

SZAVAZÓRENDSZEREK ELMÉLETE

Szakdolgozat

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Írta: Takács Botond Benedek

Matematika BSc - Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Dr. Csiszár Villő

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



2025 Január

Tartalomjegyzék

1. Egynyertes ordinális rendszerek	5
1.1. Néhány alapfogalom	5
1.2. Néhány rendszer bemutatása	6
1.3. Kritériumok ordinális rendszerekre	10
2. Egynyertes kardinális rendszerek	14
2.1. Kardinális rendszerek bevezetése	14
2.2. Kritériumok kardinális rendszerekre	15
3. Többnyertes rendszerek	19
3.1. Többnyertes rendszerek bevezetése	19
3.2. Az elosztás problémája	19
3.3. Hibrid rendszerek	22
4. Taktikai szavazás	25
4.1. Néhány példa taktikai szavazásra	25
4.2. Egy racionális szavazói modell	28
5. A szavazórendszerek ellentmondásai	32
5.1. A Condorcet paradoxon	32
5.2. Az Arrow tétel	33
5.3. A Gibbard-Satterthwaite tétel	35

Köszönetnyilvánítás

Először szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Csiszár Villőnek a szakdolgozatom írása alatt nyújtott segítségéért. Emellett megköszönném a családomnak és barátaimnak, akik végig támogattak egyetemi éveim alatt.

Bevezetés

A demokrácia rendszerében elengedhetetlen a választások intézménye. Lényege, hogy a szavazók valamilyen módon kifejezik preferenciáikat, egy szavazórendszer ezeket kiértékeli, majd a végeredmény ezeket a preferenciákat kifejezi valahogyan, például döntéshozó képviselők megválasztásában, vagy egy törvényjavaslat elfogadásában. Mivel a demokratikus rendszerek talán legnagyobb alapköve ez a szavazói mechanizmus, szükséges, hogy ennek rendszerét kritikusan meg tudjuk vizsgálni, és kiértékelni.

A szavazórendszerek jelentősége nem csak politikai értelemben értendő. Cégekben, alapítványokban, vagy esetleg még egy baráti körben is lényeges, hogy milyen rendszer alapján értékeljük a demokratikus döntéshozatalt. Olyan rendszert szeretnénk, aminek végeredményével a lehető legtöbb szavazó elégedett tud lenni. Ennek jelentősége az utolsó pár évtizedben még inkább felértékelődött, mivel különböző országokban a szavazók egyre nagyobb elégedetlenséget fejeznek ki a szavazórendszereikkel szemben.

Először definiáljuk, mit is értünk szavazórendszer alatt. Ebben a szakdolgozatban a szavazórendszereket úgy képzeljük el, mint egy algoritmus, aminek a "bemenete" a szavazók preferenciái, "kimenete" pedig a nyertes, vagy nyertesek. A "bemenetek" és "kimenetek" különböző fajtái fogják meghatározni a szavazórendszerek típusát, ezen belül a különböző szavazórendszerek fogják jelenteni a "black box"-ot, amely a meghatározott bemenetfajta alapján elkészíti a kimenetet.

De mit is értünk a szavazók preferenciái alatt? Ezt most definiáljuk. Legyen V a szavazók halmaza, M a jelöltek halmaza. A $v_i \in V$ $1 \leq i \leq |V|$ az i -edik szavazó, $M = \{A, B, C, \dots\}$.

0.0.1. Definíció. Ha v_i szavazó az A jelöltet preferálja a B -vel szemben, akkor azt $A \succ_i B$ -vel jelöljük.

0.0.2. Definíció. A v_i szavazó **preferenciasorrendje** egy rangsorolás, mely ha például A, B, C, D ; akkor $A \succ_i B \succ_i C \succ_i D$ teljesül. Egyenlő preferenciákat is engedünk, ennek jelölése $A = B$.

Tárgyalni fogunk olyan rendszereket is, amelyek kardinális alapon működnek, tehát a szavazók képesek a preferenciáik "mértékét" is kifejezni.

Hogyan tudjuk a különböző szavazórendszereket kiértékelni egymáshoz képest? A szakdolgozat folyamán a klasszikus társadalmi döntések tudományából fogunk meríteni, elméleti kritériumok alapján fogjuk kiértékelni a szavazórendszerek teljesítményét. Ezek különböző olyan

megkötések, melyeket egy döntéshozatali rendszernek ideális esetben teljesítenie kéne, de ahogyan ezt látni is fogjuk, nem fogunk ilyet találni. Ennek kapcsán bemutatjuk ezen tudományág pár legfontosabb eredményét, például az Arrow-tételt, illetve a Gibbard-Satterthwaite tételt.

1. fejezet

Egynyertes ordinális rendszerek

1.1. Néhány alapfogalom

Ebben a fejezetben különböző rangsoroláson alapuló rendszereket, másnéven ordinális rendszereket fogunk áttekinteni. Minden vizsgált rendszer bemenete az összes szavazó preferenciasorrendje, kimenete pedig egy győztes. Ez a fejezet nagy részében az [1] forrás alapján készült.

Az ordinális rendszerekben a "bemenetben" nem engedünk meg egyenlő preferenciákat, minden szavazónak egyértelmű rangsort kell benyújtania. Nem szükséges teljes rangsort bejelölniük, de példáinkban csak teljes rangsorolások fognak szerepelni a könnyebb átláthatóságért.

Célunk az, hogy a szavazók **összesített preferenciasorrendjét** elkészítsük, ennek a sorrendnek az első eleme lesz a nyertes. Ha a szavazók összesítve az A jelöltet preferálják B -vel szemben, annak a jelölése $A \succ B$. Ez a rendszerek kritériumok általi kiértékeléséhez szükséges. A rendszerek nem kezelik a holtversenyt, viszont a gyakorlatban a nagy számú szavazat miatt ez nem okoz problémát.

1.1.1. Definíció. A **preferenciatáblázatban** összefoglaljuk a szavazás során összes felmerülő preferenciasorrendet. Az első sorba írjuk az adott preferenciaoszlopra érkezett szavazatok számát, az oszlop $2 \dots |M| + 1$ sorába az adott preferenciasorrendet írjuk.

1.1.1. Példa. Tekintsünk egy esetet, melyben $|V| = 9$ és $M = \{A, B, C\}$.

	1	3	2	3
1. hely	A	A	B	C
2. hely	B	C	C	A
3. hely	C	B	A	B

Ebben a fejezetben továbbiakban ebben a formátumban kezeljük a szavazórendszerek "bemenetét".

1.1.2. Definíció. Egynyertes ordinális szavazórendszernek nevezünk egy olyan rendszert, aminek bemenete egy preferenciatáblázat, és kimenete a szavazók összesített preferenciasorrendje. A sorrend első helye lesz a választás győztese.

1.2. Néhány rendszer bemutatása

Először megvizsgáljuk a világon legtöbbet használt, egynyertes választási rendszert, a pluralitáson alapuló választási rendszert. Ennek a rendszernek nincsen szüksége a választók teljes preferenciasorrendjére, hanem csak az első preferenciájukra, azonban az általánosítás szempontjából most egy ordinális rendszerként kezeljük.

1.2.1. Definíció. Az egyfordulós pluralitás rendszerében az összesített preferenciasorrendet a jelöltekre érkezett 1. helyes szavazatok száma határozza meg. Az összesített preferenciasorrendben 1. helyen a legtöbb szavazatot elnyerő jelölt szerepel, 2. helyen a második legtöbbet, és így tovább.

1.2.1. Példa. Vizsgáljuk meg a fenti példát.

	1	3	2	3
1. hely	A	A	B	C
2. hely	B	C	C	A
3. hely	C	B	A	B

Az A jelőltre 4 szavazat érkezett, a B jelőltre 2, a C jelőltre 3. Az összesített preferenciasorrend a következő: $A \succ C \succ B$. Így a pluralitás választási rendszer nyertese A.

Gyakori, hogy a pluralitás szavazórendszerekben több fordulót is tartanak. Leggyakrabban kettőt. A második fordulóban kevesebb jelölt közül lehet választani, a továbbjutásra különböző szabályokat hozhatnak, például a legtöbb szavazatot kapó n jut tovább, vagy egy bizonyos szavazatarány fölött továbbjutnak, vagy ezek valamilyen kombinációja. Vizsgáljunk meg egy kétfordulós pluralitási választási rendszert, melyben a továbbjutó a legtöbb szavazatot elérő kettő jelölt. A második forduló fogja befolyásolni az összesített sorrend 1. és 2. helyét.

A fenti példában A és C kapta a legtöbb szavazatot az első fordulóban, így B kiesik. A megkapott preferenciasorrendek alapján el tudjuk osztani B szavazóit a második preferenciáik alapján. Így a második forduló eredményei:

A: 4 szavazó

C: 5 szavazó

Így az összesített preferenciasorrend $C \succ A \succ B$, a nyertes C. Miért lehet ez?

A fenti példában a B jelöltet **spoiler** jelöltnek nevezzük. Ez a pluralitáson alapuló választási rendszer legismertebb hátránya, a hasonló jelöltek szavazótáborában jelentős átfedés van, ezért egy, a többség számára kevésbé preferált jelölt nyerhet. Később a fejezetben formálisabban is megvizsgáljuk ezt a jelenséget.

1.2.2. Definíció. Az IR (instant runoff) szavazórendszer egy olyan rendszer, mely preferenciasorrendeket használva legenerál egy többfordulós választást. Minden fordulóban a legkevesebb szavazatot kapó jelölt kiesik, és a szavazó preferenciasorrendjén található következő jelölthöz

átcsoportosítjuk a szavazatát. Ezt addig folytatjuk, ameddig egyik jelölt nem szerzi meg a szavazatok többségi részét. Ekkor ez a jelölt lesz a győztes, az összesített preferenciasorrend a kiesések sorrendje.

Az IR rendszert az alábbi példán szemléltetjük.

1.2.2. Példa. Legyen $N = 20$ és $M = \{A, B, C, D, E\}$ a preferenciatáblázat a következő:

	3	4	4	6	2	1
1. hely	B	C	B	D	B	E
2. hely	C	A	D	C	E	A
3. hely	A	D	C	A	A	D
4. hely	D	B	A	E	C	B
5. hely	E	E	E	B	D	C

A pluralitás rendszerben B lenne a nyertes 9 szavazattal. Nem érte el senki a 11 szavazatot, tehát a legkevesebb első preferenciát kapó A jelölt kiesik, kivesszük a preferenciasorrendből. A 2. forduló preferenciasorrendje:

	3	4	4	6	2	1
1. hely	B	C	B	D	B	E
2. hely	C	D	D	C	E	D
3. hely	D	B	C	E	C	B
4. hely	E	E	E	B	D	C

A 2. fordulóban a legkevesebb szavazatot kapó jelölt az E jelölt, tehát eltávolítjuk a preferenciasorrendből, újraosztjuk a szavazatait.

	3	4	4	6	2	1
1. hely	B	C	B	D	B	D
2. hely	C	D	D	C	C	B
3. hely	D	B	C	B	D	C

Vegyük észre, hogy az 1. és 5. oszlop ugyanaz, tehát ezeket kombinálhatjuk.

	5	4	4	6	1
1. hely	B	C	B	D	D
2. hely	C	D	D	C	B
3. hely	D	B	C	B	C

Még mindig nincsen többség, tehát eltávolítjuk C-t.

	5	4	4	6	1
1. hely	B	D	B	D	D
2. hely	D	B	D	B	B

Összesítve:

	9	11
1. hely	B	D
2. hely	D	B

D elérte a 11 szavazatot, ő lesz a nyertes. Az összesített preferenciasorrend a következő:
 $D \succ B \succ C \succ E \succ A$.

1.2.3. Definíció. A Borda rendszer egy olyan rangsorolós választási rendszer, amiben a jelöltek pontokat kapnak, 1 pontot egy első helyért, kettőt egy másodikért, és így tovább. A választást a legkevesebb ponttal rendelkező jelölt nyeri, a pontok száma adja az összesített preferenciasorrendet.

1.2.3. Példa. Vizsgáljuk meg a Borda rendszert az előző példán:

	3	4	4	6	2	1
1. hely	B	C	B	D	B	E
2. hely	C	A	D	C	E	A
3. hely	A	D	C	A	A	D
4. hely	D	B	A	E	C	B
5. hely	E	E	E	B	D	C

A: 59 pont
 B: 59 pont
 C: 47 pont
 D: 51 pont
 E: 84 pont

Így a Borda rendszer szerint a C jelölt a nyertes, az összesített preferenciasorrend a következő:
 $C \succ D \succ A = B \succ E$.

Ideális esetben egy választási rendszer győztese fej-fej melletti választásokban legyőzné az összes másik jelöltet. Ha létezik ilyen jelölt, akkor őt Condorcet győztesnek nevezzük. Ezt majd később egy kritériumban megköveteljük, az eddig tárgyalt rendszerek egyébként nem biztosítják azt, hogy ha létezik Condorcet győztes, akkor minden esetben ő lesz a választás győztese. Azonban nem mindig létezik ilyen jelölt. Több rendszer alapul páronkénti összehasonlításokra, ezeket Condorcet rendszereknek hívjuk. Most egy ilyen bemutatunk.

1.2.4. Definíció. A Copeland rendszerben páronként kiértékeljük az összes jelöltet egymással. A páronkénti összehasonlítás nyertese kap 1 pontot, döntetlen esetében 1/2 pontot kap mindkét jelölt. Az összesített preferenciasorrendet a pontok száma határozza meg.

1.2.4. Példa. Vizsgáljuk meg Copeland rendszerét az eddig használt példán:

	3	4	4	6	2	1
1. hely	B	C	B	D	B	E
2. hely	C	A	D	C	E	A
3. hely	A	D	C	A	A	D
4. hely	D	B	A	E	C	B
5. hely	E	E	E	B	D	C

Copeland rendszerében a választások eldöntésére konstruálunk egy páronkénti összehasonlító mátrixot.

	A	B	C	D
A	-	A nyer B ellen	A nyer C ellen	A nyer D ellen
B	B nyer A ellen	-	B nyer C ellen	B nyer D ellen
C	C nyer A ellen	C nyer B ellen	-	C nyer D ellen
D	D nyer A ellen	D nyer B ellen	D nyer C ellen	-

Összeszámoljuk a preferenciátáblázatból, hogy hány olyan szavazat érkezett, ami A-t magasabb helyre sorolta mint B-t. Ez kerül az "A nyer B ellen" cellába. Ugyanezt elvégezzük azokra, amik B-t helyezték magasabbra. Ez kerül a "B nyer A ellen cellába". Ezt elvégezzük minden lehetséges jelöltpárosításra.

Példánkban az összehasonlító mátrix így fog kinézni:

	A	B	C	D	E
A	-	11	3	<u>10</u>	17
B	9	-	<u>10</u>	9	13
C	17	<u>10</u>	-	9	17
D	<u>10</u>	11	11	-	17
E	3	7	3	3	-

Az összehasonlítások nyerteseit félkövérrel jelöltük, a döntetleneket aláhúzással.

Így a pontok a következők:

A: 2 1/2 pont

B: 1 1/2 pont

C: 2 1/2 pont

D: 3 1/2 pont

E: 0 pont

Tehát az összesített preferenciasorrend a következő: $D \succ A = C \succ B \succ E$. Látszódik, hogy D nem egy Condorcet-győztes, azonban Copeland rendszere a szavazás nyerteseként hozta ki.

A Condorcet-rendszerek rávezetnek minket a szavazórendszerek elméletének egyik legelső fontos eredményére, a Condorcet-paradoxon létezésére. Ezt majd egy későbbi fejezetben részletezzük.

1.3. Kritériumok ordinális rendszerekre

Mi alapján tudjuk értékelni a felsorolt választási rendszereket? Bevezetünk olyan kritériumokat, melyeket egy ideális szavazórendszernek teljesítenie kéne.

1.3.1. Definíció. A többségi kritérium szerint, ha egy jelölt az 1. helyes szavazatok többségét szerzi, akkor ennek a jelöltnek kell lennie a nyertesnek.

Ez egy nagyon egyértelmű feltétel. Ha létezik ilyen jelölt, nem létezhet másik jelölt, akit a szavazók többsége jobban preferálna. Azonban van rendszer, ami ezt nem teljesíti.

1.3.2. Definíció. A Condorcet kritérium szerint, ha létezik jelölt, aki a jelöltek páronkénti összehasonlításában minden másik jelölt ellen nyer, akkor ennek a jelöltnek kell lennie a győztesnek.

A Condorcet kritérium megköti, hogy ha a választáson létezik Condorcet-győztes, akkor a nyertesnek ennek a jelöltnek kell lennie.

1.3.3. Definíció. A monotonicitási kritérium szerint, ha a szavazók megváltoztatják a preferenciasorrendüket, ahol egy jelöltet előbbre sorolnak, akkor ez nem befolyásolhatja negatívan a jelölt pozícióját az összesített preferenciasorrendben.

Intuitív feltétel, ha egy jelöltet erősebben preferálnak, akkor ez a jelöltnek csak a javára lehet.

1.3.4. Definíció. Az IIA kritérium (independence of irrelevant alternatives) szerint A és B relatív rangsorolása az összesített preferenciasorrendben független egy $C \neq A, \neq B$ jelölt jelenlététől a választásban, azaz A és B relatív eredménye ugyanaz, ha C részt vesz a választásban, és ha nem.

Ez is egy elég intuitív feltétel, azonban látni fogjuk, hogy az eddig vizsgált rendszerek egyike sem teljesíti.

Vizsgáljuk meg, hogy az eddig bemutatott szavazási rendszerek hogyan teljesítik a felsorolt kritériumokat, először a többségi kritériumot.

A pluralitás, és IR rendszerek triviálisan teljesítik a többségi kritériumot. A Copeland rendszer is ugyanúgy megfelel ennek, mivel ha létezik Condorcet-győztes, akkor ezt fogja kiválasztani, és ha létezik többségi nyertes, akkor ő Condorcet-győztes is.

1.3.1. Állítás. A Borda rendszer nem felel meg a többségi kritériumnak.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a következő példát:

	51	25	10	14
1. hely	A	B	D	C
2. hely	B	D	B	B
3. hely	C	C	C	D
4. hely	D	A	A	A

A: $51 * 1 + 25 * 4 + 10 * 4 + 14 * 4 = 247$ pont

B: $51 * 2 + 25 * 1 + 10 * 2 + 14 * 2 = 175$ pont

C: $51 * 3 + 25 * 3 + 10 * 3 + 14 * 1 = 272$ pont

D: $51 * 4 + 25 * 2 + 10 * 1 + 14 * 3 = 306$ pont

Így az összesített preferenciasorrend a következő: $B \succ A \succ C \succ D$.

Azonban a többségi kritérium szerint a nyertesnek az A jelöltnek kellett volna lennie, mivel a szavazók több mint felének az első preferenciája volt. Tehát a Borda rendszer nem teljesíti a többségi kritériumot. $\square$

1.3.2. Állítás. Az IR rendszer nem felel meg a monotonicitási kritériumnak.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a következő példát:

	37	22	12	29
1. hely	A	B	B	C
2. hely	B	C	A	A
3. hely	C	A	C	B

C kapta a legkevesebb 1. preferenciát, tehát az első fordulóban kiesik, vegyük ki a preferenciátáblázatból.

	66	34
1. hely	A	B
2. hely	B	A

Ezen a választáson az IR preferenciasorrend a következő: $A \succ B \succ C$

Nézzük meg, mi történik, ha 10 B $\succ$ A $\succ$ C szavazó meggondolja magát, és az A jelöltet sorolják első helyre. Ez esetben a preferenciátáblázat a következő:

	47	22	2	29
1. hely	A	B	B	C
2. hely	B	C	A	A
3. hely	C	A	C	B

Így B fog kiesni az első körben, vegyük ki a preferenciátáblázatból:

	49	51
1. hely	A	C
2. hely	C	A

Így az összesített preferenciasorrend a következő: $C \succ A \succ B$. Intuitívan azt vártuk a második példától, hogy mivel A eleve megnyerte az első választást, és most még több első preferenciát kapott, az eredmény változatlan lesz. Ez következne a monotonocitási kritériumból, de ahogy látjuk az IR rendszer ezt nem teljesíti. $\square$

1.3.3. Állítás. A pluralitás, IR, Borda rendszerek mind megsértik a Condorcet kritériumot.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a következő választást:

	342	214	298
1. hely	A	B	C
2. hely	B	C	D
3. hely	C	D	B
4. hely	D	A	A

Összesített preferenciasorrendek a különböző választási rendszerek szerint:

Pluralitás: $A \succ C \succ B \succ D$

IR: $C \succ A \succ B \succ D$

Borda: $C \succ B \succ A \succ D$

Készítsük el az összehasonlító mátrixot:

	A	B	C	D
A	-	342	342	342
B	512	-	556	556
C	512	298	-	854
D	503	298	0	-

Látszódik, hogy B egy Condorcet-győztes, azonban egyik rendszer szerint se ő a választás nyertese. Ezáltal a szavazórendszerek mind megsértik a Condorcet kritériumot. $\square$

1.3.4. Állítás. A pluralitás, IR, Borda, és Copeland rendszerek mind megsértik az IIA kritériumot.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a következő választást:

	6	5	7	4
1. hely	D	A	C	B
2. hely	A	C	B	D
3. hely	C	B	D	A
4. hely	B	D	A	C

Összesített preferenciasorrendek a különböző választási rendszerek szerint:

Pluralitás: $C \succ D \succ A \succ B$

IR: $C \succ D \succ A \succ B$

Borda: $C \succ A \succ D \succ B$

Copeland: $C \succ A = B \succ D$

Távolítsuk el a D jelöltet a választásból. Ez esetben a preferenciátáblázat a következő:

	11	7	4
1. hely	A	C	B
2. hely	C	B	A
3. hely	B	A	C

Így az összesített preferenciasorrendek a következők:

Pluralitás: $A \succ C \succ B$

IR: $A \succ C \succ B$

Borda: $A \succ C \succ B$

Copeland: $A \succ C \succ B$

Látható, hogy a példán mindegyik választási rendszerben sérült az IIA kritérium. □

Később belátunk ennél egy általánosabb eredményt is, miszerint semmilyen ordinális egygyer-
teses rendszer nem teljesíti az IIA kritériumot.

Foglaljuk össze a vizsgált kritériumokat és rendszereket egy táblázatban:

Szavazási rendszer	Többségi	Condorcet	Monotonicitás	IIA
Pluralitás	Teljesíti	Nem Teljesíti	Teljesíti	Nem Teljesíti
IR	Teljesíti	Nem Teljesíti	Nem Teljesíti	Nem Teljesíti
Copeland	Teljesíti	Teljesíti	Teljesíti	Nem Teljesíti
Borda	Nem Teljesíti	Nem Teljesíti	Teljesíti	Nem Teljesíti

2. fejezet

Egynyertes kardinális rendszerek

2.1. Kardinális rendszerek bevezetése

Ebben a fejezetben ugyanúgy egynyertes rendszerekről beszélünk, azonban a választási rendszerek "bemenetei" nem ordinális listák, hanem numerikus pontozások minden egyes jelöltre. Ez sok esetben a választók által "árnyaltabb" vélemények kifejezésére alkalmas. A fejezet alapdefiníciói a [2]-es forrásból származnak.

2.1.1. Definíció. A pontozási szavazás rendszerében a szavazók numerikus pontokat adnak minden jelöltre egy adott $H = \{i \in \mathbb{Z} : a \leq i \leq b\}$ halmazból, $a, b \in \mathbb{Z}$. Az összesített preferenciasorrendet az adott jelöltekre érkezett pontok összege határozza meg.

Sok esetben a szavazatok numerikus összegei helyett az átlagot közlik, ez ugyanis nem befolyásolja a választás eredményét, mivel a numerikus átlag csak az összeg elosztva a szavazók számával.

2.1.1. Példa. Vizsgáljuk meg a pontozási szavazás rendszerét az alábbi példán. 3 jelöltünk van, 11 szavazónk, $H = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 10\}$. A preferenciátáblázat a következő:

	5	2	3	1
A	4	3	0	7
B	9	6	9	3
C	2	10	3	4

$$A: 5 * 4 + 2 * 3 + 3 * 0 + 1 * 7 = 34$$

$$B: 5 * 9 + 2 * 6 + 3 * 9 + 1 * 3 = 87$$

$$C: 5 * 2 + 2 * 10 + 3 * 3 + 1 * 4 = 43$$

Az összesített preferenciasorrend a következő: $B \succ C \succ A$.

2.1.2. Definíció. A beleegyezési szavazás rendszerében két lehetséges pontot lehet adni egy jelöltre, 0-t és 1-et. Ez felfogható úgy, hogy a szavazó az adott jelöltet támogatja, vagy nem támogatja. A szavazó bármely számú jelöltet támogathat, esetleg az összeset is, vagy egyiket se. Az összesített preferenciasorrendet az adott jelöltekre adott szavazatok összege határozza meg, a győztes a legtöbb szavazatot kapó jelölt.

2.1.2. Példa. Vizsgáljuk meg a beleegyezési szavazást a következő példán. Legyen 80 szavazónk, a jelöltek A, B, és C. A preferenciátáblázat a következő:

	15	13	12	8	20	12
A	1	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	1	0
C	0	0	1	0	1	1

$$A: 15 * 1 + 13 * 1 + 12 * 1 + 8 * 0 + 20 * 0 + 12 * 0 = 40$$

$$B: 15 * 0 + 13 * 1 + 12 * 0 + 8 * 1 + 20 * 1 + 12 * 0 = 41$$

$$C: 15 * 0 + 13 * 0 + 12 * 1 + 8 * 0 + 20 * 1 + 12 * 1 = 44$$

Az összesített preferenciasorrend a következő: $C \succ B \succ A$. Így a nyertes a C.

2.2. Kritériumok kardinális rendszerekre

Következőleg vizsgáljunk meg egy pár szavazórendszer kritériumot. A vizsgálandó kritériumok azonosak az előző fejezetben tárgyaltakkal, azonban mivel ezek kardinális rendszerek, más definíciók szükségesek.

2.2.1. Definíció. A kardinális többségi kritérium szerint, ha egy jelölt a szavazatok többségétől maximális pontszámot kap, akkor ennek a jelöltnek kell lennie a nyertesnek, feltéve, ha nincs másik ilyen jelölt. Ha több ilyen jelölt létezik, a nyertesnek ezek közül kell kikerülnie.

Ez a többségi kritérium egy gyengébb megkötés, mint amit ordinális rendszereknél vizsgáltunk. Erre szükség van, mivel egy szavazónak nem szükséges egyértelmű első preferenciát jelölnie, ezért nehezebb "egyértelmű" többségi nyertest találni.

Most a kardinális rendszerekre a Condorcet kritérium egy gyengített változatával fogunk foglalkozni. Azt mondjuk, hogy egy A jelölt **többségben preferált** B ellen, ha a szavazók többsége magasabb pontszámot adott A-nak, mint B-nek. Egy jelölt akkor többségi Condorcet győztes, ha többségben preferált minden másik jelölttel szemben.

2.2.2. Definíció. A többségi Condorcet kritérium szerint, ha létezik egy jelölt, aki többségben preferált minden másik jelölttel szemben, akkor ennek a jelöltnek kell lennie a rendszer nyertesének.

Kiértékelhető lenne az ordinális rendszereknél megismert erősebb Condorcet kritérium is, viszont ahhoz szükséges lenne a szavazók teljes preferenciasorrendje is. Mivel ezt az információt a kardinális rendszerek nem kezelik, most ezzel a gyengébb megkötéssel fogunk foglalkozni.

2.2.3. Definíció. A monotonicitási kritérium szerint, ha a szavazók egy adott jelöltet magasabbra pontoznak, akkor ezen jelölt nyerési esélyeit ez nem befolyásolhatja negatívan, illetve ha alacsonyabban pontozzák, akkor ez nem befolyásolhatja pozitívan.

2.2.4. Definíció. Az IIA kritérium (independence of irrelevant alternatives) szerint A és B relatív rangsorolása az összesített preferenciasorrendben független egy $C \neq A, \neq B$ jelölt jelenlététől a választásban, azaz A és B relatív eredménye ugyanaz, ha C részt vesz a választásban, és ha nem.

Az IIA kritérium definíciója egy az egyben megegyezik kardinális és ordinális rendszereknél. Ebben a kritériumban rejlik talán a leglényegesebb különbség a két rendszertípus között. Az előző fejezetben már beláttuk, hogy a vizsgált ordinális rendszereink közül egyik sem teljesíti ezt a kritériumot. Később be fogjuk bizonyítani Arrow tételét, amely a választási rendszerek elméletének egyik legjelentősebb eredménye, miszerint nem létezik olyan ordinális rendszer, ami ezt a kritériumot teljesítené. Ezzel szemben a kardinális rendszerek ezt a kritériumot teljesítik, ezt be is fogjuk bizonyítani. A kardinális rendszerek támogatói szerint ez egy lényeges előnyük az ordinális rendszerekkel szemben.

Következőleg vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált kritériumok hogyan érvényesülnek a vizsgált szavazórendszerekben.

2.2.1. Állítás. A pontozási szavazás rendszere nem teljesíti a kardinális többségi kritériumot.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a következő példát. $H = \{i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq 10\}$, 3 jelöltünk van, A, B és C.

A szavazatok a következők:

	11	7	2
A	10	0	0
B	6	6	10
C	0	10	6

Az eredmények a következők:

$$A: 11 \cdot 10 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 110$$

$$B: 11 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 128$$

$$C: 11 \cdot 0 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 80$$

Látható, hogy a példán A egy többségi győztes, de a szavazási rendszer szerint B a választás nyertese. Ezek szerint a pontozási szavazás rendszere nem teljesíti a kardinális többségi kritériumot. $\square$

Látható, hogy míg a társadalom többsége az A jelöltet támogatná elsősorban, a társadalom ezen szegmense ugyanúgy szimpatizál B-vel is. B kapta a legkevesebb maximális szavazatot, de mivel mindhárom jelölt "szavazótábora" ki tud egyezni benne, ő lesz a választás győztese.

2.2.2. Állítás. A beleegyezési rendszer teljesíti a kardinális többségi kritériumot.

Bizonyítás. A beleegyezési rendszerben a maximális pontszám, amit a szavazó adhat egy jelöltnél, az 1. Nyilván, ha egy jelölt a szavazók többségétől kapott szavazatot, akkor többségi győztes

lesz. Ha létezik ilyen, akkor biztosan több pontot kapott összességében, mint a nem többségi győztes jelöltek. Ha csak egy többségi győztes van, biztosan ő lesz a választás nyertese. Ha több ilyen van, akkor a nyertes biztosan közülük fog kikerülni, mégpedig ez a legtöbb pontot elérő többségi győztes lesz. □

2.2.3. Állítás. A pontozási rendszer nem teljesíti a többségi Condorcet kritériumot.

Bizonyítás. Vegyük figyelembe újra az előző bizonyításból származó példánkat:

	11	7	2
A	10	0	0
B	6	6	10
C	0	10	6

Ebben a példában belátható, hogy A egy Condorcet győztes. Készítsük el az összehasonlító mátrixot.

	A	B	C
A	-	11	11
B	9	-	13
C	9	7	-

A megnyeri B-vel és C-vel szemben is a páronkénti összehasonlításokat, tehát egy többségi Condorcet győztes. Azonban, ahogyan az előző példában is láttuk, a pontozási szavazórendszer szerint B a nyertes jelölt. Ezáltal a pontozási rendszer nem teljesíti a Condorcet kritériumot. □

2.2.4. Állítás. A pontozási és beleegyezési szavazásórendszerek teljesítik az IIA kritériumot.

Bizonyítás. Legyen A és B jelöltünk. A szavazók pontozzák őket a felsorolt rendszerek szerint az őszinte belátásuk alapján. Legyen ez az I választás. Vegyünk hozzá a választáshoz egy C jelöltet. Pontozzák a szavazók őt is, őszinte belátásuk alapján. Legyen ez a II választás. C jelenléte és nem jelenléte nem befolyásolja A és B egymáshoz viszonyított választási eredményét, mivel I-es, és II-es esetben is ugyanannyi ponttal rendelkeznek. Távolítsuk el II-ből B-t, legyen ez a III választás. Ekkor II-ben és III-ban A és C relatív eredménye ugyanúgy nem változik, mivel ugyanannyi pontjuk lesz. Ez a gondolatmenet tetszőleges számú jelöltre működik. Ezáltal a felsorolt szavazási rendszerek teljesítik az IIA kritériumot. □

Fontos megjegyezni, hogy ez a bizonyítás arra a feltevésre hagyatkozik, hogy a szavazók az őszinte preferenciáik alapján szavaznak. A taktikai szavazással egy későbbi fejezetben fogunk foglalkozni, de nyilvánvaló, hogy más jelöltek jelenléte befolyásolni tudja a szavazók döntéseit, de matematikai formalitásban véve a kritérium teljesül, mivel feltesszük, hogy egy szavazó szavazata minden adott jelöltre független egymástól.

2.2.5. Állítás. A pontozási és beleegyezési rendszerek teljesítik a monotonicitási kritériumot.

Bizonyítás. Könnyű átgondolni. Mindkét rendszerben, ha egy szavazó pozitív irányba változtatja egy adott jelöltre adott pontszámát, akkor ez a jelölt összesített pontszámát növeli. Ezáltal ez csak pozitívan befolyásolhatja a végleges eredményét. □

Foglaljuk össze a vizsgált kritériumokat és szavazási rendszereket egy táblában:

Szavazási rendszer	Többségi	Condorcet	Monotonicitás	IAA
Pontozás	Nem Teljesíti	Nem Teljesíti	Teljesíti	Teljesíti
Beleegyezési	Teljesíti	Teljesíti	Teljesíti	Teljesíti

3. fejezet

Többsnyertes rendszerek

3.1. Többsnyertes rendszerek bevezetése

Most megvizsgálunk több olyan szavazási rendszert, ami nem egy darab nyertes kihirdetésére szolgál, pl. legyen ez egy parlament kiválasztása, vagy egy cégen belül egy többtagú bizottság.

Sok országban nem használnak többsnyertes rendszereket. Ekkor a parlamentjük választása sok területi egynyertes választásból áll, ezen választókerületek nyertesei fogják a képviselői mandátumokat betölteni. Ezekben az országokban jellemző a választási reformok követelése, mivel ezekben a legkevésbé reprezentatív a kimenetel a választók akaratához képest.

Először a többsnyertes választások legegyszerűbb formájával, az arányos listás szavazással fogunk foglalkozni. Ez esetben nem léteznek választókerületek, minden szavazó egy egész országos listára szavaz, és a pártlistákra leadott szavazatok döntik el a képviselőtestület összetételét. Ezen rendszer ellen leggyakrabban megfogalmazott kritika az, hogy lényegében ellehetetleníti az országos szintű független politizálást, a rendszer alapvetésnek tekinti a politikai pártok létezését. Előnye viszont, hogy csakis a pártok valós társadalmi támogatottságától függ a képviselőtestület összetétele, és széles koalíciók kötésére kötelezi a kormányzó pártokat, ezáltal elviekben szélesebb palettájú politikai csoportok tudják érdekeiket képviselni országos szinten.

3.1.1. Definíció. Arányos pártlistás szavazáson a szavazók egy pártra, vagy pártszövetségre adják le szavazatukat. Legyen $N \geq 2$ a pártok száma, $v = (v_1, \dots, v_N)$ ahol v_i az i -edik pártra érkezett szavazatok száma, az összes szavazat száma $V = v_1 + \dots + v_N$. Legyen S az összes mandátum száma, $s = (s_1, \dots, s_N)$ az adott pártok által elért mandátumok száma. Nyilvánvaló, hogy $S = s_1 + \dots + s_N$

3.2. Az elosztás problémája

A pártlistás szavazások során felmerül a mandátumok elosztásának a kérdése. A szavazók száma értelemszerűen jóval több, mint az elnyerhető mandátumok száma, és mivel törtmandátum nem létezik, kell valamilyen átlátható, reprodukálható eljárás, amivel "egészszámosítjuk" a kiosztandó mandátumarányokat. Ehhez szükséges pár kritériumot definálnunk, hogy az elosztás igazságos legyen. Az elosztási eljárások leírásai a [3]-as forrásból származnak, a magyarországi

adatok a valasztas.hu-n elérhetők.

Fontos megjegyezni, hogy ezeknek a mandátumelosztó módszereknek az első motivációja egyébként nem az arányos pártlistás szavazás volt. Föderatív államokban lényeges kérdés, hogy hogyan osztjuk el a képviselőtestület mandátumait a különböző államok között, és ezen eljárások fő motivációja ez a kérdéskör volt.

3.2.1. Definíció. A h_i Hare-kvóta az i -edik, $1 \leq i \leq N$ pártra a következő:

$$h_i = \frac{v_i \cdot S}{V}$$

Ezen kívül még definiáljuk a $h_i^U = \lceil h_i \rceil$ Hare-maximumot, ami egyenlő a Hare-kvóta felső egészrészével, illetve a $h_i^L = \lfloor h_i \rfloor$ Hare-minimumot, ami az alsó egészrészével.

A Hare-kvóta segítségével definiálhatjuk a következő kritériumot az igazságos mandátumelosztásra.

3.2.2. Definíció. A Hare kritérium szerint semelyik párt nem szerezhethet kevesebb mandátumot, mint a Hare minimuma, illetve többet, mint a Hare maximuma. Tehát, minden $1 \leq i \leq N$, $v_i \in V$ pártra teljesül a következő:

$$h_i^L \leq s_i \leq h_i^U$$

3.2.3. Definíció. A monotonicitás kritériuma szerint, a pártok bármely A és B párjára, ha A több szavazatot kapott, mint B, akkor B nem kaphat több mandátumot, mint A.

$$v_A > v_B \implies s_A \geq s_B$$

Kettő elosztási eljárást fogunk megvizsgálni.

3.2.4. Definíció. A Hamilton eljárás, vagy más néven a legnagyobb maradékok eljárása szerint kiosztjuk a pártoknak a Hare minimumukkal egyenlő mandátumok számát. Ezután kivonjuk minden párt Hare-minimumát a Hare-kvótájukból, majd a legnagyobb maradékokkal rendelkező pártok megszerzik a maradék mandátumokat.

3.2.5. Definíció. A D'Hondt eljárásban elkészítünk egy ú.n. D'Hondt mátrixot. Az oszlopok a különböző pártoknak felelnek meg, az 1. sorba a szavazataik számát írjuk 1-gyel osztva, a 2.-ba 2-vel, és így tovább. Ezután vesszük az ezen osztások S legnagyobb értékét, és ez alapján kapjuk meg az elosztást.

A D'Hondt eljárás nem teljesíti a Hare kritériumot, mert más eljáráson, osztásokon alapul. Jellemzően a Hamilton eljárás kedvezőbb a kisebb pártok számára, míg a D'Hondt a nagyobbakat részesíti előnyben.

Gyakori, hogy a pártlistás szavazásokon meghatároznak egy bejutási határt, amit a pártoknak szükséges elérni mandátumszerzéshez. Ebben az esetben csak ezek a pártok vesznek részt a mandátumelosztási eljárásban.

3.2.1. Példa. Vizsgáljuk meg ezeket az elosztási eljárásokat az alábbi példán. Használjuk fel a 2024-es magyarországi európai parlamenti pártlistás szavazás eredményeit, és vizsgáljuk meg, hogy a két különböző rendszer, bejutási ponthatárral és nélküle milyen mandátumeloszlást eredményezne a 21 mandátumra. A szavazatok számai a következők voltak:

Fidesz	TISZA	DK	MHM	MM	MKKP	Jobbik	LMP	2RK	MMN	MEMO
2048211	1352699	367162	306404	169082	163960	45404	39646	30961	29285	16806

Nézzük meg mi lenne a Hamilton elosztás, bejutási küszöb nélkül. $V = 4569620$

	Fidesz	TISZA	DK	MHM	MM	MKKP	Jobbik	LMP	2RK	MMN	MEMO
Szavazatok	2048211	1352699	367162	306404	169082	163960	45404	39646	30961	29285	16806
Hare-kvóták	9,412	6,216	1,687	1,408	0,777	0,753	0,208	0,182	0,142	0,135	0,077
Hare-min	9	6	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Maradékok	0,412	0,216	0,687	0,408	0,777	0,753	0,208	0,182	0,142	0,135	0,077
Mandátumok ebből	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
Összes m.	10	6	2	1	1	1	0	0	0	0	0

D'Hondt bejutási küszöb nélkül:

	Fidesz	TISZA	DK	MHM	MM	MKKP	Jobbik	LMP	2RK	MMN	MEMO
1	2048211	1352699	306404	306404	169082	163960	45404	39646	30961	29285	16806
2	1024105.5	676349.5	183581	153202	84541	81980	22702	19823	15480.5	14642.5	8403
3	682737	450899.7	122387.3	102134.7	56360.7	54653.3	15134.7	13215.3	10320.3	9761.7	5602
4	512052.8	338174.8	91790.5	76601	42270.5	40990	11351.0	9911.5	7740.2	7321.2	4201.5
5	409642.2	270539.8	73432.4	61280.8	33816.4	32792	9080.8	7929.2	6192.2	5857	3361.2
6	341368.5	225449.8	61193.7	51067.3	28180.3	27326.7	7567.3	6607.7	5160.2	4880.8	2801
7	292601.6	193242.7	52451.7	43772	24154.6	23422.9	6486.3	5663.7	4423	4183.6	2400.9
8	256026.4	169087.4	45895.2	38300.5	21135.2	20495	5675.5	4955.8	3870.1	3660.6	2100.8
9	227579	150299.9	40795.8	34044.9	18786.9	18217.8	5044.9	4405.1	3440.1	3253.9	1867.3
10	204821.1	135269.9	36716.2	30640.4	16908.2	16396	4540.4	3964.6	3096.1	2928.5	1680.6
11	186201	122972.6	33378.4	27854.9	15371.1	14905.5	4127.6	3604.2	2814.6	2662.3	1527.8
12	170684.2	112724.9	30596.8	25533.7	14090.2	13663.3	3783.7	3303.8	2580.1	2440.4	1400.5

Így a mandátumok a következők:

Fidesz	TISZA	DK	MHM	MM	MKKP	Jobbik	LMP	2RK	MMN	MEMO
11	7	2	1	0	0	0	0	0	0	0

Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a mandátumeloszlás, ha bevezetünk egy 5%-os bejutási határt.

A Hamilton eljárásban az 5% alatt végző pártokat teljesen eltávolítjuk az eljárásból, V a bejutó pártok szavazói összegével lesz egyenlő.

	Fidesz	TISZA	DK	MHM
Szavazatok	2048211	1352699	367162	306404
Hare-kvóták	10,55	6,97	1,89	1,57
Hare-min	10	6	1	1
Maradékok	0,55	0,97	0,89	0,57
Mandátumok ebből	0	1	1	0
Összes m.	10	7	3	1

A D'Hondt eljárásban a mátrixból elhagyjuk a nem bejutó pártokat.

	Fidesz	TISZA	DK	MHM
1	2048211	1352699	306404	306404
2	1024105.5	676349.5	183581	153202
3	682737	450899.7	122387.3	102134.7
4	512052.8	338174.8	91790.5	76601
5	409642.2	270539.8	73432.4	61280.8
6	341368.5	225449.8	61193.7	51067.3
7	292601.6	193242.7	52451.7	43772
8	256026.4	169087.4	45895.2	38300.5
9	227579	150299.9	40795.8	34044.9
10	204821.1	135269.9	36716.2	30640.4
11	186201	122972.6	33378.4	27854.9
12	170684.2	112724.9	30596.8	25533.7

Így a mandátumok a következők:

Fidesz	TISZA	DK	MHM
11	7	2	1

Megfigyelhető, hogy ez a mandátumeloszlás ugyanaz, mint amit bejutási küszöb nélkül kapunk. A D'Hondt eljárás létrehoz egy effektív bejutási küszöböt, ami $1/S$. A példánkban nem volt párt, ami $1/S$ és 5% között végzett, ezért a végeredmény ugyanaz.

3.3. Hibrid rendszerek

A hibrid rendszerek leírásai a [4]-es forrásból származik, a magyarországi adatok a valasztas.hu-n elérhetők. Az arányos pártlistás szavazás egyik hátránya, hogy nincsen országos szinten helyi képviselő. Ez kisebb országok esetén nem akkora probléma, ahol jellemzően kisebb különbségek vannak más területeken élők életmódja és gondolkozásai között. Azonban, nagyobb, heterogénebb országoknál ez nagy hátránnak számíthat, főleg ha az ország különböző területein élnek nemzeti kisebbségek is.

Korábban már beszéltünk arról, hogy a választókerületekre osztott egynyertes rendszereknek lehetnek reprezentációs gondjai, ezért sok országban, mint például nálunk Magyarországon is, egy hibrid rendszert alkalmaznak, amelyben megtartják a választókerületi helyi képviselőket, és emellett arányos, listás módszerekkel ezeket kibővítik, hogy a teljes lakosság szempontjából reprezentatívabb legyen a végleges képviselőtestület.

Ezeknek a hibrid rendszereknek sok változata van. Lényegében ahány országban használnak ilyen hibrid rendszert, annyi változata van. Viszont mindegyikük kettő fő osztályba sorolható, ezeket nevezzük **párhuzamos**, illetve **kompensációs** rendszereknek. Ezeket most definiáljuk:

3.3.1. Definíció. A **párhuzamos** (vagy más néven mixed-member majoritarian) hibrid szavazói rendszerben a képviselőtestület mandátumai két típusúak. Egyiküket egyéni választókerületek nyertesei töltik be, másikat egy országos arányos pártlistás szavazás alapján osztják ki.

3.3.2. Definíció. A **kompensációs** (mixed-member proportional) hibrid szavazói rendszerben ugyanúgy két részre osztható a képviselőtestület mandátumai. Az egyéni választókerületi nyertesek ugyanúgy betöltik az elnyert mandátumaikat, azonban a pártlistás mandátumokat nem önmagukban osztják ki arányosan, hanem olyan módon, hogy az egész képviselőtest összetétele megegyezzen egy országos pártlistás szavazás eredményével.

Most ebbe a két fő családba osztjuk a hibrid rendszereket, de a gyakorlatban ezek a rendszerek sokkal több pontban térhetnek el egymástól. Egyrészt az egynyertes és többnyertes mandátumok aránya változhat. Másrészt a szavazók vagy egy szavazattal szavaznak mindkettőre, vagy két különálló szavazatot kapnak. Ha két különálló szavazatot kapnak, az egynyertes szavazatok még mindig befolyásolhatják az arányos listát vesztés-, illetve győzteskompensáció által. Az egyszerűség kedvéért most példában csak a legegyszerűbb formájában mutatjuk be a párhuzamos és kompensációs rendszereket.

3.3.1. Példa. Példaként vesszük a 2022-es magyarországi országgyűlési választások adatait. Az összes mandátum száma 199, ebből 106 egyéni választókerület, 93 listás. Két esetet fogunk bemutatni, amikor ezek a listás mandátumok párhuzamos, illetve kompensációs módon vannak kiosztva.

Az egyéni választókerületek eredményei a következők:

Pártszövetség	Fidesz-KDNP	Egységben Magyarorszáért
Mandátumok száma	87	19

Először vizsgáljuk meg a párhuzamos hibrid rendszert.

93 kiosztandó mandátumunk van. Alkalmazzuk a Hamilton eljárást 5%-os bejutási küszöbvel, a motiváció emögött a könnyebb olvashatóság. Viszont fontos megjegyezni, hogy Magyarországon egyébként a D'Hondt eljárást alkalmazzuk listás mandátumok kiosztására.

	Fidesz	EM	MHM
Szavazatok	4 390 962	3 526 480	639 551
Hare-kvóta	47,72	38,33	6,95
Hare-min	47	38	6
Maradékok	0,72	0,33	0,95
Mandátumok ebből	1	0	1
Összes m.	48	38	7

Ezeket a listás mandátumokat egyszerűen hozzáadjuk az egyéni választókerületek eredményeihez, tehát a parlamenti mandátumok véglegesen a következők lesznek:

Pártszövetség	Fidesz-KDNP	Egységben Magyarországért	MHM
Mandátumok száma	135	57	7

Most vizsgáljuk meg a kompenzációs szavazást. Kiszámítjuk a listás szavazás esetén az összes 199 mandátumra vonatkozó Hare-kvótákat.

	Fidesz	EM	MHM
Szavazatok	4 390 962	3 526 480	639 551
Hare-kvóta	102,12	82,01	14,87
Hare-min	102	82	14
Maradékok	0,12	0,01	0,87
Mandátumok ebből	0	0	1
Összes m.	102	82	15

Ez lenne a kompenzációs szavazás által meghatározott parlamenti mandátumok száma. Ekkor, a kiosztott listás mandátumok száma, figyelembe véve az egyéni választások eredményeit:

Pártszövetség	Fidesz-KDNP	Egységben Magyarországért	MHM
Mandátumok száma	15	63	15

Ezután a végleges mandátumok száma:

Pártszövetség	Fidesz-KDNP	Egységben Magyarországért	MHM
Mandátumok száma	102	82	15

4. fejezet

Taktikai szavazás

4.1. Néhány példa taktikai szavazásra

Először megvizsgálunk pár példát a korábban bevezetett szavazórendszereinkből, amikben a szavazók taktikai viselkedést mutatnak. Látni fogjuk, hogy a szavazók a rendszerek által taktikai viselkedésre vannak ösztönözve, annak érdekében, hogy az őszinte preferenciáik a legnagyobb mértékben érvényesülni tudjanak.

Korábban tárgyaltuk már a pluralitás rendszerében ismert spoiler hatást. Ennek elkerülésének érdekében a "spoiler" jelölt támogatói arra vannak ösztönözve, hogy a 2 esélyes jelölt közül azt támogassák, amely közelebb áll a saját értékeikhez. Vizsgáljuk meg ezt a jelenséget a következő példán:

4.1.1. Példa. Legyenek A , B , és C a jelöltjeink, és legyen 27 szavazónk. A preferenciatáblázatunk a következő:

	12	10	5
1. hely	B	A	C
2. hely	A	C	A
3. hely	C	B	B

Látható, hogy A és B a két esélyes jelöltünk, és C egy spoiler jelölt A számára. Ha az összes szavazó őszinte preferenciájuk alapján szavazna, akkor B jelölt lenne a győztes, viszont látszik, hogy A egy Condorcet győztes. Nyilvánvaló, hogy C szavazói a rendszer által arra vannak ösztönözve, hogy A -ra szavazzanak, ezáltal a valós szavazás a legnagyobb eséllyel inkább erre fog hasonlítani:

	12	14	1
Szavazat	B	A	C

Ezt a fajta taktikai szavazást szokás **kompromisszumszavazásnak** hívni. Látszódik, hogy a C -t preferáló szavazók többsége a kompromisszumjelöltre szavazott végül, így a végleges nyertes jobban megfelelt az őszinte preferenciájuknak. A C jelölt valós támogatottságán alul szerepelt.

Kardinális rendszerekre jellemző, hogy a szavazók az általuk preferált jelöltekre "túlszavaznak", a kevésbé preferáltakra alulszavaznak. Ezt szokták **bullet szavazásnak** is nevezni.

4.1.2. Példa. Vizsgáljuk meg a bullet szavazást egy beleegyezési szavazórendszeres példán.

Legyen 3 jelöltünk, A , B , C , és 35 szavazónk. Előző példánkhoz hasonlóan az A és C jelöltek szavazótáborában jelentős átfedés van. Összinte preferenciák a következők:

	3	15	2	15
A	1	0	0	1
B	0	1	0	0
C	0	0	1	1

Így az eredmények a következők:

A : 18 szavazat

B : 15 szavazat

C : 17 szavazat

Tehát az összesített preferenciasorrend a következő: $A \succ C \succ B$.

Így a választás nyertese A lenne. Azonban, míg nagy az átfedés A és C szavazótáborai között, a választók nagy részének van egy egyértelmű kedvence a kettő közül. Ha például 2 A , C szavazó, akik inkább C -t preferálnák, alkalmaznák a bullet taktikát C javára, a választás eredménye egészen más lehet:

	3	15	4	13
A	1	0	0	1
B	0	1	0	0
C	0	0	1	1

Így az eredmények a következők:

A : 16 szavazat

B : 15 szavazat

C : 17 szavazat

Így C lenne a választás nyertese. Ha sok választáson keresztül használjuk a beleegyezés rendszerét, akkor az A , C szavazók egyre nagyobb és nagyobb része próbálhatja alkalmazni a taktikát, sőt nagy valószínűséggel az A és C jelöltek kampányolnának is emellett. Széleskörű bullet szavazással a következő eredmény is elképzelhető:

	7	15	6	7
A	1	0	0	1
B	0	1	0	0
C	0	0	1	1

Így az eredmények a következők:

A: 14 szavazat

B: 15 szavazat

C: 13 szavazat

Az A, C szavazók "chicken game"-ében végül B kerekedhet ki győztesként, pedig a szavazók őszi preferenciái alapján ő a legkevésbé preferált jelölt.

A fenti példa nyilván érvényes más kardinális rendszerekre, például pontozási szavazáson őszi tétlenül alacsonyabb pontot adnak a 2. preferenciájuknak.

Következőleg vizsgáljunk meg egy példát a Borda rendszerben.

4.1.3. Példa. Legyen 5 jelöltünk, és 90 szavazónk. Az őszi preferenciatáblázat a következő:

	30	35	10	10	5
1. hely	A	B	C	D	E
2. hely	C	D	A	B	B
3. hely	B	A	B	A	A
4. hely	D	C	D	C	C
5. hely	E	E	E	E	D

Ha minden szavazó őszi szavazna, az eredmény a következő lenne:

$$A: 30 * 1 + 35 * 3 + 10 * 2 + 10 * 3 + 5 * 3 = 200$$

$$B: 30 * 3 + 35 * 1 + 10 * 3 + 10 * 2 + 5 * 2 = 185$$

$$C: 30 * 2 + 35 * 4 + 10 * 1 + 10 * 4 + 5 * 4 = 270$$

$$D: 30 * 4 + 35 * 2 + 10 * 4 + 10 * 1 + 5 * 5 = 265$$

$$E: 30 * 5 + 35 * 5 + 10 * 5 + 10 * 5 + 5 * 1 = 430$$

Látható, hogy A és B a két esélyes jelölt, emellett az A és C, illetve a B és D jelöltek szavazótáborai között jelentős átfedés van. Felismerve, hogy a jelenlegi állás szerint B lenne a győztes, az A, illetve C jelölteket támogató szavazók alkalmazzák a **temetés** taktikáját, a leadott szavazatok a következők lesznek:

	30	35	10	10	5
1. hely	A	B	C	D	E
2. hely	C	D	A	B	A
3. hely	D	A	D	A	B
4. hely	E	C	E	C	C
5. hely	B	E	B	E	D

Így az eredmények a következők:

- A: $30 \cdot 1 + 35 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 200$
 B: $30 \cdot 5 + 35 \cdot 1 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 265$
 C: $30 \cdot 2 + 35 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 270$
 D: $30 \cdot 3 + 35 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 225$
 E: $30 \cdot 4 + 35 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 390$

Így végezetül A nyeri a szavazást.

A Borda rendszer egyébként különösen érzékeny a taktikai szavazásra, a kompromisszumra és temetésre kifejezetten. Az IR rendszerre ezek a taktikák ugyanúgy érvényesek, de kevésbé erősek, mint a Bordában.

4.2. Egy racionális szavazói modell

Következőleg bevezetjük a Myerson-Weber modellt, amely egy racionális szavazói modell taktikai szavazásra. A modell fő célja a **szavazói egyensúlyok** leírása. A modell leírása a [5]-ös forrásból származik. **Szavazói egyensúly**nek nevezzük azt, amikor a szavazók a saját preferenciáik, és a jelöltek érzékelt esélyeik alapján szavaznak, és ezáltal egy általuk várt eredményt produkálnak.

Legyen k jelöltünk, akik számozottak, együtt alkotják a $K = \{1, 2, \dots, k\}$ halmazt. Egy adott szavazó preferenciáját egy $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ vektorral fejezünk ki, ahol v_i az $1 \leq i \leq k$ jelöltre leadott szavazatok száma. V lesz a lehetséges szavazatvektorok halmaza, például egy három jelöltes pluralitás szavazáson:

$$V = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Emellett, még definiálunk egy szavazóra egy $u = (u_1, \dots, u_k)$ hasznossági vektort, ahol u_i jelöli a szavazó hasznát, ha az i jelölt megnyeri a választást. Egy szavazó hasznossági vektora képviseli a szavazó típusát, és feltesszük, hogy létezik véges $T \subseteq \mathbb{R}^k$ halmaz, melyben benne van minden szavazó típusa. Legyen $f(u)$ az u típusú szavazók hányada.

Feltesszük, hogy minden szavazó a haszonmaximalizálás elvét követi, és ez alapján dönti el, hogy a V halmazból melyik szavazatot adja le. A feltevéseink szerint a szavazata csak akkor befolyásolja a javát, ha megváltoztatja a választás nyertesét. Tehát, ha a haszonmaximalizálás elvét szeretné követni, akkor meg kell becsülnie a valószínűségét annak, hogy bármilyen adott jelöltpárosítás elég közel áll-e egy holtversenyhez az első helyért, hogy az ő szavazata képes lenne változtatni a kimenetelen.

Legyen H az összes lehetséges (rendezetlen) jelöltpárosítások halmaza. Definiáljuk minden ij párra a p_{ij} pivotvalószínűséget, amely annak a valószínűsége (a szavazó megítélése alapján), hogy a két jelölt döntetlenben lesz az első helyért. Legyen $p = (p_{ij})_{ij \in H}$ a pivotvalószínűségek vektora.

Legyen $G(p, v, u)$ a haszonszerzés egy u típusú szavazóra, ha v a szavazatvektora, és p az érzékelt pivotvalószínűségeinek vektora. A feltevéseinkből következik, hogy:

$$G(p, v, u) = \sum_{ij \in H} p_{ij}(v_i - v_j)(u_i - u_j).$$

Tehát, minden ij jelöltpárra, ha $v_i > v_j$, akkor a v szavazatvektor benyújtásával a szavazó $p_{ij}(v_i - v_j)$ valószínűséggel változtatja meg a választás győztesét j -ről i -re, ami $u_i - u_j$ nettó haszonnyereséget eredményez neki. A haszonnyereségeket összeszorozzuk a hozzájuk illő valószínűségekkel, majd ezeket minden lehetséges jelöltpárra összeadjuk megkapjuk a teljes haszonszerzést. Ez leegyszerűsíthető a következő formára:

$$G(p, v, u) = \sum_{i \in K} v_i \sum_{j \neq i} p_{ij}(u_i - u_j).$$

A

$$\sum_{j \neq i} p_{ij}(u_i - u_j)$$

kifejezés i jelölt prospektív pontozása, u szavazótípussal, és p döntővalószínűségvektorral. Könnyen látható, hogy a pluralitás rendszerében a szavazó azzal maximalizálja $G(p, v, u)$ haszonszerzését, hogy arra a jelöltre szavaz, amelynek a legnagyobb a pontozása. Beleegyezési szavazásban $G(p, v, u)$ úgy maximalizálható, hogy minden olyan jelöltre voksol, akinek a pontozása pozitív. Borda rendszerében a pontok által meghatározott sorrendjében szavaz.

A választási eredmény egy μ valószínűségi eloszlás $V \times T$ felett, amely a típusonkénti szavazók viselkedését összesíti. Tetszőleges $v \in V$ és $u \in T$ -kre $\mu(v, u)$ az u típusú, v szavazatot leadó szavazók hányada az összes szavazóból. Tehát:

$$\mu(v, T) = \sum_{u \in T} \mu(v, u)$$

Innentől egy választást úgy tekintünk, mint nagy számú véletlen húzás μ -ból. Ha adott egy μ választási eredmény, akkor az i jelölt várható pontja:

$$S_i(\mu) = \sum_{v \in V} v_i \cdot \mu(v, T)$$

A várható pont az adott jelöltre leadott szavazatok várható hányadával egyenlő.

A várható győztes egy jelölt, akinek a várható pontozása maximális. $W(\mu)$ a várható győztesek halmaza μ választási eredményre.

Egy adott p pivotvalószínűségvektorra definiáljuk az $R(p)$ szavazói válasz halmazt, mely tartalmazza az összes választási eredményt, melyben a választók olyan szavazatokat adnak le, mely maximalizálja a hasznukat, feltéve, hogy p a közös érzékelt pivotvalószínűségük. Eddig azt tettük fel, hogy minden szavazó által érzékelt p pivotvalószínűségek egyéniek, azonban innentől azt tesszük fel, hogy ezek az egész szavazótáborra megegyeznek. Egy μ választási eredménye akkor és csak akkor van $R(p)$ -ben, ha $\forall v \in V, u \in T$ -re

$$\mu(v, u) > 0 \implies G(p, v, u) = \max_{w \in V} G(p, w, u)$$

Ha egy μ választási eredmény $R(p)$ -ben van, akkor azt mondjuk, hogy p **alátámasztja** μ -t.

Most már rátérhetünk a modell lényegére, a szavazói egyensúlyok leírására. Most karakterizáljuk a p pivotvalószínűség vektort egy szavazói egyensúlyban, ha (K, V, T, f) adottak.

Ha a szavazók képesek megjósolni az $(S_1(\mu), S_2(\mu), \dots, S_k(\mu))$ várható pontokat (például választás előtti felmérések alapján), akkor lesznek olyan pivotvalószínűségek, melyek lényegesen nagyobbak, vagy kisebbek lesznek másokhoz képest. Ha adott egy μ választási eredmény, és $0 \leq \varepsilon < 1$, akkor azt mondjuk, hogy a p pivotvalószínűség vektor teljesíti a rendezési feltételt ε -ra, ha $\forall i, j, h$ különböző jelöltre, ha $S_i(\mu) < S_j(\mu)$, akkor $p_{ih} \leq \varepsilon \cdot p_{jh}$.

Egy μ választási eredmény akkor és csak akkor egy **szavazói egyensúly**, ha $\forall \varepsilon$ pozitív számra létezik egy p pivotvalószínűség vektor, mely alátámasztja μ -t, és teljesíti a rendezési feltételt ε -ra.

Most már készen állunk megvizsgálni, hogy adott szavazókra, a szavazórendszer megváltoztatása hogyan befolyásolja az eredmények egyensúlyi előrejelzését. Vizsgáljuk meg a következő példát:

Szavazói típus	Haszonvektor	Arány a társadalomban
A	$u^A = (10, 9, 0)$	$f(u^A) = 0,3$
B	$u^B = (9, 10, 0)$	$f(u^B) = 0,3$
C	$u^C = (0, 0, 10)$	$f(u^C) = 0,4$

Látható, hogy az A és B típusok között jelentős hasonlóság van, az 1 és 2 jelöltekkel szimpatizálnak, viszont a kedvenc eltér közöttük.

A pluralitás rendszerében 3 szavazói egyensúly létezik. Az egyikben az A és B típusú szavazók összefognak az 1-es jelölt mögött $(1, 0, 0)$ a szavazatuk, és így az 1-es jelölt megnyeri a választást a 3-as jelölttel szemben. Ezt a következőképpen jelöljük:

$$\mu((1, 0, 0), u^A) = 0,3; \quad \mu((1, 0, 0), u^B) = 0,3; \quad \mu((0, 0, 1), u^C) = 0,4$$

Ezek alapján $S_1(\mu) = 0,6$, $S_2(\mu) = 0$, $S_3(\mu) = 0,4$, és $W(\mu) = \{1\}$. Ezt az egyensúlyt a $(p_{12}, p_{13}, p_{23}) = (1, 0, 0)$ pivotvalószínűség vektor támasztja alá. Tehát, ha lenne egy közeli verseny az első helyért, akkor a választók ezt az 1-es és 3-as jelölt között várják el. A második egyensúlyban az A, B típusú szavazók a 2-es jelölt mögött fognak össze. Ez az előző esethez analóg módon levezethető, nem részletezzük.

A harmadik egyensúlyi helyzetben az A, B típusú szavazók nem működnek együtt, és a 3-as jelölt az egyetlen várható győztes:

$$\mu((1, 0, 0), u^A) = 0,3; \quad \mu((0, 1, 0), u^B) = 0,3; \quad \mu((0, 0, 1), u^C) = 0,4$$

és $S_1(\mu) = 0,3; \quad S_2(\mu) = 0,3; \quad S_3(\mu) = 0,4; \quad \text{illetve} \quad W(\mu) = \{3\}$

Ezt az egyensúlyt bármely pivotvalószínűség vektor alátámasztja, melyre $p_{12} = 0$; $9/19 \leq p_{13} \leq 10/19$; $p_{23} = 1 - p_{13}$ teljesül. Mivel itt az 1-es és 2-es jelölteknek egyenlő esélyei vannak a 3-as jelölt ellen, az A és B típusú szavazók nem koordinálnak, így a 3-as a várható győztes.

A beleegyezési szavazórendszerben 3 egyensúlyi helyzet van, egyikben sem várható győztes a 3-as jelölt. Az egyik szavazói egyensúlyban az 1-es jelölt a várható győztes.

$$\begin{aligned} \mu((1,0,0), u^A) &= 0,3; & \mu((1,1,0), u^B) &= 0,3; & \mu((0,0,1), u^C) &= 0,4 \\ \text{és } S_1(\mu) &= 0,6; & S_2(\mu) &= 0,3; & S_3(\mu) &= 0,4; & \text{illetve } W(\mu) = \{1\} \end{aligned}$$

Ezt az egyensúlyt alátámasztja a $(p_{12}, p_{13}, p_{23}) = (0, 1, 0)$ pivotvalószínűség vektor. A szavazók közeli versenyt az 1-es és 3-as jelöltek között várnak, így a B típusú szavazók duplán szavaznak 1-re, és 2-re. A második egyensúlyi helyzetben a várható győztes a 2-es jelölt, ehhez analóg módon leírható, nem részletezzük.

A harmadik egyensúlyi helyzetet keressük úgy, hogy az 1-es és 2-es jelölteknek egyenlő esélye van közeli versenyben lenni a 3-as jelölttel. Tehát, t.f.h. az alátámasztó pivotvalószínűség vektorban $p_{13} = p_{23} = \beta$, $p_{12} = 1 - 2\beta$, ahol $0 \leq \beta \leq 1/2$. Olyan β -t kell találnunk, melyben az A, B típusú szavazók indifferensek a dupla vagy egyszeri szavazás között. Ez $\beta = 1/11$ -re teljesül, így az egyensúlyi helyzet a következő:

$$\begin{aligned} \mu((1,0,0), u^A) &= 0,2; & \mu((1,1,0), u^A) &= 0,1; & \mu((0,1,0), u^B) &= 0,2; \\ & \mu((1,1,0), u^B) &= 0,1; & \mu((0,0,1), u^C) &= 0,4 \\ \text{és } S_1(\mu) &= S_2(\mu) = S_3(\mu) = 0,4; & \text{illetve } W(\mu) &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

5. fejezet

A szavazórendszerek ellentmondásai

5.1. A Condorcet paradoxon

A fejezet a [6], [7], [8], [9] források alapján készült.

Említettük korábban a Condorcet paradoxont, ezt most itt részletezzük.

5.1.1. Példa. Vegyük a paradoxon legegyszerűbb formáját. 3 szavazónk van, és 3 jelöltünk, a preferenciátáblázat a következő:

1	1	1
A	B	C
B	C	A
C	A	B

Vizsgáljuk meg páronként a jelölteket, használjuk a Copeland rendszeréből ismert összehasonlító mátrixot:

	A	B	C
A	-	2	1
B	1	-	2
C	2	1	-

Látszólagosan nehéz lenne összesített preferenciasorrendet készíteni, mivel $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$ mind egyaránt teljesülnek a szavazóink többsége szerint. Ezt a helyzetet nevezzük Condorcet ciklusnak. Ezek a ciklusok egyébként tetszőlegesen hosszúak is lehetnek.

Ez rávezet a szavazórendszerek első fontos ellentmondására, miszerint az összesített preferenciák sokszor nem tranzitívak. Az eddig vizsgált rendszerek mind képesek összesített preferenciasorrendet készíteni, de ahogy a kritériumokkal megvizsgáltuk, ez mindig magával hordott valamilyen ellentmondást.

5.2. Az Arrow tétel

Az eddigi fejezetekben vizsgáltunk pár kritériumot, és hogy melyik választási rendszerek teljesítik, vagy nem teljesítik ezeket. Eddig esetenként haladtunk, azonban ennél általánosabb eredményeket is be tudunk mutatni. A szavazási rendszerek elméletében talán a legnagyobb, de biztosan a legismertebb eredmény Kenneth J. Arrow 1962-es lehetetlenségi tétele. Ebben a fejezetben szemléltetjük ezt, és pár ismertebb következményét.

Először definiáljunk néhány kritériumot. Ebből párat már korábban definiáltunk, de a könnyebb olvashatóság szempontjából itt is definiáljuk őket. Három kritériummal alapvetőbb megkötések fogunk tenni a szavazórendszerekre, eddig ezeket minden bemutatott rendszer teljesítette. Itt azért szükséges, hogy általános eredményeket tudjunk megfogalmazni. A könnyebb olvashatóság kedvéért definiáljuk az **értelmes szavazórendszert**, ami magába foglalja ezeket az alapvető megkötéseket.

5.2.1. Definíció. A **racionalitás** kritériuma szerint a szavazórendszer kimenete egy teljes preferenciasorrend.

5.2.2. Definíció. A **determinizmus** kritériuma szerint a szavazórendszer kimenete csak a szavazók preferenciáitól függ, semmilyen más tényezőtől.

5.2.3. Definíció. Az **imparcialitás** kritériuma szerint a szavazási rendszer minden jelöltet egyenlően kezel, vagyis a jelöltek permutálása nem befolyásolja az eredményt.

5.2.4. Definíció. Az **értelmes szavazórendszer** egy olyan szavazórendszer, amely teljesíti a **racionalitás**, **determinizmus**, **imparcialitás** kritériumokat.

Eddig minden vizsgált rendszer értelmes szavazórendszer volt. Most definiáljuk a kritériumokat, melyek szükségesek ezen felül Arrow tételének kimondásához.

5.2.5. Definíció. A **konszenzus** kritériuma szerint, ha minden v_i szavazó szerint $A \succ_i B$, akkor az összesített preferenciasorrendben $A \prec B$ -nek teljesülnie kell.

5.2.6. Definíció. Az **IIA** kritérium (independence of irrelevant alternatives) szerint A és B relatív rangsorolása az összesített preferenciasorrendben független egy $C \neq A, \neq B$ jelölt jelenlététől a választásban, azaz A és B relatív eredménye ugyanaz, ha C részt vesz a választásban, és ha nem.

5.2.7. Definíció. A **diktátormentesség** kritériuma szerint ha egy v_i szavazó preferenciája szerint $A \prec_i B$, azonban minden másik szavazó szerint $B \prec A$, akkor az összesített preferenciasorrendben $B \prec A$ -nak kell teljesülnie.

Készen állunk az Arrow-tétel kimondására. Az imparcialitás kritériuma egyébként nem szükséges, azonban a bizonyítást könnyebbé teszi, illetve egy "tökéletes" szavazási rendszernek nyilván teljesítenie kell.

5.2.8. Tétel. *Nem létezik olyan ordinális értelmes szavazórendszer, amely 3, vagy annál több jelölt mellett egyaránt teljesítené a **konszenzus**, **diktátormentesség**, **IIA** kritériumokat.*

Bizonyítás. Először lássuk be a következő lemmát:

5.2.1. Állítás. Legyen B egy tetszőleges jelölt. Bármilyen szavazásánál, ahol minden szavazó vagy a preferenciasorrendje elejére, vagy végére helyezi (pl. a szavazók felének B az első preferenciája, a másik felének az utolsó) akkor az összesített preferenciasorrendben B vagy az első, vagy utolsó helyre kell, hogy kerüljön.

Ilyen esetben B -t **polarizáló jelöltnak** nevezzük.

Bizonyítás. Indirekten t.f.h. B egy polarizáló jelölt, és az összesített preferenciasorrendben $A \succ B$ és $B \succ C$ teljesül. A preferenciák tranzitivitása miatt a feltevésből következik, hogy $A \succ C$. Az IIA kritérium szerint ez akkor is teljesülne, ha minden szavazó C -t A fölé sorolná, mivel ez az AB és CB sorrendjeit nem befolyásolná. Azonban a konszenzus kritériuma szerint $C \succ A$ -nak teljesülnie kell, így ellentmondásra jutottunk. $\square$

Most bemutatjuk, hogy létezik egy $v^* \in V$ szavazó, akinek a szavazata döntő jelleggel befolyásolja az összesített preferenciasorrendet. T.f.h. minden szavazó B -t a preferenciasorrendje végére sorolta. A konszenzus kritériuma szerint B az összesített preferenciasorrend végén van. Most a szavazók v_1 -től v_N -ig áttesszük B -t a preferenciasorrendjük végéről az elejére, a többi jelöltet az eredeti helyén tartva. Legyen v_r az a szavazó, akinél miután B -t átsorolja az első helyre, B az összesített preferenciasorrendben átkerül az utolsó helyről az elsőre. A konszenzus kritérium következményeként, v_N átsorolásánál B biztosan az első helyen lesz, ezért biztosan létezik ilyen szavazó. Legyen I az a preferenciaprofil, amiben még v_r az utolsó helyre sorolta B -t.

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	K	A	...	C
D	E	...	...	...	...		...
...	...			...			
T	F		S	B	B	B	B

és II pedig az a preferenciaprofil, amelyen már az első helyre. Így II -ben B már az összesített preferenciasorrend első helyén lesz.

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	B	A	...	C
D	E	...	...	K	...		...
...	...			...			
T	F		S		B	B	B

Most bebizonyítjuk, hogy v_r egy diktátor bármely AC jelöltpárra, ahol $B \neq A$ és $B \neq C$. Legyen III az a preferenciaprofil, mely azonos II -vel, kivéve azt, hogy v_r A -t B -főlé sorolta, tehát $A \succ_{v_r} B \succ_{v_r} C$ és minden $v_i \in V \setminus \{v_r\}$ tetszőlegesen átrendezi A és C relatív sorrendjét, úgy hogy B polarizáló jelölt marad. Az IIA kritérium szerint III -ban az összesített preferenciasorrendben $A \succ B$ teljesülne (mivel az összes AB preferencia ugyanaz, mint I -ben), és $B \succ C$ is teljesülne (mivel az összes BC preferencia ugyanaz, mint II -ben). A preferenciák tranzitivitása miatt az összesített preferenciasorrendben $A \succ C$ is teljesül. Az IIA kritérium szerint az összesített preferenciasorrendben AC sorrendje egyeznie kell v_r preferenciájával, ha $A \succ_{v_r} C$.

Végezetül belátjuk, hogy v_r egy diktátor minden AB párra. Vegyünk egy $C \neq A, C \neq B$ jelöltet, vegyük az előző konstrukciót, és tegye minden szavazó C -t az utolsó preferenciájának. Az előzőleg belátottak szerint létezik egy v^c szavazó, amely minden $D, E \in M, D, E \neq C$ jelöltpárra diktátor, például AB-re. De mivel a v^* szavazó befolyásolni tudja AB pozícióját, $v^c = v^*$ $\square$

A racionalitás, determinizmus, imparcialitás kritériumok nagyon alapvetőek, igazából ha ezeket nem teljesíti egy szavazórendszer, nem is lehet szavazórendszerként beszélni róla. A konszenzus, diktátóramentesség kritériumai ennél egy fokkal erősebbek, de egy "ideális" szavazórendszernek ezeket teljesítenie kéne. Az IIA kritériuma egy erős megkötés, egy ideális szavazórendszernek ezt teljesítenie kell, azonban Arrow tétele szerint ilyen ordinális rendszer nem létezik, ez a tétel fő eredménye.

Fontos kiemelni, hogy az Arrow tétel csak ordinális szavazórendszerekre érvényes. Korábban beláttuk már pár kardinális rendszeren, hogy kielégítik az IIA kritériumot.

5.3. A Gibbard-Satterthwaite tétel

Korábban már foglalkoztunk a taktikai szavazással, és különböző érdekérvényesítő módszerrel pár szavazási rendszerrel. Ahhoz, hogy általánosabban tudjunk beszélni a taktikai szavazásról, formális kritériumhoz kell kötnünk.

5.3.1. Definíció. A **taktikamentesség** kritériuma szerint az egyetlen domináns taktika az őszinte preferencia általi szavazás.

A kritérium lényege az, hogy sok esetben a szavazók annak érdekében, hogy az őszinte preferenciájuk jobban érvényesüljön az eredményben, őszintétlen preferencia leadására vannak ösztönözve. Nyilván ez a szavazók elégedetlenségéhez vezethet, ezért szeretnénk egy olyan szavazási rendszert, ahol minden szavazó számára a legoptimálisabb taktika az őszinte preferenciájuk benyújtása. Ilyen rendszer azonban nem létezik, Gibbard tétele ezt a tényt támasztja alá.

5.3.2. Tétel. *Nem létezik olyan értelmes szavazási rendszer, amely 3, vagy annál több jelölt mellett egyaránt teljesítené a **konszenzus**, **diktátóramentesség**, **taktikamentesség** kritériumokat.*

Fontos kiemelni, hogy ez a tétel Arrow tételével szemben nem csupán az ordinális szavazási rendszerekre érvényes, hanem pl. a kardinális rendszerekre is. Ezt a tételt most nem látjuk be, hanem a hozzá hasonló Gibbard-Satterthwaite tételt, amely csak ordinális rendszerekre vonatkozik.

5.3.3. Tétel. *Nem létezik olyan ordinális értelmes szavazórendszer, amely 3, vagy annál több jelölt mellett egyaránt teljesítené a **konszenzus**, **diktátóramentesség**, **taktikamentesség** kritériumokat.*

Bizonyítás. T.f.h. adott egy értelmes szavazórendszer, ami teljesíti a **konszenzus** és **taktikamentesség** kritériumokat. Bebizonyítjuk, hogy ebben a rendszerben létezik diktátor. Először lássuk be a következő lemmát:

5.3.1. Állítás. T.f.h. egy adott preferenciaprofil az A jelöltet határozza meg nyertesként az adott rendszerünkben. Módosítsuk úgy a profilt, hogy egy másik X jelöltet a v_i szavazó preferenciasorrendjében előrébb hozunk. Ekkor a rendszer vagy A-t, vagy X-et fogja győztesként meghatározni.

Bizonyítás. T.f.h. amikor megemeltük X-et, egy harmadik C jelölt lesz a győztes. Ekkor, ha v_i szerint $A \succ_i C$, akkor nem tenné meg az előbb leírt változtatást, azonban, ha $C \succ_i A$, akkor őszintétlenül már korábban megtette volna a változtatást. $\square$

Kezdjük egy tetszőleges preferenciaprofillal, amelyben minden szavazó az utolsó helyére helyezte B jelöltet.

Most a szavazók v_1 -től v_N -ig áteszik B-t a preferenciasorrendjük végéről az elejére, a többi jelöltet az eredeti helyén tartva. Legyen v_r az a szavazó, akinél miután B-t átsorolja az első helyre, B az összesített preferenciasorrendben átkerül az utolsó helyről az elsőre. A konszenzus kritérium következményeként, v_N átsorolásánál B biztosan az első helyen lesz, ezért biztosan létezik ilyen szavazó. Legyen I az a preferenciaprofil, amiben még v_r az utolsó helyre sorolta B-t. Ezek alapján kimondhatjuk a következőt:

B a győztes, ha az első r szavazó B-t teszi első preferenciájának (*)

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	K	A	...	C
D	E	...	...	...	...		...
...	...			...			
T	F		S	B	B	B	B

5.1. táblázat. Profil I

II pedig az a preferenciaprofil, amelyben v_r már az első helyre sorolja B-t. Így II-ben B már az összesített preferenciasorrend első helyén lesz.

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	B	A	...	C
D	E	...	...	K	...		...
...	...			...			
T	F		S		B	B	B

5.2. táblázat. Profil II

Vegyük II-t. B akkor is a győztes lesz, ha bármely $v_i \in V$, $i \geq r+1$ szavazó másik preferenciasorrendet nyújt be, különben valamely v_i őszintétlen preferenciát nyújtana be. B ugyanúgy a győztes maradna, ha bármely v_i , $i \leq r$ szavazó másik, B-t az első helyen tartó preferenciasorrendet nyújtana be, különben v_i őszintétlen preferenciát nyújtana be.

Vizsgáljuk meg I-t. B még ugyanúgy nem lenne a nyertes, ha tetszőleges v_i , $i \leq r-1$ más preferenciasorrendet adna be, különben v_i pont ezt tenné. Ugyanígy nem lenne kiválasztva, ha bármely v_i , $i \geq r$ más preferenciát nyújtana be, ahol B utolsó helyen van, különben v_i őszintétlen sorrendet mutatna be. Ezek alapján kimondhatjuk a következőt:

B nem győztes, ha az utolsó N-r szavazó B-t teszi utolsó preferenciájának ()**

Most megmutatjuk, hogy v_r egy diktátor. Legyen III egy következő formájú profil:

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
?	?	?	?	K	?	...	?
?	?	...	...	...	...		...
...	...						
B	B	B	B	B	B	B	B

5.3. táblázat. Profil III

Először, emeljük K-t első helyre minden szavazónál. A konszenzus miatt K a győztes. Ezután emeljük B-t az első preferenciára $v_1, \dots, v_{r-1}$ szavazóknál egyenként, B-t az utolsó preferencián tartva a maradék szavazóknál. Legyen ez a IV profil.

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	K	K	K	K
K	K	K	K	?	?	?	?
...	...	...	...	...	...		...
?	?	?	?	B	B	B	B

5.4. táblázat. Profil IV

(**) szerint B nem a győztes, tehát a lemmánk szerint még mindig K a nyertes. Ezután emeljük B-t a második preferenciára a v_r szavazónál. K még mindig a nyertes, különben v_r nem adná le ezt a változtatást. Legyen ez a V profilunk.

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	K	K	K	K
K	K	K	K	B	?	?	?
...	...	...	...	...	...		...
?	?	?	?		B	B	B

5.5. táblázat. Profil V

Most térjünk vissza III-hoz, és t.f.h. $G \neq K$ a győztes. Emeljük B-t az első preferenciára a $v_1, \dots, v_{r-1}$ szavazóknál, egyenként. (**) szerint nem B a győztes, ezáltal a Lemma következményeként G még mindig a győztes. Most emeljük B-t v_r második preferenciájára:

T.f.h. B nem a győztes. A Lemma szerint G még mindig a győztes. (*) szerint B akkor lesz a győztes, ha B a v_r szavazó első preferenciája lesz. Mivel v_r szerint $B \succ_{v_r} G$, őszintétlenül kell lejelenteni a preferenciasorrendjét, ez pedig ellentmond a taktikamentességnek. Tehát VI szerint

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	K	?	...	?
?	?	...	...	...	...		...
...	...						
?	?				B	B	B

5.6. táblázat. Profil VI

B lesz a győztes. Most emeljük K-t a második preferenciára a $v_1, \dots, v_{r-1}$ szavazókra, és az első helyre $v_{r+1}, \dots, v_n$ szavazóknál. A B jelölt még mindig a nyertes, különben a szavazók elülső csoportja nem változtatta volna meg preferenciasorrendjüket, vagy a második csoportjuk őszintén számolt volna be. Viszont a VI profil ugyanaz, mint a V profil, ahol K volt a győztes. Ez egy ellentmondás, tehát $G \neq K$ nem lehet a nyertes III-ban.

Most tekintsünk egy tetszőleges profilt, amiben v_r első preferenciája egy $K \neq B$ jelölt. Először módosítsuk úgy a profilt, hogy B legyen minden szavazó utolsó preferenciája. Az előzőekben beláttuk alapján K a nyertes. Most tegyük vissza B-t az eredeti pozíciójába minden szavazónál, egyenként. A lemma alapján, vagy K vagy B lesz a nyertes. Vizsgáljuk meg a következő, VII preferenciaprofilt, ahol $C \neq B$ és $C \neq K$:

v_1	v_2	...	v_{r-1}	v_r	v_{r+1}	...	v_n
B	B	B	B	B	A	A	A
?	?	...	...	...	...		...
...	...						
C	C		C	C	C	C	C

5.7. táblázat. Profil VII

Ezután C-t emeljük a preferenciasorrendek elejére v_1 -től felfelé. Ekkor lesz egy v_m szavazónk, akinek átsorolása után C lesz a nyertes. Az előzőekhez hasonlóan v_m szavazónak az első preferenciája VII-ben a győztes. Viszont (*) szerint azt is tudjuk, hogy VII-ben B a győztes. Ezek szerint $m \leq r$. Viszont, egy ehhez szimmetrikus érvelés (ami m-mel kezd, és utána r-t megtalálja), szerint $r \leq m$, tehát $m = r$, és r így döntő C és B esetében is. Tehát, tudván, hogy K vagy B a győztes a kezdeti tetszőleges profilunkban, most megmutattuk, hogy vagy K vagy C a győztes. Mivel $C \neq B$, a K jelölt a győztes. Végezetül, ha $K = B$, egy ehhez hasonló érvelés megmutatja, hogy v_r döntő A és C esetében, és B a győztes. Tehát v_r egy diktátor. $\square$

Irodalom

- [1] D. Lippman, Math in Society,
<https://www.opentextbookstore.com/mathinsociety/2.6/MathinSociety.pdf>
- [2] S. A. Vasiljev, Cardinal Voting: the Way to Escape the Social Choice Impossibility,
<https://memotef.web.uniroma1.it/sites/default/files/Mathematics%20for%20Voting%20Systems%20-%20Lecture%20Notes%202021.pdf>
- [3] Arsen Palestini, Principles of Mathematics for Voting Systems,
<https://memotef.web.uniroma1.it/sites/default/files/Mathematics%20for%20Voting%20Systems%20-%20Lecture%20Notes%202021.pdf>
- [4] R. Moser, E. Scheiner, Mixed electoral systems and electoral system effects: controlled comparison and cross-national analysis
https://scheiner.faculty.ucdavis.edu/wp-content/uploads/sites/755/2022/08/moser_and_scheiner_2004_es.pdf
- [5] R. Myerson, R. Weber, A Theory Of Voting Equilibria
<https://www.jstor.org/stable/pdf/2938959.pdf>
- [6] J. Gill, J. Gauthier Why Does Voting Get So Complicated? A Review of Theories for Analyzing Democratic Participation
<https://ir.library.louisville.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1040&context=faculty>
- [7] T. Tao, Arrow's Theorem
[https://www3.nd.edu/~pweithma/Arrow%27s%20Theorem/Tao/Tao%20\(on%20Arrow\).pdf](https://www3.nd.edu/~pweithma/Arrow%27s%20Theorem/Tao/Tao%20(on%20Arrow).pdf)
- [8] J. Geanakoplos, Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem.
<http://dido.econ.yale.edu/~gean/art/p1116.pdf>
- [9] J-P. Benoit, The Gibbard–Satterthwaite theorem: a simple proof
<https://people.cs.pitt.edu/~kirk/CS1699Fall2014/gibbard-sat.pdf>