semelyik két T_i halmaznak sem lesz közös eleme). Jelöljük T -vel azt a ponthalmazt, ami azon pontokból áll, amelyek semelyik T_i -nek sem elemei. Most vizsgáljuk a D és a $V \setminus D$ (ahol V -vel a G csúcsainak halmazát jelöljük) komponensek közötti élek számát, ezt jelöljük e -vel. Egyrészt tudjuk hogy D elemei között nem futnak élek, tehát minden D -beli csúcsból csak $V \setminus D$ -be megy él, másrészt pedig $\forall i \in D$ -re $d_i \leq s - 1$, és $|D| = \alpha$, ezért

$$e \leq \alpha(s - 1)$$

Ha e -t alulról akarjuk becsülni, akkor először vegyük észre, hogy az összes $V \setminus D$ -beli pontból megy él D -be, hiszen ha valamelyik pontból nem menne, akkor ezt a pontot D -hez hozzávéve továbbra is független ponthalmazt kapnánk, ami azt jelentené, hogy D nem volt maximális. Ebből az is következik, hogy ha egy pont T -ben van, akkor azon pontból legalább 2 él megy D -be, (hiszen ha csak 1 menne, akkor az valamelyik

T_i -ben szerepelne, ezért

$$e \geq |T| + |V \setminus D| = |T| + (m - \alpha)$$

és emiatt

$$\alpha(s - 1) \geq |T| + (m - \alpha)$$

Legyen $r = \alpha - \frac{m}{s}$. Ekkor ha az egyenletet átrendezzük és α helyére $r + \frac{m}{s}$ -et behelyettesítjük:

$$\alpha(s - 1) + \alpha - m \geq |T|$$

$$\alpha \cdot (s - 1 + 1) - m \geq |T|$$

$$\left(r + \frac{m}{s}\right) \cdot s - m \geq |T|$$

$$r \cdot s \geq |T|$$

Most vizsgáljuk a T_i halmazokat. Jelöljük a legnagyobb elemszámút T_1 -gyel (ez nyilván bármelyik index lehetne, de most a bizonyítás szempontjából lényegtelen). Vegyük észre, hogy $\sum_{i \in D} |T_i| = m - |T|$ és mivel $r \cdot s \geq |T|$, valamint $|T_1| \geq |T_i|$, $\forall i$ -re ezért

$$|T_1| \geq \frac{m - rs}{\alpha}$$

Tekintsük a T_1 csúcsai által alkotott részgráfot, ezt jelöljük G_1 -gyel. Egyrészt tudjuk, hogy a gráf összes csúcsából indul el a D -beli 1-es csúcsba (kivéve nyilván önmagából) T_1 definíciója alapján. Másrészt viszont, ha veszünk két tetszőleges csúcsot G_1 -ben, amelyek között nem megy el, akkor ezekből definíció alapján egyetlen másik D -beli csúcsba sem vezet el, vagyis ha ezt a két csúcsot kicserélnénk a D -beli 1-es csúccsal, akkor továbbra is egy független ponthalmazt kapnánk, ami nagyobb D -nél. De mivel D maximális, ezért ez nem lehetséges. Következésképpen G_1 bármely két csúcsa között megy el, azaz G_1 egy teljes gráf lesz. Legyenek j, j', k, k' tetszőleges T_1 -beli elemek, az ezekhez tartozó karakterisztikus vektorok $a_j, a_{j'}, a_k, a_{k'}$. Ekkor

$$(a_j + a_{j'})(a_k + a_{k'}) = a_j a_k + a_j a_{k'} + a_{j'} a_k + a_{j'} a_{k'} = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$$

(a karakterisztikus vektorokkal való számolások továbbra is $\mathbb{F}_2$ felett történnek) Emiatt

az ezen $a_j + a_{j'}$ ($j, j' \in T_1$) vektorok által generált V_1 altérre igaz lesz, hogy $V_1 \subseteq V_1^\perp$. Emellett ha $i \in D \setminus \{1\}$, akkor

$$(a_j + a_{j'})a_1 = a_j a_1 + a_{j'} a_1 = 1 + 1 = 0$$

$$(a_j + a_{j'})a_i = a_j a_i + a_{j'} a_i = 0 + 0 = 0$$

Ennek következményeként a $D_1 = \{a_i \mid i \in D\}$ -re $D_1 \subset V_1^\perp$ is igaz lesz. Térjünk vissza a V_1 altérre és a $V_1^\perp$ -re. Mivel minden altérnek létezik egy direkt kiegészítő altére, ezért létezik egy olyan V_2 altér, melyre $V_1^\perp = V_1 \oplus V_2$ (nyilván $V_2 \subseteq V_1^\perp$) ahol $\oplus$ a direkt összeget jelöli, azaz minden $V_1^\perp$ -beli halmaz felírható $a_i^1 + a_i^2$ alakban, ahol $a_i^1 \in V_1$ és $a_i^2 \in V_2$. Ennek következményeként minden D_1 -beli a_i karakterisztikus vektor is felírható $a_i^1 + a_i^2$ alakban. Ekkor $a_i \cdot a_j = (a_i^1 + a_i^2)(a_j^1 + a_j^2)$. A tagokat kibontva: $a_i^1 \cdot a_j^1 = 0$ mivel mindkét tag V_1 -beli. $a_i^2 \cdot a_j^1 = 0$, és $a_i^1 \cdot a_j^2 = 0$ is igaz lesz, mivel $V_2 \subseteq V_1^\perp$. Tehát $a_i \cdot a_j = a_i^2 \cdot a_j^2$. De mivel $i, j \in D$, ezért $a_i \cdot a_j$ pontosan akkor lesz 1, ha $i = j$, minden más esetben 0, így nyilván $a_i^2 \cdot a_j^2$ -re is ugyanez vonatkozik. Ez nekünk azért fontos, mert ezzel beláthatjuk (csak úgy mint az eredeti Páratlanváros tételben) hogy az a_i^2 vektorok lineárisan függetlenek: Vegyük a $\delta_1 \cdot a_1^2 + \dots + \delta_k \cdot a_k^2 = 0$ lineáris kombinációt, majd szorozzuk be mindkét oldalt tetszőleges a_j^2 -vel. Ebből megkapjuk, hogy $\delta_j = 0$, és mivel ez tetszőleges δ_j -re igaz, ezért valóban lineárisan függetlenek lesznek. Ennek eredményeként $|D_1| \leq \dim(V_2)$, tehát

$$|D_1| = \alpha = \frac{m}{s} + r \leq \dim(V_2) = \dim(V_1^\perp) - \dim(V_1)$$

Mivel $\dim(V_1) + \dim(V_1^\perp) = n$, ezért

$$\frac{m}{s} + r \leq n - 2 \dim(V_1)$$

$$m \leq s \cdot (n - r - 2 \dim(V_1))$$

Most nézzük meg, mit tudunk $\dim(V_1)$ -ről. Mivel V_1 -et az $a_j + a_{j'}$ ($j, j' \in T_1$) vektorok generálják, ezért ez biztosan tartalmaz legalább $|T_1|$ különböző vektort, emiatt

$\dim(V_1) \geq \lceil \log_2 |T_1| \rceil$, és mivel azt már korábban beláttuk, hogy $|T_1| \geq \frac{m-rs}{\alpha}$, ezért

$$\dim(V_1) \geq \lceil \log_2 |T_1| \rceil \geq \lceil \log_2 \left(\frac{m-rs}{\alpha} \right) \rceil$$

Vezessük be az $f(r) = r + 2 \lceil \log_2 \left(\frac{m-rs}{\alpha} \right) \rceil$ függvényt. Ekkor az

$$m \leq s(n - r - 2 \dim(V_1)) \leq s(n - r - 2 \cdot \lceil \log_2 \left(\frac{m-rs}{\alpha} \right) \rceil) = s(n - f(r))$$

Térjünk vissza az eredeti állításunkra. Ez ugye azt mondta ki, hogy

$m = s(n - 2 \lceil \log_2 s \rceil)$ ha a két feltétel teljesül. A feladatot oldjuk meg indirekten:

Tételezzük fel, hogy $m > s(n - 2 \lceil \log_2 s \rceil)$. Mivel $m \leq s(n - f(r))$, ezért

$f(r) < 2 \log_2(s)$. Most tekintsük az alábbi két esetet: $r > \left(\frac{m}{s}\right) - 4$ és $r \leq \left(\frac{m}{s}\right) - 4$. Az 1. esetben: $r > \left(\frac{m}{s}\right) - 4$, valamint az eredeti tételünk első feltétele szerint $\log_2(s) \leq \left(\frac{n}{4}\right) - 1$, ezért $2 \log_2(s) \leq \frac{n}{2} - 2 = \frac{n-4}{2}$, tehát

$$m > s(n - 2 \lceil \log_2(s) \rceil) \geq \frac{s(n+4)}{2}$$

Az eredeti Páratlanváros tételből következik, hogy $n \geq \alpha$, hiszen α a D független ponthalmaz csúcsainak száma, azaz mivel a ponthalmazban semmelyik két csúcs között nem fut él, ezért bármelyik 2 csúcshoz tartozó halmaz metszete páros. De ekkor pont az eredeti Páratlanváros feltételeket teljesítik, ezért legfeljebb n darab csúcsa lesz D -nek. És mivel $\alpha = \frac{m}{s} + r$, emiatt

$$m > \frac{s(\alpha + 4)}{2} = \frac{s\left(\frac{m}{s} + r + 4\right)}{2},$$

és az $r > \left(\frac{m}{s}\right) - 4$ feltételünk miatt

$$m > \frac{s\left(\frac{m}{s} + r + 4\right)}{2} \geq \frac{s\left(\frac{m}{s} + \frac{m}{s} - 4 + 4\right)}{2} = m$$

Amivel ellentmondásra jutottunk.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $r \leq \frac{m}{s} - 4$ sem lehetséges. Ezt az $f(r)$ -re adott alsó becsléssel fogjuk igazolni. Első lépésként $r \geq 2$ esetén visszavezetjük a bizonyítást egy $f(r_1) \leq f(r)$ alsó becslésre, ahol $0 \leq r_1 < 2$. Tegyük fel tehát először, hogy $r \geq 2$. Ekkor $\left(\frac{m}{s} - r\right) / \left(\frac{m}{s} - r + 2\right)$ értéke a feltételek miatt biztosan legalább $\frac{4}{6}$ lesz,

$(\frac{m}{s} + r - 2)/(\frac{m}{s} + r)$ értéke pedig legalább $\frac{6}{8}$. Most vizsgáljuk az $f(r) - f(r - 2)$ értéket.

Ezt kibontva:

$$2 \left(\log_2 \left(\frac{m - rs}{\frac{m}{s} + r} \right) - \log_2 \left(\frac{m - (r - 2)s}{\frac{m}{s} + (r - 2)} \right) \right) + 2 =$$

$$2 \left(\log_2 \left(\frac{m - rs}{\frac{m}{s} + r} \right) \cdot \frac{\frac{m}{s} + (r - 2)}{m - (r - 2)s} \right) + 2 \geq 2 \left(\log_2 \left(\frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 8} \right) \right) + 2 = -2 + 2 = 0$$

tehát $f(r) - f(r - 2) \geq 0$ azaz $f(r) \geq f(r - 2)$. Legyen $r_1 = r - 2 \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$. Könnyen látható, hogy ekkor $0 \leq r_1 < 2$, valamint mivel $r > 2$, ezért $f(r_1) \leq f(r) < 2 \lceil \log s \rceil$. Emellett $f(r_1)$ -et kibontva és átrendezve:

$$f(r_1) = r_1 + 2 \left\lceil \log_2 \left(\frac{m - r_1 s}{m/s + r_1} \right) \right\rceil \geq 2 \left\lceil \log_2 s \left(\frac{m/s - r_1}{m/s + r_1} \right) \right\rceil$$

Valamint $m > s(n - 2 \lceil \log_2(s) \rceil)$ miatt

$$f(r_1) \geq 2 \left\lceil \log_2 s \left(\frac{n - 2 \lceil \log_2 s \rceil - r_1}{n - 2 \lceil \log_2 s \rceil + r_1} \right) \right\rceil$$

Itt ismét felhasználhatjuk az eredeti tételünk első feltételét: $\lceil \log_2 s \rceil \leq \left(\frac{n}{4}\right) - 1$, valamint azt hogy $r_1 \leq 2$:

$$f(r_1) \geq 2 \left\lceil \log_2 s \left(\frac{n - 2 \left(\frac{n}{4} - 1\right) - 2}{n - 2 \left(\frac{n}{4} - 1\right) + 2} \right) \right\rceil = 2 \left\lceil \log_2 s \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + 4} \right) \right\rceil = 2 \cdot \left\lceil \log_2 \left(\frac{s}{1 + \frac{8}{n}} \right) \right\rceil$$

Írjuk fel az s -et a 2 (nem feltétlen egész) hatványaként azaz $s = 2^{k+\delta}$, ahol $0 \leq \delta < 1$ és k pozitív egész szám, azaz s helyére behelyettesítve

$$\frac{s}{1 + \frac{8}{n}} = \frac{2^{k+\delta}}{1 + \frac{8}{n}}$$

Emlékezzünk vissza a második feltételünkre: Ha $\{\log_2 s\} \neq 0$ akkor $\{\log_2 s\} \geq \log_2 \left(1 + \frac{8}{n}\right)$. Vegyük észre hogy ekkor a $\log_2(2^\delta)$ épp megfeleltethető $\{\log_2 s\}$ -nek. Viszont ez azt jelenti, hogy 2^δ biztosan nagyobb lesz $1 + \frac{8}{n}$ -nél, hiszen a logaritmusuk alapján még az egyenlőség megengedett lenne, de előbbi egy irracionális, utóbbi pedig egy racionális

szám, szóval nem lehetnek egyenlők. Ennek következtében

$$\frac{s}{1 + \frac{8}{n}} = \frac{2^{k+\delta}}{1 + \frac{8}{n}} > 2^k$$

Most mindezt behelyettesítve az előző egyenlőtlenségünkbe a következőt kapjuk:

$$f(r_1) \geq 2 \cdot \left\lceil \log_2 \left(\frac{2^{k+\delta}}{1 + \frac{8}{n}} \right) \right\rceil > 2 \cdot \lceil \log_2 2^k \rceil \geq 2(k+1)$$

Viszont vegyük észre, hogy $2(k+1) = 2 \cdot \lceil \log_2 s \rceil$ is igaz lesz, de $f(r_1)$ -ről korábban beláttuk, hogy $f(r_1) \leq f(r) < 2 \lceil \log_2 s \rceil$, ezzel ellentmondásra jutottunk. Beláttuk, hogy

$$m \leq s(n - 2 \lceil \log_2 s \rceil)$$

Most már csak azt kell igazolnunk, hogy ez a korlát valóban elérhető, ehhez kell megadnunk egy konstrukciót. Ehhez tekintsük az $X = \{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_l\}$ n elemű halmazt, ahol $p = \lceil \log_2 s \rceil$ és $l = n - 2p$. Mivel $p = \lceil \log_2 s \rceil$ ezért p darab különböző elemből biztosan képezhető legalább s darab különböző halmaz. Vegyük az $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ valamint a $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ elemekből képezhető összes lehetséges részhalmazt. Válasszunk ki mindkét hatványhalmazból pontosan s elemet, jelöljük ezeket $\{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ -sel, valamint $\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$ -sel, és bármely azonos indexű I_k, J_k halmaz csupa azonos indexű a_i , valamint b_i elemeket tartalmazzon. Ekkor tekintsük az alábbi halmazrendszert: az $\{I_k \cup J_k \cup \{c_i\} \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq i \leq l\}$ halmazt; jelöljük ennek az elemeit $A_1, \dots, A_m$ -mel, ahol $m = l \cdot s = s \cdot (n - 2 \lceil \log_2 s \rceil)$. Nézzük meg, hogy az így képzett halmazokra valóban teljesülnek-e a feltételek. Könnyen látható, hogy minden halmaz számossága páratlan, hiszen az I_k, J_k halmazokban csak azonos indexű a_i, b_i tagok szerepelnek, tehát az uniójuk biztosan páros lesz, és ehhez hozzávéve egy tetszőleges c_j tagot páratlanná változik. Most nézzük a metszetekre vonatkozó feltételt: 2 tetszőleges halmazt kiválasztva $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ -ből, ha csak az I_k, J_k -beli részhalmazaik metszetét nézzük, akkor ezen metszetek biztosan párosak lesznek. Viszont ha a hozzájuk tartozó c_i tagok megegyeznek, akkor a metszet páratlanná változik. Mivel minden egyes c_j taghoz s darab különböző I_k, J_k halmazpár tartozik, ezért az ezekből alkotott A_i halmazok mindegyikéhez $s - 1$ darab olyan A_j halmaz tartozik, mellyel vett metszete páratlan, ami épp megfelel a feltételeknek. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] László Babai, Péter Frankl: *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, Version 2.2, October 2022.
- [2] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, Javított és bővített kilencedik kiadás, 2024.
- [3] Griffin Johnston, Jason O'Neill: *A few new oddtown and eventown problems*, arXiv:2312.13588v2 [math.CO] 2023.
- [4] V. H. Vu: *Extremal set systems with weakly restricted intersections*, *Combinatorica*, 19 (1999), 567–587.
- [5] Péter Csikvári: *Discrete Mathematics*, Lecture note.