

Hencsei Ráhel

Matematika BSc - matematikai elemző szakirány

Szakdolgozat

A STIRLING-FORMULÁRÓL

Témavezető: Pfeil Tamás adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak segítő együttműködésért és támogatásáért, hogy végig segítette a dolgozatom elkészülését. Köszönöm a családomnak, hogy az egyetemi éveim alatt végig támogattak és motiváltak célom elérésében. Végül, de nem utolsó sorban köszönöm a barátaimnak, akik mindig hittek bennem, bár azóta sem értik, hogy lehet szeretni a matematikát.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Előismeretek	5
1.1. Sorozatok	5
1.2. Differenciálhatóság	6
1.3. A határozott integrál	8
1.4. Végtelen sorok és hatványsorok	10
2. A Wallis-formula	14
3. A Stirling-formula és bizonyítása	16
4. A Stirling-formula alkalmazásai	20
5. Élesebb becslés az (r_n) sorozatra egyszerűbb eszközökkel	24
Irodalomjegyzék	31

Bevezetés

Szakdolgozatom témájaként a Stirling-formulát választottam. Az első részben a kapcsolódó matematikai tételeket, definíciókat és állításokat ismertetem, majd bemutatom a Wallis-formulát. A dolgozat második felében kimondom a Stirling-formulát, majd bizonyítom sorfejtéssel. Utána néhány példát mutatok a formula alkalmazására. Végül pedig élesebb becslést mutatok a Stirling-formulából kapott (r_n) sorozatra elemi eszközökkel.

1. Előismeretek

1.1. Sorozatok

1.1. Definíció. Az (a_n) sorozat b valós számhoz tart, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan n_0 szám, melyre teljesül, hogy

$$|a_n - b| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > n_0.$$

A határérték jelölése $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ vagy $a_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$.

Ha van olyan $b \in \mathbb{R}$, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens. Ha nincs ilyen szám, akkor (a_n) divergens.

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke ∞ , ha tetszőleges $P \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan n_0 szám, melyre teljesül, hogy

$$a_n > P, \quad \text{ha } n > n_0.$$

Ennek a határértéknek a jelölése $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ vagy $a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Ekkor azt mondjuk, hogy (a_n) végtelenhez divergál.

1.1. Tétel. Bármely sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.

1.2. Tétel. Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos.

1.3. Definíció. Az (a_n) sorozat részsorozatának nevezzük az (a_{n_k}) alakú sorozatokat, ahol n_k pozitív egészek szigorúan monoton növekvő sorozata.

1.3. Tétel. Ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor minden (a_{n_k}) részsorozatnak is van, és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

1.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy állítás minden elég nagy n -re teljesül, ha létezik olyan n_0 szám, melyre az állítás igaz minden $n > n_0$ pozitív egészre.

1.4. Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és $b_n \geq a_n$ minden elég nagy n -re, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ és $b_n \leq a_n$ minden elég nagy n -re, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

1.5. Tétel. Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden elég nagy n -re, és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. (Rendőrelv)

1.6. Tétel. Legyenek (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, és legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Ha $a < b$, akkor $a_n < b_n$ teljesül minden elég nagy n -re.

1.7. Tétel. Legyenek (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, és legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Ha $a_n \leq b_n$ teljesül minden elég nagy n -re, akkor $a \leq b$.

1.8. Tétel. 1. Ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergenssek és $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és $a_n + b_n \rightarrow a + b$.

2. Ha az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

3. Ha az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

4. Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

5. Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

1.9. Tétel. 1. Ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergenssek és $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens és $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$.

2. Ha az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \rightarrow a > 0$ és $b_n \rightarrow \infty$, illetve $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$, illetve $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$.

3. Ha az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \rightarrow a < 0$ és $b_n \rightarrow \infty$, illetve $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$, illetve $a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$.

4. Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow \infty$ vagy $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$.

5. Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$.

1.10. Tétel. Ha (a_n) nemnegatív tagú sorozat, $a \in \mathbb{R}^+$ és $a_n \rightarrow a$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$.

1.5. Definíció. Az (a_n) sorozatot monoton növekedőnek nevezzük, ha $a_n \leq a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Amennyiben itt $\leq$ helyett $\geq$ áll, a sorozatot monoton csökkenőnek, ha $<$, illetve $>$ áll, szigorúan monoton növekedőnek, illetve szigorúan monoton csökkenőnek nevezzük.

Az (a_n) sorozatot monotonnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

1.11. Tétel. Ha az (a_n) sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. Ha (a_n) monoton növekedő, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\},$$

ha pedig monoton csökkenő, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

1.12. Tétel. Ha az (a_n) sorozat monoton növekedő és nem felülről korlátos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

ha monoton csökkenő és nem alulról korlátos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

1.13. Tétel. Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekedő és korlátos, tehát konvergens.

1.2. Differenciálhatóság

1.6. Definíció. Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban differenciálható, ha a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték létezik. Ez a határérték az f függvény a pontbeli deriváltja.

Az a pontbeli differenciálhányadost leggyakrabban $f'(a)$ -val jelöljük.

1.7. Definíció. Legyen f differenciálható az a pontban. Az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontbeli érintőjén az $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ egyenletű egyenest értjük.

1.14. Tétel. Ha f differenciálható a -ban, akkor f folytonos a -ban.

1.14.1. Megjegyzés. A folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges, de nem elégséges feltétele. Van olyan f függvény, amely egy a pontban folytonos, de ott nem differenciálható, például az abszolútérték-függvény a 0 pontban ilyen.

1.15. Tétel. Az f függvény akkor és csak akkor differenciálható az a helyen, ha abban lokálisan „jól megközelíthető” legfeljebb elsőfokú polinommal az alábbi módon: van olyan α szám, amellyel

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + \varepsilon(x)(x - a),$$

ahol $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow a$. Az α szám az f függvény a -beli differenciálhányadosa.

1.16. Tétel. Ha az f függvény differenciálható a -ban, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = 0.$$

1.8. Definíció. Az f függvény deriváltfüggvényének nevezzük és f' -vel jelöljük azt a függvényt, amely értelmezve van minden olyan x helyen, ahol f differenciálható, és ott az értéke $f'(x)$.

1.17. Tétel. Ha az f és g függvények differenciálhatók a -ban, akkor cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$ is differenciálható a -ban, és

1. $(cf)'(a) = cf'(a)$,
2. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható az a -ban, és

4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

1.18. Tétel. Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (a, b) intervallumban. Ha f differenciálható a $c \in (a, b)$ pontban és $f'(c) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $f(c)$ -ben és

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

1.9. Definíció. Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban a differenciálhányadosa végtelen, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty,$$

és ezt úgy jelöljük, hogy $f'(a) = \infty$. Hasonlóan értelmezzük azt, hogy $f'(a) = -\infty$.

1.19. Tétel. Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (a, b) intervallumban. Ha $f'(c) = 0$, akkor f^{-1} -nek létezik a deriváltja $f(c)$ -ben, nevezetesen

$$(f^{-1})'(f(c)) = \infty,$$

ha f szigorúan monoton növekvő, illetve

$$(f^{-1})'(f(c)) = -\infty,$$

ha f szigorúan monoton csökkenő.

1.20. Tétel. Tegyük fel, hogy f folytonos egy I intervallumon és differenciálható annak minden belső pontjában.

1. Ha $f'(x) \geq 0$ I minden belső pontjában, akkor f monoton növekedő I -n.
2. Ha $f'(x) \leq 0$ I minden belső pontjában, akkor f monoton csökkenő I -n.
3. Ha $f'(x) > 0$ I minden belső pontjában, akkor f szigorúan monoton növekedő I -n.
4. Ha $f'(x) < 0$ I minden belső pontjában, akkor f szigorúan monoton csökkenő I -n.

1.20.1. Megjegyzés. A fenti tétel 3. és 4. pontjának megfordítása nem érvényes, mert például az $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$ -en, mégis $f'(0) = 0$, és hasonlóan a $g(x) = -x^3$, $x \in \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$ -en, mégis $g'(0) = 0$.

1.21. Tétel. Ha f differenciálható az x pontban és ott van lokális szélsőértéke, akkor $f'(x) = 0$.

1.22. Tétel. Legyen f differenciálható az a pont egy környezetében.

1. Ha $f'(a) = 0$ és f' lokálisan növekvő az a helyen, akkor az a pont f -nek lokális minimumhelye.
2. Ha $f'(a) = 0$ és f' lokálisan csökkenő az a helyen, akkor az a pont f -nek lokális maximumhelye.
3. Ha $f'(a) = 0$ és f' szigorúan lokálisan növekvő az a -ban, akkor az a pont f -nek szigorú lokális minimumhelye.
4. Ha $f'(a) = 0$ és f' szigorúan lokálisan csökkenő az a -ban, akkor az a pont f -nek szigorú lokális maximumhelye.

1.23. Tétel. Legyen f kétszer differenciálható a -ban. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor f -nek a -ban szigorú lokális minimuma van. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, akkor f -nek a -ban szigorú lokális maximuma van.

1.3. A határozott integrál

1.10. Definíció. Ha F differenciálható az I intervallumon és

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I,$$

akkor azt mondjuk, hogy F az f függvény primitív függvénye I -n.

1.24. Tétel. Ha F primitív függvénye f -nek I -n, akkor itt f összes primitív függvénye $F + c$ alakú, ahol c konstans.

1.11. Definíció. Az f függvény primitív függvényeinek összességét $\int f \, dx$ -szel jelöljük, és f határozatlan integráljának nevezzük.

1.12. Definíció. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztásán olyan $F = (x_0, \dots, x_n)$ véges sorozatot értünk, amelyre $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Az x_i pontokat az F felosztás osztópontjainak, az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokat pedig osztóintervallumoknak nevezzük.

1.25. Lemma. Ha F_1 és F_2 az $[a, b]$ intervallum két tetszőleges felosztása, akkor $s_{F_1} \leq S_{F_2}$. Azaz – egy adott f függvényre – bármely felosztáshoz tartozó alsó összeg legfeljebb akkora, mint bármely felosztáshoz tartozó felső összeg.

1.13. Definíció. Jelöljük $\mathcal{F}$ -fel az $[a, b]$ intervallum összes felosztásainak halmazát.

1.14. Definíció. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvényt az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálhatónak nevezzük, ha $\sup_{F \in \mathcal{F}} s_F = \inf_{F \in \mathcal{F}} S_F$ és ezt a számot az f függvény $[a, b]$

intervallumhoz tartozó határozott integráljának nevezzük. Ezt $\int_a^b f(x) \, dx$ -szel jelöljük.

1.26. Tétel. Egy korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy integrálható és az integrálja I , ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan F felosztás, amelyre

$$I - \varepsilon < s_F \leq S_F < I + \varepsilon.$$

1.27. Tétel. Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor integrálható $[a, b]$ -ben.

1.28. Tétel. Ha f monoton $[a, b]$ -ben, akkor integrálható $[a, b]$ -ben.

Jelöljük $R[a, b]$ -vel az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények halmazát.

1.29. Tétel. Ha $f \in R[a, b]$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $cf \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b cf \, dx = c \int_a^b f \, dx.$$

1.30. Tétel. Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $f + g \in R[a, b]$, és

$$\int_a^b (f + g) \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx.$$

1.31. Tétel (Newton-Leibniz-tétel). Legyen f integrálható $[a, b]$ -ben. Ha az F függvény folytonos $[a, b]$ -ben, differenciálható (a, b) -ben, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

1.32. Tétel (A primitív függvényekre vonatkozó parciális integrálás szabálya). Tegyük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatóak az I intervallumon, és itt fg' -nek van primitív függvénye. Ekkor $f'g$ -nek is van primitív függvénye I -ben, és

$$\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx.$$

1.4. Végtelen sorok és hatványsorok

1.15. Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszegein az $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ($n = 1, 2, \dots$) számokat értjük. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és a határértéke A , akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és az összege A . Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ (illetve $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor összege ∞ (illetve $-\infty$). Ezt úgy jelöljük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (illetve $-\infty$).

1.33. Tétel. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1.34. Tétel. Hiperharmonikus sornak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$ numerikus sort. Ha $i \leq 1$, akkor a hiperharmonikus sor divergál, ha pedig $i > 1$, akkor a hiperharmonikus sor konvergál.

1.35. Tétel. 1. Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeinek sorozata felülről korlátos.

2. Ha egy nemnegatív tagú sor divergens, akkor az összege végtelen.

1.36. Tétel (Cauchy-kritérium). A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy N index úgy, hogy minden $N \leq n < m$ -re

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

1.37. Tétel. 1. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens és az összege A , akkor minden $c \in \mathbb{R}$ -re

a $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ sor is konvergens, és az összege $c \cdot A$.

2. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok konvergensek és az összegük A , illetve B , akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor is konvergens, és az összege $A + B$.

1.38. Tétel. 1. Egy konvergens sor tagjai közül akárhány (akár végtelen sok) 0-val egyenlő tagot elhagyva, illetve akárhány (akár végtelen sok) 0-t beszúrva a sor konvergens marad, és az összege nem változik.

2. Egy konvergens sor tagjai közül véges sokat elhagyva, véges sok új tagot beszúrva, illetve véges sok tagot megváltoztatva a sor konvergens marad (de az összege változhat).

1.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ végtelen sor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok összefésülése, ha (c_n) az a_n és b_n tagokat és csak azokat sorolja fel, mindegyiket pontosan egyszer, és az a_n , illetve b_n tagok sorrendje a (c_n) sorozatban ugyanaz, mint az (a_n) , illetve (b_n) sorozatban.

1.39. Tétel. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergenssek és az összegük A , illetve B , akkor a sorok minden összefésülése is konvergens, és az összege $A + B$.

1.17. Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor zárójelezése in a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{i-1}}^{n_i-1} a_n \right)$$

alakú sorokat értjük, ahol $1 = n_0 < n_1 < \dots$ az indexek egy tetszőleges szigorúan monoton növvő sorozata.

1.40. Tétel. Egy konvergens sort zárójelezve sem a sor konvergenciája, sem az összege nem változik.

1.18. Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor átrendezése in a $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ alakú sorokat értjük, ahol $\sigma : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ az indexek halmazának egy tetszőleges bijekciója.

1.19. Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

1.41. Tétel. 1. Minden abszolút konvergens sor konvergens.

2. Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezettje is abszolút konvergens, és az összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

1.20. Definíció. Tetszőleges x valós számra legyen

$$x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és

$$x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

Az x^+ és x^- számokat x pozitív és negatív részének nevezzük.

1.42. Tétel. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sorok mindegyike konvergens.

1.43. Tétel. 1. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sornak van olyan átrendezettje, amelynek az összege végtelen.

2. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sornak van olyan átrendezettje, amelynek az összege mínusz végtelen.

1.44. Tétel. 1. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ mindegyike konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor minden átrendezettje konvergens, azonos összeggel.

2. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor minden átrendezettjének az összege végtelen.

3. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor minden átrendezettjének az összege mínusz végtelen.

4. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sornak van olyan átrendezettje, amelynek az összege végtelen, és van olyan átrendezettje is, amelynek az összege mínusz végtelen. Ha azt is feltesszük, hogy $a_n \rightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sornak minden $A \in \mathbb{R}$ -re van olyan átrendezettje, amely konvergens és az összeg A .

1.45. Tétel. Tetszőleges végtelen sorra az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A sor abszolút konvergens.
2. A sor bármely átrendezettje abszolút konvergens.
3. A sor bármely átrendezettje konvergens.
4. A sor bármely átrendezettje konvergens, és az összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

1.21. Definíció. Legyen (a_n) egy végtelen sorozat. Ekkor az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sort a 0 ponthoz tartozó hatványsornak nevezzük.

1.22. Definíció. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciatartománya azon $x \in \mathbb{R}$ számok halmaza, amelyekre a végtelen sor konvergens.

1.23. Definíció. Egy hatványsor konvergenciasugara a konvergencia intervallum sugara.

1.46. Tétel. Legyen R a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara.

1. Ha $R = 0$, akkor a hatványsor konvergenciatartománya a $\{0\}$ halmaz.
2. Ha $0 < R < \infty$, akkor a hatványsor konvergenciatartománya a $[-R, R]$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $(-R, R)$ intervallumok valamelyike.
3. Ha $R = \infty$, akkor a hatványsor konvergenciatartománya a valós számok halmaza.

1.47. Tétel. Minden hatványsor a konvergenciatartományának bármely belső pontjában abszolút konvergens.

1.48. Tétel (Abel-tétel). Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciatartományon.

1.49. Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergenciasugara nem 0. Legyen

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ minden $x \in (-R, R)$ -re. Ekkor az f függvény akárhányszor differenciálható a $(-R, R)$ intervallumban, és

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k},$$

minden $x \in (-R, R)$ -re.

1.24. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer differenciálható az a pontban. A

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot az f függvény a középpontú n -edik Taylor-polinomjának nevezzük.

A nulladik Taylor-polinom az $f(a)$ konstans függvény, az első Taylor-polinom pedig az $f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ lineáris függvény.

1.25. Definíció. Legyen f akárhányszor differenciálható az a pontban. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

végtelen sort az f függvény a középpontú Taylor-sorának nevezzük.

A 0 középpontú Taylor-sort és Taylor-polinomot, más néven Maclaurin-sornak, illetve Maclaurin-polinomnak nevezzük.

A Taylor-polinomok a Taylor-sor részletösszegei. Ha a Taylor-sor egy x pontban konvergens és összege $f(x)$, akkor azt mondjuk, hogy a Taylor-sor előállítja f -et az x pontban.

2. A Wallis-formula

2.1. Tétel.

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1)$$

és

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Bizonyítás. Legyen $I_k = \int_0^{\pi} \sin^k x dx$, $k \in \mathbb{N}$. Az első két tag $I_0 = \pi$, $I_1 = \cos 0 - \cos \pi = 2$. Ha $k \geq 1$, akkor

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^{k-1} x dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \cdot \sin^{k-1} x dx = \\ &= \int_0^{\pi} (\sin^{k-1} x - \cos^2 x \cdot \sin^{k-1} x) dx = \\ &= I_{k-1} - \int_0^{\pi} \cos x \cdot (\sin^{k-1} x \cdot \cos x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos x \cdot (\sin^{k-1} x \cdot \cos x) dx &= \int_0^{\pi} \cos x \cdot \left(\frac{1}{k} \sin^k x \right)' dx = \\ &= \left[\cos x \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin^k x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \cdot \sin^k x \cdot (-\sin x) dx = \\ &= 0 + \frac{1}{k} \cdot I_{k+1}. \end{aligned}$$

Ebből (3) alapján $I_{k+1} = I_{k-1} - \frac{1}{k} \cdot I_{k+1}$ összefüggéshez jutunk, amiből következik, hogy

$I_{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot I_{k-1}$. Ezért

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \dots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0,$$

amivel az (1) összefüggéshez jutottunk.

Hasonlóan,

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} = \dots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1,$$

ez pedig a (2) egyenlőség.

□

Az előző tételt felhasználva a π számot előállíthatjuk egy egyszerű változó tényezőszámú szorzat alakú sorozat határértékeként.

2.2. Tétel (Wallis-formula).

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [0, \pi]$ -re $0 \leq \sin x \leq 1$, ezért

$$\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x,$$

majd ezeket integrálva a $[0, \pi]$ intervallumon

$$\int_0^\pi \sin^{2n-1} x \, dx \geq \int_0^\pi \sin^{2n} x \, dx \geq \int_0^\pi \sin^{2n+1} x \, dx.$$

Így $I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1}$, vagyis

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot 2 \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \pi \geq \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \cdot 2,$$

majd ebből következik

$$\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \geq \pi \geq \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

Legyen $W_n = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ a tételbeli sorozat. Ekkor

$$\begin{aligned} W_n &\geq \pi \geq W_n \cdot \frac{2n}{2n+1}, \\ \pi &\leq W_n \leq \pi \cdot \frac{2n+1}{2n}, \end{aligned}$$

ezért a rendőrelv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \pi$.

□

3. A Stirling-formula és bizonyítása

3.1. Definíció. Legyenek $(a_n), (b_n)$ olyan sorozatok, melyekre $a_n \neq 0, b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy $a_n \sim b_n$, ha $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$.

3.1. Tétel (Stirling-formula). Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik olyan $c_n \in (0, 1)$, melyre

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{c_n}{12n}}.$$

Bizonyítás. A logaritmus függvény nulla középpontú sorfejtése:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad x \in (-1, 1],$$

x helyére $-x$ -et helyettesítve pedig a következőt kapjuk:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots, \quad x \in [-1, 1).$$

A $(-1, 1)$ intervallumon mindkét hatványsor konvergens, ezért a kettőt egymásból kivonva megkapjuk $\ln \frac{1+x}{1-x}$ sorfejtését ezen az intervallumon:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots + \frac{2}{2m+1}x^{2m+1} + \dots$$

Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\frac{1}{2n+1} \in (0, 1)$, ezért a fenti sorfejtést $x = \frac{1}{2n+1}$ -re alkalmazva

$$\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1+1}{2n+1-1} = \frac{2n+2}{2n} = \frac{n+1}{n}$$

alapján

$$\ln \frac{n+1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}} = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3(2n+1)^3} + \frac{2}{5(2n+1)^5} + \dots,$$

majd ezt $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ -del szorozva

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots \quad (4)$$

A sorfejtés alapján nyilvánvaló, hogy

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} > 1, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Becsüljük felülről a (4) jobb oldalán található végtelen sort úgy, hogy az $\frac{1}{2k+1}$ tényezőt $\frac{1}{3}$ -dal felülbecsüljük, majd a kapott mértani sort összegezzük:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots &< 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} \\ &= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{12n(n+1)}. \end{aligned}$$

Így a következő egyenlőtlenségláncot kapjuk:

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{12(n+1)},$$

azaz

$$1 < \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{12(n+1)}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése alapján

$$e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12(n+1)}},$$

majd ezt e -vel osztjuk:

$$1 < \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Legyen

$$x_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}} = \frac{1}{e} \frac{(n+1)^n \sqrt{(n+1)}}{n^n \sqrt{n}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Parciális törtekre bontással

$$\frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

ezért

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Nyilván (x_n) pozitív tagú és az előző egyenlőtlenséglánc bal oldala szerint szigorúan monoton csökkenő, míg az $e^{-\frac{1}{12n}} x_n$ sorozat szigorúan monoton növekvő, ugyanis szintén az

előző egyenlőtlenségláncból következik

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n+1}} &< \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}} \\ e^{-\frac{1}{12n}} x_n &< e^{-\frac{1}{12(n+1)}} x_{n+1}.\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{12n}} = 1$, valamint a szigorúan monoton csökkenő és pozitív tagú (x_n) sorozat konvergens, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{12n}} x_n.$$

Jelölje ezt a közös határértéket L . Megmutatjuk, hogy $L = \sqrt{2\pi}$. A szigorúan monoton növekvő sorozat minden tagja kisebb a határértékénél, és a szigorúan monoton csökkenő sorozat minden tagja nagyobb a határértékénél, ebből következik:

$$e^{-\frac{1}{12n}} x_n < L < x_n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Legyen

$$f(x) = e^{-\frac{1}{12n}x} x_n, \quad x \in [0, 1].$$

Mivel az f függvény folytonos, $f(0) = x_n$ és $f(1) = e^{-\frac{1}{12n}} x_n$, ezért a Bolzano-tétel szerint létezik olyan $c_n \in (0, 1)$, melyre $L = e^{-\frac{c_n}{12n}} x_n$, azaz $x_n = e^{\frac{c_n}{12n}} L$.

Végül meghatározzuk az L határértéket. Ehhez alkalmazzuk a Wallis-formulát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi.$$

A formulabeli sorozat első tényezője alapját átalakítjuk:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Ezt felhasználva a Wallis-formula a következő alakot ölti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Ezután x_n definíciójából következik, hogy

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \cdot x_n,$$

amit az $x_n = e^{\frac{c_n}{12n}} L$, $n \in \mathbb{N}^+$ összefüggéssel együtt n -re és $2n$ -re is felhasználva a fenti határértékbeli sorozat a következőképp alakul át:

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2^{2n} \cdot \left(\frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \cdot x_n \right)^2}{\frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{e^{2n}} \cdot x_{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} x_n^2}{\sqrt{2} x_{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(e^{\frac{c_n}{12n}} L)^2}{\sqrt{2} e^{\frac{c_{2n}}{24n}} L} = \frac{e^{\frac{c_n}{6n}}}{\sqrt{2} e^{\frac{c_{2n}}{24n}}} \cdot L.$$

Tudjuk, hogy a $c_n \in (0, 1)$, ezért az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése következtében

$$1 < e^{\frac{c_n}{6n}} < e^{\frac{1}{6n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Az exponenciális függvény 0-beli folytonossága miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{6n}} = 1$, így a rendőrelv szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{c_n}{6n}} = 1$. Hasonlóan $c_{2n} \in (0, 1)$ folytán

$$1 < e^{\frac{c_{2n}}{24n}} < e^{\frac{1}{24n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

majd $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{24n}} = 1$ és a rendőrelv folyománya $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{c_{2n}}{24n}} = 1$.

Tehát

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e^{\frac{c_n}{6n}}}{\sqrt{2} e^{\frac{c_{2n}}{24n}}} \cdot L,$$

ahol a bal oldal határértéke a Wallis-formula szerint $\sqrt{\pi}$, míg a jobb oldal határértéke $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{24n}} = 1$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{c_{2n}}{24n}} = 1$ alapján $\frac{L}{\sqrt{2}}$. Emiatt $\sqrt{\pi} = \frac{L}{\sqrt{2}}$, azaz $L = \sqrt{2\pi}$. Ezzel, már annyit igazoltunk, hogy

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Végül belátjuk $n!$ -nak a tételben szereplő pontosabb alakját. Mivel $x_n = e^{\frac{c_n}{12n}} L$, $n \in \mathbb{N}^+$ és az imént bizonyítottuk, hogy $L = \sqrt{2\pi}$, ezért

$$\sqrt{2\pi} e^{\frac{c_n}{12n}} = x_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{c_n}{12n}},$$

amivel a Stirling-formula általánosabb alakját bizonyítottuk. □

3.1.1. Következmény.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

4. A Stirling-formula alkalmazásai

4.1. Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Alakítsuk át a Stirling-formulát a következőképpen:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{e^n}{e^{\frac{c_n}{12n}} \sqrt{2\pi n}},$$

majd ebből n -edik gyököt vonva azt kapjuk, hogy

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{e}{\sqrt[n]{e^{\frac{c_n}{12n}} \sqrt{2\pi n}}}.$$

A fenti kifejezés nevezőjének első tényezőjében a kitevőben szereplő $\frac{c_n}{12n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, tehát $e^{\frac{c_n}{12n}} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$, így:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\frac{c_n}{12n}}} = 1.$$

A második tényezőben $\sqrt[n]{2\pi} \rightarrow 1$ és $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$, ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\frac{c_n}{12n}} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

A számláló konstanssorozat, így megkapjuk a példabeli határértéket.

Elemi bizonyítás ugyanerre a határértékre:

Először megmutatjuk, hogy

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1), \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Teljes indukcióval látjuk be mindkét egyenlőtlenséget:

$$n = 1 \text{ esetén az egyenlőtlenségglánc } \frac{1}{e} < 1 < \frac{2}{e} \cdot 2.$$

A bal oldali egyenlőtlenség inoklásának indukciós lépésekor tegyük fel, hogy valamely n -re $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$. Ebből következik

$$\begin{aligned} (n+1)! &> (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \\ (n+1) \cdot \frac{n^n}{e^n} &> \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \\ e &> \frac{(n+1)^n}{n^n}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség pedig azért teljesül, mert $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton növekszik és e -hez tart.

A jobb oldali egyenlőtlenség indukciós lépésének igazolásához tegyük fel, hogy valamely n -re az $n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1)$. Ekkor

$$\begin{aligned} (n+1)! &< (n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1) < \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+1} (n+2) \\ \frac{(n+1)^{n+2}}{e^n} &< \frac{(n+2)^{n+2}}{e^{n+1}} \\ e &< \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség fennáll, hiszen az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ szigorúan monoton csökken és határértéke e .

Alakítsuk át a bizonyított egyenlőtlenségláncot:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{e}\right)^n &< n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n (n+1) \\ \frac{n}{e} &< \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e} \sqrt[n]{n+1} \\ \frac{e}{n} &> \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{e}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{-\frac{1}{n}}} \\ e &> \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} > e \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

A jobb oldal második tényezője nyilván 1-hez tart, a harmadik nevezőjére alkalmazzuk a rendőrelvet:

$$1 \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n},$$

az alsó és a felső becslés is 1-hez tart, ezért $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$. Végül ismét a rendőrelvet használjuk, az $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ sorozatot közrefogó mindkét sorozat e -hez tart, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

4.2. Példa. Legyen

$$q_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Bizonyítsuk be, hogy a q_n sorozat konvergens és keressük meg a határértékét.

Az előző példából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n!}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = e. \end{aligned} \tag{5}$$

Az n -edik gyökök sorozatának határértéke az 1.10 Tétel következtében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1.$$

A függvény folytonosságát használó (5)-beli lépés indoklása másképpen, sorozatok határértékével:

$$\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \right)^{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}},$$

mert a számláló e -hez tart, a nevező pedig 1.10. Tétel szerint 1-hez tart.

4.3. Példa. Annak a valószínűsége, hogy egy szabályos pénzérmét $2n$ -szer feldobva pontosan n fej és n írás eredményt kapunk, így adható meg:

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}.$$

Ez a valószínűség nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$.

A Stirling-formula aszimptotikus alakját n -re és $2n$ -re is alkalmazva

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \sqrt{2\pi(2n)}}{\left(\frac{n^n}{e^n} \right)^2 \cdot 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}},$$

ezért

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Itt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$, ezért a feladatbeli valószínűségek határértéke nulla.

4.4. Példa. Határozzuk meg $100!$ számjegyeinek a számát.

Egy N pozitív egész szám számjegyeinek a száma

$$[\log_{10}(N)] + 1,$$

ezért a példabeli szám

$$[\log_{10}(100!)] + 1.$$

Vegyük a Stirling-formula mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{c_n}{12n}, \quad c_n \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ebből következik, hogy

$$\log_{10}(100!) = \frac{\ln(100!)}{\ln(10)} = \frac{100,5 \ln(100) - 100 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{c_n}{1200}}{\ln(10)}.$$

Amiből

$$\frac{100,5 \ln(100) - 100 + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{c_n}{1200}}{\ln(10)} = 157,96.$$

Ahhoz, hogy biztosak lehessünk abban, hogy a $\lfloor \log_{10}(100!) \rfloor$ értéke 157 (és nem 158), használjuk a Stirling-formula élesebb változatát, amely tartalmaz alsó és felső korlátot is:

$$1 < \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}} < e^{\frac{1}{12n}}.$$

Mivel $c_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}^+$, ezért

$$0 < \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \frac{1}{2} \ln(2\pi) < \frac{1}{12n},$$

majd ezt elosztjuk $\ln 10$ -zel:

$$0 < \log_{10}(n!) - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \frac{1}{2} \ln(2\pi)}{\ln 10} < \frac{1}{12n \ln 10}.$$

Legyen

$$S_n = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \frac{1}{2} \ln(2\pi)}{\ln 10}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Mivel

$$\frac{1}{12n \ln 10} \leq \frac{1}{12 \ln 10} < 1,$$

ezért $\lfloor \log_{10}(n!) \rfloor$ vagy $\lfloor S_n \rfloor$, vagy $\lfloor S_n \rfloor + 1$.

Ha $n = 100$, akkor

$$|\log_{10}(100!) - S_{100}| \leq \frac{1}{1200 \ln 10} < 0,001.$$

Mivel $S_{100} \approx 157,96$ a hozzá legközelebbi egész számtól több, mint 0,001-del tér el, ezért $\lfloor \log_{10}(100!) \rfloor = 157$ és így a $100!$ 158 számjegyből áll.

5. Élesebb becslés az (r_n) sorozatra egyszerűbb eszközökkel

Legyen

$$r_n = \ln \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

5.1. Tétel. Az (r_n) sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz tart.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= \ln \frac{(n+1)! e^{n+1}}{\sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} - \ln \frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}} = \\ &= \ln \frac{(n+1)! e^{n+1}}{\frac{\sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{\frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}}} = \ln \left(\frac{(n+1)! e^{n+1}}{\sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{e n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} \right) = (\ln e + \ln n^{n+\frac{1}{2}}) - (\ln (n+1)^{n+\frac{1}{2}}) = \\ &= \ln e + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln (n+1) = \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln (n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy (r_n) szigorúan monoton csökkenő legyen, elegendő, hogy

$$\begin{aligned} 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &< 0 \\ 1 &< \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} &< \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ 0 &< \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Ehhez elegendő feltétel az, ha

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, mivel $f(x)$ mindkét tagja nullához tart, mert az első tagban a logaritmus függvény folytonos az $x = 1$ helyen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}\right) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2} = \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} < 0, \end{aligned}$$

tehát f szigorúan monoton csökken a $(0, \infty)$ intervallumon, így $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ miatt az $f(x) > 0$, ha $x \in \mathbb{R}^+$. Ezzel beláttuk, hogy (r_n) szigorúan monoton csökken.

Most tekintsük az (e^{r_n}) sorozatot. Ez szigorúan monoton csökkenő, mert (r_n) is szigorúan monoton csökkenő, és 0 az alsó korlátja, ezért konvergens. Az előző fejezetben bizonyított Stirling-formula szerint $e^{r_n} \rightarrow 1$, majd a logaritmus függvény 1-beli folytonossága miatt $r_n \rightarrow 0$. $\square$

5.1.1. Megjegyzés. Az előző bizonyításban függvények segítségével beláttuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat szigorúan monoton csökken, és most ezt igazoljuk elemi úton is.

Legyen

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Azt állítjuk, hogy a (t_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $t_{n-1} > t_n$, $n \geq 2$ esetén.

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1+\frac{1}{2}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Ezt négyzetre emeljük és közös nevezőre hozzuk:

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]^2 &> \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]^2 \\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1} &> \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}, \end{aligned}$$

majd szorzunk a nevezőkkel:

$$\begin{aligned} n^{2n-1} \cdot n^{2n+1} &> (n-1)^{2n-1} (n+1)^{2n+1} \\ n^{2n-1+2n+1} &> (n-1)^{2n} (n-1)^{-1} (n+1)^{2n} (n+1) \\ n^{4n} &> (n^2-1)^{2n} \frac{n+1}{n-1} \\ \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{2n} &> \frac{n+1}{n-1}. \end{aligned}$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^2$ -tel:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{2(n-1)} > \frac{n+1}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^2.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából gyököt vonva a következőt kapjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} > \frac{n^2-1}{n^2} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Ezt úgy igazoljuk, hogy először a bal oldalt a binomiális tétel szerinti kifejtés első három tagjával becsljük alulról:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n-1} &\geq 1 + (n-1)\frac{1}{n^2 - 1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{1}{(n^2 - 1)^2} = \\ &= 1 + \frac{n-1}{(n+1)(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2(n+1)^2(n-1)^2} = \\ &= \frac{2(n+1)^2(n-1) + 2(n+1)(n-1) + (n-2)}{2(n+1)^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Ezután elég igazolnunk, hogy a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\frac{2(n+1)^2(n-1) + 2(n+1)(n-1) + (n-2)}{2(n+1)^2(n-1)} > \frac{n^2 - 1}{n^2} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Itt

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{n+1}{n^2} \sqrt{n^2 - 1}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a nevezőkkel, majd négyzetre emelünk:

$$\begin{aligned} n^2[2(n+1)^2(n-1) + 2(n+1)(n-1) + (n-2)] &> 2(n+1)^3(n-1)\sqrt{n^2 - 1} \\ n^4[2(n+1)^2(n-1) + 2(n+1)(n-1) + (n-2)]^2 &> 4(n+1)^7(n-1)^3. \end{aligned}$$

Ennek a bal oldala:

$$\begin{aligned} n^4[4n^6 + 8n^5 + 2n^4 - 12n^3 + 8n^4 + 8n^5 - 4n^3 - 24n^2 + 2n^4 - 4n^3 + n^2 + 6n - 12n^3 - 24n^2 + 6n + 36] = \\ = n^4[4n^6 + 16n^5 + 12n^4 - 32n^3 - 47n^2 + 12n + 36], \end{aligned}$$

a jobb oldal negyede pedig

$$\begin{aligned} (n+1)^7(n-1)^3 &= (n+1)^4(x^2 - 1)^3 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)(n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1) = \\ &= n^{10} + 4n^9 + 3n^8 - 8n^7 - 14n^6 + 14n^4 + 8n^3 - 3n^2 - 4n - 1. \end{aligned}$$

Tehát elég megmutatni, hogy

$$\begin{aligned} 4n^{10} + 16n^9 + 12n^8 - 32n^7 - 47n^6 + 12n^5 + 36n^4 &> \\ > 4n^{10} + 16n^9 + 12n^8 - 32n^7 - 56n^6 + 56n^4 + 32n^3 - 12n^2 - 16n - 4, \end{aligned}$$

és ezt 0-ra rendezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 9n^6 + 12n^5 - 20n^4 - 32n^3 + 12n^2 + 16n + 4 &> 0 \\ n^4(9n^2 - 20) + n^3(12n^2 - 32) + 12n^2 + 16n + 4 &> 0. \end{aligned}$$

Végül ha

$$n > \max \left\{ \sqrt{\frac{20}{9}}, \sqrt{\frac{8}{3}} \right\} = \max \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{5}, 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

igaz, akkor a fenti hatodfokú polinom pozitív, és ez teljesül $n \geq 2$ esetén. □

5.1. Állítás. $r_n < \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás. Keressük az olyan $A > 0$ értékeket, melyekre $r_n < \frac{A}{n}$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel r_n nullához konvergál, ugyanez érvényes az

$$a_n = r_n - \frac{A}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

sorozatra is. Az állításhoz elegendő, hogy (a_n) szigorúan monoton növekvő, azaz

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= r_{n+1} - \frac{A}{n+1} - \left(r_n - \frac{A}{n} \right) = r_{n+1} - r_n - \frac{A}{n+1} + \frac{A}{n} = \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + A \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) > 0, \quad n \in \mathbb{N}^+, \end{aligned}$$

ezt $\left(n + \frac{1}{2} \right)$ -del osztva

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + A \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{n + \frac{1}{2}} > 0,$$

ami teljesül, ha

$$g_A(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + A \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{2}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

$g_A(x)$ mindhárom tagja nullához tart, ha $x \rightarrow \infty$, ebből az első két tag nyilvánvalóan, a harmadik tag pedig átalakítva

$$A \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{2}} = A \frac{\frac{x(x+1)}{2x+1}}{\frac{2x+1}{2}} = A \frac{2}{x(x+1)(2x+1)} \rightarrow 0,$$

ezért bármely $A > 0$ megfelel, amelyre g_A szigorúan monoton csökken.

$$\begin{aligned} g'_A(x) &= \frac{-1}{(x + \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{-2A(6x^2 + 6x + 1)}{(2x^3 + 3x^2 + x)^2} = \\ &= \frac{-4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x^2 + x} - \frac{12Ax^2 + 12Ax + 2A}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2} = \\ &= \frac{x + x^2 - 12Ax^2 - 12Ax - 2A}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2} = \frac{x(1+x) - A(12x^2 + 12x + 2)}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2}, \end{aligned}$$

és ahhoz, hogy ez a derivált minden pozitív számra negatív legyen, elegendő, ha teljesül

$$A > \frac{x(x+1)}{12x^2 + 12x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ezért legyen

$$h(x) = \frac{x(x+1)}{12x^2 + 12x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

aminek a deriváltja

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x+1)(12x^2 + 12x + 2) - (x^2 + x)(24x + 12)}{(12x^2 + 12x + 2)^2} = \\ &= \frac{(24x^3 + 24x^2 + 4x + 12x^2 + 12x + 2) - (24x^3 + 12x^2 + 24x^2 + 12x)}{(12x^2 + 12x + 2)^2} = \\ &= \frac{4x + 2}{(12x^2 + 12x + 2)^2} = \frac{2(2x + 1)}{4(6x^2 + 6x + 1)^2} = \frac{2x + 1}{2(6x^2 + 6x + 1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Ezért a h szigorúan monoton növekvő függvény és $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{12}$. Következésképpen az ezzel a módszerrel kapható legkisebb alkalmas érték $A = \frac{1}{12}$. $\square$

5.1.1. Következmény. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra teljesül, hogy $r_n < \frac{1}{12n}$, és az $\frac{1}{12}$ konstans nem csökkenthető.

Bizonyítás. Indirekt módon, cseréljük $A = \frac{1}{12}$ -et valamilyen A' értékre úgy, hogy $0 < A' < \frac{1}{12}$ és $r_n < \frac{A'}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Tudjuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{12}$. Ezért létezik olyan $x_A > 0$, melyre

$$A' < \frac{x(x+1)}{12x^2 + 12x + 2}, \quad x > x_A.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$A'(12x^2 + 12x + 2) < x(x+1), \quad x > x_A,$$

melyből következik, hogy $g_{A'}'(x) > 0$, ha $x > x_A$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} g_{A'}(x) = 0$ miatt $g_{A'}(x) < 0$, ha $x > x_A$. Emiatt az

$$a'_n = r_n - \frac{A'}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

sorozatra teljesül $a'_{n+1} - a'_n < 0$, ha $n > x_A$. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0$ következtében $a'_n > 0$, ha $n > x_A$ és végül

$$r_n > \frac{A'}{n}, \quad n > x_A,$$

és ez ellentmondás. $\square$

5.2. Állítás. $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B}{n^3} < r_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás. Határozzunk meg egy $B > 0$ értéket úgy, hogy

$$\frac{1}{12n} - \frac{B}{n^3} < r_n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Legyen valamely $B > 0$ esetén

$$b_n = r_n - \frac{1}{12n} + \frac{B}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Mivel $r_n \rightarrow 0$, ezért $b_n \rightarrow 0$. A tétel bizonyításához elegendő azt megmutatnunk, hogy (b_n) szigorúan monoton csökkenő és 0-hoz tart. Ezt elérjük akkor, ha úgy választjuk B -t, hogy

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= r_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{B}{(n+1)^3} - \left(r_n - \frac{1}{12n} + \frac{B}{n^3} \right) = \\ &= r_{n+1} - r_n + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{B}{(n+1)^3} - \frac{B}{n^3} = \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - B \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) < 0, \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{n + \frac{1}{2}} - B \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}}{n + \frac{1}{2}} < 0, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

ami teljesül, ha

$$i_B(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{2}} - B \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}}{x + \frac{1}{2}} < 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

$i_B(x)$ mind a négy tagja nullához tart, ha $x \rightarrow \infty$, az első két tag nyilvánvaló, a harmadikat korábban beláttuk, a negyedik tag pedig átalakítva

$$B \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}}{x + \frac{1}{2}} = B \frac{\frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3}}{\frac{2x+1}{2}} = B \frac{6x^2 + 6x + 2}{x^3(x+1)^3(2x+1)} \rightarrow 0.$$

Bármely $B > 0$ megfelel, amelyre i_B szigorúan monoton növekszik. Ekkor

$$i_B(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{12} \frac{2}{x(x+1)(2x+1)} + B \frac{6x^2 + 6x + 2}{x^3(x+1)^3(2x+1)},$$

ebből kapható

$$\begin{aligned} i'_B(x) &= -\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{36x^2 + 36x + 6}{(12x^3 + 18x^2 + 6x)^2} + \\ &+ \frac{2Bx^2(30x^6 + 120x^5 + 200x^4 + 180x^3 + 93x^2 + 26x + 3)}{(2x^7 + 7x^6 + 9x^5 + 5x^4 + x^3)^2} = \\ &= -\frac{x^2(1+x)^2 - 12B(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}{6x^4(1+x)^4(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy i_B negatív értékű függvény legyen $\mathbb{R}^+$ -on, $\lim_{x \rightarrow \infty} i_B(x) = 0$ szerint elegendő, ha $i'_B > 0$ az $\mathbb{R}^+$ halmazon, ez pedig teljesül, ha minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B > \frac{x^2(x+1)^2}{12(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}.$$

Legyen

$$j(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{12(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = \frac{1}{360}$, és ennek a függvénynek a deriváltja

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{12[2x(x+1)^2 + x^2(2x+2)](30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}{12^2(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} - \\ &\quad - \frac{12x^2(x+1)^2(120x^3 + 180x^2 + 100x + 20)}{12^2(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} = \\ &= \frac{24(60x^7 + 210x^6 + 310x^5 + 250x^4 + 116x^3 + 29x^2 + 3x)}{144(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} - \\ &\quad - \frac{24(60x^7 + 210x^6 + 290x^5 + 200x^4 + 70x^3 + 10x^2)}{144(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} = \\ &= \frac{24(20x^5 + 50x^4 + 46x^3 + 19x^2 + 3x)}{24 \cdot 6(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} = \\ &= \frac{x(20x^4 + 50x^3 + 46x^2 + 19x + 3)}{6(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} > 0. \end{aligned}$$

Ezért a j szigorúan monoton növekvő függvény, és $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = \frac{1}{360}$, ezért $j(x) < \frac{1}{360}$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Így a módszerünk alapján $B = \frac{1}{360}$ a legkisebb megfelelő konstans. $\square$

5.1.2. Következmény. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra igaz, hogy

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} < r_n,$$

és az $\frac{1}{360}$ konstans nem csökkenthető.

Bizonyítás. Indirekt módon, írjunk a $B = \frac{1}{360}$ helyett valamilyen B' értéket úgy, hogy $0 < B' < \frac{1}{360}$. Tudjuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = \frac{1}{360}$, ezért létezik olyan $x_B > 0$, melyre

$$B' < \frac{x^2(x+1)^2}{12(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}, \quad x > x_B.$$

Ez azt jelenti, hogy $i'_{B'}(x) < 0$, ha $x > x_B$. Ekkor $i_{B'}(x) > 0$, ha $x > x_B$. Ezért a

$$b'_n = r_n - \frac{1}{12n} + \frac{B'}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

sorozatra igaz, hogy $b'_{n+1} - b'_n > 0$, ha $n > x_B$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = 0$ felhasználásával $b'_n < 0$, ha $n > x_B$, és ebből következik

$$r_n < \frac{1}{12n} - \frac{B'}{n^3}, \quad n > x_B,$$

és ez ellentmondás. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Valós analízis I-II.*, Typotex, Budapest, 2012-2013.
- [2] Šefket Arslanagić, *Stirling's formula and its application*, Szarajevó, 2018.
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/mat_kol_24_1_2018/mat_kol_24_1_2018_57_64.pdf
- [3] Keith Conrad, *Stirling's formula*
<https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/stirling.pdf>
- [4] Chris Impens, *Stirling's Series Made Easy*, The American Mathematical Monthly, **110** 730-735, 2003.
- [5] Pfeil Tamás, *Feladatok az e számra*, kézirat, Budapest, 1994.

NYILATKOZAT

Név: Hencsei Ráhel

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: W5WVA8

Szakdolgozat címe:
A Stirling-formuláról

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024.12.27.

Hencsei Ráhel

a hallgató aláírása